



ESCOLA NAVAL

ta sainte & bief faire



Moisés Mueletunda Aleixo Caquarta

Estudo comparativo de alguns Métodos de cálculo
de trajetórias acústicas submarinas

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia
Naval Ramo de Armas e Eletrónica

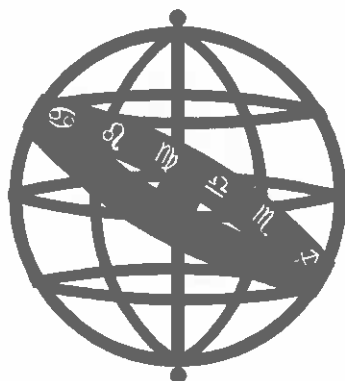


Alfeite
2023



ESCOLA NAVAL

ta sante & bi-faire



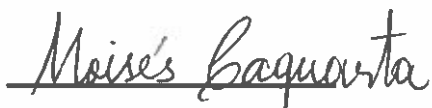
Moisés Mueletunda Aleixo Caquarta

*Estudo comparativo de alguns Métodos de cálculo de
trajetórias acústicas submarinas*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo
de Armas e Eletrónica

Os Orientadores:: Mário Costa Gatta e Miguel Bento Moreira

O Aluno Mestrando,



Aleixo Caquarta

Os Orientadores,



Mário Gatta



Miguel Moreira

'Ukwene nda wa kwimbila ombunje momo wa ku mwilã lokuyakela'

Tradução: «Quem te passa a bola é porque sabe que você pode agarrá-la».

Provérbio em Umbundu-Língua bantu falada em Angola

Dedico este trabalho aos meus 20 irmãos, eles são o motivo da minha luta diária.

Agradecimentos

Expresso minha mais sincera gratidão aos meus ilustres orientadores, Professor Doutor Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta e Professor Doutor Miguel Bento Moreira, pelo empenho, disponibilidade e pelo acompanhamento que prestaram durante a elaboração da presente dissertação. Os meus agradecimentos estendem-se ao Comandante Lopes da Costa, pela sua disponibilidade e auxílio em assuntos relativos à área de oceanografia discutida nesta dissertação.

Quero também agradecer de modo muito especial à minha família: ao meu Pai, Jorge Aleixo Caquarta, e à minha Mãe, Rosália Vissíla, pelo apoio incondicional que recebi ao longo da minha vida académica.

Agradeço à Marinha de Guerra Angolana, no âmbito do Acordo de Cooperação Bilateral na Defesa, Formação Técnica, Científica e Militar entre Portugal e Angola, por me darem a oportunidade de frequentar esta formação. Agradeço também à Escola Naval por me acolher durante estes cinco anos de formação.

Quero igualmente expressar a minha gratidão à Academia Militar por me receber aquando da minha vinda a Portugal, particularmente ao Coronel Bruno Brito e à Professora Isabel Caetano.

Aos meus amigos e camaradas, o meu agradecimento, pois o apoio de todos foi fundamental para o fortalecimento do meu espírito e da minha vontade de continuar nesta empreitada. A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram e contribuem para a minha vida académica e para a minha carreira militar, o meu muito obrigado.

Resumo

As técnicas de cálculos de trajetórias de raios acústicos têm sido aperfeiçoadas, com objetivo de aproximar-se cada vez mais de resultados que satisfaçam os interesses para os quais são aplicadas. Na acústica submarina, o domínio destas técnicas é de suma importância, por contribuírem para a descoberta, estudo e preservação dos recursos existentes no oceano. No âmbito da Defesa, essas técnicas podem ser um elemento preponderante para a guerra antissubmarina. A presente dissertação centrou-se na relação e síntese de alguns métodos de cálculo de trajetórias acústicas submarinas e na sua aplicação perto de fontes hidrotermais por possuírem um grande gradiente de temperatura e por tanto relativamente grandes variações de velocidade do som em pequenas distâncias, permitindo uma melhor visualização do encurvamento dos raios acústicos.

Com base em estudos anteriores, formulamos e relacionamos modelos de equações bidimensionais e tridimensionais utilizando dois métodos distintos: o método do tempo mínimo de Fermat e o método das linhas geodésicas. Conforme era expectável, observou-se que, para velocidades do fluido estacionários, ambos os métodos conduzem às mesmas equações diferenciais, uma correspondência que teoricamente se antevia

Para validar as equações formuladas, foram realizadas simulações computacionais utilizando as linguagens de programação MATLAB e Python. Considerando diferentes perfis de velocidade, emitimos raios a partir de certas posições e ângulos de emissão próximos a uma região com características idênticas a uma fonte hidrotermal, permitindo assim demonstrar a confiabilidade dos modelos formulados na prática. Após provar a confiabilidade das equações formuladas, introduziu-se um elemento essencial que evidencia a vantagem de um método em relação ao outro: a formulação de um modelo que considera a corrente do fluido. Usando o formalismo das linhas geodésicas, formulou-se o mesmo. Dado o movimento de fluidos que surgem nas chaminés das fontes hidrotermais, formulamos um modelo supondo um campo de velocidade do fluido $\vec{v}(v_x; v_y; v_z)$ atuando somente na direção v_z . Isso resultou em outras equações diferenciais que foram igualmente simuladas e cujos resultados foram igualmente discutidos.

Palavras-chave: Acústica , Geodésica, Raio, Tensor métrico acústico

Abstract

Acoustic ray trajectory calculation techniques have been refined with the aim of increasingly approximating results that meet the intended applications. In underwater acoustics, mastering these techniques is paramount, as they contribute to the discovery, study, and preservation of oceanic resources. Within the realm of Defense, these techniques can be a predominant element for anti-submarine warfare. This dissertation focused on the relationship and synthesis of various methods for calculating underwater acoustic trajectories and their application near hydrothermal sources due to their significant temperature gradient and, consequently, relatively large variations in sound speed over short distances, allowing for a clearer visualization of the bending of acoustic rays.

Building on prior research, we formulated and related two-dimensional and three-dimensional equation models using two distinct methods: Fermat's minimum time method and the geodesic lines method. As anticipated, it was observed that for stationary fluid velocities, both methods lead to the same differential equations, a correspondence that is theoretically foreseen.

To validate the formulated equations, computational simulations were conducted using the MATLAB and Python programming languages. Considering different velocity profiles, rays were emitted from specific positions and launch angles near a region with characteristics identical to a hydrothermal source, thereby demonstrating the reliability of the formulated models in practice. After establishing the reliability of the formulated equations, an essential element was introduced that highlights the advantage of one method over the other: the formulation of a model that considers fluid current. Using the formalism of geodesic lines, the same was formulated. Given the fluid movements that arise in the chimneys of hydrothermal sources, we formulated a model assuming a fluid velocity field $\vec{v}(v_x; v_y; v_z)$ acting only in the v_z direction. This resulted in other differential equations that were also simulated, and the results were subsequently discussed.

Keywords: Acoustics, Geodesic, Ray, Acoustic Metric Tensor

Índice

Epígrafe	iii
Dedicatória	v
Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
1 Introdução	1
Motivação	1
Propagação sonora	5
Estado da arte	7
2 Fundamentos Teóricos	9
2.1 Espaço Euclidiano, Base ortonormal, Produto escalar	10
2.1.1 Métrica Euclidiana	13
2.1.2 Notação de Einstein	15
2.1.3 Delta de Kronecker	16
2.1.4 Símbolo de Permutação	18
2.2 Espaço Tempo, Métrica de Minkowski	19
2.3 Operadores Diferenciais	21
2.3.1 $\vec{\nabla}$ Nabla - Operador Del	21
2.3.2 Gradiente	22
2.3.3 Divergência	23
2.3.4 Rotacional	23
2.3.5 Laplaciano	24
2.4 Tensores	25
2.4.1 Transformação de Tensores	27
2.4.2 Símbolos de Christoffel	28

2.4.3 Geodésicas	30
3 Métodos de cálculo de raios acústicos	35
3.1 Formalismo das geodésicas	36
3.1.1 Tensor métrico acústico	36
3.1.2 Cálculos dos coeficientes de Christoffel considerando fluido es-	
tacionário	38
3.1.3 Parametrização temporal	43
3.2 Formalismo do tempo mínimo de Fermat	45
3.3 Modelo analítico 3D	48
3.3.1 Dedução do Modelo analítico 2D	49
3.4 Simulações numéricas e discussão	50
3.4.1 1ª Aproximação do campo de velocidades do som da fonte	
hidrotermal	54
3.4.2 2ª Aproximação do campo de velocidades do som da fonte	
hidrotermal	65
4 Modelo generalizado de propagação	67
4.1 Cálculo dos coeficientes de Christoffel considerando a velocidade da	
corrente do fluido	69
4.2 Apresentação do modelo de propagação de raios acústicos em ambi-	
entes com velocidade de escoamentos não uniformes	77
4.3 Simulações numéricas e discussão	81
5 Conclusão	89
5.1 Conclusões gerais	89
5.2 Recomendações para trabalhos futuros	90
Bibliografia	91
Apêndices	93
A Desenvolvimento do cálculo dos coeficientes de Christoffel	93
B Desenvolvimento das equações pelo teorema do tempo mínimo de Fermat	115
C Traçado do raio acústico 2D perfil de Munk	119
D Traçado do raio acústico 3D fluido estacionário.	123
E Traçado do raio acústico Na presença de Correntes.	127

Anexos	133
I Desenvolvimento Do cálculo do Tensor Métrico acústico	133
II Cálculo das trajetórias 3D Pelo Tempo mínimo de Fermat	141
III Trajetória de raios acústico 2D, Modelo inicial de propagação.	149

Lista de Figuras

1.1	Fonte hidrotermal ^[1]	3
1.2	Expedição Oceano Azul, Açores ^[2]	3
1.3	Localização das Fontes Hidrotermais ^[3]	4
1.4	Representação da onda sonora ^[4]	5
1.5	Propagação do som do sonar inverno ^[5]	6
1.6	Propagação do som do sonar verão ^[6]	6
1.7	Propagação do som do sonar na presença de Termoclina ^[7]	7
2.1	Componentes e base de um vetor em Coordenadas cartesianas	11
2.2	Regra da mão direita	12
2.3	Símbolo de levi-Civita	18
2.4	Gradiente	22
2.5	Divergência	23
2.6	Rotacional	23
2.7	Componentes de um tensor de Stress num meio contínuo Figura retirada do website Wikimedia Commons ^[8]	25
2.8	Transporte paralelo ao longo de uma linha fechada numa esfera ^[9]	30
2.9	Transporte paralelo de V longo de uma linha parametrizada por um parâmetro λ ^[10]	32
3.1	Representação de um raio sonoro no plano 2D	45
3.2	Perfil de Munk para a velocidade do som	51
3.3	Propagação do raio acústico 2D com reflexões, Perfil de Munk-Ex1	52
3.4	Propagação do raio acústico 2D com reflexões, Perfil de Munk-Ex2	52
3.5	Primeira aproximação da superfície de nível do perfil de velocidade do som 3D.	55
3.6	Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s, corte no eixo $z=0$	56
3.7	Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s corte no eixo $y=0$	56

3.8 Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s corte	
no eixo $x=0$	57
3.9 Raios acusticos emitidos a 10m da fonte em diferentes ângulos $V_{max}=2300$	58
3.10 Raios acústicos emitidos a 10m da fonte em diferentes ângulos $V_{max}=2000m/s$	59
3.11 Raios acústicos emitidos de diferenntes posições para mesma direção, $V_{max}=2000m/s$.	60
3.12 Raios de diferenntes posições para mesma direção $v_{max}=2000m/s^{11}$	61
3.13 Raios emitidos de diferentes poisições com afastamento de 1m em relação ao eixo Y	62
3.14 Raios acústico emitidos de diferentes poisições $V_{max}=2100m/s$, corte $x=0$ e $y=0$, vista em perspetiva	63
3.15 Raios acusticos emitidos de várias posições na base a acima desta, $V_{max}=2200m/s$	64
3.16 Segunda aproximação ao campo hidrotermal	65
3.17 Raios acústicos emitidos de várias posições e ângulos, numa segunda aproximação ao campo hidrotermal	66
3.18 Campo de velocidade do som, segunda aproximação ao campo hidrotermal	66
4.1 Modelo simplificado da dependência de velocidade ascensional do fluido da chaminé hidrotérmica com as coordenadas x e y	82
4.2 Traçado do raio acústico no plano $z=3$ com 3 emissores	83
4.3 Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido	84
4.4 Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido dois cortes em $z=0$ e $y=0$ em Perspetiva	85
4.5 Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido dois cortes em $z=0$ e $y=0$ plano XY	86
4.6 Raios acústicos Lançados na presença de correntes plano YZ	87
4.7 Raios acústicos emitidos na presença de correntes do fluido, vista no plano (Yz)	87
4.8 Raios acústicos emitidos na presença de correntes do fluido, corte em $x=0$ e $z=0$	88

Capítulo 1

Introdução

Motivação

No oceano, encontram-se numerosos recursos que desempenham um papel fundamental para subsistência alimentar e estão intrinsecamente ligados ao ciclo da cadeia alimentar, para além destes, existem também matérias-primas preciosas e minerais valiosos. Esses recursos naturais, como outros, têm uma relevância considerável para o desenvolvimento tecnológico, científico e económico, portanto, a localização, preservação e uma exploração adequada e sustentável desses recursos devem ser estabelecidos como objetivos prioritários para qualquer Estado-nação.

"O mar tem sido central na prosperidade, desenvolvimento e segurança dos povos, constituindo-se como fonte de recursos, meio de transporte e de troca de informação. Esta importância do mar como espaço vital tem acompanhado o processo de globalização do comércio internacional"(Melo [2022](#)).

Tendo em conta esses pressupostos, para que se possa estudar e usufruir os recursos existentes no mar é necessário que se façam estudos objetivos no oceano, é do interesse da Marinha investigar e estudar a localização destes recursos de modo a os proteger e assim contribuir para a salvaguarda do interesse nacional. A exploração oceânica é um campo que está em constante evolução e acompanhar a dinâmica desta evolução é do interesse de qualquer Marinha, este estudo visa essencialmente contribuir neste aspeto da ciência.

Vamos estudar os diferentes métodos de cálculos de trajetórias de raios acústicos, compará-los e indicar vantagens de um relativamente ao outros.

A onda sonora é como a energia do som se propaga por via de um meio material. Quando uma fonte sonora vibra, ela cria perturbações na pressão do meio em torno dela, gerando regiões de compressão e rarefação. Essas flutuações

de pressão propagam-se como ondas longitudinais, movendo-se através do meio e transferindo energia sonora. Como já é de conhecimento geral, uma onda sonora é caracterizada por suas propriedades, a frequência, amplitude e o comprimento de onda (distância entre dois pontos em fase da onda) e velocidade de propagação (depende do meio no qual a onda se propaga). No entanto, de modo a percebermos essa propagação, simplifica-se usando um conceito abstrato e ilustrativo, o de Raio acústico, este, é perpendicular em cada ponto à frente de onda, este, é usado para modelar a propagação sonora substituindo-a por linhas retas ou não, como veremos ao longo este trabalho, pois dependerá das condições físicas do meio a que estivermos a considerar.

Desde há muito tempo, muitos são os autores que estudaram a propagação da onda acústica. Por volta do século VI Ac, Pitágoras afirmou, tendo como base os seus estudos e experimentos, que qualquer som deve possuir características físicas, como a oscilações que resultam numa onda regular, para ser definido com tal (*MusiCiênciaArte* s.d.).

No século XVII, Christiaan Huygens propôs a ideia de traçar raios acústicos para representar a propagação do som, esta teoria foi posteriormente desenvolvida por outros cientistas como Isaac Newton e daí outras abordagens de tratar os raios acústicos para modelar a propagação do som foram surgindo.(Huygens 1986).

Um assunto que tem despertado muita atenção da comunidade científica e que é pouco explorada dadas as condições extremas a que estas se encontram são as fontes hidrotermais que poderá ser o nosso campo de ação durante este trabalho, ou seja, após estudar e sintetizar as equações que descrevem os métodos do traçado do raio acústico vamos aplicá-los emitindo raios acústicos perto de fontes hidrotermais, fontes essas que já foram estudadas pela 2TEN M Paiva na sua tese (Paiva 2018) e pelo 1º TEN EN-AEL Malta Ribeiro (Ribeiro 2021)

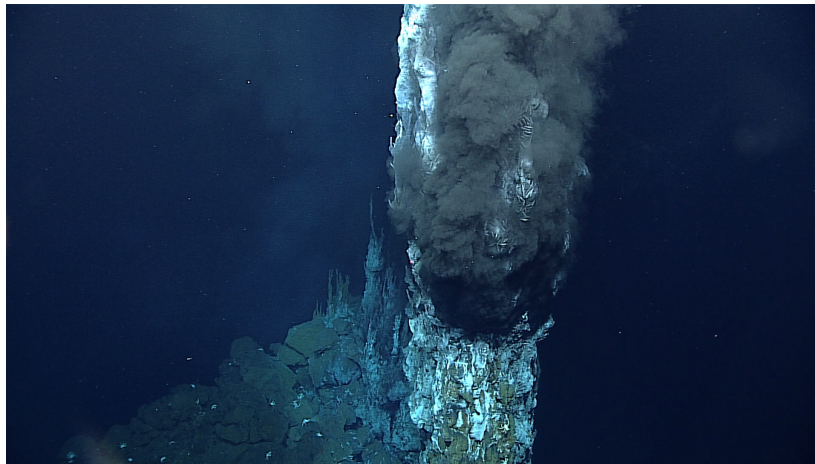


FIGURA 1.1: Fonte hidrotermal ¹²

"As fontes hidrotermais se localizam nas zonas de rifte na planície oceânica, onde se regista um vulcanismo ativo, resultado do afastamento das placas tectónicas oceânicas. São chaminés no fundo do mar, que resultam da circulação da água do mar pelas fendas e fissuras existentes na nova crosta terrestre. À medida que esta se forma nas zonas de rifte, escondem segredos importantes para a investigação científica e conhecimento de novas formas de vida. Segundo alguns especialistas, através do estudo das fontes hidrotermais deverá ser possível perceber o funcionamento das temperaturas no interior do planeta" (*Fontes hidrotermais nos Açores* 2023).

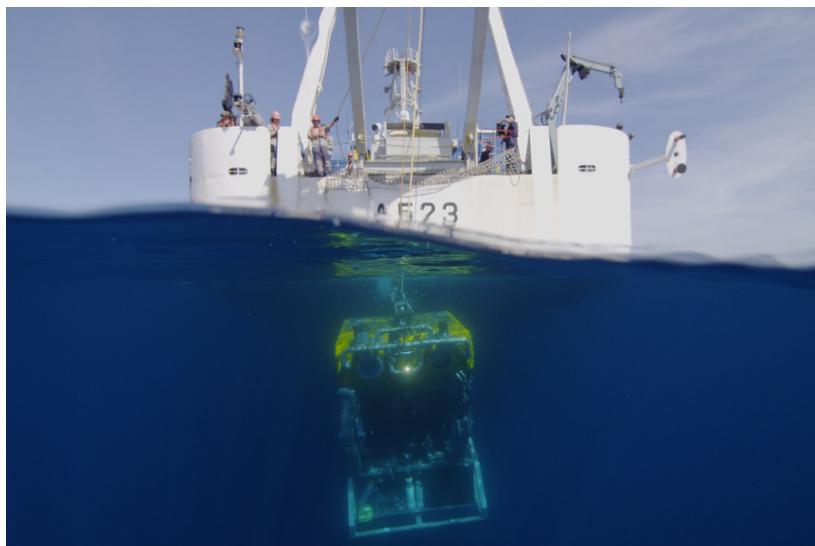


FIGURA 1.2: Expedição Oceano Azul, Açores ¹³

¹²website Wikimedia Commons: <https://oceanexplorer.noaa.gov/oceanos/explorations/ex1605/logs/may11/media/1605vent-800.jpg>

As fontes hidrotermais resultam da infiltração de água do mar através de fissuras na crosta oceânica, perto de centros de expansão ou zonas de subducção. A água fria do mar é aquecida pelo magma quente e reemerge para formar as fontes. À medida que a água do mar aquece, algumas substâncias químicas (tais como iões de magnésio e sulfato) são removidos, enquanto muitos outros (tais como enxofre, cobre, zinco, ouro, ferro e hélio) são transferidos para a água a partir do material da crosta quente. A água em ascensão pelas fontes pode atingir temperaturas superiores a 400 °C (750° F), no entanto, a alta pressão no oceano profundo perto de 1km de profundidade, que impede que a água ferva. À medida que os fluidos hidrotermais aquecidos e infundidos com metal sobem, misturam-se com água do mar com temperaturas da ordem de 2°C a 3°C. As rápidas reações químicas fazem com que o enxofre e outros minerais precipitem. Podem assim formar-se chaminés ou torres, bem como depósitos ricos em minerais no fundo, oceânico. As "Black smokers" são chaminés formadas a partir do depósito de sulfureto de ferro, que é preto. As "White smokers" são chaminés formadas por depósitos de bário, cálcio e sílica, que são brancos.

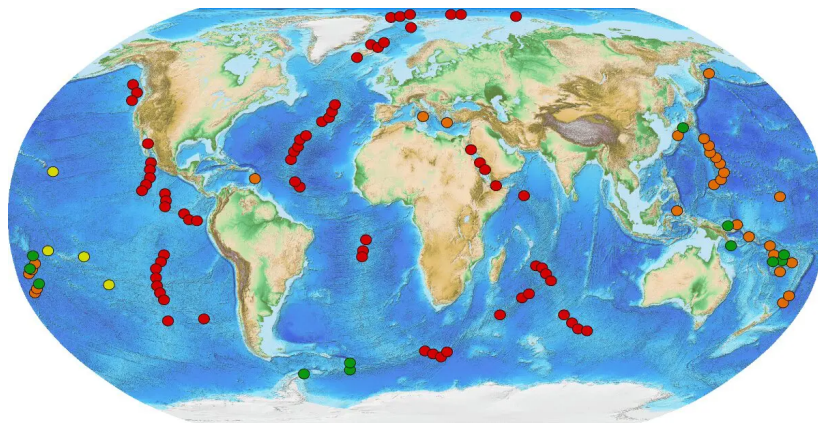


FIGURA 1.3: Localização das Fontes Hidrotermais¹⁴.

"A maioria dos campos hidrotermais localizam-se em zonas de fronteira de placas tectónicas divergentes, como a Dorsal Médio-Atlântica que separa o grupo ocidental do grupo central do Arquipélago dos Açores, precisamente onde se encontra o monte submarino Gigante. São zonas de elevada riqueza biológica e mineral, verdadeiros oásis escondidos no oceano profundo, que são normalmente encontrados a quilómetros de profundidade e a centenas de milhas das zonas costeiras".^{EXPEDIÇÃO}

¹³website: [Wikimedia Commons:https://oceanexplorer.noaa.gov/oceanos/explorations/ex1605/logs/may11/media/1605vent-800.jpg](https://oceanexplorer.noaa.gov/oceanos/explorations/ex1605/logs/may11/media/1605vent-800.jpg)

¹⁴website:<https://ingeoexpert.com/pt/blog/2021/03/29/fontes-hidrotermais-como-se-formam/>

Propagação sonora

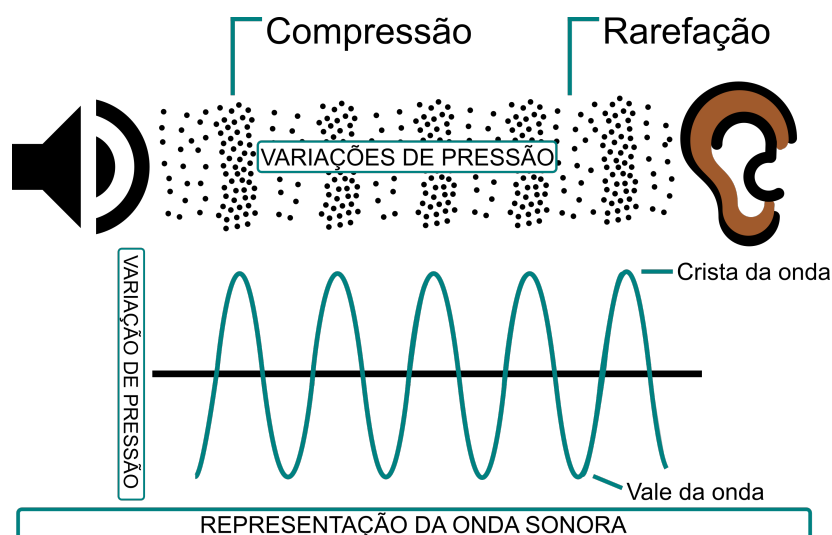


FIGURA 1.4: Representação da onda sonora¹⁵

A propagação sonora é um fenómeno complexo que envolve a transmissão de ondas acústicas por via de um meio material, seja ele sólido, líquido ou gasoso. A compreensão detalhada deste processo é fundamental em diversas aplicações, desde a acústica arquitetónica até a acústica submarina.

Modelo de propagação em Meios homogéneos, a propagação sonora ocorre de maneira uniforme em todas as direções. Este modelo é frequentemente utilizado para descrever a propagação sonora em ambientes fechados, como salas ou auditórios.

Modelo de Propagação em Meios Estratificados Em meios estratificados, diferentes camadas do meio possuem propriedades acústicas distintas. Este modelo é particularmente relevante para a propagação sonora em oceanos, onde a temperatura e salinidade variam com a profundidade.

Modelo de Propagação em Meios Porosos Este modelo descreve a propagação sonora em meios que possuem poros ou cavidades, como solos ou materiais de construção. A presença de poros influencia a absorção e dispersão das ondas sonoras.

¹⁵website: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Representação_da_Onda_Sonora.png

O estudo dos modelos de propagação dos raios acústicos é igualmente fundamental na guerra antissubmarina, pois permite compreender como o som se propaga na água e como ele pode ser usado para detecção, localização e rastreamento de submarinos inimigos ou até mesmo na identificação de certas zonas para que um submarino se proteja de modo a não ser identificado como podemos observar nas imagens

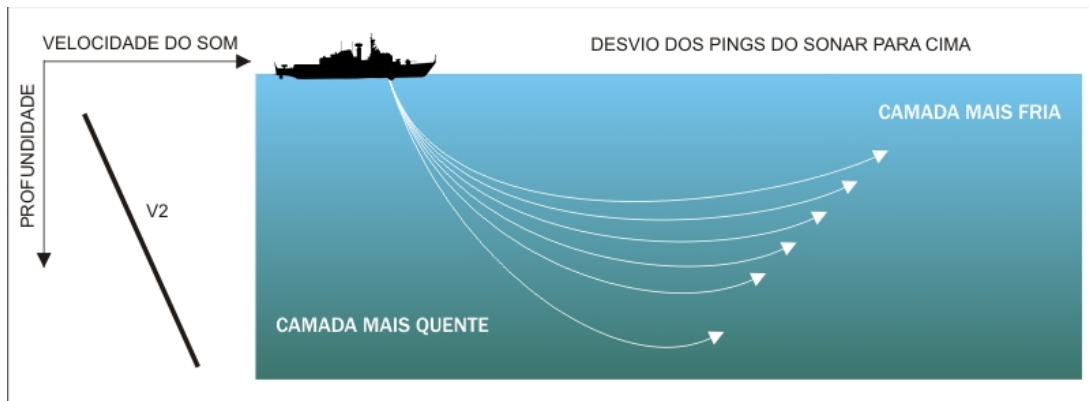


FIGURA 1.5: Propagação do som do sonar inverno¹⁶

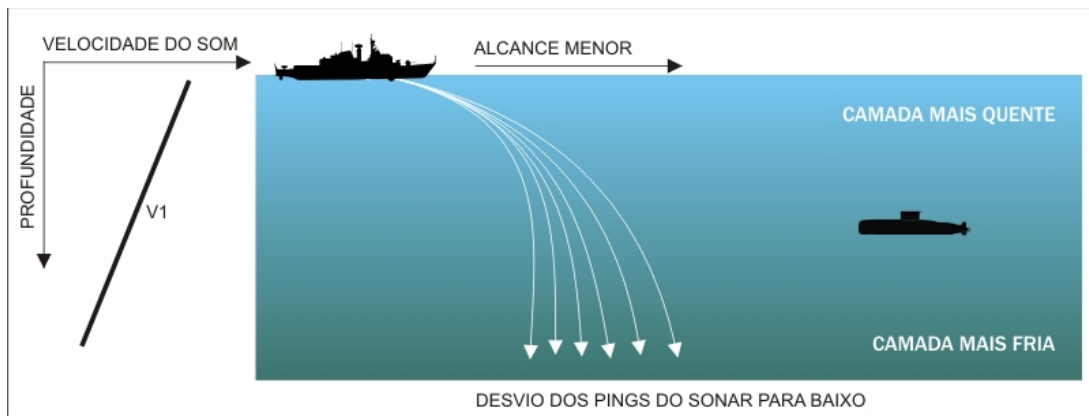


FIGURA 1.6: Propagação do som do sonar verão¹⁷

¹⁶website: <https://reitigre.wordpress.com/2012/12/02/sonar-e-seus-operadores/>

¹⁷website: <https://reitigre.wordpress.com/2012/12/02/sonar-e-seus-operadores/>

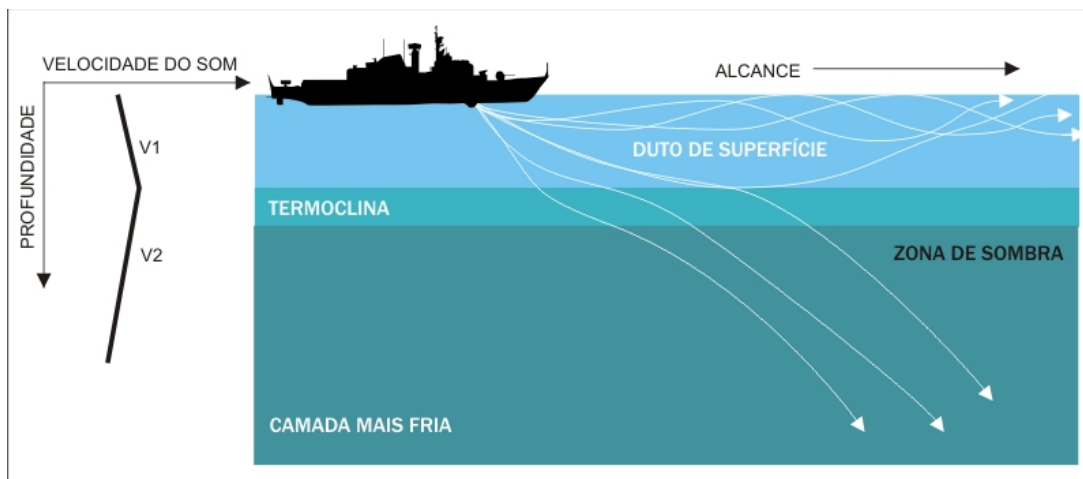


FIGURA 1.7: Propagação do som do sonar na presença de Termoclina¹⁸.

Estado da arte

A propagação de raios acústicos tem sido uma área de intensa pesquisa nas últimas décadas, com várias abordagens sendo exploradas para melhorar a precisão e a eficiência dos métodos existentes. Este trabalho surge na sequência do aprofundamento de estudos que já têm sido feitos nas áreas de acústica submarina e concretamente sobre raios acústicos, continuar-se-há os estudos começados pela Beatriz Paiva, na sua tese sobre Caracterização de fontes hidrotermais oceânicas recorrendo a técnicas acústicas (Paiva [2018](#)), pelo Alexandre Passeira da Rocha na sua tese sobre Métodos da Geometria Diferencial no Estudo da Acústica Submarina na Aproximação Geométrica (Rocha [2020](#)), pelo Mário Malta Ribeiro na sua tese sobre Técnicas de cálculo de trajetórias de raios acústicos e respetivas simulações (Ribeiro [2021](#)) e pelo João Pedro Duarte Gonçalves na sua tese de Desenvolvimento de algoritmo para previsão 2D e 3D de propagação submarina de raios acústicos com reflexões (Gonçalves [2022](#)), por isso, as teses mencionadas também vão servir de bases para a elaboração deste trabalho. Ainda sobre as técnicas de "raytracing" muitos são autores que se debruçaram sobre o assunto. Orlando Camargo Rodrigues na sua obra Fundamentos de Acústica Submarina (Rodriguez [2021](#)) formulou equações 2D pelo método das linhas geodésicas, Alexandre Passeira da Rocha e Amaral Raposo nas suas teses já citadas neste parágrafo formularam as equações 2D e 3D pelo

¹⁸website: <https://reitigre.wordpress.com/2012/12/02/sonar-e-seus-operadores/>

método do tempo mínimo de Fermat. Bergman formulou equações vetoriais com diferentes parametrizações usando o método das linhas geodésicas. entre outros autores que também debruçaram-se sobre o assunto como podemos ver em (Raposo 2019).

No entanto, por aquilo que se tem até antes da elaboração desta dissertação, tendo em conta as bibliografias consultadas, a formulação das equações diferenciais que definem o trajeto 2D e 3D de raios acústicos tanto pelo método das linhas geodésicas como pelo método do tempo mínimo de Fermat, as expressões analíticas e os trajetos derivado das respetivas simulações não evidenciavam ou provavam a teoria de que estes dois métodos levavam ao mesmo trajeto de raios acústicos. Os modelos desenvolvidos nas bibliografias mencionadas, também não tiveram em conta o efeito da corrente do fluido no trajeto do raio acústico.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Nas disciplinas ligadas a matemáticas, como a geometria diferencial e a álgebra linear, o cálculo tensorial fornece uma estrutura rigorosa para lidar com problemas em espaços multidimensionais (Lee e Lee [2012](#)). Ele possibilita a formulação precisa de relações e transformações entre as variáveis envolvidas na propagação acústica, permitindo a análise e modelagem precisa de sistemas acústicos complexos. Isso inclui a consideração de fatores como a direção de propagação, a influência de campos de velocidade e a atenuação do som em meios heterogêneos.

Para podermos entender os conceitos inerentes ao tema sobre as trajetórias de raios acústicos é necessário alguns requisitos matemáticos importantes, este capítulo visa dar ao leitor um conjunto de ferramentas matemáticas que servirão de base para a compreensão deste tema, o capítulo aborda conceitos básicos da geometria diferencial, do cálculo tensorial e vetorial e com estes podermos formular a equação das Linhas geodésicas que poderemos ver mais adiante. é importante realçar que o cálculo tensorial é uma ferramenta essencial para compreensão da relatividade da geral, pois a suas leis conferem sustentabilidade a nossa abordagem.

Na teoria da relatividade, os tensores desempenham um papel crucial na formulação das equações de campo de Einstein, que descrevem a gravidade como uma curvatura do espaço-tempo (Carroll [2019](#)). Estas equações são fundamentais para entender como os raios luminosos se propagam campos gravitacionais. Adicionalmente, o cálculo tensorial é empregado na descrição de campos eletromagnéticos, campos de fluxo de fluidos e leis que governam o movimento de corpos rígidos, elementos essenciais também em estudos de propagação acústica em materiais homogêneos e heterogêneos.

Ao compreender e aplicar o cálculo tensorial, é possível obter um entendimento mais profundo dos fenômenos físicos envolvidos na propagação acústica e realizar análises matemáticas rigorosas que contribuem para o desenvolvimento de

teorias, modelos e soluções nesta área. A capacidade de descrever com precisão a propagação dos raios acústicos usando linhas geodésicas é um exemplo de como o cálculo tensorial pode fornecer intuições valiosas e avanços no conhecimento da propagação acústica. Assim, neste capítulo nos dedicaremos em fazer esta abordagem generalizada desses conceitos essenciais.

2.1 Espaço Euclidiano, Base ortonormal, Produto escalar

O conceito de produto escalar desempenha um papel importante na álgebra de vetores e tensores. As propriedades do espaço vetorial dependem essencialmente de como o produto escalar é definido nesse espaço. (Itskov et al. 2007)

O produto escalar ou interno é definido como o produto entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencentes a um espaço vetorial $\mathbb{V}$ que satisfaçam as condições abaixo.

$$C.1. \quad u.v = v.u \quad (\text{comutatividade});$$

$$C.2. \quad u.(v + z) = u.v + u.z \quad (\text{distributividade});$$

$$C.3. \quad \alpha(u.v) = (\alpha.u).v = u.(\alpha.v) \quad (\text{Associatividade na multiplicação por um escalar } \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v, z \in \mathbb{V};$$

O espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$ é aquele que cumpre as propriedades acima descritas. Se o produto escalar entre dois vetores não nulos for nulo então, estes vetores são ortogonais.

$$U \perp V, \implies U.V = 0 \quad (2.1)$$

Para podermos descrever muitos vetores no espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$ é preciso definir uma base neste espaço. De modo a simplificar o nosso estudo vamos trabalhar com a base ortonormal definida abaixo.

Uma base $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dum espaço euclidiano n-dimensional é ortogonal se

$$e_i.e_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

O símbolo δ_{ij} representa a função Delta de Kronecker e esta é igual a 1 no caso de os índices serem iguais e é igual a 0 no caso de os índices serem diferentes, como também está definido em 2.24 com e_i e e_j unitários.

Um conceito indispensável a considerar dentro do espaço euclidiano é o de base dual que é o que permite escrever qualquer vetor pertencentes a $\mathbb{E}^n$ como combinação linear de dois vetores de uma determinada base, e esta leva cada vetor da base a sua respetiva coordenada, ou seja:

Para toda base $f = e_1, e_2, \dots, e_n$ de um espaço vetorial V e para todo Co-vetor $\mathbf{v} \in V^*$, é definido um conjunto ordenado de números reais $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ por $f_i = \mathbf{v}(e_i)$. Esses números f_i são chamados de componentes covariantes do co-vetor $\mathbf{v}$ em relação à base f .

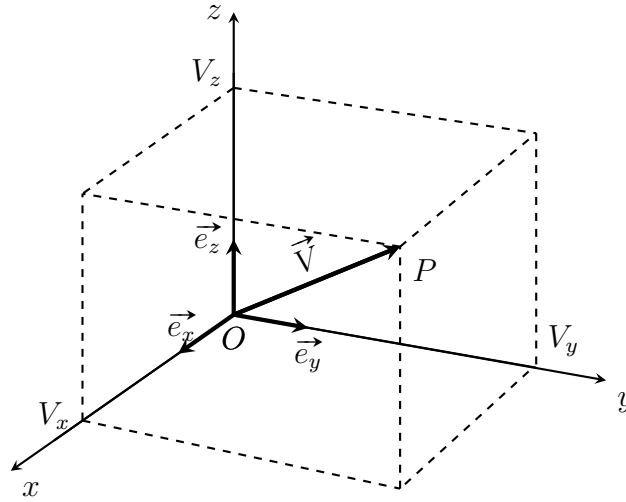


FIGURA 2.1: Componentes e base de um vetor em Coordenadas cartesianas

Para podermos compreender melhor este conceito, vamos começar com o sistema de coordenadas cartesianas em três dimensões como habitualmente conhecemos. Observando a figura [2.1](#), a partir desta figura está definido o vetor $\vec{V}$ como sendo o produto de suas componentes (V_x, V_y, V_z) com os respetivos vetores bases, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, os vetores bases são unitários ao longo dos respetivos eixos, e podemos escrever:

$$\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z \quad (2.3)$$

Como podemos notar a distância de $\overrightarrow{OP}$ corresponde a norma do vetor $\vec{V}$ e podemos defini-la da seguinte forma

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2 + (V_z)^2} \quad (2.4)$$

Agora consideremos um outro vetor $\vec{U}$ definido pelas suas componentes,

(U_x, U_y, U_z) considerando-o no mesmo referencial cartesiano, então a partir daí podemos também definir algumas operações entre vetores.

O produto escalar ou interno entre os vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$ é dado por:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z \quad (2.5)$$

O resultado desta operação é um valor escalar; com este cálculo, é fácil notar que se fizermos o produto interno do vetor U por ele mesmo, teremos então demonstrada a equação 2.4

O produto vetorial entre o vetor $\vec{U}$ e $\vec{V}$ é calculado da seguinte forma,

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Usando o teorma de Laplace o resultado deste determinante é dado por:

$$\vec{U} \times \vec{V} = (U_y V_z - U_z V_y) \vec{e}_x + (U_z V_x - U_x V_z) \vec{e}_y + (U_x V_y - U_y V_x) \vec{e}_z \quad (2.7)$$

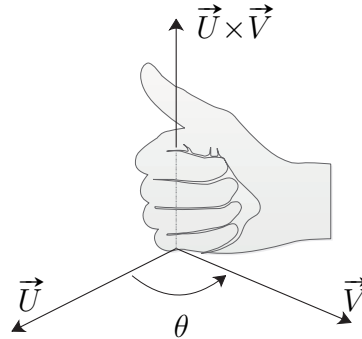


FIGURA 2.2: Regra da mão direita

O produto vetorial $\vec{U} \times \vec{V}$ é um vetor perpendicular aos vetores $\vec{U}$ e $\vec{V}$ a sua direção é dada pela regra da mão direita como mostra a Figura 2.2

2.1.1 Métrica Euclidiana

Para se estudar a geometria de um determinado espaço, é essencial saber a Métrica deste espaço. A Métrica é uma função que define a distância entre dois pontos em um espaço particular. Uma vez que conhecemos a métrica de um espaço, (teoricamente, pelo menos) sabemos tudo sobre a geometria desse espaço por isso que a métrica é de total importância. (Collier 2017) Para calcular a distância entre dois pontos em um determinado espaço, podemos fazer uma extensão da equação 2.4 para o caso da distância entre dois quaisquer pontos (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) no plano tridimensional, e representando a distância por l podemos escrever a distância como

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (2.8)$$

No espaço euclidiano a função da distância entre pontos não se altera independentemente do caminho que se percorre, o que não se pode dizer para espaços não euclidianos, como espaços curvos da relatividade de Einstein que poderemos ver mais adiante, pois é o cerne do nosso estudo. De modo a não incorrer no problema da diferença no cálculo da distância e para que a distância em questão seja, na verdade, mais próxima ao comprimento do caminho a percorrer vamos expressá-la em termos de deslocamentos infinitesimais $dl, dx, dy, etc..$ Assim, a fórmula abaixo vai calcular distância infinitesimal dl entre dois pontos em coordenadas cartesianas, também chamada elemento de linha.

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (2.9)$$

A métrica, os coeficientes numéricos dos termos diferenciais como explicitamente podemos observar $1 \times dx^2, 1 \times dy^2$ e $1 \times dz^2$. Da equação acima podemos tirar que $e_x \cdot e_x = 1, e_y \cdot e_y = 1, e_z \cdot e_z = 1$, e o produto de versores com índices diferentes é nulo. Esses coeficientes métricos podem ser organizados numa matriz 3x3 para descrever completamente a geometria do espaço tridimensional. Essa matriz é chamada de tensor métrico ou métrica, e permite calcular a distância e o ângulo entre dois pontos quaisquer no espaço tridimensional euclidiano e podemos escrever

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Assim, podemos verificar que $e_x \cdot e_x = g_{xx} = 1$ igualmente para casos similares. De forma genérica podemos escrever.

$$e_{ij} = g_{ij} \quad (2.11)$$

e_i e g_{ij} admitem inversas e podemos escrever,

$$e^i \cdot e^j = g^{ij} \quad (2.12)$$

e conseqüentemente podemos escrever a expressão do elemento de linha como:

$$dl^2 = g_{xx}dx^2 + g_{yy}dy^2 + g_{zz}dz^2 \quad (2.13)$$

Neste mesmo raciocínio podemos definir o tensor métrico para coordenadas polares a 2D e esféricas a 3D tiradas por exemplo do livro *A Most Incomprehensible Thing*, de Peter Collier,

Assim, o tensor métrico para coordenadas polares a duas dimensões (r, θ) será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

e para coordenadas esféricas a 3D (r, θ, ϕ) será

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

O tensor métrico admite tensor contravariante g^{ij} assim, para o caso de coordenadas esféricas a sua matriz contravariante é,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

e de modo análogo, para coordenadas polares,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

2.1.2 Notação de Einstein

A notação de soma de Einstein, também conhecida como convenção de somatório de Einstein, é uma notação compacta que é essencialmente utilizada para expressar operações que envolvem somas de componentes em matemática e física. Essa notação foi introduzida pelo físico alemão Albert Einstein para simplificar a escrita de equações na teoria da relatividade. A ideia principal da notação de soma de Einstein é que, sempre que dois índices superiores ("Contravariante") e inferiores ("covariante"), aparecem repetidos numa equação, deve-se somar sobre todas as possíveis combinações desses índices.

Por exemplo, a notação de Einstein diz o seguinte, dado o vetor V da figura 2.1 podemos escrever

$$\vec{V} = V^1 \vec{e}_1 + V^2 \vec{e}_2 + V^3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 V^i \vec{e}_i \quad (2.18)$$

ou simplesmente

$$\vec{V} = V^i \vec{e}_i (i = 1, 2, 3) \quad (2.19)$$

Assim de forma geral a expressão,

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N = \sum_{i=1}^N a_i x^i \quad (2.20)$$

pode ser escrita na notação convencional de soma como $a_i x^i$ para N dimensões de forma similar baseando-se ainda nesta na notação convencional de soma, a expressão $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} x^i x^j$ pode ser escrita como $a_{ij} x^i x^j$ em N dimensões.

Uma nota importante é salientar que para esta convenção não são válidas as seguintes propriedades:

$$a_{ij}(x^i + y^j) \neq a_{ij}x^i + a_{ij}y^j; \quad a_{ij}x^i y^j \neq a_{ij}y^i x^j; \quad (a_{ij} + a_{ji})x^i y^j \neq 2a_{ij}x^i y^j.$$

São válidas as seguintes propriedades:

$$a_{ij}(x^j + y^j) = a_{ij}x^j + a_{ij}y^j; \quad a_{ij}x^i y^j = a_{ij}y^j x^i;$$

$$a_{ij}x^i x^j = a_{ji}x^i x^j; \quad (a_{ij} + a_{ji})x^i x^j = 2a_{ij}x^i x^j; \quad (a_{ij} - a_{ji})x^i x^j = 0$$

Os índices podem ser mudos ou livres, sendo que índices mudos aparecem uma vez na expressão e indicam a ordem do tensor e os índices livres aparecem duas vezes e indicam o somatório. Deste modo é possível escrever o produto interno entre dois vetores como:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_i V_i = U_j V_j (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.21)$$

Assim, por exemplo, se quisermos expandir a Expressão $T_{ij}X_i X_j$ tendo em conta a notação de Einstein para N dimensões teremos

$$\begin{aligned} T_{ij}X_i X_j &= T_{11}X_1 X_1 + T_{12}X_1 X_2 + T_{13}X_1 X_3 + \dots + T_{1n}X_1 X_n \\ &\quad + T_{21}X_2 X_1 + T_{22}X_2 X_2 + T_{23}X_2 X_3 + \dots + T_{2n}X_2 X_n \\ &\quad + T_{31}X_3 X_1 + T_{32}X_3 X_2 + T_{33}X_3 X_3 + \dots + T_{3n}X_3 X_n \\ &\quad + \dots \\ &\quad + T_{n1}X_n X_1 + T_{n2}X_n X_2 + T_{n3}X_n X_3 + \dots + T_{nn}X_n X_n \end{aligned}$$

Na equação [2.22](#) os índices i e j são mudos e indicam o somatório, vejamos um outro caso em que podemos tornar mais compacta usando a convenção de Einstein, a equação que se segue representa a derivada total de uma função em um sistema $\bar{x}^i$ em que suas variáveis dependem de t ,

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} \frac{dx^1}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} \frac{dx^2}{dt} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^3} \frac{dx^3}{dt} \quad (2.22)$$

deste modo a equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (2.23)$$

Na equação acima o i é um índice livre e o j é um índice mudo, como explicamos acima, a soma sucessiva vai se efetuar-se apenas sobre o índice mudo.

2.1.3 Delta de Kronecker

Vamos agora introduzir o conceito da função delta de kronecker. Esta é uma função que facilita a escrita de certas expressões matemática de forma a torná-las mais elegantes. A delta kronecker é representado pelo símbolo δ_j^i ; $i, j = 1, 2, \dots, N$

esta está definida da seguinte forma:

$$\delta_j^i = \delta_{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0; & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.24)$$

Para esta função temos de considerar algumas propriedades, vejamos: se as coordenadas $x^1, x^2, \dots, x^N$ de um determinado espaço são independentes, então

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0; & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Isso implica que, se x^i e x^j pertencem ao mesmo sistema de coordenadas e são independentes, então, $\frac{\partial x^i}{\partial x_j} = \delta_j^i$, e consequentemente

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_j} = \frac{\partial x^i}{\partial x_k} = \frac{\partial x^k}{\partial x_j} = \delta_j^i$$

onde por convenção a soma sobre k está implícita.

Considerando a equação [2.24](#) considerando para $N=3$ podemos definir a matriz

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A matriz [2.25](#) é chamada de **Tensor de Kronecker**.

O Tensor de Kronecker é um tensor unitário, se multiplicamos matricialmente qualquer tensor pelo tensor Kronecker obtém-se o próprio tensor, ou seja, $\delta_j^i A^j = A^i$. Demonstraremos abaixo essa propriedade para o caso de três dimensões. Fazendo o desenvolvimento tendo em conta a convenção de Einstein como já foi estudado anteriormente obtém-se:

$$\delta_1^1 A^1 + \delta_2^1 A^2 + \delta_3^1 A^3 = A^1$$

$$\delta_1^2 A^1 + \delta_2^2 A^2 + \delta_3^2 A^3 = A^2$$

$$\delta_1^3 A^1 + \delta_2^3 A^2 + \delta_3^3 A^3 = A^3$$

Como se pode notar o resultado deste desenvolvimento é A^i , então, basicamente o que o tensor de Kronecker faz é a substituição do índice, por isso ele é também um tensor de substituição.

2.1.4 Símbolo de Permutação



FIGURA 2.3: Símbolo de Levi-Civita

O símbolo de permutação também conhecido como **Símbolo de Levi-Civita** é representado simbolicamente por ϵ_{ijk} , é definido como um objeto matemático que representa permutações dos índices i, j, k . este símbolo é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, 3) \\ -1, & \text{se } (i, j, k) \text{ é uma permutação par de } (1, 3, 2) \\ 0, & \text{se dois ou mais índices são iguais.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Onde uma permutação ímpar é aquela que requer um número ímpar de trocas para ser alcançada a partir da ordem original, enquanto uma permutação par requer um número par de trocas.

O símbolo de permutação é útil em tensores porque ele permite expressar produtos de tensores com índices permutáveis de uma maneira simplificada. Por exemplo, o produto de dois tensores A_{ijk} e B_{ijk} pode ser escrito como:

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{ijk} B_{ijk} \epsilon_{lmn}$$

Onde ϵ_{lmn} é o símbolo de permutação em três dimensões e o índice l substitui o índice i , o índice m substitui o índice j e o índice n substitui o índice k .

$$\delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Onde a_{ij} são os coeficientes do sistema e b_i são as constantes. Podemos escrever a solução desse sistema usando o delta de Kronecker da seguinte forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & b_2 & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1\delta_{11} + b_2\delta_{21}}{a_{11}\delta_{11} + a_{21}\delta_{21}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{21} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{a_{12}\delta_{12} + a_{22}\delta_{22}}{a_{11}\delta_{11} + a_{21}\delta_{21}}$$

Onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e é usado para selecionar os elementos corretos da matriz a e do vetor b .

2.2 Espaço Tempo, Métrica de Minkowski

O espaço-tempo é uma estrutura matemática que combina as três dimensões do espaço (comprimento, largura e altura) com a dimensão do tempo numa única entidade quadridimensional. (Einstein [2010](#))

Antes de Einstein, o espaço e o tempo eram considerados entidades separadas e absolutas. Isaac Newton, por exemplo, via o tempo como algo que flui uniformemente, independentemente de qualquer coisa externa, e o espaço como um palco imutável onde os eventos ocorrem.

No entanto, a teoria da relatividade especial de Einstein introduziu a ideia de que o espaço e o tempo estão intrinsecamente ligados e são relativos. Isso significa que diferentes observadores, movendo-se a diferentes velocidades, podem discordar sobre a duração do tempo entre dois eventos (dilatação temporal) e sobre a distância entre dois pontos.

Ela generaliza outras métricas conhecidas, como a distância euclidiana e a distância de Manhattan, permitindo a incorporação de diferentes parâmetros para atender às necessidades específicas de estudos em acústica submarina. Abordagem matemática desenvolvida nesta secção tem como base o desenvolvimento feito por (Collier [2017](#)).

A função que define a distância entre dois ponto no espaço-tempo é dada pela expressão

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (2.27)$$

Para o caso de variações infinitesimal podemos obter

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.28)$$

Onde ds é o elemento de linha de Minkowski e ds^2 é uma invariante relativista ou seja, uma invariante sob transformações de Lorentz. Isso significa que todos os observadores inerciais concordarão com o valor de ds^2 para um par de eventos, independentemente de suas velocidades relativas, e c é a velocidade da luz, dt é a diferença no tempo entre os dois eventos, e dx , dy , e dz são as diferenças nas coordenadas espaciais entre os dois eventos.

Igualmente ao caso da métrica euclidiana, vamos usar os coeficientes métricos do elemento de linha de Minkowski para definir a métrica de Minkowski, que é denotada na bibliografia acima descrita por $\eta_{\mu\nu}$ (onde η é a letra grega eta).

A partir dos termos $1 \times c^2 dt^2$, $-1 \times dx^2$, $-1 \times dy^2$ e $-1 \times dz^2$ podemos então escrever na forma matricial como.

$$[\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Podemos ainda escrever o elemento de linha de Minkowski usando a notação de índice e a convenção de somatório de Einstein como:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.30)$$

A configuração dos sinais ao longo do tensor métrico é chamada de assinatura métrica. No caso que estamos a trabalhar usamos $+- --$, a inversão da assinatura não altera o resultado desde que sejamos consistentes ao usa-los.

2.3 Operadores Diferenciais

Nesta secção é uma revisão das cadeiras de Análise Matemática e de Física de modo a dar mais sustentabilidade e suporte nos conteúdos adiante. Quando estivermos a tratar de deslocamentos num espaço tridimensional, é importante perceber como a partícula em questão se comporta relativamente aos diferentes eixos de referência. Por isso, tratando-se de variações infinitesimais, vamos introduzir os principais operadores diferenciais. Eles são usados para descrever as propriedades de funções e campos vetoriais em termos de suas derivadas e integrais e inclusive para resolver equações diferenciais e tantas outras aplicações da Física, Matemática e Engenharia. As abordagens que vão ser feitas aqui, foram essencialmente retiradas do Livro *Vector Analysis* de Willard Gibbs e Edwin Bidwell Wilson, 1960, e do livro *A Student's Guide to Maxwell's Equations* de Daniel Fleisch, 2008.

2.3.1 $\vec{\nabla}$ Nabla - Operador Del

Este símbolo representa um operador diferencial vetorial chamado "nabla" ou "del", quando associado a uma grandeza, implica calcular as derivadas das diferentes competentes dessa grandeza. A forma exata como poderemos calcular essas derivadas depende muito do símbolo com qual é imediatamente associado, assim, $\vec{\nabla} \times$ indica o Rotacional, $\vec{\nabla} \cdot$ indica a divergência se aplicado a um campo vetorial e se apenas for o $\vec{\nabla}$ com a grandeza em questão então é o gradiente se aplicado a um campo escalar (Fleisch [2008](#)). Deste modo em coordenadas cartesianas para o caso de três dimensões podemos escrever:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (2.31)$$

2.3.2 Gradiente

O gradiente representa a taxa de variação de uma função em uma determinada direção, gradiente aponta na direção de maior crescimento da função.

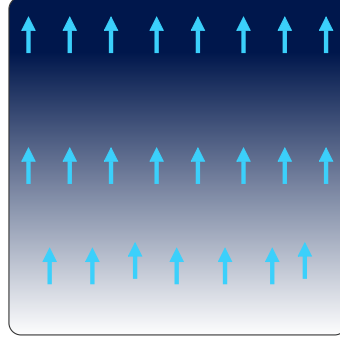


FIGURA 2.4: Gradiente

Para uma função escalar $f(x, y, z)$, o gradiente é dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (2.32)$$

podemos escrever também na forma de vetores covariantes e para coordenadas genéricas q^1, q^2, q^3

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial q^1}, \frac{\partial f}{\partial q^2}, \frac{\partial f}{\partial q^3} \right) \quad (2.33)$$

ou seja,

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial q^i} \vec{e}_i (i = 1, 2, 3) \quad (2.34)$$

2.3.3 Divergência

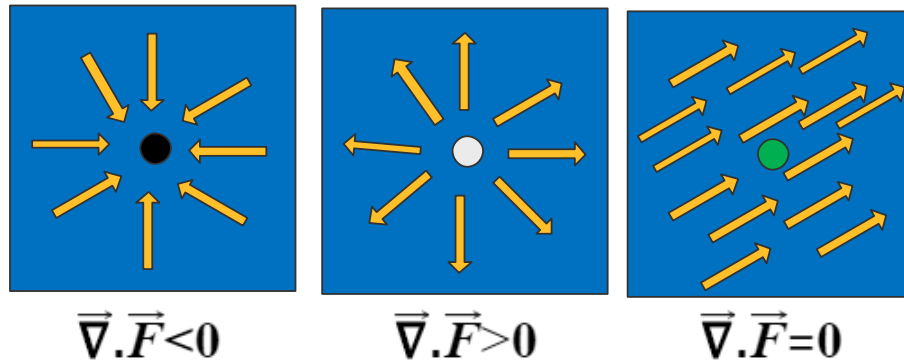


FIGURA 2.5: Divergência

"No caso do fluxo de fluido, a divergência num determinado ponto é uma medida da tendência dos vetores de fluxo a afastarem-se desse ponto (ou seja, a transportar mais material para longe dele do que trazer em sua direção). Assim, os pontos com divergência positiva são fontes (como torneiras em situações que envolvem fluxo de fluido, ou cargas elétricas positivas na eletrostática), enquanto os pontos com divergência negativa são sumidouros (como ralos no fluxo de fluido). (Fleisch 2008)

Para um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$, a divergência é dada por:

$\text{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$ que como podemos, ver é um campo escalar.

2.3.4 Rotacional

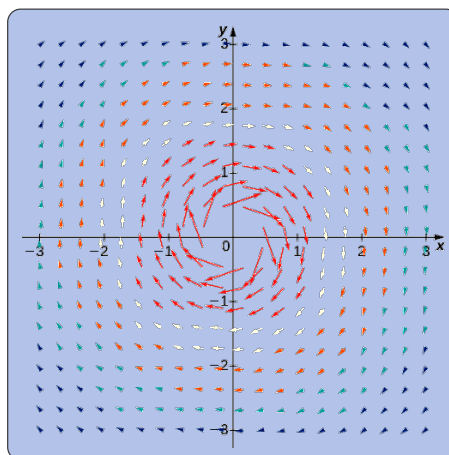


FIGURA 2.6: Rotacional

O rotacional indica uma operação vetorial que descreve a "rotação" ou "vorticidade" de um campo vetorial, assim, como podemos ver na figura 2.6 a intensidade do campo aumenta a medida que nos aproximamos do centro. Um caso muito prático para entender o conceito de rotacional é a sua aplicação mais comum na mecânica dos fluidos, onde se tem um fluido a girar num turbilhão (como a água a descer pelo ralo), o rotacional será máximo no centro do turbilhão e apontará na direção do eixo de rotação. E para um fluido sem vorticidade o seu rotacional é nulo.

Deste modo, dado um campo vetorial $\vec{F}(x, y, z)$, calculamos o seu rotacional da seguinte forma

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

2.3.5 Laplaciano

O laplaciano de modo simplificado é uma operação diferencial que mede a diferença entre o valor de uma função num ponto e a média dos valores da função nos pontos vizinhos. Uma aplicação prática do laplaciano e foi igualmente utilizado neste trabalho, é na definição da equação de ondas, o laplaciano aparece na equação que descrevem a propagação de onda. O termo do laplaciano descreve a curvatura da onda num ponto específico e, conseqüentemente, como a onda se propaga a partir desse ponto.

Para uma função escalar $f(x, y, z)$, o laplaciano é dado por:

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.35)$$

Então, a equação de onda unidimensional, usando o símbolo do laplaciano, para uma função $u(x, t)$ seria:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u \quad (2.36)$$

ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.37)$$

No contexto da equação acima, o laplaciano é apenas a segunda derivada em relação a x , uma vez que estamos considerando uma dimensão espacial. Em contextos tridimensionais, o laplaciano considera as derivadas segundas em relação a todas as três coordenadas cartesianas, como mostrado na equação [2.35](#)

2.4 Tensores

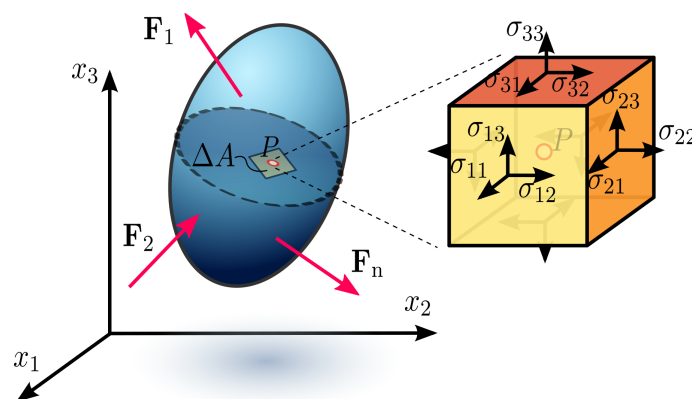


FIGURA 2.7: Componentes de um tensor de Stress num meio contínuo. Figura retirada do website Wikimedia Commons¹⁹.

Porquê estudamos os tensores? Respondamos a essa questão analisando a seguinte figura [2.7](#), um dos assuntos mais importantes da Mecânica dos sólidos e dos fluidos é estudar as tensões no interior de meios contínuos, através de conceitos matemáticos que tratam um corpo físico como uma substância contínua e homogênea. Este conceito em que está representado na figura em questão, é usado para descrever a distribuição das forças internas que atuam num meio contínuo, seja um sólido ou um fluido, essas forças internas surgem por consequência de um conjunto de fontes externas como as cargas elétricas ou mecânicas, temperatura, deformações ou outras condições ambientais bem como fontes internas, tais como a viscosidade em fluidos. A tensão, pode ser então definida como uma força exercida por unidade de área numa superfície interna do meio.

Considerando um meio em equilíbrio, ou seja, considerando que a soma de forças em

¹⁹website Wikimedia Commons: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stress_in_a_continuum.svg

todas as direções é igual a zero, podemos definir matematicamente o Stress como um Tensor de segunda ordem,

$$\sigma_{ij} = \frac{F_i}{A_j} \quad (2.38)$$

Onde σ_{ij} representa o componente ij do tensor de tensões de segunda ordem, F_i é a componente da força atuando na direção i e A_j é a componente segundo o eixo dos j da área sobre a qual a força é aplicada na direção j .

A partir do tensor de tensões, torna-se possível calcular a tensão normal e a tensão tangencial em cada ponto do meio contínuo, bem como a tensão de corte e a deformação resultante. Com esse estudo consegue-se perceber como os materiais se comportam quando são submetidos a diferentes condições de carga. Essa equação permite calcular a tensão num ponto específico de um material contínuo, desde que a força e a área sejam conhecidas. É de salientar que para os materiais mais complexos e situações mais complicadas é necessário recorrer a equações mais específicas, como as equações da mecânica dos sólidos ou da mecânica dos fluidos, que consideram fatores como a forma e a geometria do material, a sua resposta elástica, efeitos de carga dinâmica, entre outros, que não serão alvo de estudos nesta dissertação.

A equação [2.38](#) é um tensor de segunda ordem, resultando em uma matriz 3×3 , como mostra a equação

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Nesta matriz de 9 elementos os elementos da diagonal ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) representam as tensões normais correspondentes as respectivas coordenadas e ($\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{21}, \tau_{31}, \tau_{32}$) representam as tensões de corte em cada plano coordenado, isto, é a força tangencial que atua no plano perpendicular a direção normal correspondente.

Os tensores são objetos matemáticos que servem para de uma forma geral representar relações que são invariantes sob mudança de sistema de coordenadas e por isso os tensores têm uma ampla variedade de aplicações em ciência e engenharia. Por exemplo, em física, os tensores são usados para descrever as propriedades de materiais e campos, enquanto em "Machine Learning", eles são usados para representar dados como imagens, áudio e texto. O uso de tensores permite uma representação compacta e eficiente de dados complexos, facilitando a manipulação e análise desses dados. A sua notação é baseada em índices que podem indicar a ordem do tensor

e também as componentes do tensor em um determinado sistema de coordenada, tornando sua representação mais compacta como veremos a seguir.

As grandezas escalares, e os vetores, são ambos casos particulares de tensores, em que para podermos representar em qualquer coordenadas temos de usar 3^N número que representam as componentes do tensor, onde o N representa a ordem do tensor. Assim, o tensor de ordem zero ($3^0 = 1$) é um escalar com apenas uma componente, o tensor de ordem um ($3^1 = 3$) é o vetor com três componentes e o tensor de 2ª ordem ($3^2 = 9$) é a é uma matriz quadrada 3×3 no caso de espaços tridimensionais.

2.4.1 Transformação de Tensores

Os tensores podem ser representados componentes contravariantes com índice superior, e com uma relação, de transformação de componentes do tipo,

$$V'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} \quad (2.40)$$

ao passar de um sistema de coordenadas S para um sistema de coordenadas S' . Em contrapartida, as componentes de um tensor covariante transformam-se segundo a relação

$$V'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} V_{\beta} \quad (2.41)$$

, ao passar de um sistema S para S' .

Um tensor pode também resultar do produto de dois vetores quaisquer, assim dados os vetores F^{β} e W^{λ} e um vetor '1-form' ou vetor diferencial de grau 1, A_{η} podemos obter um tensor $T^{\beta\lambda}$ de tal maneira que

$$T^{\beta\lambda}_{\eta} = F^{\beta} W^{\lambda} A_{\eta} \quad (2.42)$$

F^{β} pode ser escrito como

$$F^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} F^{\beta} \quad (2.43)$$

e W^{λ} também pode ser escrito como

$$W^{\epsilon} = \frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\lambda}} W^{\lambda} \quad (2.44)$$

E ainda podemos escrever o vetor diferencial de primeiro grau A_η como,

$$A'_\tau = \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\tau} A_\eta \quad (2.45)$$

Portanto, novo tensor $T'^{\alpha\epsilon}_\tau$ pode ser escrito como produto dos resultados das transformações de cada um dos vetores

$$T'^{\alpha\epsilon}_\tau = F'^\alpha W'^\epsilon A'_\tau = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\epsilon}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\tau} F^\beta W^\lambda A_\eta. \quad (2.46)$$

No entanto um tensor contravariante com dimensão m e covariante com dimensão n tem componentes dados pela lei de transformação tensorial:

$$T'^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_m}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{v_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{v_2}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{v_m}} \times \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{\partial x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\alpha_n}} \times T^{v_1v_2\ldots v_m}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}. \quad (2.47)$$

2.4.2 Símbolos de Christoffel

No espaço euclidiano, quando temos um vetor em coordenadas cartesianas e queremos calcular as derivadas de suas componentes não nos preocupamos com os vetores de base, pois estes são constantes nestas coordenadas e de módulo igual a um como definimos nas secções anterior. Porém, quando estamos a nos referir de espaços curvos, o vetores de base não são constantes como em espaços euclidianos mas em coordenadas curvilineas. Ao derivar um tensor, portanto, temos que ter em conta as derivadas dos vetores de base. Para fazer isso, precisamos introduzir o coeficientes de conexão (também conhecidos como símbolos de Christoffel), que recebem o símbolo Γ (a letra grega Gama)(Collier 2017).

Para visualizarmos matematicamente essa expressão vamos seguir a dedução feita por Collier na sua obra "A Most Incomprehensible Thing". Vamos considerar o seguinte vetor definido por $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$. Ao derivar esse vetor, tendo em conta que os vetores base ($\vec{e}_\alpha$) não são constantes, então, temos de usar a regra do produto $\frac{d}{dx}(UV) = U\frac{dV}{dx} + V\frac{dU}{dx}$. Daí o resulta, ao derivar por exemplo em orfem à coordenada x^β ,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.48)$$

Desta expressão conseguimos observar que $\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}$ representa a taxa de variação das componentes (V^α) do vetor $\vec{V}$ em relação a coordenada (x^β) e $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$ representa a taxa de variação de $\vec{e}_\alpha$ em relação a x^β , e esta pode ser escrito em relação aos vetores de base $\vec{e}_\gamma$,

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (2.49)$$

Assim a equação 2.48 pode ser escrita como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (2.50)$$

Podemos escrever os coeficientes de conexão em função do tensor métrico. Esta Vamos começar a abordagem escrevendo o tensor métrico de primeira espécie da seguinte da seguinte forma

$$[ij, k] \equiv g_{mk} \Gamma_{ij}^m \quad (2.51)$$

por simetria $[ijk] = [jik]$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} [ij, k] &= g_{mk} \vec{e}^m \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^j} \\ &= \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^j}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tendo em conta que $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ podemos derivar ambos os membros em relação a q^k , no membro direito aplicando a fórmula da derivada do produto temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k} \\ &= [ik, j] + [jk, i]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Se associarmos três derivadas $\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}$ considerando índices diferentes e efetuando as devidas simplificações resultará em

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] = [ij, k] \quad (2.54)$$

Vamos agora usar a equação 2.51, e tendo em conta o facto de g_{uv} e g^{uv} serem inversas entre si e multiplicando pela esquerda ambos os membros da equação

2.54 resultara em

$$\Gamma_{ij}^m = g^{mk}[ij, k] = \frac{1}{2}g^{mk} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] \quad (2.55)$$

podemos escrever usando a convenção de letras gregas para coordenadas do espaço-tempo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (2.56)$$

Existem N símbolos de Christoffel distintos de cada tipo para cada tensor g_{ij} independente. Como g_{ij} é um tensor simétrico de ordem 2 e possui $\frac{1}{2}N(N+1)$ componentes independentes, o número de componentes independentes dos símbolos de Christoffel é $\frac{1}{2}N^2(N+1)$.

2.4.3 Geodésicas

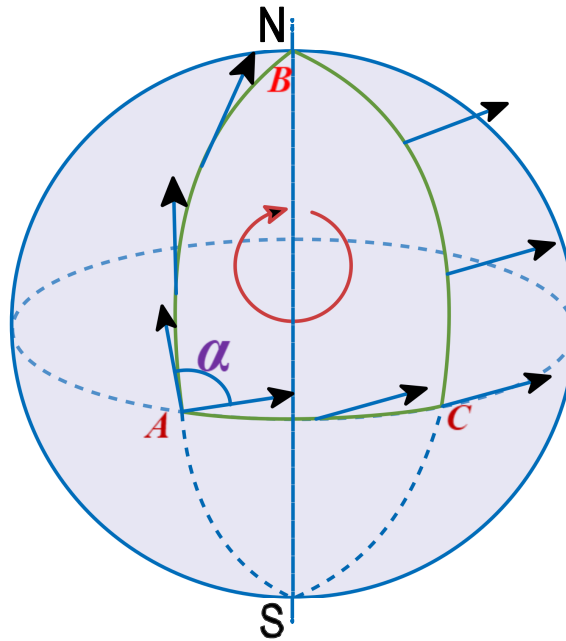


FIGURA 2.8: Transporte paralelo ao longo de uma linha fechada numa esfera ²⁰.

Após fazermos uma abordagem sobre os tensores, conceito de métrica e falamos na subsecção anterior sobre Símbolos de Christoffel, vamos agora tratar das

²⁰Adaptado do website Wikimedia Commouns: <https://www.pngegg.com/es/png-tnico>

linhas geodésicas que será importante para percebermos mais sobre as trajetórias de raios acústicos podem ser modeladas, se compreendemos o que são linhas geodésicas e como são definidas, e a partir destas podemos então no capítulo mais adiante fazer aproximações significantes para raios acústicos e posteriormente poder introduzir elementos do meio que podem influenciar a trajetória dos raios acústicos.

'Geodesia' vem do grego 'Geo' que significa "terra" e 'daio' que significa dividir, ou seja, "divisão da terra". 'Geodésico' será utilizado de uma forma geométrica especial a seguir, mas estará relacionado ao antigo problema de medir o caminho mais curto na superfície curva da Terra. A partir da geometria euclidiana de uma superfície plana, sabemos que o caminho mais curto entre dois pontos é a linha reta entre os pontos na superfície. No entanto, na superfície esférica da Terra, não é possível encontrar caminhos retos, então o caminho mais curto entre dois pontos é o arco de círculo maior na superfície entre os pontos. Como sabemos tais caminhos são chamados curvas geodésicas, por generalização, qualquer que seja a métrica de um espaço riemaniano ou mesmo pseudo-riemaniano.

Para chegarmos até a equação das linhas geodésicas, que é o nosso objetivo nessa subsecção, iniciaremos com o conceito de transporte paralelo. O transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva numa variedade Riemanniana é definido como a operação que preserva a direção do vetor durante o movimento ao longo da curva.

Agora vejamos o que acontece se tentarmos transportar um vetor em paralelo ao redor de um 'loop' fechado A, B, C na superfície de uma esfera (veja a Figura 2.8). Embora cada vetor seja desenhado o mais paralelo possível ao anterior, quando ele retorna a A, sua direção mudou em 90° . Além disso, a mudança de direção depende do caminho percorrido - diferentes 'loops' dão mudanças de direção diferentes. Essa mudança de direção é resultado da curvatura da superfície da esfera. Para espaços curvos, em geral, o transporte paralelo de vetores é fundamental para entender a curvatura. (Collier 2017)

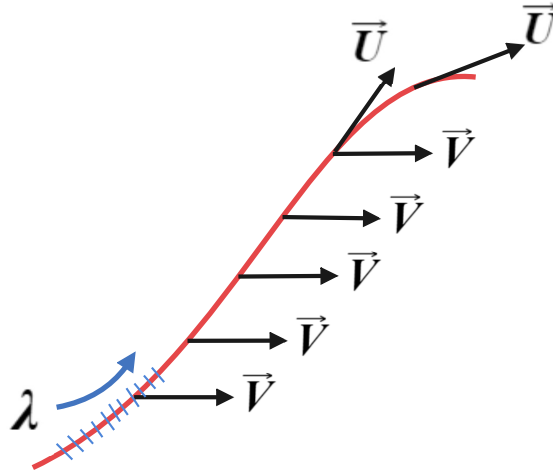


FIGURA 2.9: Transporte paralelo de V longo de uma linha parametrizada por um parametro λ ²¹.

Definamos o vetor tangente a curva da fig 2.9 $\vec{U}$, definido pelas derivadas das componentes em relação a um parâmetro λ que corre ao longo da linha,

$$U^\beta = \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left(\frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}, \frac{dx^3}{d\lambda} \right).$$

onde onde tornaremos ($x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$), Vamos agora observar o vetor $\vec{V}$ na figura 2.9 Se quisermos transportar paralelamente o vetor $\vec{V}$ ao longo da curva a derivada deste vetor tem de ser nula, ou seja:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0 \quad (2.57)$$

que é o chamado critério de deslocamento paralelo ao longo de uma curva.

Para calcular a derivada usaremos a equação 2.48 mudando x^β por λ temos

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{d\vec{e}_\alpha}{d\lambda} \quad (2.58)$$

vamos escrever o $\frac{d\vec{e}_\alpha}{d\lambda}$ como

$$\frac{d\vec{e}_\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (2.59)$$

²¹website Wikimedia Commouns: <https://www.pngegg.com/es/png-tnico>

usando a definição dos coeficientes de conexão $\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma$ temos

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\beta}{d\lambda} \vec{e}_\gamma. \quad (2.60)$$

Trocamos o índice α por γ no ultimo termo temos,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \vec{e}_\alpha + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \vec{e}_\alpha, \quad (2.61)$$

efetuando a fatorização termo $\vec{e}_\alpha$, podemos reescrever a equação como,

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \left(\frac{dV^\alpha}{d\lambda} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \vec{e}_\alpha, \quad (2.62)$$

sendo um vetor com componentes pode ser escrito como derivada da seguinte forma em que $\frac{DV^\alpha}{d\lambda}$ representa a derivada covariante do vetor V^α em ordem ao parametro λ

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda}. \quad (2.63)$$

Considerando que

$$U^\beta = \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left(\frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}, \frac{dx^3}{d\lambda} \right) \quad (2.64)$$

e efetuando a transformação e fatorização temos,

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dV^\alpha}{dx^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = U^\beta \left(\frac{dV^\alpha}{dx^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right). \quad (2.65)$$

Agora retornando na definição de transporte paralelo $\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0$ podemos agora encontrar a equação das linhas geodésica

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = V^\alpha \quad (2.66)$$

$$\frac{d\vec{U}}{d\lambda} = 0. \quad (2.67)$$

$$\frac{DU^\alpha}{d\lambda} = \frac{dU^\alpha}{d\lambda} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{DU^\alpha}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (2.70)$$

Portanto a equação das linhas geodésicas que vamos ter em conta para podermos usar no capítulo seguinte:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0, \quad (2.71)$$

Entretanto, teremos então que resolver tantas equações diferenciais geodésicas quanto o número de valores que o índice α pode tomar, isto é, o número de dimensões do espaço em questão. Torna-se evidente, tendo em conta o que se apresentou nas secções anteriores, que na equação [2.71](#) está subentendido o somatório sobre os índices β e γ , já que ocupam posições covariantes em $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ e contravariante em dx^β e dx^γ .

Capítulo 3

Métodos de cálculo de raios acústicos

Apresentar-se-á dois métodos pelo qual pode-se estimar o traçado do raio acústicos. As equações que vão estimar o traçado dos raios acústicos podem ser deduzidas de dois formalismos diferentes, o formalismo das linhas geodésicas e o do tempo mínimo de Fermat e para que se possa da melhor forma comparar ambos os métodos, deduziremos as equações considerando o caso de um fluido estacionário (velocidade do fluido nula), o qual é uma consideração feita em quase todas as bibliografias consultadas durante a elaboração deste trabalho. No caso deste estudo, essa suposição é também motivada primeiro pelo facto de querermos comprar dois métodos partindo dos mesmos pressupostos, depois, porque considerar velocidades no formalismo do tempo mínimo de Fermat não é viável. E como veremos a seguir a introdução de velocidades do fluido é uma das vantagens da aplicação do formalismo das linhas geodésicas.

O desenvolvimento deste capítulo tem essencialmente como base algumas abordagens já feitas nas bibliografias Fundamentos de Acústica Submarina de Orlando Camargo Rodriguez, (Rodriguez [2021](#)) e o artigo, "Derivation of the Paraxial Ray Equations in Three Conformal Representations", de (D. R. Bergman [2015](#)). Apesar de os formalismos serem diferentes, ambos os métodos partem do princípio de que o raio percorre de um ponto para o outro no menor tempo possível.

3.1 Formalismo das geodésicas

Para desenvolver este formalismo começaremos pela equação das linhas geodésicas, [3.1](#) abaixo apresentada,

$$\frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0, \quad (3.1)$$

que pode ser escrita como

$$\ddot{y}_k = -\Gamma_{ij}^k \dot{y}_i \dot{y}_j \quad (3.2)$$

,

onde Γ_{ij}^k representa os símbolos de Cristoffel vistos anteriormente e foi expresso como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right] \quad (3.3)$$

onde g^{kl} representa o tensor métrico acústico em componentes contravariantes e os restantes em componentes covariantes

3.1.1 Tensor métrico acústico

As trajetórias dos raios acústicos são influenciadas em grande medida pelas características do meio em que o som será emitido, daí ser importante estudar "a geometria acústica" deste espaço e consequentemente saber como poderemos medir e idealizar a trajetória do raio naquele meio. O tensor métrico acústico é um elemento primordial, porque este permite que saibamos como as trajetórias e intervalos de tempo num determinado meio se alteram à medida que as ondas sonoras propagam-se por ele. A abordagem que faremos aqui tem como base a referência. Bergman. David R Bergman [2018](#), e também considerações e condições que já foram elaboradas no trabalho efetuado por Malta Ribeiro, 2021 (Ribeiro [2021](#))

Os fenómenos de onda em fluidos podem ser derivados a partir das equações da dinâmica dos fluidos. Essas equações são não lineares; portanto, uma equação de onda linear é uma aproximação que pode falhar em alguns casos, nomeadamente havendo variações muito fortes dos parâmetros físicos (pressão, temperaturas, etc.)

Com base na experiência, parece haver tantas derivações de uma equação de onda linear em fluidos em movimento quanto há acústicos, cada uma contendo aproximações e suposições específicas adequadas para uma aplicação específica. David R Bergman [2018](#)

Começamos com a conhecida equação de continuidade que descreve a conservação da massa de um fluido. Ela afirma que a variação temporal da densidade ρ num ponto do fluido é, igual à divergência do fluxo de massa $\rho \vec{v}$ nesse ponto. Em outras palavras, a equação afirma que a matéria do fluido não pode ser criada ou destruída, mas pode ser transportada de um lugar para outro.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.4)$$

A partir da equação de continuidade temos de ter em conta que a pressão, densidade e velocidade, sofrem perturbações devido a fenômenos acústicos e então podemos escrever essas grandezas em função dessas contribuições da seguinte forma:

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, t) &= p_0(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) &= \rho_0(\vec{r}, t) + \rho_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) &= \vec{v}_0(\vec{r}, t) + \vec{v}_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Após uma série de manipulações algébricas, como podemos ver no anexo [II](#) chegamos à seguinte relação, onde $f(\vec{r}, t)$ será, no nosso caso, o campo de variação de pressão no fluido,

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \frac{a}{c^2} \left[\begin{array}{cccc} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \partial f / \partial t \\ \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{array} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Aqui $c(x, y, z)$ é o campo de velocidade local do som, e a um campo escalar que poderá representar a densidade do fluido subjacente, e $\vec{v}_0$ (de componentes cartesianas v_x, v_y e v_z) a velocidade desse fluido em cada ponto do espaço representa o tensor métrico acústico mais generalizado (Ribeiro [2021](#)). Para podermos dar sequência aos estudos que vêm sido feitos no âmbito do cálculo de trajetórias acústicas e pela coerência dos resultados que obtivemos, como veremos adiante, consideramos o seguinte tensor métrico acústico apresentado na sua forma contra-variante como,

$$g^{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Esta opção decorre, partindo do resultado da equação 3.6 acima, reconfigurando-o em termos do laplaciano escrito em termos de derivadas covariantes a 4 dimensões, e ainda, de escolher a parametrização como indica (D. R. Bergman 2015)

3.1.2 Cálculos dos coeficientes de Christoffel considerando fluido estacionário

Dando sequência no desenvolvimento de equações geodésicas pelo formalismo das geodésicas vamos agora calcular os coeficientes de Christoffel, para o caso de velocidade do fluido nula. para tal, usemos o seguinte tensor acústico

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & c^{-2} [id_{3 \times 3}] \end{bmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & \vec{0}^T \\ \vec{0} & c^2 [id_{3 \times 3}] \end{bmatrix}$$

onde $g_{\alpha\beta}$ e $g^{\alpha\beta}$ são inversas uma da outra.

O uso dessa métrica leva-nos a uma simplificação significativa nas equações geodésicas e o número de coeficientes de conexão independentes é também reduzido, vamos considerar a seguinte expressão para o cálculo dos coeficientes de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Neste sentido pode esta expressão desenvolver-se como:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{01} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{02} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} g^{03} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

Assim, para o tensor dado, com velocidade nula, os coeficientes de Christoffel de índice zero são igualmente nulos, ou seja,

$$\Gamma_{ij}^0 = 0$$

e temos assim os demais coeficientes:

$$\Gamma_{00}^1 = 0$$

$$\Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 = 0$$

$$\Gamma_{02}^1 = \Gamma_{20}^1 = 0$$

$$\Gamma_{03}^1 = 0$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = +\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = -\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)$$

$$\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{32}^1 = 0$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = -\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\Gamma_{00}^2 = 0$$

$$\Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 = 0$$

$$\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = 0$$

$$\Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = -\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)$$

$$\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = -\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^3 &= 0 \\
\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^2 = 0 \\
\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^2 = 0 \\
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^2 = 0 \\
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = - \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Tendo em conta o espaço-tempo (t, x, y, z) as equações geodésicas para esse espaço são dadas da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^0 \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\
\frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\
\frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\
\frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{ij}^3 \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por conseguinte, o seu desenvolvimento será

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{d^2 t}{d\lambda^2} &= - \left(\Gamma_{00}^0 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^0 \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^0 \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^0 \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{01}^0 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\
&\quad \left. + 2\Gamma_{02}^0 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{03}^0 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{12}^0 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{13}^0 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^0 \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\
\frac{d^2 x}{d\lambda^2} &= - \left(\Gamma_{00}^1 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{01}^1 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\
&\quad \left. + 2\Gamma_{02}^1 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{03}^1 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{13}^1 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^1 \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\
\frac{d^2 y}{d\lambda^2} &= - \left(\Gamma_{00}^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^2 \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{01}^2 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\
&\quad \left. + 2\Gamma_{02}^2 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{03}^2 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{13}^2 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^2 \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\
\frac{d^2 z}{d\lambda^2} &= - \left(\Gamma_{00}^3 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{11}^3 \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{22}^3 \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{33}^3 \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{01}^3 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\
&\quad \left. + 2\Gamma_{02}^3 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{03}^3 \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{12}^3 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma_{13}^3 \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right)
\end{aligned} \right. \tag{3.9}$$

Desta forma, substituindo os coeficientes de Christoffel temos:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = - \left(\left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 y}{d\lambda^2} = - \left(\left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 z}{d\lambda^2} = - \left(\left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \end{array} \right.$$

Assim, efetuando as simplificações temos

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = 0 \\ \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \left(-\left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 y}{d\lambda^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \left(\left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 z}{d\lambda^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \left(\left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 - \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2 \left(-\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \end{array} \right.$$

3.1.3 Parametrização temporal

Para obtermos equações cartesianas em função do tempo vamos, no entanto, parametrizar a equação [2.3.4](#) e assim poderemos escrever um sistema de três equações cartesianas que descreverão o traçado do raio acústico no espaço cartesiano, em função deste parâmetro temporal.

Dando sequência, consideraremos o facto de estarmos a trabalhar apenas com três dimensões e que, no entanto, a equação geodésica para o parâmetro t é

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0 \quad (3.12)$$

Assim, para escrevermos o parâmetro λ em função do tempo basta resolvermos a equação diferencial acima. A solução desta equação diferencial, é uma reta que define então a variação entre o parâmetro λ e t .

$$t = a\lambda + b.$$

Para esta parametrização, incorreremos no caso mais simples e habitual em que tomamos $a = 1$ e $b = 0$, ou seja, $t = \lambda$.

Desta forma as equações das geodésicas para coordenadas espaciais cartesianas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \left(- \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Considerando que, a velocidade do raio acústico é exatamente igual à velocidade do som no local, ou seja,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2, \quad (3.14)$$

podemos ainda simplificar a equação no espaço cartesiano como:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)\left(-2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + c^2\right) + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right)\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\left(\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\left(-2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + c^2\right) + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)\right)\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}\right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)\left(-2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + c^2\right) + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right)\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\left(-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)\right)\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}\right) \end{cases} \quad (3.15)$$

Podemos reduzir a seguinte expressão para uma forma mais compacta reorganizando as equações igualando-as a zero, esta pode ser escrita de forma mais compacta da seguinte forma,

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}\right) + c\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}\right) + c\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right) = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} - 2\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial z}\right) + c\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right) = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Desta forma podemos escrever a equação das trajetórias de raios acústicos na sua forma vetorial, conforme apresentada em D. R. Bergman [2015](#)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - 2\frac{d\vec{r}}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{\nabla} \ln c\right) + c\vec{\nabla} c = 0 \quad (3.17)$$

A equação [3.17](#) é igualmente um resultado de como as equações das geodésicas são apresentadas, tendo em conta a parametrização temporal.

3.2 Formalismo do tempo mínimo de Fermat

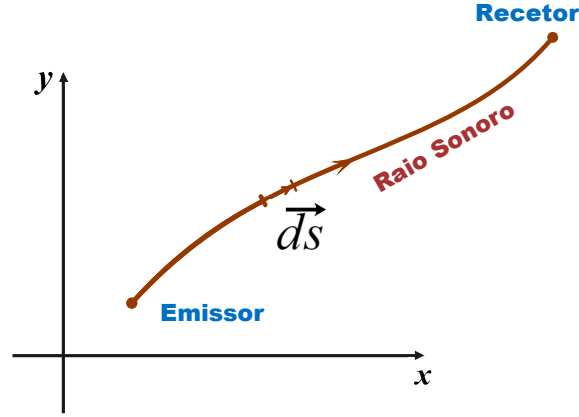


FIGURA 3.1: Representação de um raio sonoro no plano 2D

O princípio do tempo mínimo de Fermat diz que quando um raio se desloca de um ponto para outro, ele tende a percorrer uma trajetória que o possibilita fazer o menor tempo de percurso, Vamos começar por analisar a figura, 3.1 onde $|\vec{ds}|$ representa o elemento de linha calculado da seguinte forma,

$$|\vec{ds}| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \quad (3.18)$$

a equação 3.18 é equivalente a

$$|\vec{ds}| = ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (3.19)$$

agora podemos calcular o tempo entre a emissão e receção da seguinte forma

$$t_{E \rightarrow R} = \int_E^R dt = t_{E \rightarrow R} = \int_E^R \frac{ds}{c} \implies t_{E \rightarrow R} = \int_{E(x,y)}^{R(x,y)} \frac{ds}{c(x,y)} \quad (3.20)$$

onde $c(x, y)$ representa a velocidade do som em cada ponto (x, y) considerando z constante. Substituindo o valor da equação 3.19 na equação 3.20 temos o seguinte,

$$t_{E \rightarrow R} = \int_{(x_E, y_E)}^{(x_R, y_R)} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{c(x, y)} dx \quad (3.21)$$

como já referido, a trajetória $y(x)$ do raio é tal que o tempo $t_{E \rightarrow R}$ é mínimo, assim,

$$\delta t_{E \rightarrow R} = 0 \implies \delta \int_{(x_E, y_E)}^{(x_R, y_R)} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{c(x, y)} dx = 0 \quad (3.22)$$

Fazendo $F(x, y(x), y'(x)) = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{c(x, y)}$, a equação

$$\delta \int_{(x_E, y_E)}^{(x_R, y_R)} \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{c(x, y)} dx = 0 \quad (3.23)$$

é da forma,

$$\delta \int_A^B F[x, y(x), y'(x)] dx = 0 \quad (3.24)$$

Resolver esta integral é, no entanto, resolver a equação de Euler Lagrange abaixo. de acordo com o cálculo da variações:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (3.25)$$

Deste modo, para podermos encontrar as equações para o caso mais geral a 3 dimensões vamos fazê-lo em função de um parâmetro τ e assim temos

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

A resolução deste sistema passa por encontrar $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial x'}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}, \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right), \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial z'}$ e $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right)$,

Deste modo, após algumas simplificações podemos resulta em

$$\begin{cases} \left((y')^2 + (z')^2 \right) x'' c - (y' y'' + z' z'') x' c \\ - \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) x' \frac{dc}{d\tau} + \frac{\partial c}{\partial x} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \\ \left((x')^2 + (z')^2 \right) y'' c - (x' x'' + z' z'') y' c \\ - \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) y' \frac{dc}{d\tau} + \frac{\partial c}{\partial y} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \\ \left((y')^2 + (x')^2 \right) z'' c - (y' y'' + x' x'') z' c \\ - \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right) z' \frac{dc}{d\tau} + \frac{\partial c}{\partial z} \left((x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \right)^2 = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Partindo de [3.27](#) efetuando simplificações algébricas no sistema referenciado e chegar as equações 2D e 3D que definem os raios acústicos. Iniciaremos dividindo todas as equações do sistema [3.27](#) por c e transformaremos o sistema de segunda ordem em sistemas de primeira ordem considerando agora as variáveis do raio como (x, y, z) e (x_1, y_1, z_1) as correspondentes coordenadas da velocidade e considerando o facto de que estamos a considerar a parametrização temporal, ou seja, $\tau = t$.

Notemos que

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = c^2 \Rightarrow 2x_1x'_1 + 2y_1y'_1 + 2z_1z'_1 = 2c\frac{dc}{dt} \quad (3.28)$$

então,

$$xx' + yy' + zz' = c\frac{dc}{dt} \quad (3.29)$$

assim, as equações do raio passam a ser descritas por um sistema de 6 equações diferenciais de primeira ordem.

Aplicando essas substituições, a equação se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' - x_1 = 0 \\ y' - y_1 = 0 \\ z' - z_1 = 0 \\ -(y_1^2 + z_1^2)x'_1 + (x_1y_1)y'_1 + (x_1z_1)z'_1 + \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{c}\frac{dc}{dt}x_1 - \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2}{c}\frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ (x_1y_1)x'_1 - (x_1^2 + z_1^2)y'_1 + (y_1z_1)z'_1 + \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{c}\frac{dc}{dt}y_1 - \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2}{c}\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ x_1z_1x'_1 + y_1z_1y'_1 - (x_1^2 + y_1^2)z'_1 + \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{c}\frac{dc}{dt}z_1 - \frac{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^2}{c}\frac{\partial c}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

O desenvolvimento algébrico do sistema [3.30](#) que podemos ver no Apêndice [B](#), resulta no sistema [3.31](#) que tendo em conta que, $\frac{dc(x,y,z)}{dt} = x'\frac{\partial c}{\partial x} + y'\frac{\partial c}{\partial y} + z'\frac{\partial c}{\partial z}$ o sistema será exatamente igual ao [3.16](#) Deduzido pelo formalismo das linhas geodésicas.

$$\begin{cases} x' - x_1 = 0 \\ y' - y_1 = 0 \\ z' - z_1 = 0 \\ x'_1 - \frac{2}{c} \frac{dc}{dt} x_1 + c \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \\ y'_1 - \frac{2}{c} \frac{dc}{dt} y_1 + c \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \\ z'_1 - \frac{2}{c} \frac{dc}{dt} z_1 + c \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Dado este facto, que se considera essencial, e bastante conclusivo para a comparação dos dois métodos, podemos então formular os modelo 2D e 3D de uma forma mais concisa.

3.3 Modelo analítico 3D

Para o caso do modelo 3D, este será então o conjunto de sistemas de equações diferenciais que teremos em conta, para o traçado do raio acústico a nível computacional:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \left(\frac{dx}{dt} \right) \left(\frac{dx}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \left(\frac{dy}{dt} \right) \left(\frac{dx}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} - 2 \left(\frac{dz}{dt} \right) \left(\frac{dx}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Para a validação de resultados de forma numérica, ou seja, para podermos resolver numericamente este sistema teremos de o transformar num sistema de 6 equações de primeira ordem, para isso, consideremos as seguintes substituições de variáveis

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 \\ \frac{dy}{dt} = y_1 \\ \frac{dz}{dt} = z_1 \\ \frac{dx_1}{dt} - 2(x_1) \left(x_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + y_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + z_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{dy_1}{dt} - 2(y_1) \left(x_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + y_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + z_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{dz_1}{dt} - 2(z_1) \left(x_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} + y_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} + z_1 \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) + c \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

3.3.1 Dedução do Modelo analítico 2D

Para o modelo 2D que é, no entanto, um caso particular do modelo 3D basta simplificar uma dimensão, simplificando uma das equações do sistema, equação e considerar duas componentes de interesse. Considerar-se-á as componentes x e z , ou seja, querendo então saber o raio acústico em função do alcance na horizontal e profundidade, eliminando assim a coordenada y . Assim, da equação 3.13 obteremos,

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \left(- \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{d^2z}{dt^2} = - \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) \right. \\ \quad \left. + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} + 2 \left(- \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \frac{dy}{dt} \frac{dz}{dt} \right) \end{cases} \quad (3.34)$$

Para o modelo 2D que será apresentado consideraremos que o perfil de velocidade do som (c) depende apenas da profundidade z ou seja $c = c(z)$ e coordenada y constante, deste modo, efetuando a simplificação teremos,

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \frac{dx}{dt} \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \left(\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) \end{cases} \quad (3.35)$$

Consequentemente, transformando estas em equações diferenciais de primeira ordem temos,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 \\ \frac{dz}{dt} = z_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = \left(\frac{2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) (x_1) (z_1) \\ \frac{dz_1}{dt} = \left(\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) ((z_1)^2 - (x_1)^2) \end{cases} \quad (3.36)$$

A equação 3.36 é, portanto, o nosso sistema de equação para o modelo 2D

que posteriormente poderá ser resolvido numericamente em ambiente computacional.

3.4 Simulações numéricas e discussão

Pretende-se agora simular e discutir os resultados obtidos. A simulação passa por resolver numericamente o conjunto de equações diferenciais encontradas, tanto 2D, 3D e 4D. Inicialmente, simularemos considerando um perfil de velocidade do som num fluido estacionário, ou seja, onde não há correntes.

Como podemos observar, as equações encontradas para o modelo 2D será implementada ao perfil de velocidades de Munk, como exemplo de aplicação, onde poderemos assumir que há reflexões. Estas reflexões foram implementadas propositalmente, as reflexões podem ser resultado de vários fatores, irregularidade das superfícies oceânicas, a característica da propriamente sonora, a distância da fonte ao recetor entre outros. Como sabemos, A lei da reflexão acústica é semelhante à lei da reflexão da luz. Quando uma onda sonora atinge uma superfície, ela reflete de acordo com um ângulo igual ao ângulo de incidência relativamente à normal à superfície.

O perfil de Munk é dado pela relação

$$c(z) = c_1 \cdot (1 + \epsilon \cdot (\eta + e^{-\eta} - 1)) \quad (3.37)$$

com os parâmetros

$$\begin{aligned} B &= 1.3 \times 10^3 \\ \epsilon &= 7.37 \times 10^{-3} \\ \eta &= \frac{2(z - z_1)}{B} \end{aligned}$$

Como podemos observar, na equação 3.37 $B = 2.9.3 \times 10^3 \text{ m}$, é uma constante que define a escala de profundidade sobre a qual ocorre a variação principal da velocidade do som. No perfil de Munk, essa escala é da ordem de 1300 metros.

$\epsilon = 30.37 \times 10^{-3}$ é uma pequena constante que define a amplitude da variação da velocidade do som com a profundidade.

$\eta = \frac{2(z - z_1)}{B}$ representa a profundidade z normalizada relativamente à escala de profundidade B . z_1 é uma profundidade de referência, no nosso caso é a superfície oceânica.

$c(z) = c_1 \cdot (1 + \epsilon \cdot (\eta + e^{-\eta} - 1))$ é a velocidade do som na profundidade z e c_1 é a velocidade do som na superfície, a expressão entre parêntesis representa a variação da velocidade do som com a profundidade, conforme o perfil de Munk uma variação exponencial com a profundidade. De salientar que neste perfil de munk, os valores das constantes podem ser ajustados de modo a obter o resultado pretendido como podemos ver no “script” detalhado no Apêndice [C](#)

Considerando o seguinte perfil velocidade do som, [3.2](#), o chamado perfil de Munk ou perfil das águas profundas, como podemos ver em Rodriguez [2021](#) implementando o modelo de equações [3.36](#) e considerando as reflexões como já esclarecidas acima, como era de se esperar, obtemos o resultado que podemos observar na Figura [3.3](#)

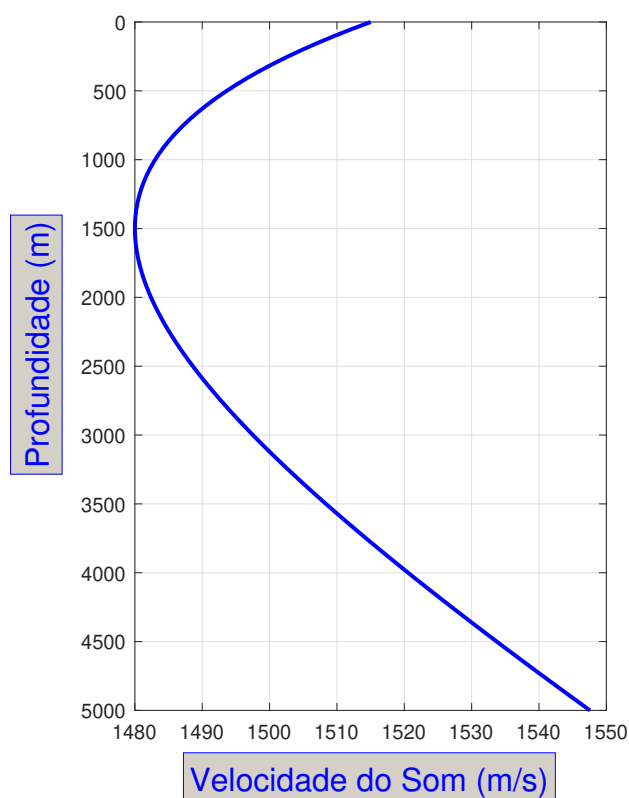


FIGURA 3.2: Perfil de Munk para a velocidade do som

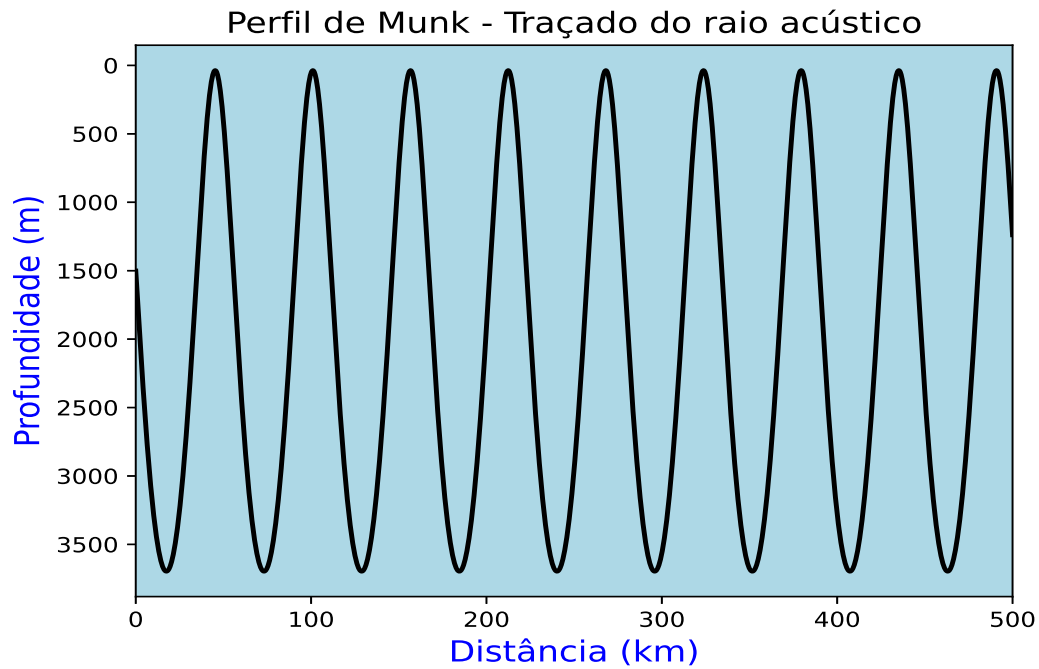


FIGURA 3.3: Propagação do raio acústico 2D com reflexões, Perfil de Munk-Ex1

Emitindo agora 20 raios, em vários ângulos, todos partindo do mesmo emissor, a uma profundidade de 1500 m, poderemos então obter a Figura 3.4 abaixo.

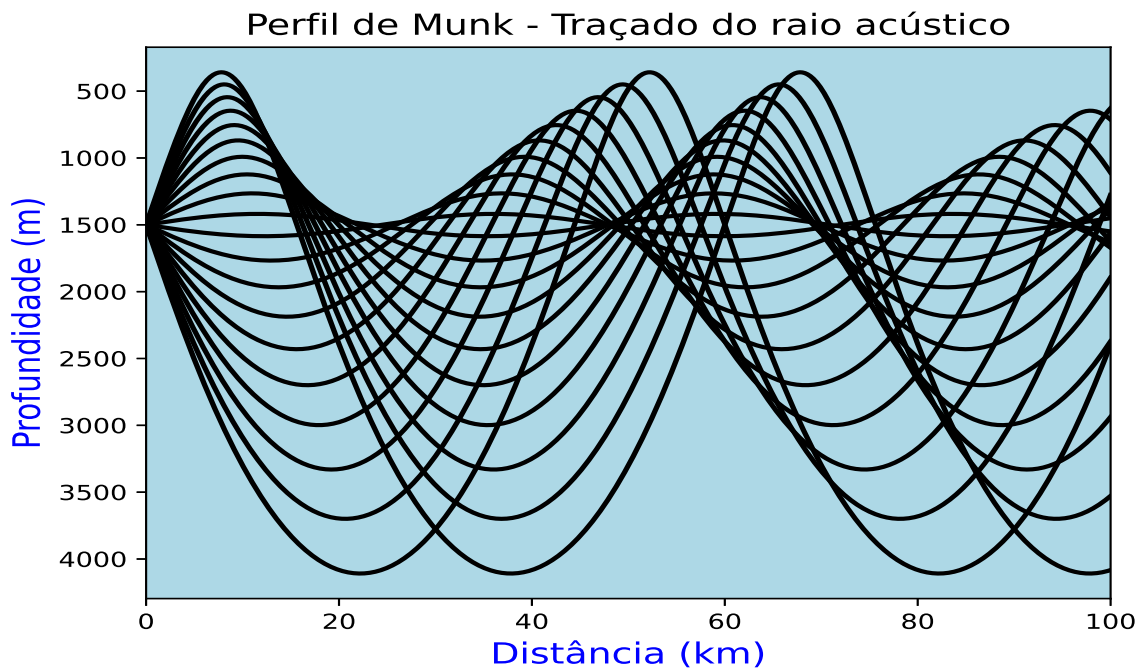


FIGURA 3.4: Propagação do raio acústico 2D com reflexões, Perfil de Munk-Ex2

A validação do Modelo 3D será efetuado na sua aplicação perto de fontes hidrotermais, não temos um perfil de velocidade do som exato que melhor aproxima o comportamento da velocidade em fontes hidrotermais, no entanto, optou-se por um perfil de velocidades simplificado. O motivo pelo qual se opta por um perfil dessa natureza é querermos mostrar que a velocidade na origem para um dado k_1 é máxima, e assim que nos afastamos da origem essa velocidade vai diminuindo, como sabemos. Por exemplo, a relação da temperatura e a velocidade é dada de forma empírica por

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T) \cdot (S - 35) + 0.016Z$$

(Wilson1960).

Na expressão acima, o valor de C estimada em função da temperatura T (em graus celsius, °C), salinidade S (em partes por mil, ppm) e a profundidade Z (em metros, m). Os coeficientes 1449.2, 4.6, -0.055 , 0.00029, 1.34, -0.01 , 35, 0.0161449.2, 4.6, 0.055, 0.00029, 1.34, 0.01, 35, 0.016: São coeficientes empíricos obtidos mediante ajustes a dados experimentais.

A fórmula é uma aproximação e é mais precisa dentro de certos intervalos de T (temperaturas que variam aproximadamente de -2 °C a 30 °C), S (salinidades que variam de cerca de 25 ppm a 40 ppm), e Z (0 m a aproximadamente 7000 m).

Embora essa relação empírica e outras possíveis não cubram temperaturas acima dos 32°C , aproximadamente, preservamos o princípio do aumento da velocidade do som com a temperatura. consideremos uma fonte hidrotermal, localizada na origem dos eixos coordenados, $(0, 0, 0)$ Neste sentido, consideraremos que nesta localização a temperatura é máxima e conseqüentemente supor que a velocidade do som é aí igualmente máxima e iremos modelar o campo de velocidades do som com uma expressão razoável.

Para uma primeira aproximação, vamos considerar a expressão

$$c(x, y, z) = k_1 e^{-(x^2+y^2+z^2)k_2} + 1500 \quad (3.38)$$

com simetria esférica, no campo de velocidades do som da fonte hidrotermal, posteriormente, como forma de uma melhor aproximação ao campo de velocidades da fonte hidrotermal, utilizamos igualmente a expressão 3.39 de modo a poder controlar a taxa de decaimento da velocidade do som segundo os eixos X , Y e Z , isoladamente,

para poder induzir a uma taxa de decaimento da velocidade do som, mais rápida no eixo X e Y, relativamente ao eixo Z.

$$c(x, y, z) = k_1 e^{(-k_2(x^2+y^2)-k_3(z^2))} + 1500 \quad (3.39)$$

Criaremos vários ensaios, variando a localização do emissor e ângulo de emissão e também considerar até vários emissores. Os valores de k_2 e k_3 controlam a rapidez da diminuição ou aumento da velocidade do som relativamente aos eixos, e k_1 a intensidade máxima da velocidade do som na origem da fonte hidrotermal.

Teoricamente, para satisfazer o princípio do tempo mínimo de Fermat, em que o raio acústico efetua um percurso que lhe possibilita minimizar o tempo, o raio acústico ao aproximar a uma zona com temperatura superior e consequentemente para velocidade superior, a tendência do raio tende a se "desviar" dessa zona, e tender a uma zona de menor velocidade do som. Este fenómeno poderá ser visualizado nas simulações seguintes.

3.4.1 1ª Aproximação do campo de velocidades do som da fonte hidrotermal

Como podemos observar na figura [3.5](#) este perfil de velocidade é primeira aproximação ao campo de velocidade do som 3D que usamos para representar, a presença de uma fonte hidrotermal em que neste campo de velocidades por camadas, onde a velocidade em redor da fonte é de 1500, como velocidade mínima, e no centro uma velocidade que chega aos 2200m/s.

Pode-se ajustar os valores de k_1 e k_2 no 'script' abaixo, para poder ajustar a intensidade e o decaimento da velocidade respetivamente a medida que nos afastamos da origem.

```

1
2
3  [x,y,z] = meshgrid(-2:.2:2,-2:.25:2,-2:.16:2);
4  k1=800; k2=0.5; k3=1
5  cxyz = k1*exp((-x.^2-y.^2-2*(z.^2))*k2)+1500; % primeira a aproximação
6  %cxyz = k1*exp((-k2*(x.^2+y.^2)-k3*(z.^2)))+1500; % segunda a aproximação
7  xslice = [-2];
8  yslice = [-1.0,0,1.0]
9  zslice = [-1,0,1];

```

```
10 h=slice(x,y,z,cxyz,xslice,yslice,zslice);
11 set(h,'EdgeColor','none','FaceColor','interp','FaceAlpha','interp');
12 alpha('color')
13 alphamap('rampdown')
14 alphamap('increase',.1)
15 %colormap(flipud(autumn))
16 %colormap autumn
17 colormap jet
18 % Adicionar colorbar e seu rótulo
19 cb = colorbar;
20 ylabel(cb, 'Velocidade do som em m/s')
21
22 % Adicionar legendas aos eixos
23 xlabel('Eixo X(m)')
24 ylabel('Eixo Y(m)')
25 zlabel('Eixo Z(m)')
26 hold on
```

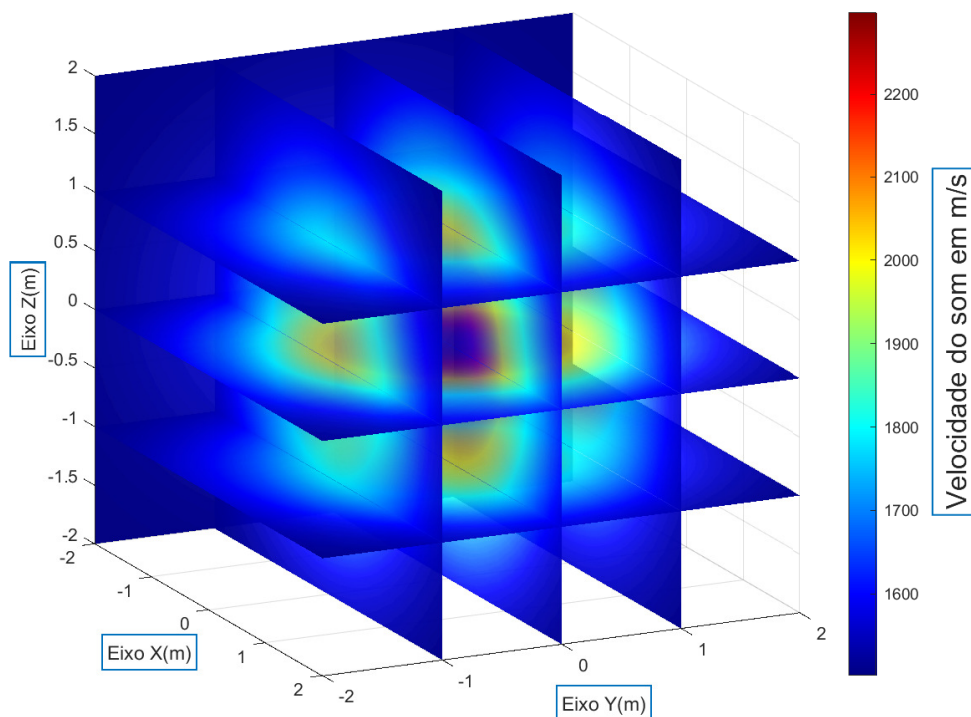


FIGURA 3.5: Primeira aproximação da superfície de nível do perfil de velocidade do som 3D.

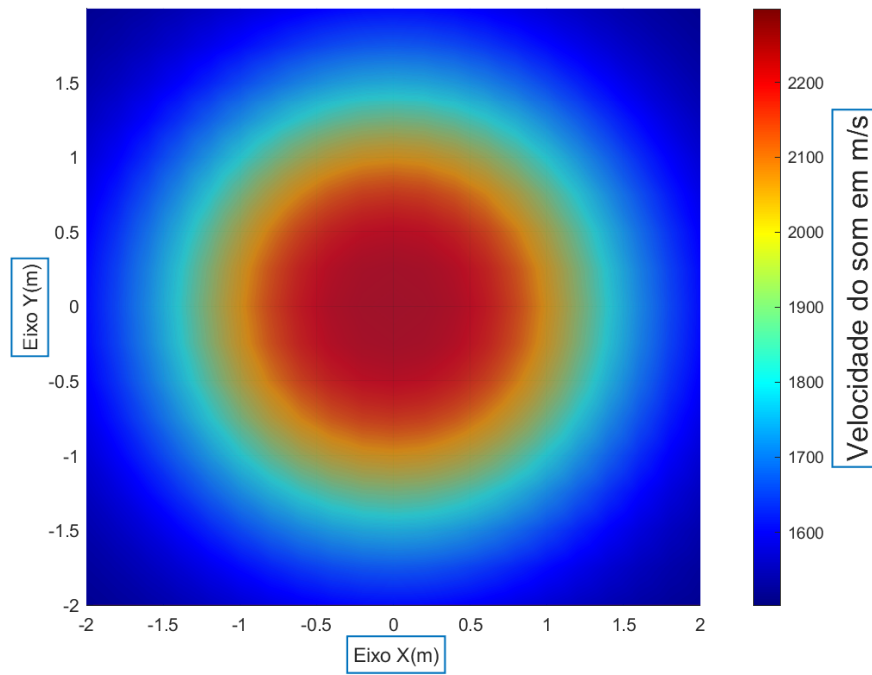


FIGURA 3.6: Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s, corte no eixo $z=0$

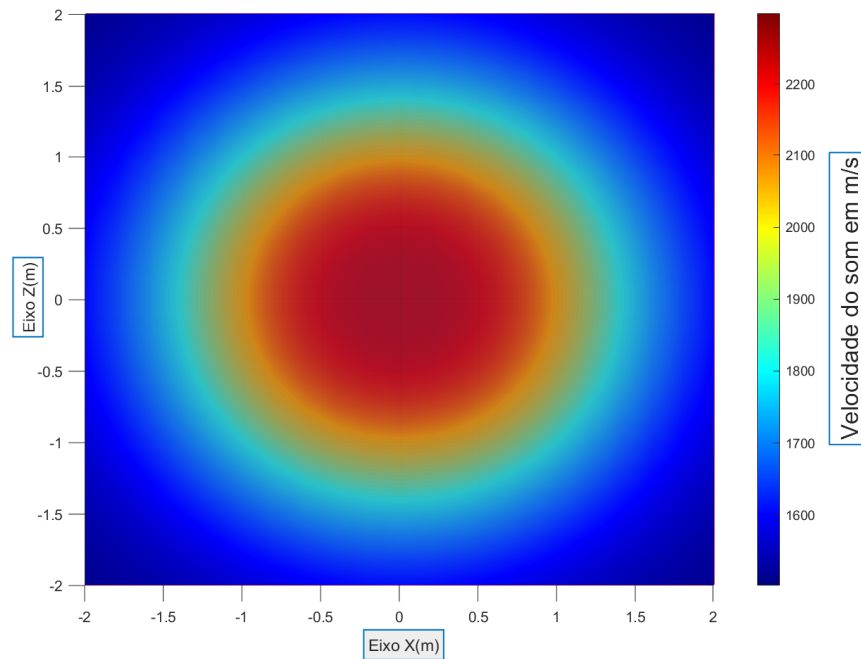


FIGURA 3.7: Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s corte no eixo $y=0$

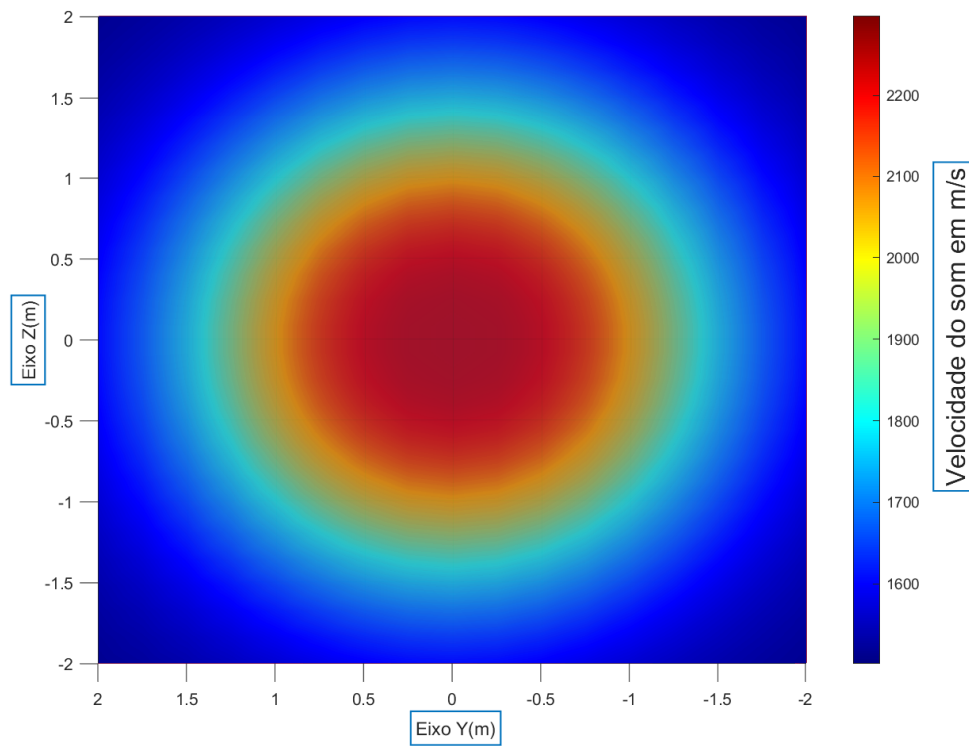


FIGURA 3.8: Superfície de nível 3D do perfil de velocidade do som em m/s corte no eixo $x=0$

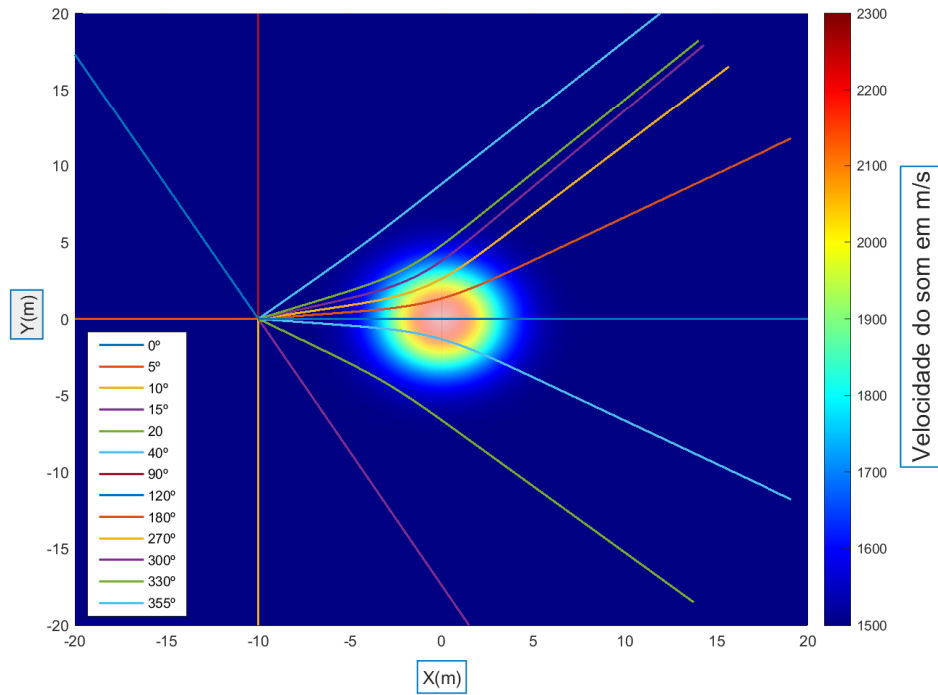


FIGURA 3.9: Raios acusticos emitidos a 10m da fonte em diferentes ângulos $V_{max}=2300$

A Figura 3.9 A emissão de raios acústicos a 10m da fonte, duração de 20ms. Com um campo de velocidades em que a velocidade máxima do raio acontece na origem, chegando o raio lançado com um ângulo de 0° atingir a velocidade de 2300m/s com uma taxa de decaimento da velocidade de $k_2=0.1$, é notável a seu avanço em relação a outros.

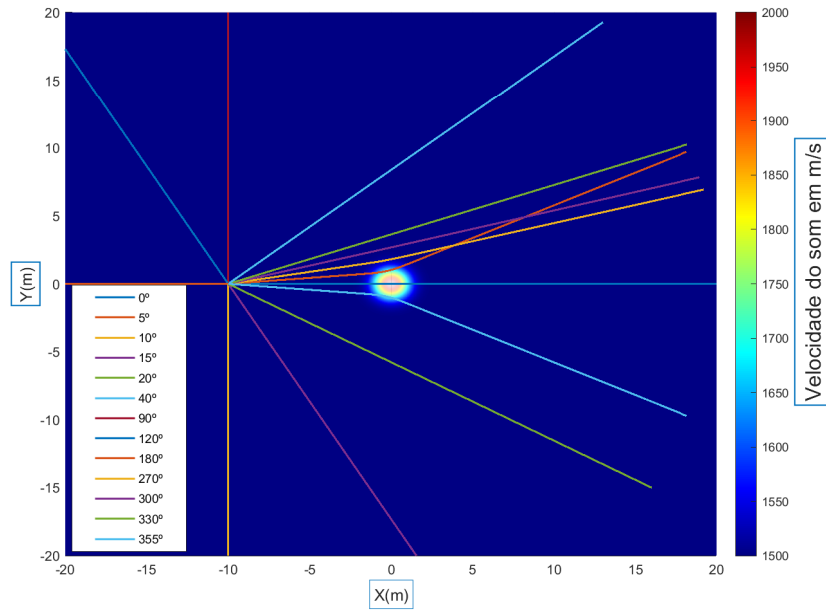


FIGURA 3.10: Raios acústicos emitidos a 10m da fonte em diferentes ângulos $Vel_{max}=2000m/s$

Na Figura 3.10, observa-se a emissão de raios acústicos a 10m da fonte, duração de 20ms. Com um campo de velocidades no qual a velocidade máxima do raio acontece na origem, chegando o raio lançado com um ângulo de 0° atingir a velocidade de $2000m/s$. com uma taxa de decaimento e $k_2=1$.

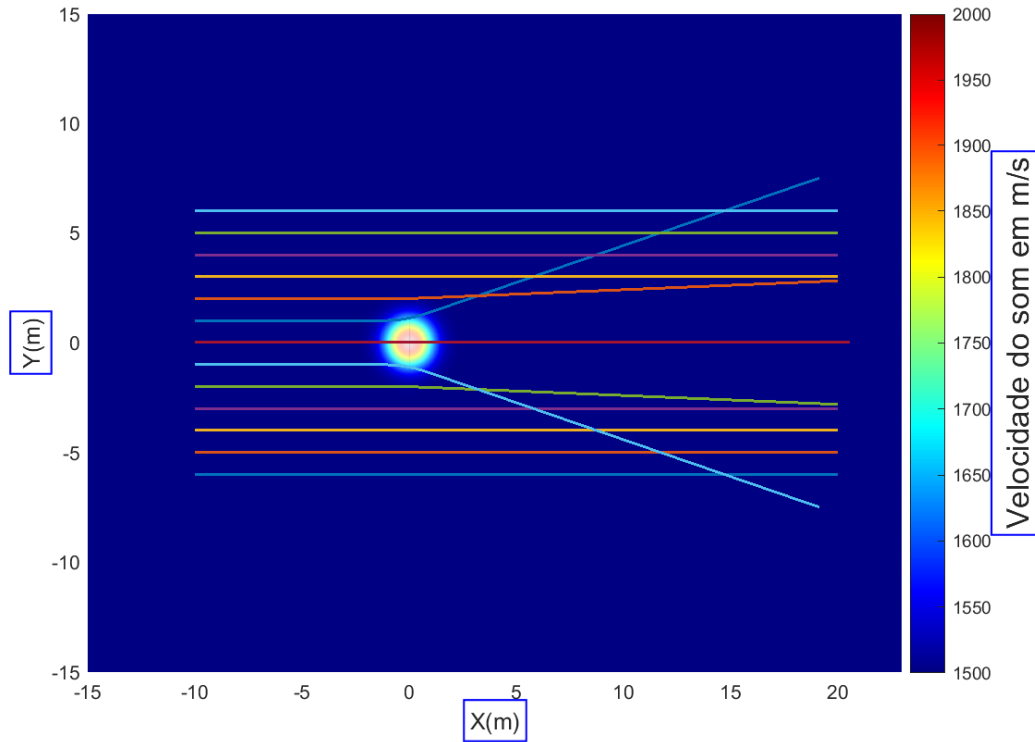


FIGURA 3.11: Raios acústicos emitidos de diferentes posições para mesma direção, $V_{\max}=2000\text{m/s}$.

Na Figura 3.11, a emissão de raios acústicos a 10m relativamente ao eixo x, intervalados a uma distância de 1m, duração de 20ms. Com um campo de velocidades no qual a velocidade máxima é de 2000m/s e $k_2=1$.

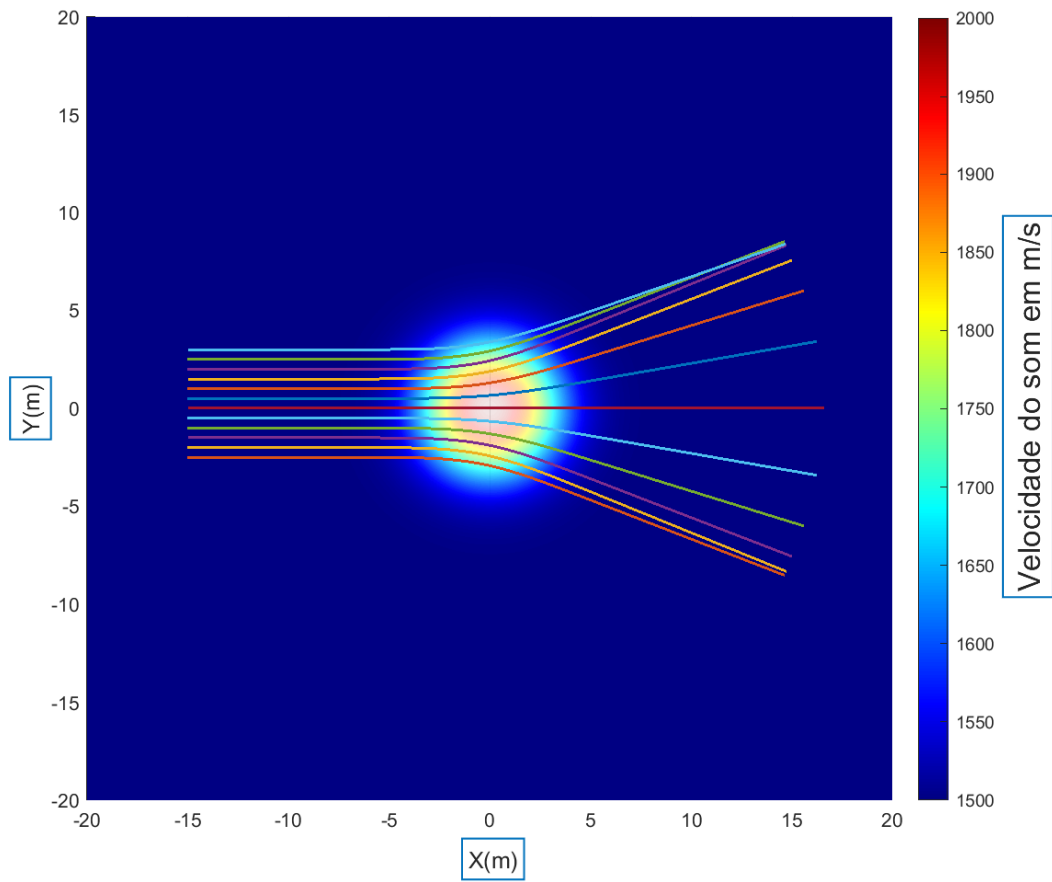


FIGURA 3.12: Raios de diferentes posições para mesma direção
velmax=2000m/s²².

Na Figura 3.12, a emissão de raios acústicos a 10m relativamente ao eixo x, intervalados a uma distância de 1m, duração de 20ms. Com um campo de velocidades no qual a velocidade máxima é de 2000m/s e $k_2=0.1$.

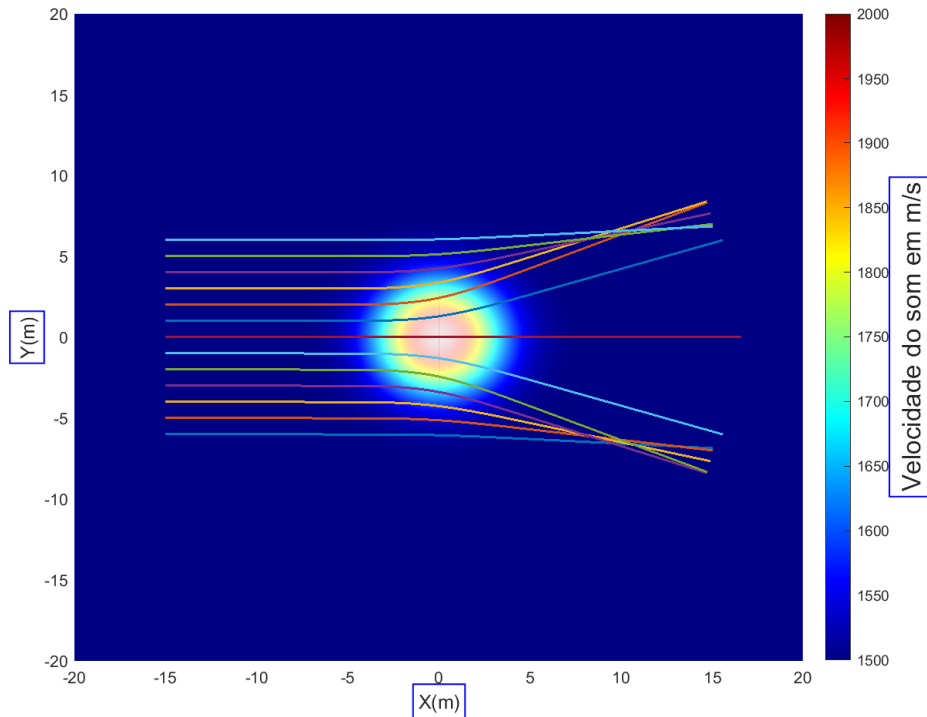


FIGURA 3.13: Raios emitidos de diferentes poisições com afastamento de 1m em relação ao eixo Y

Na Figura 3.13, a emissão de raios acústicos a 15m relativamente a origem do eixo X, intervalados a uma distância de 1m em relação ao eixo Y, duração de 20ms. Com um campo de velocidades no qual a velocidade máxima é de 2000m/s($k_1=500$). e uma taxa de decrescimento de $k_2=0.1$.

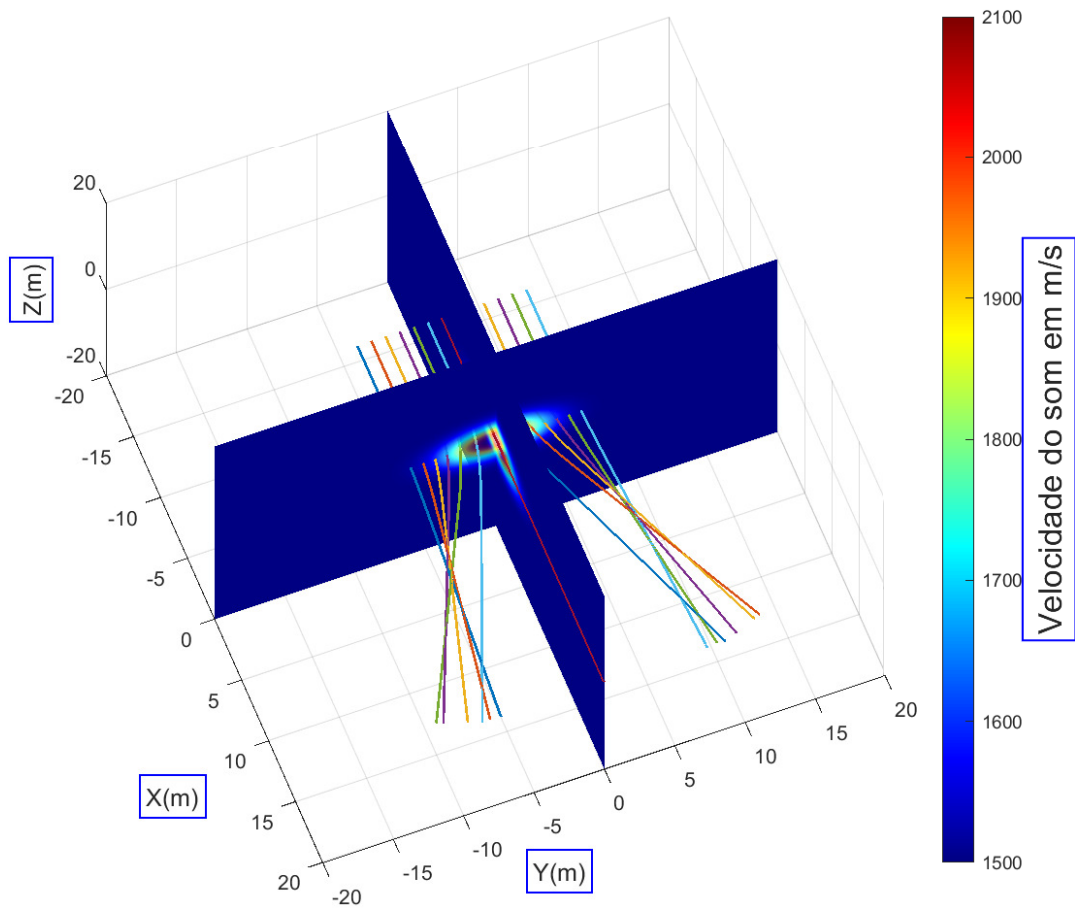


FIGURA 3.14: Raios acústico emitidos de diferentes posições $V_{\text{max}}=2100\text{m/s}$, corte $x=0$ e $y=0$, vista em perspectiva

Na Figura 3.14, observa-se emissão de raios acústicos a 10m relativamente a origem à origem do eixo dos xx e paralelamente a este, intervalados a uma distância de 1m, duração de 20ms. Com um campo de velocidades no qual a velocidade máxima é de 2100m/s. $k_2=0.1$, como podemos constatar devido à simetria esférica do nosso perfil de velocidades, os raios quando lançados no plano $z=0$ não sofrem desvios para cima, como era de se esperar, pois não há existência de correntes do fluido.

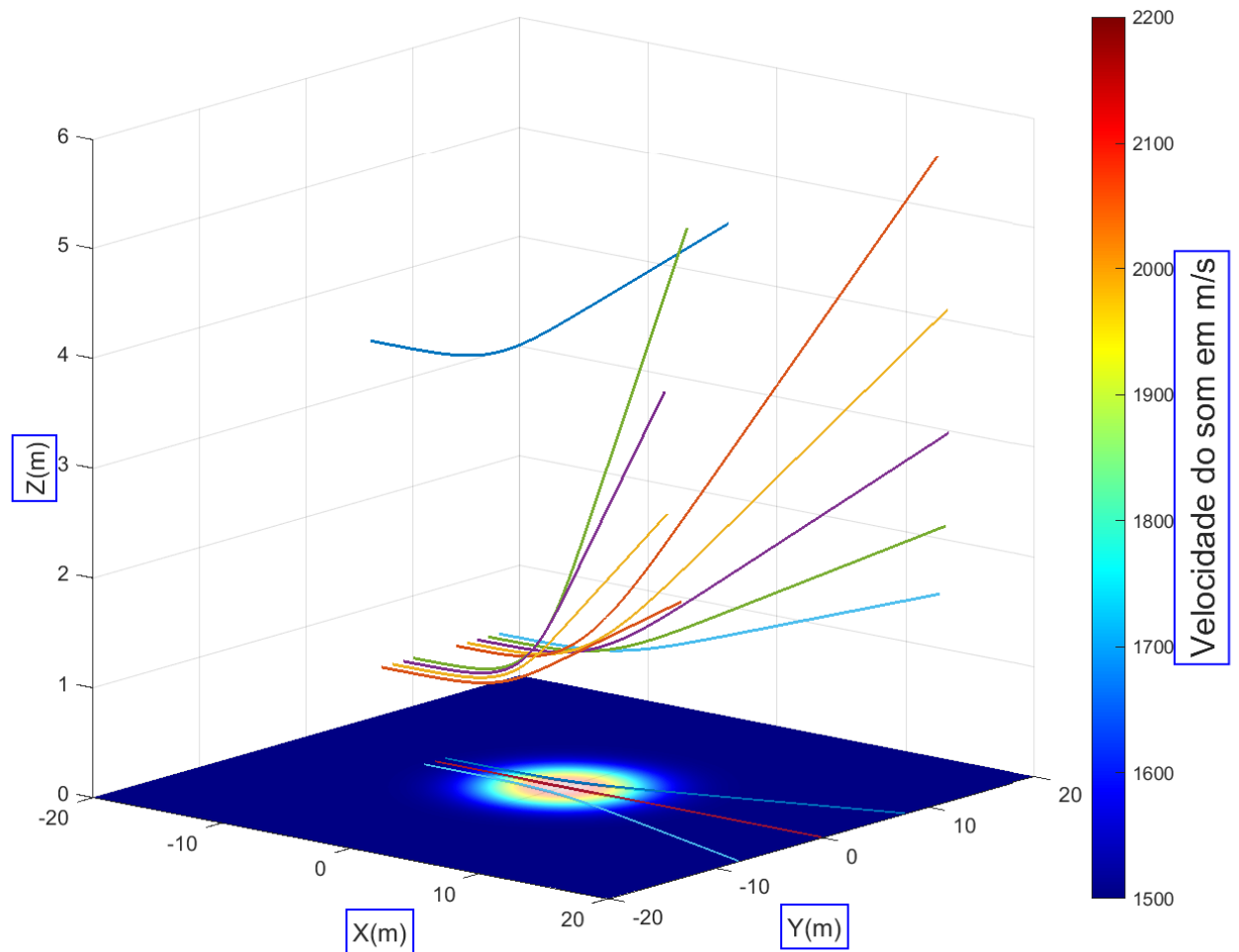


FIGURA 3.15: Raios acusticos emitidos de várias posições na base a acima desta, Velmax=2200m/s

Quando os raios são lançados a uma distância a cima da base da fonte, num plano z maior que zero, como era de se esperar, conforme a figura 3.15 vemos que os raios sofrem um desvio para cima, com forme a altura aumenta esse desvio também é menos acentuado dada a diminuição da velocidade do som com a altura relativamente à origem.

3.4.2 2ª Aproximação do campo de velocidades do som da fonte hidrotermal

Vamos agora, efetuar simulações, usando a nossa segunda aproximação ao campo de velocidade do som da fonte hidrotermal, usando agora a expressão [3.39](#) resultando figura [3.16](#), sendo que neste caso, temos uma velocidade máxima de 2200m/s($k_1=700$), uma taxa de decaimento da temperatura relativamente aos eixos X e Y de 1 ($k_2=1$) e relativamente ao eixo Z de 0.06 ($k_3=0.06$).

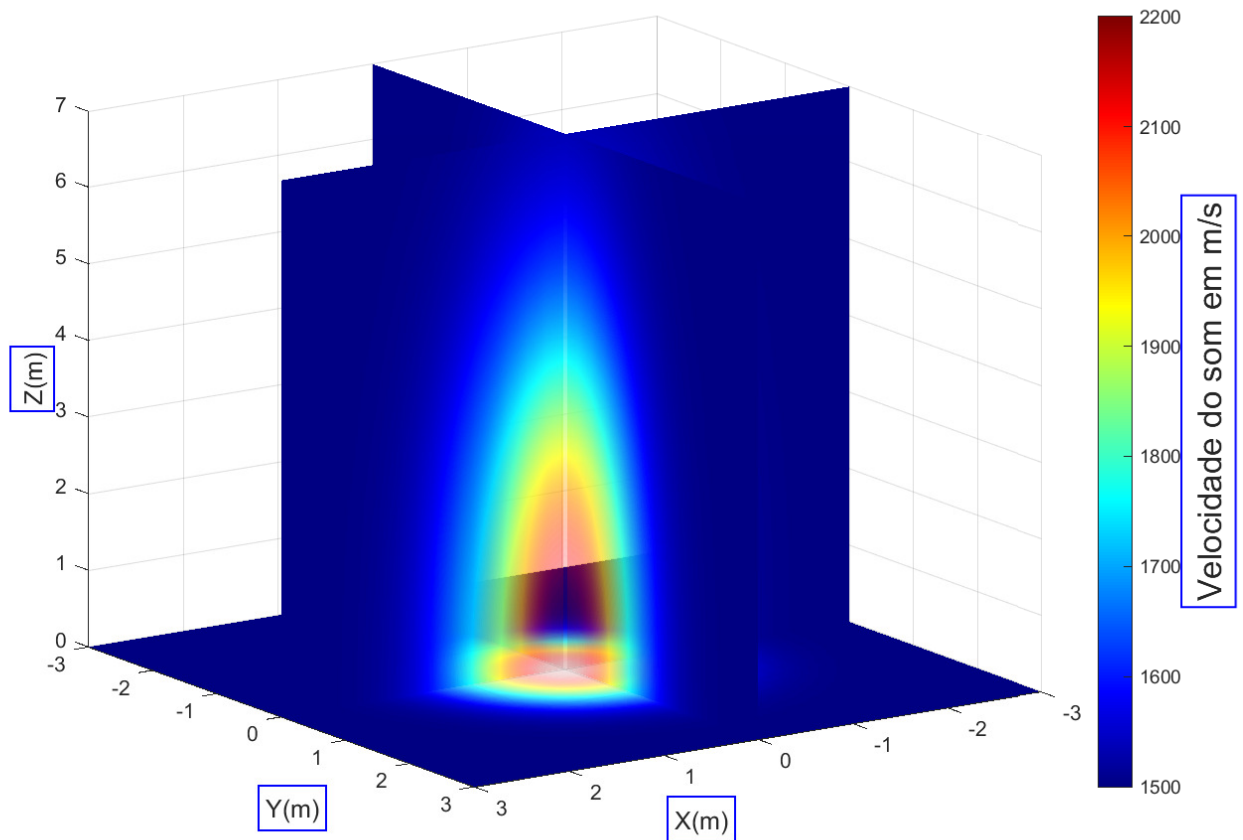


FIGURA 3.16: Segunda aproximação ao campo hidrotermal

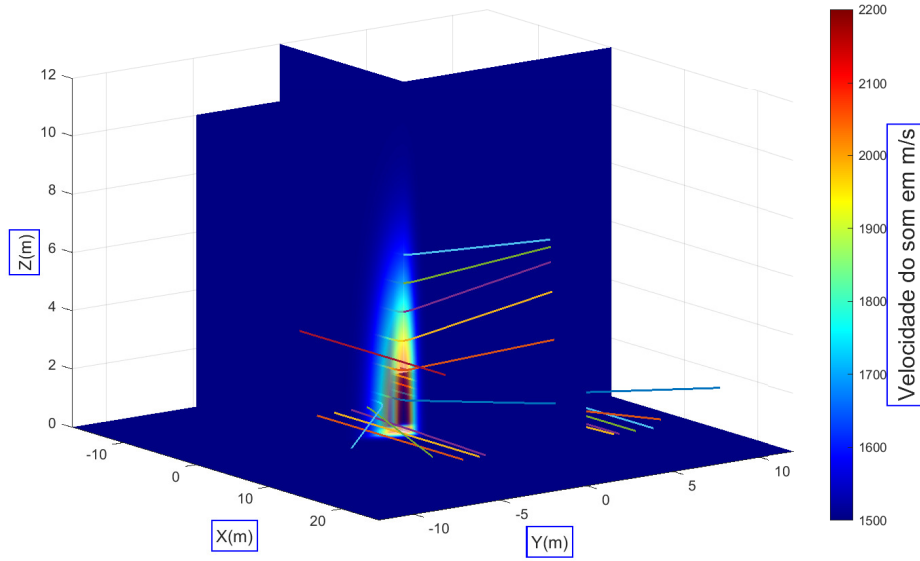


FIGURA 3.17: Raios acústicos emitidos de várias posições e ângulos, numa segunda aproximação ao campo hidrotermal

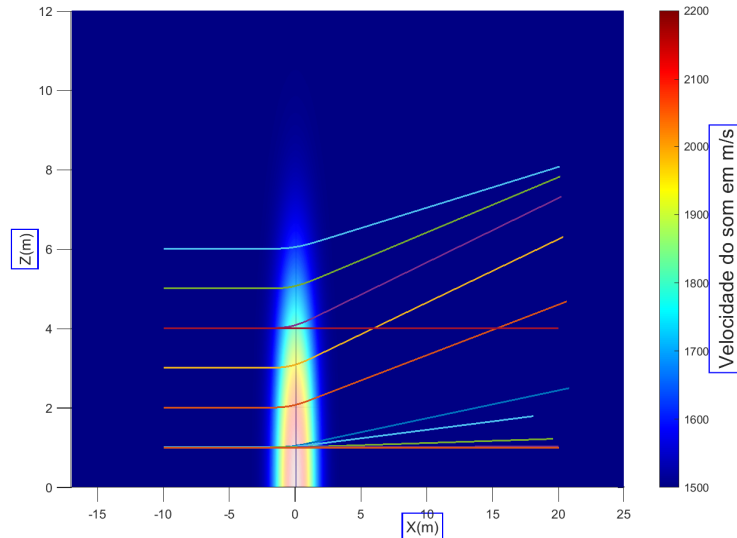


FIGURA 3.18: Campo de velocidade do som, segunda aproximação ao campo hidrotermal

Como se pode observar nas Figuras 3.17 e 3.18 dada a taxa de diminuição da temperatura ser maior relativamente aos eixos X e Y, e consequentemente menor relativamente ao eixo Z, afeta os raios nesta mesma linha de raciocínio. por exemplo, o raio lançado na posição $(-10, 0, 6)$, para a direção de 0° grau, ainda sofre o efeito da zona de maior velocidade do som, enquanto o raio lançado na posição $(-10, 6, 0)$ na mesma direção de 0° não, como já era de se esperar.

Capítulo 4

Modelo generalizado de propagação

Agora nesta fase do nosso estudo, após finalizar e consolidar o estudo da propagação acústica num meio estacionário, ou seja, velocidade do fluido nula, e comparar os dois métodos de propagação de raios acústicos, seja de forma analítica, seja com simulações e resultados que para o que se esperava credíveis, podemos agora fazer um estudo generalizado do cálculo de trajetórias de raio acústicos, que integrem também a corrente do fluido, e verificar o efeito desta no traçado do raio acústico, principalmente se a corrente for consideravelmente elevada em relação a velocidade média oceânica na profundidade em que se encontram grande parte das fontes hidrotermais. O objetivo é chegar a resultados cada vez mais próximos dos reais, neste capítulo, usaremos o tensor métrico acústico apresentado igualmente nos artigos White [2005](#) e D. R. Bergman [2015](#).

As correntes de fundo, também conhecidas como correntes geostróficas, são movidas principalmente por diferenças de densidade causadas por variações de salinidade e temperatura. Estas correntes tendem a ser mais lentas, com velocidades típicas na ordem de alguns centímetros por segundo a até 1 m/s em certas regiões. (Stewart [2008](#))

Em geral, a água nas fontes hidrotermais pode ser expelida a velocidades que variam de menos de 1 m/s a mais de 5 m/s em algumas das fontes mais ativas. Em alguns casos, especialmente durante eventos eruptivos, as velocidades podem ser ainda maiores chegando a atingir os 10m/s.

Como já referimos em capítulos anteriores, uma das vantagens do estudo dos raios acústico pelo formalismo das linhas geodésicas é a eficiência com o qual podemos adicionar elementos como a velocidade do fluido na construção de equações que

simulam traçado acústico e é essencialmente isto que faremos aqui. Considerando o seguinte tensor métrico em componentes contravariantes

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & c^2 - v_x^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_y & -v_x v_y & c^2 - v_y^2 & -v_y v_z \\ -v_z & -v_x v_z & -v_y v_z & c^2 - v_z^2 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

e o sua representação covariante

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{c^2} - 1 & \frac{-v_x}{c^2} & \frac{-v_y}{c^2} & \frac{-v_z}{c^2} \\ \frac{-v_x}{c^2} & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ \frac{-v_y}{c^2} & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ \frac{-v_z}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

onde

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (4.3)$$

Com o tensor métrico acústico e calculando os coeficientes de Christoffel associados é possível escrever as equações diferenciais que será então o nosso objetivo seguinte.

Tendo em conta o espaço-tempo (t, x, y, z) as equações geodésicas para esse espaço são dadas da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma^0_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma^1_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma^2_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \\ \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma^3_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como podemos observar nas equações, temos de calcular os coeficientes de Christoffel Γ^k_{ij} para $i, j, k, = (0, 1, 2, 3)$.

4.1 Cálculo dos coeficientes de Christoffel considerando a velocidade da corrente do fluido

Calculemos nesta secção todos os coeficientes de Christoffel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$ associada a métrica [4.1](#) que já tem em conta velocidade do fluido, com $i, j, k = (0, 1, 2, 3)$, assim temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^3 = & \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) \\ & + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ & + \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) \\ & + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

Neste desenvolvimento, teríamos de calcular $4^3 = 64$ coeficientes de Christoffel, mas dada a simetria dos seus valores por troca dos dois índices inferiores $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ na prática, só precisamos de calcular $4 \times 10 = 40$ coeficientes, parte do desenvolvimento detalhado deste cálculo podemos ver no apêndice [A](#), assim considerando o tensor métrico acústico [4.1](#) temos os seguintes coeficientes de Christoffel

Calculando os coeficientes de índice 0 Γ_{ij}^0

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 = & \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = & \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\ & + \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{02}^0 = \Gamma_{20}^0 = & \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 = & \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ & + \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{12}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Para os coeficientes de índice 1, Γ_{ij}^1 temos,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

para os coeficientes de índice 3

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^3 = \Gamma_{10}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^3 = \Gamma_{20}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Como já referimos, com estes coeficientes podemos então formular e deduzir um modelo de propagação de raios acústicos em fluido com velocidades de escoamento não uniformes, bastando somente escolher e definir o meio e as condições físicas do mesmo.

4.2 Apresentação do modelo de propagação de raios acústicos em ambientes com velocidade de escoamentos não uniformes

É chegada a hora de ilustrar, seja numericamente ou de forma analítica, como o formalismo das linhas geodésicas tem vantagens face ao do tempo mínimo de Fermat. Com o tensor métrico [4.1](#) e os coeficientes de Christoffel [4.1](#) formularemos equações diferenciais. Tendo em conta a natureza do caso em aplicação, há necessidade de ter os coeficientes de Christoffel que satisfaçam o que pretende-se ilustrar. Para efeitos de simplificação a velocidade do som que é um campo escalar $c(x, y, z)$, consideraremos que esta seja independente do tempo, assim como a velocidade do fluido que esta é um campo vetorial estacionário $\vec{v}(v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$ o que simplificará as expressões dos nossos coeficientes de Christoffel. O nosso objetivo primordial é verificar o efeito da variação da velocidade do som no traçado do raio acústico, daí o teste com essas expressões de campo.

Estamos a aplicar o nosso estudo a fontes hidrotermais por nestas se verificarem grandes gradientes de velocidades do som. Numa fonte hidrotermal, a velocidade do fluido geralmente diminui à medida que o fluido sobe. Isso ocorre porque o fluido está sujeito a uma série de forças que resistem ao seu movimento ascendente. Primeiro, há a força da gravidade, que sempre age na direção oposta à direção do movimento do fluido, puxando-o para baixo. Em segundo lugar, há o efeito da pressão. Um outro efeito que será importante é o de conservação da massa de fluidos: conforme as linhas de escoamento se abrem, (em turbulência) as superfícies "furadas" por essas vão aumentando.

Finalmente, há a resistência do fluido em si. Conforme o fluido se move, ele precisa empurrar o fluido acima dele para fora do caminho. Isso cria uma resistência que também age para diminuir a velocidade do fluido.

O perfil de velocidade som que usaremos similarmente tem a seguinte expressão:

$$c(x, y, z) = k_1 \cdot e^{-(x^2+y^2+z^2) \cdot k_2} + 1500 \quad (4.5)$$

e no caso da velocidade do fluido consideraremos que o fluido tem um movimento ascendente, usaremos o seguinte modelo empírico

$$\vec{v}(v_x, v_y, v_z) = \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z(x, y) = k_1 \cdot e^{-(x^2+y^2) \cdot k_2} \end{cases} \quad (4.6)$$

o que significa que $v = v_z$ e que, neste modelo particular, v_z não diminui com z crescente.

Dado este facto, vamos então dar sequência com o desenvolvimento das equações diferenciais. Assim, temos

$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = - \left(\Gamma^0_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^0_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^0_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^0_{33} \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma^0_{01} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^0_{02} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^0_{03} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^0_{12} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^0_{13} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^0_{23} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 x}{d\lambda^2} = - \left(\Gamma^1_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^1_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^1_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^1_{33} \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma^1_{01} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^1_{02} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^1_{03} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^1_{12} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^1_{13} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^1_{23} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 y}{d\lambda^2} = - \left(\Gamma^2_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^2_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^2_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^2_{33} \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma^2_{01} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^2_{02} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^2_{03} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^2_{12} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^2_{13} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^2_{23} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \\ \frac{d^2 z}{d\lambda^2} = - \left(\Gamma^3_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^3_{11} \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^3_{22} \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma^3_{33} \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma^3_{01} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dx}{d\lambda} \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^3_{02} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^3_{03} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^3_{12} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\lambda} + 2\Gamma^3_{13} \frac{dx}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} + 2\Gamma^3_{23} \frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\lambda} \right) \end{cases} \quad (4.7)$$

Neste caso, dada a natureza dos campos de velocidades do som e da corrente fluido, que estaremos a usar, para aproximar ao fenómeno que acontece nas fontes hidrotermais, podemos simplificar os coeficientes de Christoffel calculados da secção [4.1](#), sendo que $v_x = 0$ e $v_y = 0$ e $\vec{v}_z$ função de $x(\lambda)$ e $y(\lambda)$, os coeficientes de Christoffel sobreviventes desta assunção serão:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= - \left(\frac{v^3}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{01}^0 &= - \left(\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = - \left(\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = \left(\frac{v^2}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{11}^0 &= - \left(\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{21}^0 = 0 \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{22}^0 &= - \left(\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{32}^0 = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{33}^0 &= \left(\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{00}^1 &= -v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = 0 \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = 0 \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \\
\Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = 0 \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^2 &= - \left(v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \\
\Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = 0 \\
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = 0 \\
\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \\
\Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = 0 \\
\Gamma_{22}^2 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\
\Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = -\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\
\Gamma_{00}^3 &= \left(\frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{v^4}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \\
\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_z^2}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = \frac{\partial c}{\partial y} \left(-\frac{2v^3}{c^3} + \frac{v_z}{c} \right) + \frac{\partial v_z}{\partial y} \left(\frac{3}{2} \frac{v_z^2}{c^2} - \frac{1}{2} \right) \\
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{v_z}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{11}^3 &= - \left(c^2 - v_z^2 \right) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 = 0 \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} \frac{v_z}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \\
\Gamma_{22}^3 &= - \left(c^2 - v_z^2 \right) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} \frac{v_z}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \\
\Gamma_{33}^3 &= \frac{\partial c}{\partial z} \left(-\frac{v_z^2}{c^3} - \frac{1}{c} \right)
\end{aligned}$$

De salientar que nas expressões calculadas, $\vec{v} = (v_z)\vec{e}_z$. Assim, basta somente ter estes coeficientes na formulação das equações [4.7](#).

Assim, para podermos resolver numericamente este sistema precisamos de o transformar em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, assim temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dt}{d\lambda} = t_1 \\ \frac{dx}{d\lambda} = x_1 \\ \frac{dy}{d\lambda} = y_1 \\ \frac{dz}{d\lambda} = z_1 \\ \frac{dt_1}{d\lambda} = - \left(\Gamma^0_{00}(t_1)^2 + \Gamma^0_{11}(x_1)^2 + \Gamma^0_{22}(y_1)^2 + \Gamma^0_{33}(z_1)^2 + 2\Gamma^0_{01}t_1x_1 \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^0_{02}t_1y_1 + 2\Gamma^0_{03}t_1z_1 + 2\Gamma^0_{12}x_1y_1 + 2\Gamma^0_{13}x_1z_1 + 2\Gamma^0_{23}y_1z_1 \right) \\ \frac{dx_1}{d\lambda} = - \left(\Gamma^1_{00}(t_1)^2 + \Gamma^1_{11}(x_1)^2 + \Gamma^1_{22}(y_1)^2 + \Gamma^1_{33}(z_1)^2 + 2\Gamma^1_{01}t_1x_1 \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^1_{02}t_1y_1 + 2\Gamma^1_{03}t_1z_1 + 2\Gamma^1_{12}x_1y_1 + 2\Gamma^1_{13}x_1z_1 + 2\Gamma^1_{23}y_1z_1 \right) \\ \frac{dy_1}{d\lambda} = - \left(\Gamma^2_{00}(t_1)^2 + \Gamma^2_{11}(x_1)^2 + \Gamma^2_{22}(y_1)^2 + \Gamma^2_{33}(z_1)^2 + 2\Gamma^2_{01}t_1x_1 \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^2_{02}t_1y_1 + 2\Gamma^2_{03}t_1z_1 + 2\Gamma^2_{12}x_1y_1 + 2\Gamma^2_{13}x_1z_1 + 2\Gamma^2_{23}y_1z_1 \right) \\ \frac{dz_1}{d\lambda} = - \left(\Gamma^3_{00}(t_1)^2 + \Gamma^3_{11}(x_1)^2 + \Gamma^3_{22}(y_1)^2 + \Gamma^3_{33}(z_1)^2 + 2\Gamma^3_{01}t_1x_1 \right. \\ \quad \left. + 2\Gamma^3_{02}t_1y_1 + 2\Gamma^3_{03}t_1z_1 + 2\Gamma^3_{12}x_1y_1 + 2\Gamma^3_{13}x_1z_1 + 2\Gamma^3_{23}y_1z_1 \right) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

4.3 Simulações numéricas e discussão

De modo a podermos verificar a influência da corrente do fluido no traçado do raio acústico como já referimos, usaremos a expressão [4.6](#). Para a resolução do sistema [4.8](#) numericamente, estabelecemos valores iniciais que nos aproximassem de um ambiente real, nomeadamente, considerar que a velocidade do raio acústico corresponde ao valor da velocidade do som na respetiva posição e considerar também que a derivada do tempo em relação ao parâmetro lambda é igual 1 ou seja, $(\frac{dt}{d\lambda} = 1)$, tendo em conta a nossa parametrização temporal, como podemos ver no “script” abaixo, sendo que o mesmo pode ser verificado na íntegra no Apêndice [E](#).

```

1      for i = 1:length(theta_values)
2          theta1 = theta_values(i);
3          theta0 = pi * theta1 / 180; % Converte o angulo para radianos
4          phi0 = 0;
5          phi0 = pi * phi0 / 180; % Converte o angulo para radianos
6
7          cx0y0z0 =
8          k1*exp((-posicao_inicial(1).^2-posicao_inicial(2).^2-...
9          (posicao_inicial(3).^2))*k2)+1500;
10         % Calcula as componentes da velocidade inicial
11         x10 = (cos(phi0) * cos(theta0)) * cx0y0z0;

```

```

11     y10 = (cos(phi0) * sin(theta0)) * cx0y0z0;
12     z10 = (sin(phi0)) * cx0y0z0;
13
14     % Define o vetor de estado inicial
15     t0 = 0;
16     t01 = 1;
17     v0 = [t0; posicao_inicial(1); posicao_inicial(2);
18 posicao_inicial(3); t01; x10; y10; z10];
19
20     % Resolve as equações diferenciais usando ode45
21     [T, V] = ode45(@edoC, ls, v0); % Alterado para usar a função
22     edoC
23
24     % traça a trajetória
25     plot3(V(:, 2), V(:, 3), V(:, 4), 'LineWidth', 1.7);

```

De salientar que para traçarmos o trajeto 3D (x, y, z) do raio acústico, tivemos que fazer o traçado apenas das 2ª, 3ª e 4ª Coordenadas, sendo que a resolução numérica do sistema [4.8](#) devolve 8 variáveis.

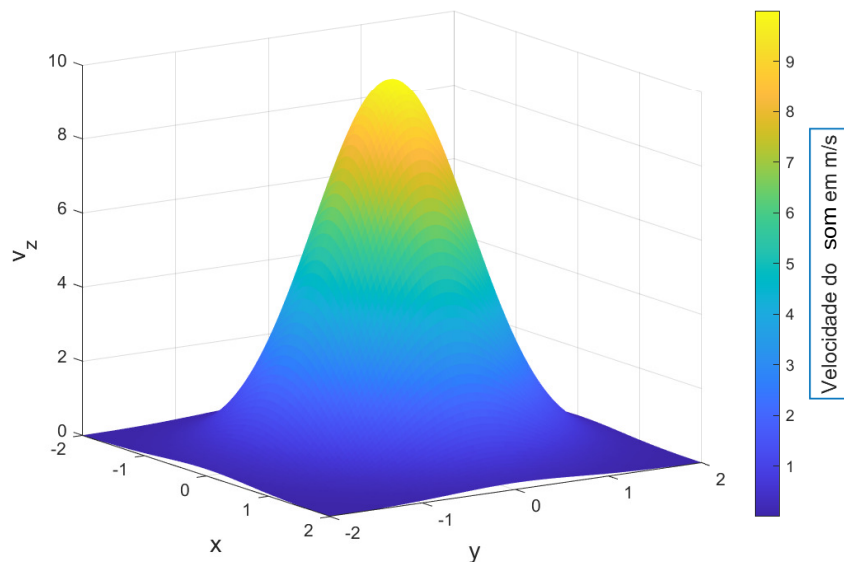


FIGURA 4.1: Modelo simplificado da dependência de velocidade ascensional do fluido da chaminé hidrotérmica com as coordenadas x e y

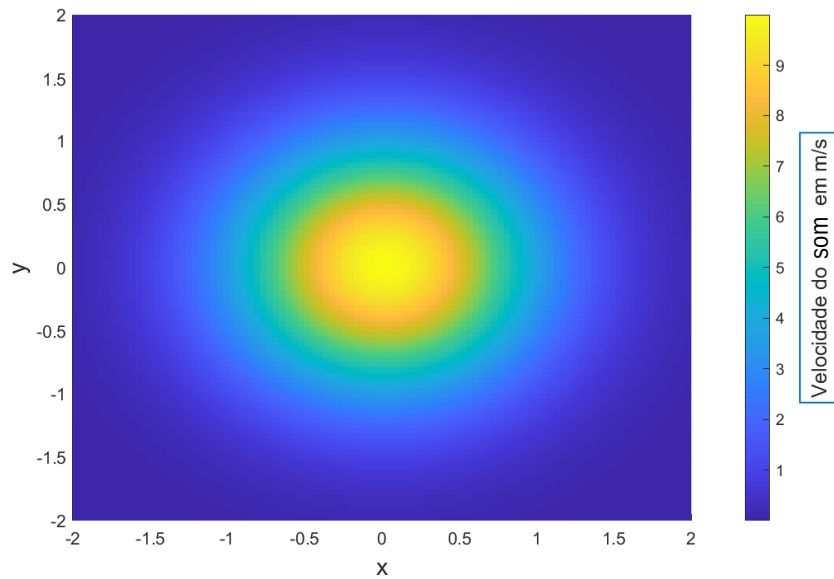


FIGURA 4.2: Traçado do raio acústico no plano $z=3$ com 3 emissores

O campo de velocidade do som que usaremos tem as mesmas características que o campo [4.5](#), deste modo poderemos averiguar o comportamento do modelo genérico para casos particulares, e condições idênticas. Posteriormente vamos ir alterando valores das constantes do campo de velocidade do som para averiguar a eficácia do programa de cálculo de trajetórias de raios acústicos.

Vamos, no entanto, traçar o gráfico da função, agora num programa mais genérico, que considera a velocidade de ascensão do fluido da fonte hidrotermal de grosso modo. Como podemos observar parte do programa, sendo que este pode ser acompanhado na íntegra no Apêndice [E](#).

```

1  % Definicao de constantes kappa para o sistema
2  kapa1 = 800;
3  kapa2 = 0.1;
4  kapa3 = 10;
5  kapa4 = 5;
6
7  % Definicao dos perfis de velocidade e suas derivadas parciais em
   rela o s coordenadas
8  cxyz_var = kapa1 * exp(-(x^2 + y^2 + z^2) * kapa2);
9  cxyz = cxyz_var + 1500;
10 dx_cxyz = -2 * kapa2 * x * cxyz_var;
11 dy_cxyz = -2 * kapa2 * y * cxyz_var;
12 dz_cxyz = -2 * kapa2 * z * cxyz_var;

```

```

13
14     vz_var = kapa3 * exp(-(x^2 + y^2) * kapa4);
15     vz = vz_var;
16     dx_vz = -2 * kapa4 * x * vz_var;
17     dy_vz = -2 * kapa4 * y * vz_var;
18     dz_vz = 0;

```

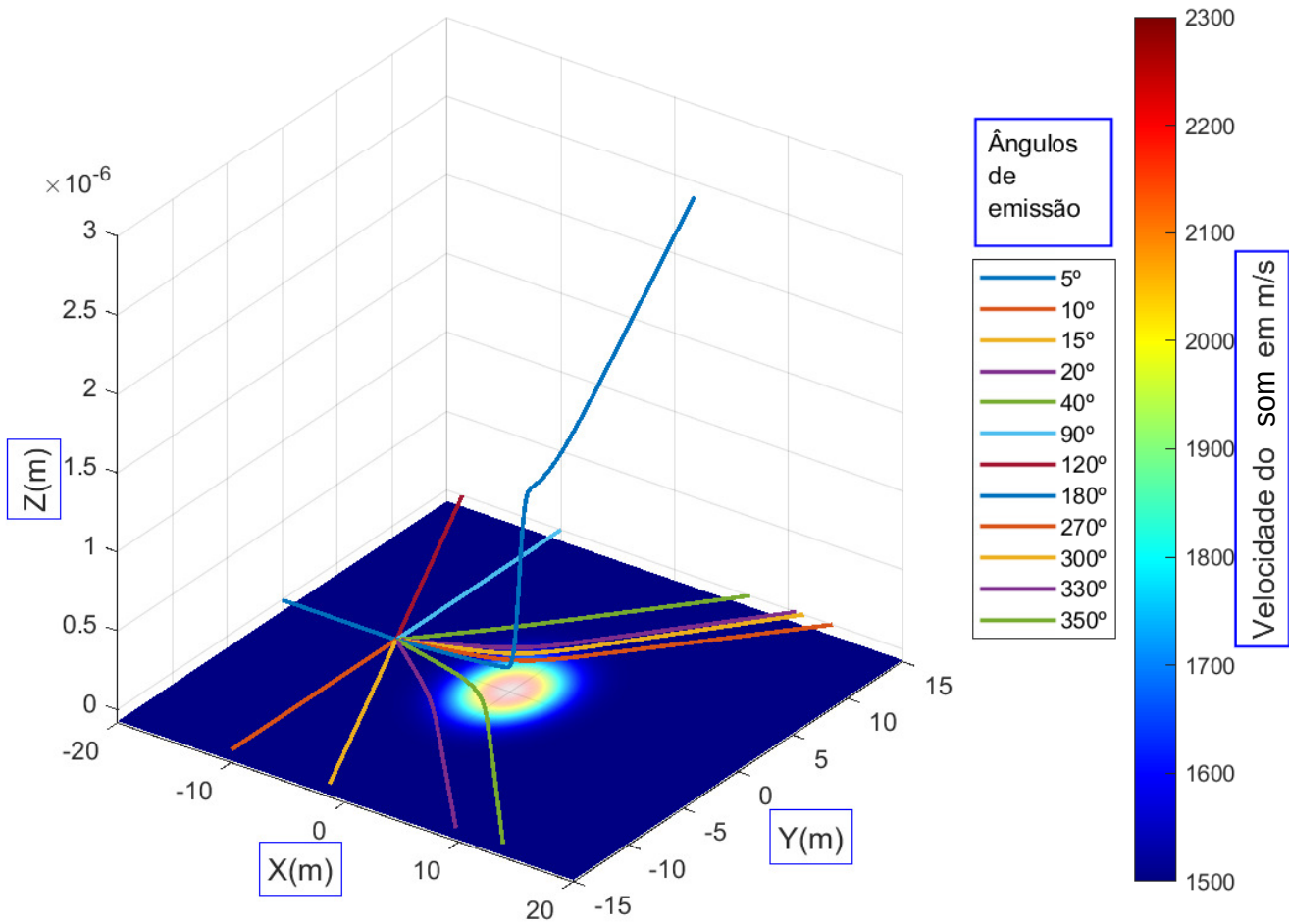


FIGURA 4.3: Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido

Como também teoricamente era de se esperar, ao colocar uma corrente de ascensão do fluido na zona da fonte, percebe-se o efeito da corrente, como podemos observar na figura 4.3. De facto, os raios acústicos que não são afetados pela corrente permanecem no plano $z=0$, sendo que estes foram lançados neste plano. Em contrapartida, o raio acústico mais central é atingido pela zona de maior velocidade

ascensional do fluido e, portanto, sofre algum desvio vertical. No entanto, é de salientar que esse desvio é extremamente pequeno, como se pode ver na escala do eixo dos z , dada a muito maior velocidade do som na água frente à velocidade ascensional do fluido. No entanto, aqui pretendemos acima de tudo demonstrar a eficácia teórica e numérica do método das geodésicas, que permite, de uma forma unificada, tratar esta situação geral. É possível notar na figura 4.4 a diferença existente entre o efeito do campo de velocidade do fluido e do campo de velocidades do som, numa ordem de grandeza que pode se considerar desprezável o efeito da corrente do fluido. Estes mesmos raios visto de cima no plano XY como mostra a Figura 4.5

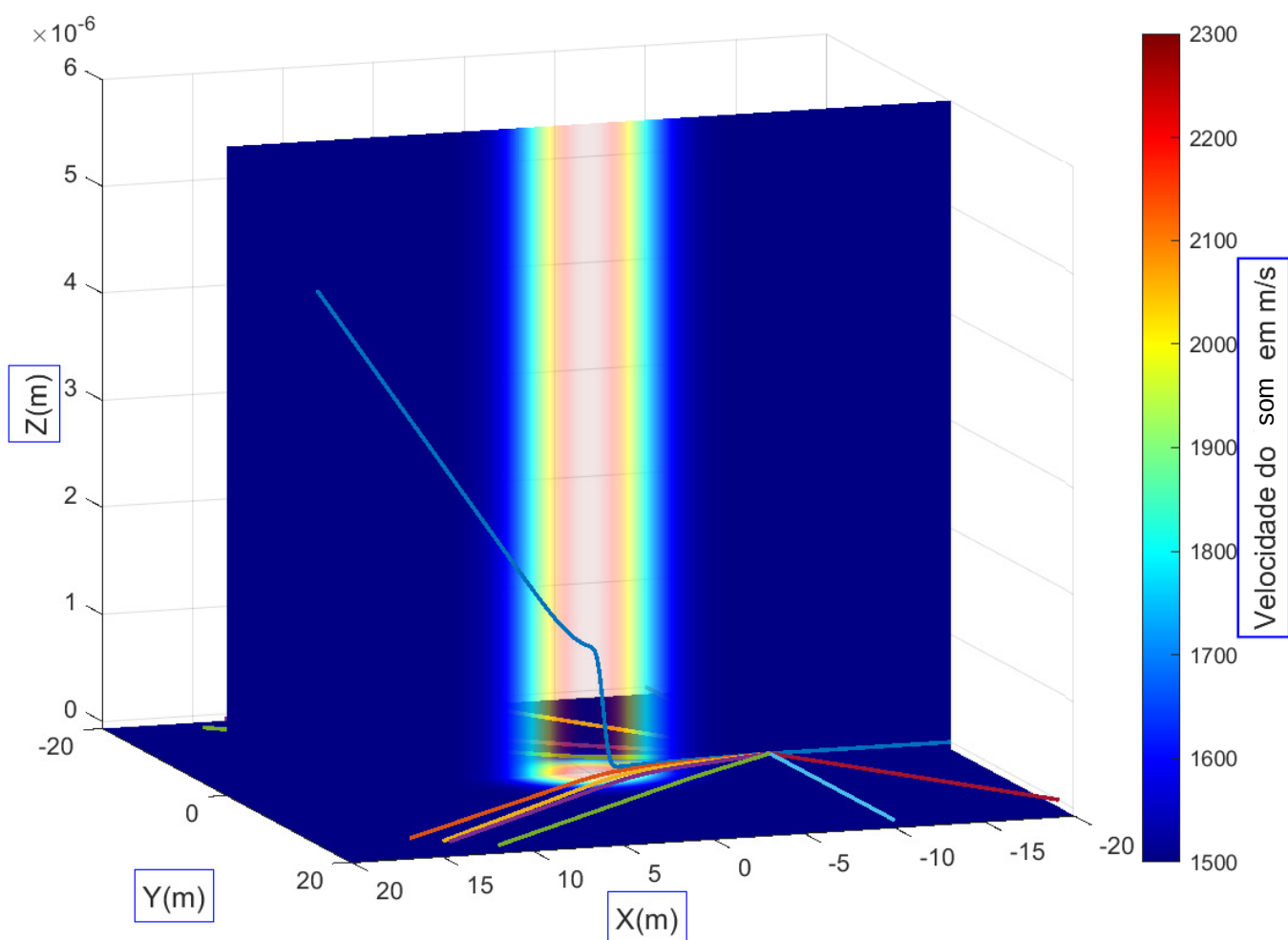


FIGURA 4.4: Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido dois cortes em $z=0$ e $y=0$ em Perspetiva

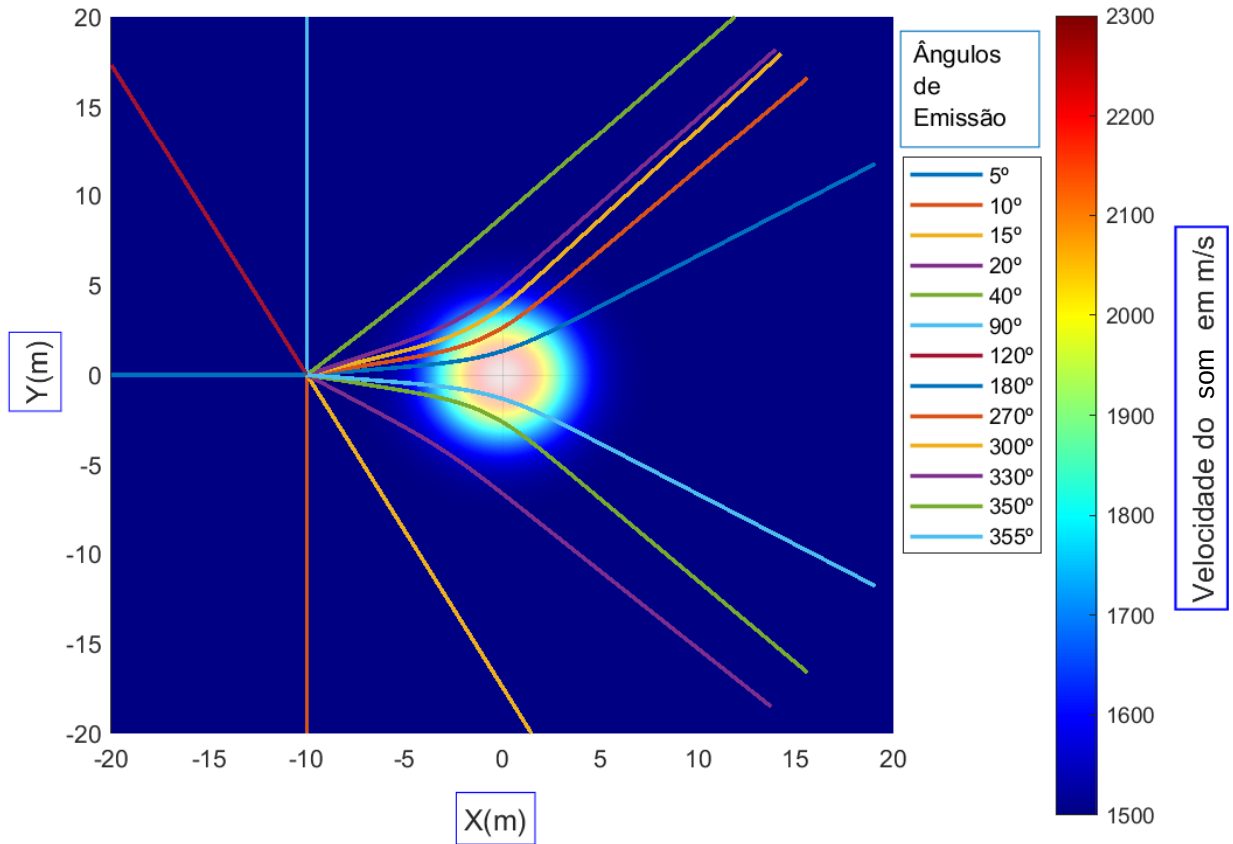


FIGURA 4.5: Raios acústicos emitidos na presença de correntes de ascensão do fluido dois cortes em $z=0$ e $y=0$ plano XY

Nas figuras seguintes, acrescentaram-se alguns raios emitidos de ângulos diferentes, assim para além da emissão dos ângulos da figura anterior, acrescentou-se emissão nas direções de 7° , como era de se esperar, o raio acústico lançado na direção de 7° sofre um efeito da corrente do fluido como mostra a figura 4.6, e o emitido na direção de 355° , por simetria, sobre igual efeito ao do emitido na direção de 5° .

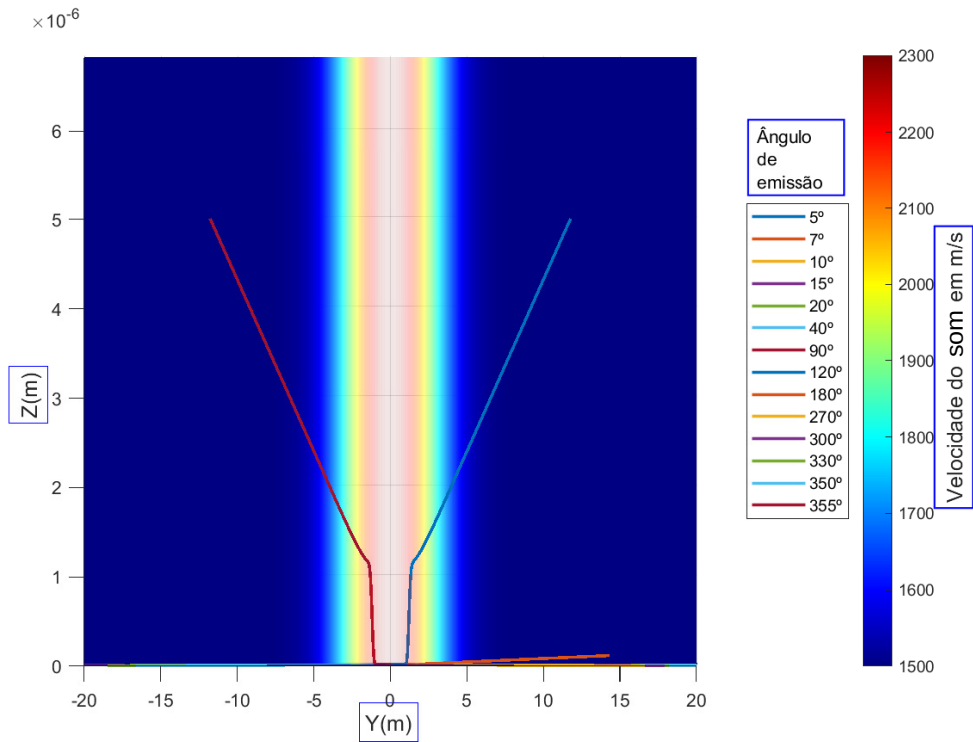


FIGURA 4.6: Raios acústicos Lançados na presença de correntes plano YZ

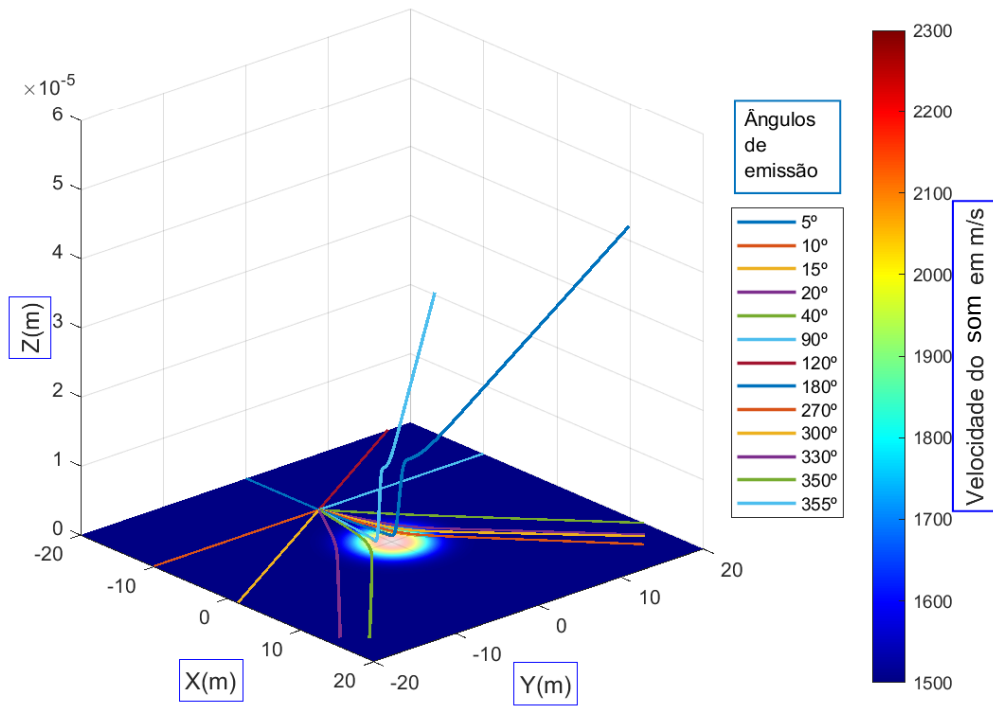


FIGURA 4.7: Raios acústicos emitidos na presença de correntes do fluido, vista no plano (Yz)

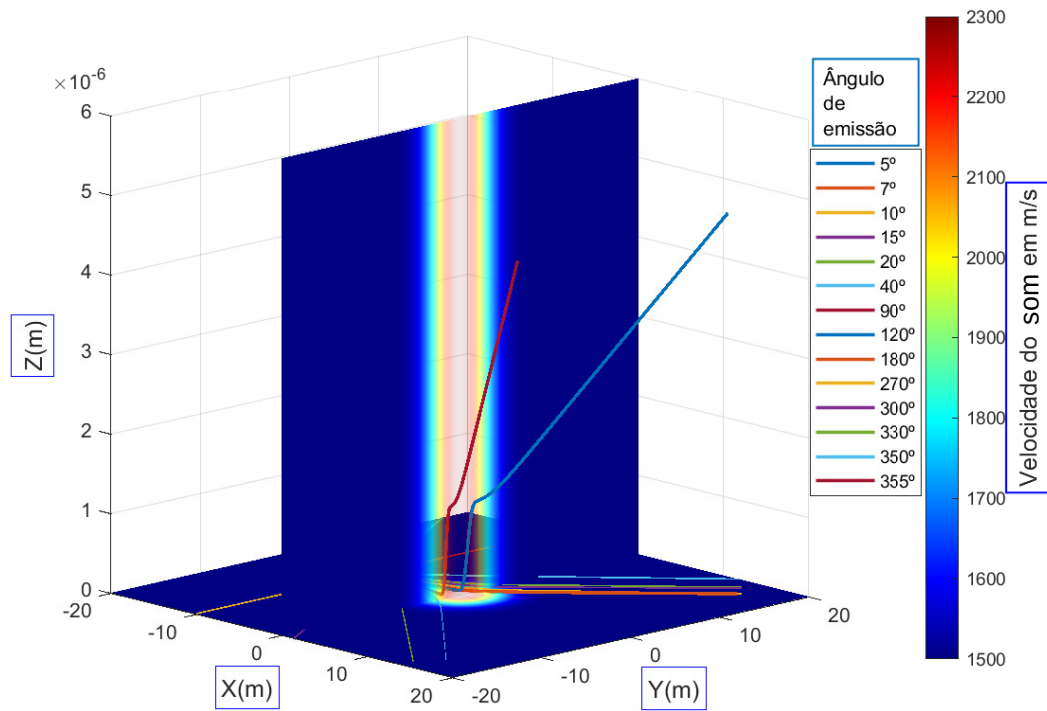


FIGURA 4.8: Raios acústicos emitidos na presença de correntes do fluido, corte em $x=0$ e $z=0$

Capítulo 5

Conclusão

5.1 Conclusões gerais

Quando se pensa num tema da dissertação por escolher temos sempre que olhar principalmente naquilo que nos identificamos mais durante aos 5 anos de formação. A Matemática é sem dúvidas a arma mais poderosa do engenheiro, daí, alargar o conhecimento em matemática e aprofundá-lo principalmente em temas na qual houve pouco contacto durante o currículo foi uma das minhas maiores motivações. E se olharmos para aplicação e pertinência do tema é ainda mais um fator tido em conta.

Do conhecimento que tive e está disponível, há ainda pouca informação sobre a modelagem de raios acústicos submarinos a longas profundidades, dadas as condições físicas nestas profundidades, até mesmo porque certas descobertas nesta área ainda pode não ter sido publicado pois, na geopolítica mundial, dominar as profundezas oceânicas é do interesse de qualquer organismo de Defesa Nacional.

As conclusões que se tira sobre a comparação dos dois métodos de cálculo de trajetórias acústica são satisfatórias, pois estes dois formalismos, como se observou no Capítulo 3, conduzem exatamente às mesmas equações 2D e 3D.

O campo de aplicação do desenvolvimento que trabalhamos foram as fontes hidrotermais devido à circunstância favorável, na ilustração destes métodos, de nelas verificarem-se grandes variações de temperatura de água, e consequentemente da velocidade do som, em pequenas distâncias, embora mais uma vez, a complexidade é acrescida, pois ainda não temos um campo de temperatura, velocidade do som, pressão e salinidade que modelem exatamente o ambiente hidrotermal, com isto, para apurar aplicabilidade e veracidade dos nossos cálculos, dada a dependência direta da temperatura com a velocidade do som, o princípio que norteou a escolha

de um campo arbitrário foi o de no ambiente marítimo a velocidade do som ser maior em locais com temperaturas altas.

Recorremos ao método das linhas geodésicas para estudar o efeito das correntes no raio acústico pela sua eficiência. De salientar, que as correntes oceanográficas nas profundezas do oceano são de modo geral geostroficas, com velocidades do fluido muito baixas relativamente a velocidade do som como já referimo, daí os estudos disponíveis sobre a trajetória de raio acústico são feitos considerando velocidades estacionárias. No entanto, as fontes hidrotermais influenciam os fluidos num raio à volta a movimentar-se com uma velocidade maior relativamente a velocidade dominante na profundidade em que estão geralmente localizadas. Pela falta de um modelo que modelasse este movimento do fluido, optou-se por se usar um modelo simples e eficaz para uma primeira abordagem. As conclusões tiradas são consideravelmente satisfatórias, usamos o campo de velocidades

$$|\vec{v}(v_z; v_y, v_z)| = v_z = k1e^{-(x^2+y^2)k^2}$$

considerando que o fluido está somente em ascensão e com simetria cilíndrica. Para velocidades de ascensão de cerca 5 m/s a 15 m/s, o raio acústico sofre um deslocamento na ordem dos 1.10^{-6} m e concluímos que o raio é pouco influenciado pelas correntes nas fontes hidrotermais com este parâmetro e modelo.

5.2 Recomendações para trabalhos futuros

Como se sabe, o estudo de um fenómeno científico é um processo contínuo, e a aprendizagem durante o processo é igualmente contínua, deste trabalho, fica como recomendações para trabalhos futuros as seguintes:

— Estudar os campos de velocidade do som e do fluido na vizinhança de fontes hidrotermais tendo em vista a realização de modelos que possam ser utilizados recorrendo às técnicas desenvolvidas, na simulação do comportamento de raios acústicos na vizinhança de fontes hidrotermais.

— Validar os modelos de propagação de raios acústicos na presença de escoamentos de fluidos e desenvolver aplicações informáticas recorrendo aos modelos estudados tendo em vista a calcular trajetórias de raios acústicos quer em ambientes sintéticos, quer em ambientes reais.

Bibliografia

- Bergman, D. R. (2015). «Derivation of the Paraxial Ray Equations in Three Conformal Representations». Em: *arXiv preprint arXiv:1508.01811*.
- Bergman, David R (2018). *Computational acoustics: theory and implementation*. John Wiley & Sons.
- Carroll, Sean M (2019). *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press.
- Collier, Peter (2017). *A most incomprehensible thing: notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity*. Incomprehensible Books.
- Einstein, Albert (2010). *The Einstein Theory of Relativity: A Concise Statement by Prof HA Lorentz*. MobileReferencecom.
- EXPEDIÇÃO OCEANO AZUL DESCOBRE NOVO CAMPO HIDROTERMAL NOS AÇORES (s.d.). <https://www.hidrografico.pt/noticia/378>. Acesso em: 03 de julho de 2023.
- Fleisch, Daniel (2008). *A student's guide to Maxwell's equations*. Cambridge University Press.
- Fontes hidrotermais nos Açores (2023). Enciclopédia Açores XXI. URL: https://acores.fandom.com/wiki/Fontes_hidrotermais_nos_A%C3%A7ores (acedido em 12/06/2023).
- Gonçalves, João Pedro Duarte (2022). «Desenvolvimento de algoritmo para previsão 2D e 3D de propagação submarina de raios acústicos com reflexões». Tese de mestrado.
- Huygens, Christiaan (1986). «Tratado sobre a luz». Em: *Caderno de História e Filosofia da Ciência* suplemento 4, pp. 3–99.
- Itskov, Mikhail et al. (2007). *Tensor algebra and tensor analysis for engineers*. Springer.
- Lee, John M e John M Lee (2012). *Smooth manifolds*. Springer.
- Melo, Henrique de Gouveia (2022). «A utilidade da Marinha Portuguesa na proteção e na promoção dos oceanos – Uma visão holística». Em: *Negócios Estrangeiros-Oceanos*.
- MusiCiênciaArte (s.d.). <http://musicienciaarte.blogspot.com/2013/03/>. Acesso em: 30 de julho de 2023.

- Paiva, Beatriz Manuel Evangelista (2018). «Caracterização de fontes hidrotermais oceânicas com recurso a técnicas acústicas». Tese de mestrado.
- Raposo, Pedro de Aragão Matta Amaral (2019). «Estudo da propagação acústica 3D em meios não homogêneos». Tese de mestrado.
- Ribeiro, Mário Manuel Malta (2021). «Técnicas de cálculo de trajetórias de raios acústicos e respetivas simulações». Tese de mestrado.
- Rocha, Alexandre Passeira da (2020). «Método da Geometria Diferencial no Estudo da Acústica Submarina na Aproximação Geométrica». Tese de mestrado.
- Rodriguez, Orlando (2021). *Fundamentos de acústica submarina*. Universidade do Algarve Editora.
- Stewart, Robert H (2008). *Introduction to physical oceanography*. University Press of Florida.
- White, Richard W. (ago. de 2005). «Acoustic ray tracing in moving inhomogeneous fluids». Em: *The Journal of the Acoustical Society of America* 53.6, pp. 1700–1704. ISSN: 0001-4966. DOI: [10.1121/1.1913522](https://doi.org/10.1121/1.1913522). URL: <https://doi.org/10.1121/1.1913522>.
- Wilson, B. B. (1960). «Formula of Wilson for the Speed of Sound in Sea Water». Em: *The Journal of the Acoustical Society of America* 32.9, p. 1357.

Apêndice A - Desenvolvimento do cálculo dos coeficientes de Christoffel

Calculemos todos os coeficientes de Christoffel associada As matrizes covariante e contravariante do tensor métrico acústico.

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & c^2 - v_x^2 & -v_x v_y & -v_x v_z \\ -v_y & -v_x v_y & c^2 - v_y^2 & -v_y v_z \\ -v_z & -v_x v_z & -v_y v_z & c^2 - v_z^2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{c^2} - 1 & \frac{-v_x}{c^2} & \frac{-v_y}{c^2} & \frac{-v_z}{c^2} \\ \frac{-v_x}{c^2} & \frac{1}{c^2} & 0 & 0 \\ \frac{-v_y}{c^2} & 0 & \frac{1}{c^2} & 0 \\ \frac{-v_z}{c^2} & 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{pmatrix}$$

O desenvolvimento que será feito ter-se-á em conta o facto de que,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(2\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(2\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{13} \left(2\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

assim, de igual modo aplicaremos este facto a todos os coeficientes desta forma,

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^0 = \Gamma_{30}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^0 = \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{12}^0 = \Gamma_{12}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\Gamma_{13}^0 = \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{01} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{02} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{03} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

Para os coeficientes de índice 1

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} \right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} \right) \\ \Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial g_{11}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = \frac{1}{2}(-v_x) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{10} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{13} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}(-v_x) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_x^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

E para podermos calcular os coeficientes de Índice 2

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial t} - \frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{01}^2 = \Gamma_{10}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{03}^2 = \Gamma_{30}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2}(-v_y) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{20} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}g^{21} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{23} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}(-v_y) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_y) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(c^2 - v_y^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Para o índice 3

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{31}\left(\frac{\partial g_{i1}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j1}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{32}\left(\frac{\partial g_{i2}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j2}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{i3}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j3}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{31}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{32}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^3}\right) \\ \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z)\left(2\frac{\partial\left(\frac{-v_x}{c^2}\right)}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z)\left(2\frac{\partial\left(\frac{-v_y}{c^2}\right)}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2)\left(2\frac{\partial\left(\frac{-v_z}{c^2}\right)}{\partial t} - \frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}g^{30}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{31}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^1}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{32}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^3}\right) \\ \Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = \frac{1}{2}(-v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{c^2}\right)}{\partial t}\right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{-v_y}{c^2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{-v_x}{c^2}\right)}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2)\left(\frac{\partial\left(\frac{-v_z}{c^2}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{-v_x}{c^2}\right)}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}g^{30}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^0}\right) + \frac{1}{2}g^{31}\left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^1}\right) \\ &+ \frac{1}{2}g^{32}\left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}g^{33}\left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{02}}{\partial x^3}\right) \\ \Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = \frac{1}{2}(-v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{-v_x}{c^2}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{-v_y}{c^2}\right)}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z)\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{c^2}\right)}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2)\left(\frac{\partial\left(\frac{-v_z}{c^2}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{-v_y}{c^2}\right)}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{03}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{11}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_x}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{20}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{22}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{20}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} \right) \\
&+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \right) \\
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_y}{c^2} \right)}{\partial z} + \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}g^{30} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^0} \right) + \frac{1}{2}g^{31} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}g^{32} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} \right) \\
 \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2}(-v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial t} \right) + \frac{1}{2}(-v_x v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &+ \frac{1}{2}(-v_y v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Dada a natureza do ambiente físico pelo qual simulamos nomeadamente, dada a natureza no nosso campo de velocidades do som ser independente do tempo, $c(x, y, z)$ e o campo de velocidade do fluido ser um campo vetorial $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ que apenas depende da componente v_z , o que faz com que $\vec{v} = v_z$ como já referimos, podemos então simplificar as expressões de cada um dos coeficientes a cima da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} (-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) = \\
\Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{2vc \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) - 2v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)}{c^3} \right) \\
&= - \left(\frac{v^3 \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)}{c^3} \right) = - \left(\frac{v^3}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \\
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} (-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = - \left(\frac{vc \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) \\
&+ \frac{1}{2} (v) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2v \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) = - \left(\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = \frac{1}{2} (-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{02}^0 &= \Gamma_{20}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \\
&- \left(\frac{vc \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) + \frac{1}{2} (v) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2v \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) = - \left(\frac{1}{2} \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) \\
\Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = \frac{1}{2} (-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{03}^0 &= \Gamma_{30}^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = - \left(\frac{-v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)}{c^3} \right) = \left(\frac{v^2}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} (-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \Gamma_{11}^0 = \left(-\frac{(v_z)}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{12}^0 &= \Gamma_{12}^0 = 0 \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2} (-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{13}^0 &= \Gamma_{31}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{v_z}{c^3} \frac{\partial c}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^0 = +\frac{1}{2}(-v_z) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \frac{1}{2}(v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{(v_z)}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2}(-1) \left(\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\ \Gamma_{23}^0 &= \Gamma_{32}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) - \frac{1}{2}(v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) - (v_z) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}(-1) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2}(-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial z} \right) - \frac{1}{2}(v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = - \left(-\frac{(v_z)}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{33}^0 &= \left(\frac{(v_z)}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Para o índice 1

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= +\frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = (-c^2) \left(\frac{vc \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) \\
&= \left(-v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{00}^1 &= \left(-v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = 0 \\
\Gamma_{02}^1 &= \Gamma_{20}^1 = 0 \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{-v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{03}^1 &= \Gamma_{30}^1 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
\Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
\Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = +\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = -\left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1 = 0 \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = - \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\ \Gamma_{33}^1 &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

O índice 2

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(-\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial y} \right) \\ \Gamma_{00}^2 &= -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = - (c^2) \left(\frac{vc \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) \\ &= - \left(v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \\ \Gamma_{00}^2 &= - \left(v \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right) \\ \Gamma_{01}^2 &= \Gamma_{10}^2 = 0 \\ \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2v \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{03}^2 &= \Gamma_{30}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2v \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{v}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^2 &= -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = - \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
 \Gamma_{11}^2 &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right) \\
 \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2 = 0 \\
 \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
 \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2 = \frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial z} \right) \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\frac{1}{2} (c^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

Para o índice 3

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^3 &= +\frac{1}{2} ((c^2 - v_z^2)) \left(-\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) \\
 \Gamma_{00}^3 &= -\frac{1}{2} ((c^2 - v_z^2)) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = -((c^2 - v_z^2)) \left(\frac{-v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)}{c^3} \right) \\
 &= \left(\frac{v^2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) - \frac{v^4}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right) \\
 \Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = -\frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v^2}{c^2} \right)}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &= - (v_z) \left(\frac{vc \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) - v^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) - \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right)}{c^3} \right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_z^2}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\
 \Gamma_{01}^3 &= \Gamma_{10}^3 = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{v_z}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} \frac{v_z^2}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = -\frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
 &= (v_z) \left(\frac{v_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - v_z^2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) - \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \left(-\frac{2v_z^3}{c^3} + \frac{v_z}{c} \right) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \left(\frac{3v_z^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \right) \\
 \Gamma_{02}^3 &= \Gamma_{20}^3 = \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right) \left(-\frac{2v_z^3}{c^3} + \frac{v_z}{c} \right) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \left(\frac{3v_z^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2} (-v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} - 1 \right)}{\partial z} \right) \\
 \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = -\frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = \left(\frac{v_z}{c^3} \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = - (c^2 - v_z^2) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{21}^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial x} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \frac{v_z}{c^2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^3 = -\frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) = - (c^2 - v_z^2) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{\partial \left(\frac{v_z^2}{c^2} \right)}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial y} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (v_z) \left(\frac{c \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) - 2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)}{c^3} \right) + (c^2 - v_z^2) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v_z}{c^2} \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) + (c^2) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(v_z)}{c^2} \right) \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right) + \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial y} \right) \\
 \Gamma_{33}^3 &= \frac{1}{2} (v_z) \left(2 \frac{\partial \left(\frac{v_z}{c^2} \right)}{\partial z} \right) + \frac{1}{2} (c^2 - v_z^2) \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{c^2} \right)}{\partial z} \right) \\
 &= (v_z) \left(\frac{-2v_z \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right)}{c^3} \right) + (c^2 - v_z^2) \left(-\frac{1}{c^3} \frac{\partial c}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) \left(-\frac{v_z^2}{c^3} - \frac{1}{c} \right)
 \end{aligned}$$

Apêndice B - Desenvolvimento das equações pelo teorema do tempo mínimo de Fermat

Neste desenvolvimento, v é a velocidade do som

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}{v^2} \\ \frac{\partial F}{\partial x'} &= \frac{x'}{v \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) = \\ &= \frac{(y'y'' + z'z'')x'v - ((y')^2 + (z')^2)x''v + \frac{dv}{d\tau}((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)x'}{(v)^2 \sqrt{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ((y')^2 + (z')^2)x''v - (y'y'' + z'z'')x'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)x'\frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial x}((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((x')^2 + (z')^2)y''v - (x'x'' + z'z'')y'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)y'\frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial y}((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \\ ((y')^2 + (x')^2)z''v - (y'y'' + x'x'')z'v \\ - ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)z'\frac{dv}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial z}((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^2 = 0 \end{cases}$$

Com mais detalhes como é referido no capítulo, vamos considerar (a, b, c) são as coordenadas do raio e (x, y, z) são as suas respectivas derivadas, neste desenvolvimento, v representa a velocidade do som, deste modo,

$$xx' + yy' + zz' = v \frac{dv}{dt}$$

$$(1) \begin{cases} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -(y^2 + z^2)x' + (xy)y' + (xz)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ (xy)x' - (x^2 + z^2)y' + (yz)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ xzx' + yzy' - (x^2 + y^2)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -(y^2 + z^2)x' + (yy' + zz')x + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ (xx' + zz')y - (x^2 + z^2)y' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ (xx' + yy')z - (x^2 + y^2)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -(y^2 + z^2)x' + \left(v \frac{dv}{dt} - xx'\right)x + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ \left(v \frac{dv}{dt} - yy'\right)y - (x^2 + z^2)y' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ \left(v \frac{dv}{dt} - zz'\right)z - (x^2 + y^2)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -(y^2 + z^2)x' + v \frac{dv}{dt} x - x^2 x' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ v \frac{dv}{dt} y - y^2 y' - (x^2 + z^2)y' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ v \frac{dv}{dt} z - z^2 z' - (x^2 + y^2)z' + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -(x^2 + y^2 + z^2)x' + v \frac{dv}{dt} x + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ -(x^2 + y^2 + z^2)y' + v \frac{dv}{dt} y + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ -(x^2 + y^2 + z^2)z' + v \frac{dv}{dt} z + \frac{(x^2+y^2+z^2)}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -v^2 x' + v \frac{dv}{dt} x + \frac{v^2}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{v^4}{v} \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ -v^2 y' + v \frac{dv}{dt} y + \frac{v^2}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{v^4}{v} \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ -v^2 z' + v \frac{dv}{dt} z + \frac{v^2}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{v^4}{v} \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{array} \right.$$

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ -x' + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} x + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} x - v \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ -y' + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} y + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} y - v \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ -z' + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} z + \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} z - v \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{array} \right.$$

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ x' - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} x - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} x + v \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ y' - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} y - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} y + v \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ z' - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} z - \frac{1}{v} \frac{dv}{dt} z + v \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{array} \right.$$

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} a' - x = 0 \\ b' - y = 0 \\ c' - z = 0 \\ x' - \frac{2}{v} \frac{dv}{dt} x + v \frac{\partial v}{\partial a} = 0 \\ y' - \frac{2}{v} \frac{dv}{dt} y + v \frac{\partial v}{\partial b} = 0 \\ z' - \frac{2}{v} \frac{dv}{dt} z + v \frac{\partial v}{\partial c} = 0 \end{array} \right.$$

Apêndice C - Traçado do raio acústico 2D perfil de Munk

Script em MATLAB para o perfil de Munk para a velocidade do som

```
1 %Equações diferenciais 2D
2 function [c, dcdz] = munk(z, z0, c0)
3     B = 2.9e3;
4     e = 30.37e-3;
5     eta = 2 * (z - z0) / B;
6     c = c0 * (1 + e * (eta + exp(-eta) - 1));
7     dcdz = (2 * c0 * e / B) * (1 - exp(-eta));
8 end
```

```
1 % O seguinte scrip usa a função Munk para traçar o perfil de velocidades
   ↳ do som usando o modelo de Munk
2 % Fecha todas as figuras, limpa a janela de comando e o espaço de
   ↳ trabalho
3 close all, clc, clear;
4
5 % Parâmetros iniciais
6 z_values = linspace(0, 5000, 100); % Cria um vetor de 100 pontos de
   ↳ profundidade de 0 a 5000 m
7 z0 = 1500.0; % profundidade inicial do raio acústico
8 c0 = 1480.0; % Velocidade do som na profundidade inicial
9
10 % Inicializa um vetor para armazenar os valores de velocidade do som
   ↳ calculados
11 c_values = zeros(size(z_values));
12
13 % ciclo para calcular a velocidade do som em cada profundidade usando a
   ↳ função 'munk'
14 for i = 1:length(z_values)
15     [c_values(i), ~] = munk(z_values(i), z0, c0); % Ignora o segundo valor
   ↳ de retorno da função 'munk'
16 end
17
18 % Cria uma nova figura para o gráfico
```

```

19 figure;
20
21 % Plota o perfil de velocidade do som contra a profundidade (invertida)
22 plot(c_values, -z_values, 'b', 'LineWidth', 2); % A profundidade é
    → invertida para que aumente para baixo no gráfico
23
24 % Adiciona rótulos e título ao gráfico
25 xlabel('Velocidade do Som (m/s)', 'FontSize', 12); % Rótulo do eixo X
26 ylabel('Profundidade (m)', 'FontSize', 12); % Rótulo do eixo Y
27 title('Perfil de Velocidade do Som - Função Munk', 'FontSize', 14); %
    → Título do gráfico
28
29 % Ativa a grade do gráfico para facilitar a leitura
30 grid on;

```

Script em Python para o traçado do raio acústico usando o modelo de propagação de Munk

```

1 """
2 Este programa simula o traçado de raios acústicos num oceano com um perfil
    → de velocidade do som descrito pelo modelo de Munk.
3 O programa utiliza a integração numérica de equações diferenciais para
    → calcular as trajetórias dos raios acústicos.
4 O resultado é um gráfico que mostra como os raios se propagam através do
    → perfil de Munk, que é um modelo simplificado
5 mas realista da variação da velocidade do som com a profundidade no
    → oceano.
6 """
7 # Importar bibliotecas necessárias
8 import numpy as np
9 from scipy.integrate import odeint
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 from matplotlib.ticker import FuncFormatter
12
13 # Definir a função Munk para calcular a velocidade do som e sua derivada
14 def munk(z, z0, c0):
15     B = 2.9e3 # Constante B
16     e = 30.37e-3 # Constante epsilon
17     eta = 2 * (z - z0) / B # Calcular eta

```

```

18     c = c0 * (1 + e * (eta + np.exp(-eta) - 1)) # Calcular c
19     dcdz = (2 * c0 * e / B) * (1 - np.exp(-eta)) # Calcular dcdz
20     return c, dcdz # Retornar c e dcdz
21
22 # Definir a função solver para resolver as equações diferenciais
23 def solver(Y, t, z0, c0):
24     x, z, x1, z1 = Y # Desempacotar as variáveis do estado Y
25     c, dcdz = munk(z, z0, c0) # Obter c e dcdz usando a função munk
26     dx1 = (2.0 / c) * dcdz * x1 * z1 # Calcular dx1/dt
27     dz1 = (1.0 / c) * dcdz * (z1 * z1 - x1 * x1) # Calcular dz1/dt
28     return [x1, z1, dx1, dz1] # Retornar as derivadas
29
30 # Definir parâmetros iniciais
31 rs = 0 # Posição inicial em r
32 zs = 1500 # Posição inicial em z
33 dtau = 0.0001 # Incremento de tempo
34 t = np.arange(0, 80, dtau) # Vetor de tempo
35 z0 = 1500.0 # Profundidade inicial
36 c0 = 1480.0 # Velocidade do som inicial
37
38 nrays = 20 # Número de raios
39 thetas = np.linspace(-12, 12, nrays) # Vetor de ângulos
40
41 # Configurações do gráfico
42 plt.figure() # Criar uma nova figura
43 plt.xlabel('Distância (km)', color='blue', fontsize=14) # Rótulo do eixo
44     ↪ x
45 plt.ylabel('Profundidade (m)', color='blue', fontsize=14) # Rótulo do
46     ↪ eixo y
47 plt.title('Perfil de Munk - Traçado do raio acústico', fontsize=14) #
48     ↪ Título do gráfico
49
50 plt.gca().set_facecolor('lightblue') # Cor de fundo do gráfico
51 plt.grid(False) # Desativar a grade
52 plt.xlim([0, 100]) # Limites para o eixo x
53
54 # Função para formatar os rótulos do eixo y para serem absolutos
55 def format_abs_y(value, tick_number):
56     return f'{abs(int(value))}' # Retornar o valor absoluto do rótulo
57
58 # Aplicar a formatação aos rótulos do eixo y

```

```
55 plt.gca().yaxis.set_major_formatter(FuncFormatter(format_abs_y))
56
57 # Loop para plotar os raios
58 for theta in thetas:
59     vr = c0 * np.cos(-np.radians(theta)) # Velocidade inicial em r
60     vz = c0 * np.sin(-np.radians(theta)) # Velocidade inicial em z
61     y0 = [rs, zs, vr, vz] # Estado inicial
62     sol = odeint(solver, y0, t, args=(z0, c0)) # Resolver as EDOs
63     r = sol[:, 0] # Extrair a posição r
64     z = sol[:, 1] # Extrair a posição z
65     plt.plot(r / 1000, -z, 'k', linewidth=2) # Plotar o raio
66
67 # Salvar o gráfico como um arquivo EPS
68 plt.savefig('C:\\Users\\AleixoCaquarta\\Documents\\TESE\\TESE\\Imagens\\munkPython.eps',
69     ↪ format='eps', dpi=1200)
69
70 # Mostrar o gráfico
71 plt.show()
72
73
74
```

Apêndice D - Traçado do raio acústico 3D fluido estacionário.

Definições do sistema de equações diferenciais para o traçado do raio acústico

```
1 function dy = sistema_edos(t, v)
2     % Esta função define um sistema de equações diferenciais ordinárias
3     % para descrever o movimento de uma partícula em um campo de
4     ↪ velocidades, no oceano.
5
6     % Parâmetros do sistema
7     x = v(1); % Posição x do raio acústico
8     y = v(2); % Posição y do raio acústico
9     z = v(3); % Posição z do raio acústico
10    x1 = v(4); % Velocidade em x do raio acústico
11    y1 = v(5); % Velocidade em y do raio acústico
12    z1 = v(6); % Velocidade em z do raio acústico
13
14    % Definição do campo de velocidades
15    kapa1 = 600; % Constante associada à intensidade máxima do campo de
16    ↪ velocidades
17    kapa2 = 1; % Constante associada à taxa de decaimento do campo de
18    ↪ velocidades
19
20    % Calcula o valor do campo de velocidades no ponto (x, y, z)
21    cxyz_var = kapa1 * exp(-(x^2 + y^2 + z^2) * kapa2); % Valor variável
22    ↪ do campo de velocidades
23    cxyz = cxyz_var + 1500; % Valor total do campo de velocidades
24
25    % Calcula as derivadas parciais do campo de velocidades em relação a
26    ↪ x, y e z
27    dx_cxyz = -2 * kapa2 * x * cxyz_var; % Derivada parcial em relação a
28    ↪ x
29    dy_cxyz = -2 * kapa2 * y * cxyz_var; % Derivada parcial em relação a
30    ↪ y
31    dz_cxyz = -2 * kapa2 * z * cxyz_var; % Derivada parcial em relação a
32    ↪ z
```

```

26      % Calcula as derivadas das velocidades em relação ao tempo
27      f = [x1;
28           y1;
29           z1;
30           (2/cxyz)*x1*(x1*dx_cxyz+y1*dy_cxyz+z1*dz_cxyz)-cxyz*dx_cxyz;
31           (2/cxyz)*y1*(x1*dx_cxyz+y1*dy_cxyz+z1*dz_cxyz)-cxyz*dy_cxyz;
32           (2/cxyz)*z1*(x1*dx_cxyz+y1*dy_cxyz+z1*dz_cxyz)-cxyz*dz_cxyz];
33
34      % Retorna o vetor de derivadas
35      dy = f;
36  end

```

Script principal para o traçado do raio acústico 3D, num fluido estacionário

```

1  % Limpa todas as variáveis, fecha todas as janelas e limpa a janela de
   ↳ comando
2  clear all;
3  close all;
4  clc;
5
6  % Define o vetor de tempo
7  ts = 0:0.0000001:0.02;
8
9  % Define os valores dos ângulos em graus para os quais as trajetórias
   ↳ serão
10 % calculadas pode de forma manual escolher o angulo pelo qual pretende
11 % lançar o raio acústico
12
13 theta_values = [angulo];
14
15
16 % Define as posições iniciais para emissão no formato [X Y Z], de
17 % forma manual pode inserir as posições que pretender fazer o
   ↳ lançamento
18 % do raio acústico
19 posicoes_iniciais = [x0 y0 z0];
20 k1=800; k2=0.1;
21
22

```

```

23  % Cria uma nova figura
24  figure;
25  hold on;
26
27  % Loop sobre todas as posições iniciais
28  for j = 1:size(posicoes_iniciais, 1)
29      posicao_inicial = posicoes_iniciais(j, :);
30
31      % Loop sobre todos os ângulos definidos
32      for i = 1:length(theta_values)
33          theta1 = theta_values(i);
34          theta0 = pi * theta1 / 180; % Converte o ângulo para radianos
35          phi0 = 0;
36          phi0 = pi * phi0 / 180; % Converte o ângulo para radianos
37
38          cx0y0z0 = k1*exp((-posicao_inicial(1).^2-posicao_inicial(2).^2...
39              -(posicao_inicial(3).^2))*k2)+1500;
40
41
42          % Calcula as componentes da velocidade inicial
43          x10 = (cos(phi0) * cos(theta0))*cx0y0z0
44          y10 = (cos(phi0) * sin(theta0))*cx0y0z0
45          z10 = (sin(phi0))*cx0y0z0
46
47          % Define o vetor de estado inicial
48          v0 = [posicao_inicial(1); posicao_inicial(2); posicao_inicial(3);
↪      x10; y10; z10];
49
50          % Resolve as equações diferenciais usando ode45
51          [T, V] = ode45(@edoN, ts, v0);
52
53          % Traça o trajeto do raio acústico
54          plot3(V(:, 1), V(:, 2), V(:, 3), 'LineWidth', 1);
55
56          % Salva os resultados em um arquivo (opcional)
57          % filename = sprintf('ensaio_posicao%d_angulo%d.mat', j, i);
58          % save(filename, 'T', 'V');
59      end
60  end
61

```

```

62 % Configurações do gráfico
63 grid on;
64 xlabel('X(m)', 'FontSize', 12);
65 ylabel('Y(m)', 'FontSize', 12);
66 zlabel('Z(m)', 'FontSize', 12);
67 title('', 'FontSize', 14);
68 for i = 1:length(theta_values)
69     for j = 1:length(posicoes_iniciais)
70         legends{i,j} = sprintf('\theta_{%d} = %d^\circ', j,
    ↪ theta_values(i));
71     end
72 end
73
74 legend(legends, 'Location', 'Best');
75 xlim([-20 20]);
76 ylim([-20 20]);
77
78 % Cria um campo escalar 3D para visualizacao e sobrepor de modo a gravar
    ↪ no mesmo plano cartesiano.
79 [x,y,z] = meshgrid(-25:.2:25,-25:.2:25,-25:.2:25);
80 k1=800; k2=0.1;
81 v = k1*exp((-x.^2-y.^2-(z.^2))*k2)+1500;
82 xslice = [];
83 yslice = [];
84 zslice = [-0.0001];
85 h=slice(x,y,z,v,xslice,yslice,zslice);
86 set(h, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'interp', 'FaceAlpha', 'interp');
87 alpha('color')
88 alphamap('rampdown')
89 alphamap('increase', .1)
90 colormap jet
91 colorbar
92 hold on;

```

Apêndice E - Traçado do raio acústico Na presença de Correntes.

```
1
2 function dy = edoC(l, v)
3     % Esta função define um sistema de equações diferenciais ordinárias
   ↪ (EDOs)
4     % para um problema específico relacionado à física de partículas ou
   ↪ ondas.
5
6     % Parâmetros do sistema
7     % As variáveis V(1) até V(8) são componentes do vetor de estado v.
8     % Elas representam diferentes propriedades da partícula ou onda, como
   ↪ posição e velocidade.
9
10    % Extração dos componentes do vetor de estado
11    t = v(1);
12    x = v(2);
13    y = v(3);
14    z = v(4);
15    t1 = v(5);
16    x1 = v(6);
17    y1 = v(7);
18    z1 = v(8);
19
20    % Definição de constantes para o sistema
21    kapa1 = 800;
22    kapa2 = 0.5;
23    kapa3 = 500;
24    kapa4 = 5;
25
26    % Cálculo da velocidade e suas derivadas parciais em relação às
   ↪ coordenadas
27    cxyz_var = kapa1 * exp(-(x^2 + y^2 + z^2) * kapa2);
28    cxyz = cxyz_var + 1500;
29    dx_cxyz = -2 * kapa2 * x * cxyz_var;
30    dy_cxyz = -2 * kapa2 * y * cxyz_var;
31    dz_cxyz = -2 * kapa2 * z * cxyz_var;
```

```

32
33     vz_var = kapa3 * exp(-(x^2 + y^2) * kapa4);
34     vz = vz_var;
35     dx_vz = -2 * kapa4 * x * vz_var;
36     dy_vz = -2 * kapa4 * y * vz_var;
37     dz_vz = 0;
38
39     % Cálculo dos tensores T0, T1, T2 e T3
40     % Estes tensores representam diferentes propriedades físicas do
41     ↪ sistema
42     % e são usados para calcular a evolução temporal do raio acústico
43     % os cálculos são baseados nas equações geodésicas
44     % ... [Cálculos dos tensores aqui] ...
45     T0_00=(((-vz*vz*vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
46     T0_01=(-vz)/(2*cxyz*cxyz)*dx_vz;
47     T0_10=T0_01;
48     T0_02=-((-vz)/(2*cxyz*cxyz))*dy_vz;
49     T0_20=T0_02;
50     T0_03=(((-vz*vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
51     T0_30=T0_03;
52     T0_11=(((-vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
53     T0_12=0;
54     T0_21=T0_12;
55     T0_13=((1/2)*(1/(cxyz*cxyz))*dx_vz-((1/2)*((vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*d_
60     ↪ x_cxyz);
56     T0_31=T0_13;
57     T0_22=-((vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
58     T0_23=(1/2)*(1/(cxyz*cxyz))*dy_vz;
59     T0_32=T0_23;
60     T0_33=((vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz;
61
62     %hhh
63     T1_00=(-vz*dx_vz+((vz*vz)/(cxyz))*dx_cxyz);
64     T1_01=0;
65     T1_10=T1_01;
66     T1_02=0;
67     T1_20=T1_02;
68     T1_03=((1/2)*dx_vz-(vz/cxyz)*(dx_cxyz));
69     T1_30=T1_03;

```

```

70  T1_11=((-1/cxyz)*dx_cxyz);
71  T1_12=((-1/cxyz)*dy_cxyz);
72  T1_21=T1_12;
73  T1_13=((-1/cxyz)*dz_cxyz);
74  T1_31=T1_13;
75  T1_22=-((-1/(cxyz))*dx_cxyz);
76  T1_23=0;
77  T1_32=T1_23;
78  T1_33=((1/cxyz)*dz_cxyz);
79
80  T2_00=- (vz*dy_vz-(((vz*vz)/(cxyz))*dy_cxyz));
81  T2_01=0;
82  T2_10=T2_01;
83  T2_02=0;
84  T2_20=T2_02;
85  T2_03=((1/2)*(dy_cxyz)-((vz)/(cxyz))*dy_cxyz);
86  T2_30=T2_03;
87  T2_11=-((-1/cxyz)*dy_cxyz);
88  T2_12=((-1/cxyz)*dx_cxyz);
89  T2_21=T2_12;
90  T2_13=0;
91  T2_31=T2_13;
92  T2_22=((-1/cxyz)*dy_cxyz);
93  T2_23=((-1/cxyz)*dz_cxyz);
94  T2_32=T2_23;
95  T2_33=-((-1/cxyz)*dy_cxyz);
96
97  T3_00=(
    ↪ ((vz*vz)/(cxyz))*dz_cxyz-((vz*vz*vz*vz)*(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
98  T3_01=((-1/2)*dx_vz+(vz/cxyz)*dx_cxyz-((1/2)*(vz*vz))*(dx_vz));
99  T3_10=T3_01;
100 T3_02=dy_cxyz*((-2*(vz*vz*vz))/(cxyz*cxyz*cxyz)+(vz/cxyz))+dy
    ↪ y_vz*((3/2)*((vz*vz)/(cxyz*cxyz))-(1/2));
101 T3_20=T3_02;
102 T3_03=((vz)/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz;
103 T3_30=T3_03;
104 T3_11=(cxyz*cxyz-vz*vz)*((1/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
105 T3_12=0;
106 T3_21=T3_12;
107 T3_13=((1/2)*((vz)/(cxyz*cxyz))*dx_vz-((1/cxyz)*dx_cxyz));

```

```

108 T3_31=T3_13;
109 T3_22=-(cxyz*cxyz-vz*vz)*((-1/(cxyz*cxyz*cxyz))*dz_cxyz);
110 T3_23=((1/2)*((vz)/(cxyz*cxyz))*dy_vz-((1/cxyz)*dy_cxyz));
111 T3_32=T3_23;
112 T3_33=(dz_cxyz*(-(vz*vz)/(cxyz*cxyz*cxyz)-(1/cxyz)));
113
114     % Definição do sistema de EDOs
115     % Este sistema descreve como as propriedades da partícula ou onda
116     ↪ mudam com o tempo.
117     f = [t1;
118         x1;
119         y1;
120         z1;
121         -( T0_00*t1*t1 + T0_11*x1*x1 + T0_22*y1*y1 +
122         ↪ T0_33*z1*z1 + 2*T0_01*t1*x1 + 2*T0_02*t1*y1 +
123         ↪ 2*T0_03*t1*z1 + 2*T0_12*x1*y1 + 2*T0_13*x1*z1 + 2*T0_23*y1*z1
124         ↪ );
125         -( T1_00*t1*t1 + T1_11*x1*x1 + T1_22*y1*y1 +
126         ↪ T1_33*z1*z1 + 2*T1_01*t1*x1 + 2*T1_02*t1*y1 +
127         ↪ 2*T1_03*t1*z1 + 2*T1_12*x1*y1 + 2*T1_13*x1*z1 + 2*T1_23*y1*z1
128         ↪ );
129         -( T2_00*t1*t1 + T2_11*x1*x1 + T2_22*y1*y1 +
130         ↪ T2_33*z1*z1 + 2*T2_01*t1*x1 + 2*T2_02*t1*y1 +
131         ↪ 2*T2_03*t1*z1 + 2*T2_12*x1*y1 + 2*T2_13*x1*z1 + 2*T2_23*y1*z1
132         ↪ );
133         -( T3_00*t1*t1 + T3_11*x1*x1 + T3_22*y1*y1 +
134         ↪ T3_33*z1*z1 + 2*T3_01*t1*x1 + 2*T3_02*t1*y1 +
135         ↪ 2*T3_03*t1*z1 + 2*T3_12*x1*y1 + 2*T3_13*x1*z1 + 2*T3_23*y1*z1
136         ↪ );]
137     dy = f;
138 end

```

```

1
2
3 % Limpa todas as variáveis, fecha todas as janelas e limpa a janela de
4 ↪ comando
5 clear all;
6 close all;
7 clc;

```



```

7
8 % Define o vetor de tempo
9 ls = 0:0.0000001:0.02;
10
11 % Define os valores dos ângulos em graus para os quais as trajetórias
    ↪ serão calculadas
12 theta_values = [ Angulos]; % Alterado para apenas o valor 20
13 %theta_values = [ 5, 10, 15, 20,40,90, 120,180, 270,300,330,350];
14 % Define as posições iniciais para lançamento no formato [X Y Z]
15 posicoes_iniciais = [x0,y0,z0;
16                     ]; % Mantido o número original de posições
17 k1=800; k2=0.1;
18
19
20 % Cria uma nova figura
21 figure;
22 hold on;
23
24 % Loop sobre todas as posições iniciais
25 for j = 1:size(posicoes_iniciais, 1)
26     posicao_inicial = posicoes_iniciais(j, :);
27
28     % Loop sobre todos os ângulos definidos
29     for i = 1:length(theta_values)
30         theta1 = theta_values(i);
31         theta0 = pi * theta1 / 180; % Converte o ângulo para radianos
32         phi0 = 0;
33         phi0 = pi * phi0 / 180; % Converte o ângulo para radianos
34         cx0y0z0 =
    ↪ k1*exp((-posicao_inicial(1).^2-posicao_inicial(2).^2-(posicao_inicial(3).^2))*k2)+150
35         % Calcula as componentes da velocidade inicial
36         x10 = (cos(phi0) * cos(theta0))* cx0y0z0;
37         y10 = (cos(phi0) * sin(theta0))* cx0y0z0;
38         z10 = (sin(phi0))*cx0y0z0;
39
40         % Define o vetor de estado inicial
41         t0 = 0;
42         t01 = 1;
43         v0 = [t0; posicao_inicial(1); posicao_inicial(2);
    ↪ posicao_inicial(3); t01; x10; y10; z10];

```

```
44
45     % Resolve as equações diferenciais usando ode45
46     [T, V] = ode45(@edoC, ls, v0); % Alterado para usar a função edoC
47
48     % Plota a trajetória
49     plot3(V(:, 2), V(:, 3), V(:, 4), 'LineWidth', 1.7);
50     end
51 end
52
53 % Configurações do gráfico
54 grid on;
55 xlabel('X', 'FontSize', 12);
56 ylabel('Y', 'FontSize', 12);
57 zlabel('Z', 'FontSize', 12);
58 title('Trajetória para \theta = 20^\circ', 'FontSize', 14);
59 legend('\theta = 20^\circ', 'Location', 'Best');
60
61 % Cria um campo escalar 3D para visualização
62 [x,y,z] = meshgrid(-20:.2:20,-20:.25:20,-20:.16:20);
63 k1=800; k2=0.1;
64 v = k1*exp((-x.^2-y.^2-(z.^2))*k2)+1500;
65 xslice = [];
66 yslice = [];
67 zslice = [0];
68 h=slice(x,y,z,v,xslice,yslice,zslice);
69 set(h, 'EdgeColor', 'none', 'FaceColor', 'interp', 'FaceAlpha', 'interp');
70 alpha('color')
71 alphamap('rampdown')
72 alphamap('increase', .1)
73 colormap jet
74 colorbar
75 hold on;
76
```

Anexo I - Desenvolvimento Do cálculo do Tensor Métrico acústico

começando por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \psi \quad (\text{I.1})$$

O que pode ser reescrito como:

$$\Delta \psi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{I.2})$$

Dado que o gradiente da densidade é expresso por $\nabla \rho = \frac{1}{c^2} \nabla p$, ao inserir esta relação na equação de continuidade e multiplicando pelo termo $c^2(\vec{r})$, obtemos uma forma linearizada da equação de continuidade em termos da velocidade, pressão e densidade:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla p) \cdot \vec{v} + c^2 \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (\text{I.3})$$

Ao reorganizar a equação de Euler e considerando forças externas conservativas, obtemos:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \quad (\text{I.4})$$

Isso pode ser representado equivalentemente como:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} \quad (\text{I.5})$$

Ao considerar a relação $p_1 = \frac{1}{c^2} \rho_1$ e negligenciando os termos de segunda ordem, chegamos à seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_0 + p_1) + \nabla (p_0 + p_1) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + c^2 (\rho_0 + \rho_1) \nabla \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \approx 0 \quad (\text{I.6})$$

separando os termos perturbativos dos não perturbativos, observamos que os termos não perturbativos correspondem a uma fórmula já conhecida como equação

da continuidade para fluidos compressíveis em termos de perturbações de pressão e velocidade.

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + \nabla p_0 \cdot \vec{v}_0 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0 \quad (\text{I.7})$$

Como mencionado anteriormente, as ondas acústicas estão ligadas aos termos perturbativos. Assim, aplicando a equação anterior, temos:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \nabla p_0 \cdot \vec{v}_1 + \nabla p_1 \cdot \vec{v}_0 + c^2 (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0) = 0 \quad (\text{I.8})$$

Ao aplicar um procedimento semelhante à equação de Euler, obtemos duas novas representações das equações fluidas:

$$\rho_1 \left[\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \rho_0 \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \nabla p_1 \approx 0 \quad (\text{I.9})$$

Posteriormente, além de considerar $c^2 \rho_1 = p_1$, introduzir-se há um operador diferencial, $\frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \equiv D_0$, e duas novas relações para simplificar ainda mais as expressões:

$$\begin{aligned} \nabla p_0 \cdot \vec{v}_1 + p_1 \nabla \cdot \vec{v}_0 &\equiv F_1 \\ (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{p_1}{c^2 \rho_0} D_0 \vec{v}_0 &\equiv \vec{F}_2 \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Ao aplicar estas relações e considerando que as perturbações são significativamente menores que os valores de equilíbrio ρ_0, p_0 , e v_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} [D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + F_1 &= 0 \\ [D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1] + \vec{F}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Esta análise proporciona uma compreensão mais profunda das relações entre as variáveis em sistemas fluidos, especialmente quando consideramos perturbações.

O propósito subsequente é alcançar equações diferenciais de segunda ordem, que possuirão um termo mutualmente comum, permitindo assim uma formulação que englobe os diversos cenários em análise.

Para deduzir uma das equações diferenciais de segunda ordem, procederemos à combinação das equações antecedentes, centrando-se nos termos $\nabla \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1$ e $\nabla \cdot \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)$.

Consideremos agora o seguinte:

$$\nabla \cdot [\vec{v}_0 \cdot \nabla \vec{v}_1] - \nabla \cdot [\vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)] = \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left(\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{I.12})$$

Ribeiro [2021](#)

Desta forma, é possível reformular a equação da continuidade, expressando-a como:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) \\ & + \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left(\frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 + \frac{\partial F_1}{\partial t} \frac{1}{\rho_0 c^2} + \nabla \cdot \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

Se designarmos a equação (1.16) por F_3 , é possível sintetizar ainda mais a equação anterior, resultando em:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) \\ & = \frac{\partial F_1}{\partial t} \frac{1}{\rho_0 c^2} + \nabla \cdot \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} + \nabla \cdot \vec{F}_2 - F_3 \end{aligned} \quad (\text{I.14})$$

O próximo passo implica considerar que o vector de velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$ é equivalente a um potencial escalar $\nabla \psi(\vec{r}, t)$. Esta equivalência é aplicável apenas em fluidos irrotacionais, onde $\nabla \times \vec{v}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \nabla \cdot \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Na equação de Euler as forças externas vão ser desprezados e assumindo o fluido irrotacional ($\nabla \times \vec{v}(\vec{r}, t) = 0$), obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0\end{aligned}\tag{I.16}$$

Com mais algumas operações matemáticas e acrescentando um $\sigma = \ln(\rho)$ na equação da continuidade e na equação de Euler introduzindo uma função potencial ($\varphi(\vec{r}, t)$) por forma a que $d\psi = \frac{1}{\rho} dp \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \psi$, deste modo obtem-se equações diferenciais parciais de primeira ordem

Iniciemos com a equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0\tag{I.17}$$

Esta equação expressa a conservação da massa num fluido. Ao reescrevê-la, obtemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \nabla \cdot \vec{v} = 0\tag{I.18}$$

Na equação de Euler, ao desconsiderar as forças externas e assumindo que o fluido é irrotacional, ou seja, o seu campo de velocidades não possui vorticidade:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0\tag{I.19}$$

Esta equação descreve o movimento de um fluido sem viscosidade. Ao manipulá-la, chegamos a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0\tag{I.20}$$

Agora, vamos introduzir o conceito de potencial escalar, representado por $\varphi(\vec{r}, t)$, de modo que a relação entre a variação da pressão e a densidade é dada por $d\psi = \frac{1}{\rho} dp$. Assim, podemos reescrever a relação como:

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \psi\tag{I.21}$$

Com esta relação, derivamos equações diferenciais parciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \sigma) &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \varphi(\sigma) &= 0\end{aligned}\tag{I.22}$$

Agora, considerando que o valor instantâneo de uma variável é a soma do seu valor perturbado com o seu valor de equilíbrio, temos:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 + \psi_1 \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \nabla \psi_1 \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_1 = \ln \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \rho_1\end{aligned}\tag{I.23}$$

Ao eliminar as variáveis não perturbadas e multiplicar a equação da continuidade por ρ_0 e a equação de Euler por $\frac{\rho_0}{c^2}$, reescrevemos as duas equações como:

$$\begin{aligned}\rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) &= 0 \\ \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 &= 0\end{aligned}\tag{I.24}$$

Aplicando o operador D_0 à equação de Euler e utilizando a relação $D_0 \sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \sigma_1$, combinamos as duas equações anteriores para obter:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \nabla \cdot \left(\vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \nabla \psi_1 \right) = 0\tag{I.25}$$

Finalmente, considerando que ρ_0 , c , $\vec{v}_0$ são funções de $\vec{r}$ e t , e que $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ (o que implica que $\vec{v}_1 = \nabla \psi_1$), chegamos à nossa formulação final.

Até ao momento, observámos que, ao adotar uma abordagem de separação perturbativa representada por $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $p = p_0 + p_1$, alcançamos a desejada linearização. Esta metodologia revela que, em diferentes cenários, existe uma consistência subjacente. Adicionalmente, foi possível deduzir operadores diferenciais que se manifestam na seguinte expressão:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a}{c^2} D_0 f \right) - \nabla \cdot \left(\vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 \psi_1 f - a \nabla \psi_1 f \right) = 0\tag{I.26}$$

Nesta formulação, os termos a , c , $\vec{v}_0$, e f são funções dependentes das variáveis espaciais e temporais. Ademais, D_0 é definido como $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla$.

A aspiração subsequente é, com base neste operador diferencial, desenvolver uma formulação que, embora singular, possa ser aplicada de forma abrangente.

É imperativo reconhecer que, num contexto tridimensional e ao adotar coordenadas cartesianas, a representação é ilustrada por:

A esta representação gráfica, é viável adicionar uma dimensão temporal. Posteriormente, ao introduzir a notação concisa ∂_ν , onde ν varia sequencialmente pelos valores 0, 1, 2, 3 (correspondendo a t, x, y, z , respetivamente), obtemos:

$$\partial_\nu[f] \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = f(t, x, y, z) \quad (\text{I.27})$$

Esta análise proporciona uma compreensão refinada da natureza e aplicabilidade dos operadores diferenciais no domínio da física teórica.

Considerando a propagação de uma onda sonora num meio homogéneo, onde a velocidade de propagação não apresenta variações em função do espaço ou do tempo, podemos representar a situação da seguinte forma:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f \quad (\text{I.28})$$

Esta expressão pode ser decomposta utilizando operadores diferenciais, resultando na seguinte representação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f \quad (\text{I.29})$$

Dado que os operadores $\frac{\partial}{\partial t}$ e ∇ atuam à esquerda, podemos reescrever a expressão como:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a}{c^2} D_0 \right) + \nabla \cdot \left(\vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 - a \nabla \right) \right] f \quad (\text{I.30})$$

Incorporando a definição de D_0 como $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f$, obtemos um operador diferencial designado por 4D:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{a}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) \right] + \nabla \cdot \left[\left(\vec{v}_0 \frac{a}{c^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) - a \nabla f \right) \right] \quad (\text{I.31})$$

Esta expressão pode ser ainda mais detalhada, resultando na seguinte representação:

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right] \frac{a}{c^2} \left[\begin{array}{cccc} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \partial f / \partial t \\ \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{array} \right] = 0 \quad (\text{I.32})$$

Finalmente, ao integrar o campo escalar de interesse, que neste contexto é a variação da pressão do fluido associada à propagação sonora, obtemos a equação das ondas para um campo escalar arbitrário $f(tx, y, z)$:

Anexo II - Cálculo das trajetórias 3D Pelo Tempo mínimo de Fermat

```
1  function [f,k,m]=pa3d(t,v,vd)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  % Função pa3d
4  % Esta função calcula um sistema de equações diferenciais para descrever
5  % o movimento de uma partícula em um campo de velocidades tridimensional.
6
7  % Entradas:
8  % t - tempo
9  % v - vetor de posições e velocidades: [a;b;c;x;y;z]
10 % vd - vetor de derivadas das posições e velocidades
11
12 % Saídas:
13 % f - sistema de equações diferenciais
14 % k - Jacobiano em relação ao vetor v
15 % m - Jacobiano em relação ao vetor vd
16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
17
18 % Suposição: a derivada quadrada de a, b e c é igual a 1
19 %  $ad^2 + bd^2 + cd^2 = 1$ 
20 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
21
22 % Exemplo de uso:
23 % [f,k,m]=pa3d(0,[0,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1])
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25
26 % Calcula o campo de velocidade sonora e suas derivadas
27 [vabc, da_vabc, db_vabc, dc_vabc, da_da_vabc, db_da_vabc, dc_da_vabc,
28   ↪ da_db_vabc,...
29   db_db_vabc, dc_db_vabc, da_dc_vabc, db_dc_vabc, dc_dc_vabc, ...
30   dt_vabc, da_dt_vabc, db_dt_vabc, dc_dt_vabc] = cv3d(v);
31 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32 % Extrai as posições e velocidades do vetor v
33 a = v(1); b = v(2); c = v(3); x = v(4); y = v(5); z = v(6);
34
```

```

35 % Extrai as derivadas das posições e velocidades do vetor vd
36 ad = vd(1); bd = vd(2); cd = vd(3); xd = vd(4); yd = vd(5); zd = vd(6);
37
38 % Calcula o sistema de equações diferenciais
39 f = [ad-x;
40      bd-y;
41      cd-z;
42      (x*z-(y^2+z^2))*xd + (x*y+y*z)*yd + (x*z-(x^2+y^2))*zd +
↪      (dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc;
43      (x*y)*xd - (x^2+z^2)*yd + (y*z)*zd + (dt_vabc*y-db_vabc)/vabc;
44      x*xd + y*yd + z*zd];
45
46 % Calcula os componentes do Jacobiano em relação ao vetor v
47 % (os comentários k_41, k_42, etc., são os componentes individuais do
↪      Jacobiano)
48 k_41 = (da_dt_vabc*(x+z)-da_da_vabc-da_dc_vabc)/vabc -
↪      da_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
49 k_42 = (db_dt_vabc*(x+z)-db_da_vabc-db_dc_vabc)/vabc -
↪      db_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
50 k_43 = (dc_dt_vabc*(x+z)-dc_da_vabc-dc_dc_vabc)/vabc -
↪      dc_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
51 k_44 = z*xd + y*yd + z*zd + dt_vabc/vabc;
52 k_45 = -2*y*xd + x*yd - 2*y*zd;
53 k_46 = x - 2*z*xd + y*yd + x*zd + dt_vabc*x/vabc;
54 k_51 = (da_dt_vabc*y-da_db_vabc)/vabc -
↪      da_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
55 k_52 = (db_dt_vabc*y-db_db_vabc)/vabc -
↪      db_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
56 k_53 = (dc_dt_vabc*y-dc_db_vabc)/vabc -
↪      dc_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
57 k_54 = y*xd - 2*x*yd;
58 k_55 = x*xd + z*zd + dt_vabc/vabc;
59 k_56 = -2*z*yd + y*zd;
60 k_61 = 0;
61 k_62 = 0;
62 k_63 = 0;
63 k_64 = xd;
64 k_65 = yd;
65 k_66 = zd;
66

```

```

67 % Monta a matriz Jacobiana em relação ao vetor v
68 k = [0,0,0,-1,0,0;
69      0,0,0,0,-1,0;
70      0,0,0,0,0,-1;
71      k_41,k_42,k_43,k_44,k_45,k_46;
72      k_51,k_52,k_53,k_54,k_55,k_56;
73      k_61,k_62,k_63,k_64,k_65,k_66];
74
75 % Monta a matriz Jacobiana em relação ao vetor vd
76 m = [1,0,0,0,0,0;
77      0,1,0,0,0,0;
78      0,0,1,0,0,0;
79      0,0,0,(x*z-(y^2+z^2)),(x*y+y*z),(x*z-(x^2+y^2));
80      0,0,0,x*y,-(x^2+z^2),y*z;
81      0,0,0,x,y,z];
82 end

```

Função que define as equações diferenciais inicialmente deduzidas pelo tempo mínimo de Fermat

```

1 function [f,k,m]=pa3d(t,v,vd)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 % Função pa3d
4 % Esta função calcula um sistema de equações diferenciais para descrever
5 % o movimento de uma partícula em um campo de velocidades tridimensional.
6
7 % Entradas:
8 % t - tempo
9 % v - vetor de posições e velocidades: [a;b;c;x;y;z]
10 % vd - vetor de derivadas das posições e velocidades
11
12 % Saídas:
13 % f - sistema de equações diferenciais
14 % k - Jacobiano em relação ao vetor v
15 % m - Jacobiano em relação ao vetor vd
16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
17
18 % Suposição: a derivada quadrada de a, b e c é igual a 1
19 %  $ad^2 + bd^2 + cd^2 = 1$ 

```

```

20 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
21
22 % Exemplo de uso:
23 % [f,k,m]=pa3d(0,[0,1,1,1,1,1],[1,1,1,1,1,1])
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25
26 % Calcula o campo de velocidade sonora e suas derivadas
27 [vabc, da_vabc, db_vabc, dc_vabc, da_da_vabc, db_da_vabc, dc_da_vabc,
    ↪ da_db_vabc,...
28     db_db_vabc, dc_db_vabc, da_dc_vabc, db_dc_vabc, dc_dc_vabc, ...
29     dt_vabc, da_dt_vabc, db_dt_vabc, dc_dt_vabc] = cv3d(v);
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31
32 % Extrai as posições e velocidades do vetor v
33 a = v(1); b = v(2); c = v(3); x = v(4); y = v(5); z = v(6);
34
35 % Extrai as derivadas das posições e velocidades do vetor vd
36 ad = vd(1); bd = vd(2); cd = vd(3); xd = vd(4); yd = vd(5); zd = vd(6);
37
38 % Calcula o sistema de equações diferenciais
39 f = [ad-x;
40     bd-y;
41     cd-z;
42     (x*z-(y^2+z^2))*xd + (x*y+y*z)*yd + (x*z-(x^2+y^2))*zd +
    ↪ (dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc;
43     (x*y)*xd - (x^2+z^2)*yd + (y*z)*zd + (dt_vabc*y-db_vabc)/vabc;
44     x*xd + y*yd + z*zd];
45
46 % Calcula os componentes do Jacobiano em relação ao vetor v
47 % (os comentários k_41, k_42, etc., são os componentes individuais do
    ↪ Jacobiano)
48 k_41 = (da_dt_vabc*(x+z)-da_da_vabc-da_dc_vabc)/vabc -
    ↪ da_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
49 k_42 = (db_dt_vabc*(x+z)-db_da_vabc-db_dc_vabc)/vabc -
    ↪ db_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
50 k_43 = (dc_dt_vabc*(x+z)-dc_da_vabc-dc_dc_vabc)/vabc -
    ↪ dc_vabc*(dt_vabc*(x+z)-da_vabc-dc_vabc)/vabc^2;
51 k_44 = z*xd + y*yd + z*zd + dt_vabc/vabc;
52 k_45 = -2*y*xd + x*yd - 2*y*zd;
53 k_46 = x - 2*z*xd + y*yd + x*zd + dt_vabc*x/vabc;

```

```

54 k_51 = (da_dt_vabc*y-da_db_vabc)/vabc -
    ↪ da_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
55 k_52 = (db_dt_vabc*y-db_db_vabc)/vabc -
    ↪ db_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
56 k_53 = (dc_dt_vabc*y-dc_db_vabc)/vabc -
    ↪ dc_vabc*(dt_vabc*y-db_vabc)/vabc^2;
57 k_54 = y*xd - 2*x*yd;
58 k_55 = x*xd + z*zd + dt_vabc/vabc;
59 k_56 = -2*z*yd + y*zd;
60 k_61 = 0;
61 k_62 = 0;
62 k_63 = 0;
63 k_64 = xd;
64 k_65 = yd;
65 k_66 = zd;
66
67 % Monta a matriz Jacobiana em relação ao vetor v
68 k = [0,0,0,-1,0,0;
69      0,0,0,0,-1,0;
70      0,0,0,0,0,-1;
71      k_41,k_42,k_43,k_44,k_45,k_46;
72      k_51,k_52,k_53,k_54,k_55,k_56;
73      k_61,k_62,k_63,k_64,k_65,k_66];
74
75 % Monta a matriz Jacobiana em relação ao vetor vd
76 m = [1,0,0,0,0,0;
77      0,1,0,0,0,0;
78      0,0,1,0,0,0;
79      0,0,0,(x*z-(y^2+z^2)),(x*y+y*z),(x*z-(x^2+y^2));
80      0,0,0,x*y,-(x^2+z^2),y*z;
81      0,0,0,x,y,z];
82 end

```

Cript que faz a simulação do raio acústico em 3D usando as equações inicialmente deduzidas pelo tempo mínimo de Fermat.

```

1 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2 % pa2d_run.m

```

```

3  % Script para simular o movimento de uma partícula em um campo de
   ↳ velocidades tridimensional.
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5
6  % Limpa todas as variáveis, fecha todas as janelas e limpa a janela de
   ↳ comando
7  clear all; close all; clc;
8
9  % Define um vetor de tempos de 0 a 20 com um intervalo de 0.0001
10 ts = 0:0.0001:20;
11
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13 % Definição da orientação de emissão (coordenadas esféricas)
14 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
15 % Define o ângulo theta0 em graus (0 < theta0 < 360)
16 theta0 = 350;
17 % Converte theta0 para radianos
18 theta0 = pi * theta0 / 180;
19
20 % Define o ângulo phi0 em graus (-90 < phi0 < 90)
21 phi0 = 0;
22 % Converte phi0 para radianos
23 phi0 = pi * phi0 / 180;
24
25 % Define as condições iniciais para a, b e c
26 a0 = -10;
27 b0 = 0;
28 c0 = 0;
29
30 % Calcula as coordenadas iniciais x0, y0 e z0 com base nos ângulos theta0
   ↳ e phi0
31 x0 = cos(phi0) * cos(theta0);
32 y0 = cos(phi0) * sin(theta0);
33 z0 = sin(phi0);
34
35 % Monta o vetor de condições iniciais
36 v0 = [a0; b0; c0; x0; y0; z0];
37
38 % Resolve o sistema de equações diferenciais usando a função 'dae4' com o
   ↳ modelo 'pa3d'

```



```
39 v = dae4('pa3d', ts, v0, 10);
40
41 % Plota a trajetória da partícula em um gráfico 3D
42 figure
43 plot3(v(1,:), v(2,:), v(3,:))
44 grid on
45 axis square
46
47 % Exibe o último valor do vetor v
48 v(:, end)
49
50 % Encerra o script
51 return
```

Anexo III - Trajetória de raios acústico 2D, Modelo inicial de propagação.

Esta função define o perfil de velocidades do som 2D para uma profundidade até 5000m com reflexões

```
1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  % Função cv2d
3  % Esta função calcula o campo de velocidade bidimensional e suas
   ↳ derivadas
4  % em relação às coordenadas x e y.
5  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6  function [vxy, dx_vxy, dy_vxy, dx_dx_vxy, dy_dx_vxy, dx_dy_vxy, dy_dy_vxy]
   ↳ = cv2d(v)
7
8  % Extrai as coordenadas e posições do vetor v
9  x = v(1);
10 y = v(2);
11 z = v(3);
12 w = v(4);
13
14 % vxy representa a velocidade do som que depende da coordenada horizontal
   ↳ x
15 % e da coordenada vertical y (onde um aumento no valor de y representa um
   ↳ aumento na profundidade)
16
17 % Perfil vertical:
18 % Define o perfil de velocidade do som
19 % zz representa a profundidade variando de 0 a 5000
20 % cc representa a velocidade do som em função da profundidade zz
21
22 % Se a profundidade y for menor ou igual a 750
23 if y <= 750
24     vxy = 1520 - 0.05 * y; % Calcula a velocidade do som
25     dx_vxy = 0; % Derivada da velocidade em relação a x
26     dy_vxy = -0.05; % Derivada da velocidade em relação a y
27     dx_dx_vxy = 0; % Segunda derivada da velocidade em relação a x
28     dx_dy_vxy = 0; % Derivada mista da velocidade em relação a x e y
29     dy_dy_vxy = 0; % Segunda derivada da velocidade em relação a y
```

```

30     dy_dx_vxy = 0; % Derivada mista da velocidade em relação a y e x
31
32     % Se a profundidade y for maior que 750
33 else
34     vxy = (1520 - 0.05 * 750) + (y - 750) * 0.014; % Calcula a velocidade
    ↪ do som
35     dx_vxy = 0; % Derivada da velocidade em relação a x
36     dy_vxy = 0.014; % Derivada da velocidade em relação a y
37     dx_dx_vxy = 0; % Segunda derivada da velocidade em relação a x
38     dx_dy_vxy = 0; % Derivada mista da velocidade em relação a x e y
39     dy_dy_vxy = 0; % Segunda derivada da velocidade em relação a y
40     dy_dx_vxy = 0; % Derivada mista da velocidade em relação a y e x
41 end
42
43 end

```

Este script definirá as equações diferenciais.

```

1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  % Equações geodésicas 2D
3  % Este script define as equações geodésicas bidimensionais
4  % para serem usadas no solucionador dae4.
5  % PRESUPOSTO: vxy é função apenas de y.
6  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
7
8  % As seguintes equações definem as derivadas segundas de x e y em termos
    ↪ da velocidade do som vxy e suas derivadas.
9  % d2xdt2 = (2/vxy) * (dy_vxy) * xd * yd;
10 % d2ydt2 = (1/vxy) * (dy_vxy) * (yd^2 - xd^2);
11
12 % Vetor de equações diferenciais sem o sinal de igual e todas reduzidas ao
    ↪ lado esquerdo.
13 % f = [xd - z;
14 %      yd - w;
15 %      zd - (2/vxy) * (dy_vxy) * z * w;
16 %      wd - (1/vxy) * (dy_vxy) * (w^2 - z^2)];
17
18 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
19 % t - tempo

```

```

20 % v = [x; y; z; w]
21 % xd - derivada de x
22 % yd - derivada de y
23 % zd - derivada de z
24 % wd - derivada de w
25
26 % vxy - campo de velocidade do som
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
29 % Exemplo de chamada da função:
30 % [f, k, m] = pa2d_g(0, [0, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1])
31
32 % Extração das coordenadas e posições do vetor v
33 x = v(1);
34 y = v(2);
35 z = v(3);
36 w = v(4);
37
38 % Extração das derivadas do vetor vd
39 xd = vd(1);
40 yd = vd(2);
41 zd = vd(3);
42 wd = vd(4);
43
44 % Chamada da função cv2d para obter o campo de velocidade e suas
    ↳ derivadas
45 [vxy, dx_vxy, dy_vxy, dx_dx_vxy, dy_dx_vxy, dx_dy_vxy, dy_dy_vxy] =
    ↳ cv2d(v);
46
47 % Definição das constantes k para o Jacobiano em relação ao vetor v: x, y,
    ↳ z, w
48 k_31 = 0;
49 k_32 = (2 * dy_vxy / vxy^2) * (dy_vxy) * z * w - (2 / vxy) * (dy_dy_vxy) *
    ↳ z * w;
50 k_33 = -(2 / vxy) * (dy_vxy) * w;
51 k_34 = -(2 / vxy) * (dy_vxy) * z;
52
53 k_41 = 0;
54 k_42 = (dy_vxy / vxy)^2 * (dy_vxy) * (w^2 - z^2) - (1 / vxy) * (dy_dy_vxy)
    ↳ * (w^2 - z^2);

```

```
55 k_43 = 2 * (1 / vxy) * (dy_vxy) * z;  
56 k_44 = -2 * (1 / vxy) * (dy_vxy) * w;  
57  
58 % Jacobiano em relação ao vetor v: x, y, z, w  
59 k = [0, 0, -1, 0;  
60      0, 0, 0, -1;  
61      k_31, k_32, k_33, k_34;  
62      k_41, k_42, k_43, k_44];  
63  
64 % Jacobiano em relação ao vetor vd: xd, yd, zd, wd  
65 m = [1, 0, 0, 0;  
66      0, 1, 0, 0;  
67      0, 0, 1, 0;  
68      0, 0, 0, 1];  
  


---

  
1  Faz o traçado do raio acústico usando ODE4  
2  
3  % pa2d_reflex_run.m  
4  % Script para simulação de propagação de raio em 2D com reflexões  
5  
6  % Limpa variáveis, janelas de figura e console  
7  clear all;  
8  close all;  
9  clc;  
10  
11 % Matriz de trajetória do raio com reflexões  
12 Vmatrix=[];  
13 Tsmatrix=[];  
14  
15 % Definição do intervalo de tempo  
16 delta=50;  
17 ts=0:delta:1000*delta;  
18  
19 % Definição do ângulo inicial do raio  
20 theta0=5; % Ângulo em graus 0<theta0<90  
21 theta0=pi*theta0/180; % Conversão para radianos  
22 x0=0;  
23 y0=500;  
24
```

```

25  % Definição das condições iniciais
26  z0=cos(theta0);
27  w0=sin(theta0);
28  v0=[x0;y0;z0;w0];
29
30  % Loop para simulação da propagação do raio
31  for i1=1:10
32      v=dae4('pa2d_g',ts,v0,10);
33      ctemp1=min(find(v(2,:)<0));
34      ctemp2=min(find(v(2,:)>bottom(v(1,:))));
35
36      if isempty(ctemp1)==1 && isempty(ctemp2)==1
37          disp('Nada')
38          % Sem interseção
39          ts=ts+ts(end);
40          Vmatrix=[Vmatrix v(:,1:end-1)];
41          Tsmatrix=[Tsmatrix ts(1,1:end-1)];
42          v0=v(:,end);
43          [y,vn]=bottom(v0(1,1));
44          declive=-vn(1);
45      elseif isempty(ctemp1)~=1 && isempty(ctemp2)==1
46          disp('Reflexão na superfície')
47          % Reflexão na superfície
48          Vmatrix=[Vmatrix v(:,1:ctemp1-1)];
49          Tsmatrix=[Tsmatrix ts(1,1:ctemp1-1)];
50          v0=Vmatrix(:,end);
51          v0(4)=-v0(4); % Reflexão na superfície
52          ts=ts+Tsmatrix(end);
53      elseif isempty(ctemp1)==1 && isempty(ctemp2)~=1
54          disp('Reflexão no fundo')
55          % Reflexão no fundo
56          Vmatrix=[Vmatrix v(:,1:ctemp2-1)];
57          Tsmatrix=[Tsmatrix ts(1,1:ctemp2-1)];
58          v0=Vmatrix(:,end);
59          [y,vn]=bottom(v0(1)); % Profundidade y e vetor normal ao fundo
60          declive=-vn(1);
61          aux1=v0(3)*(1-declive^2)+2*v0(4)*declive;
62          aux2=v0(4)*(declive^2-1)+2*v0(3)*declive;
63          v0(3)=aux1;
64          v0(4)=aux2;

```

```
65         ts=ts+Tsmatrix(end);
66     else
67         % Interseção na superfície e no fundo
68     end
69 end
70
71 % Definição dos limites para plotagem
72 XMIN=Vmatrix(1,1);
73 XMAX=Vmatrix(1,end);
74 YMIN=-100;
75 YMAX=max(bottom(Vmatrix(1,:)));
76
77 % Plotagem dos resultados
78 plot(Vmatrix(1,:),Vmatrix(2:,:),'-k','LineWidth',2)
79 axis ij
80 axis([XMIN XMAX YMIN YMAX])
81 grid on
82 hold on
83 plot([XMIN XMAX],[0 0],'r--','LineWidth',2)
84 plot([XMIN XMAX],bottom([XMIN XMAX]),'r--','LineWidth',2)
85
86 % Configuração dos eixos e título
87 set(gca,'FontSize',10,'FontWeight','bold','LineWidth',2.0,'box','on');
88 xlabel('Alcance [m]', 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold');
89 ylabel('Profundidade [m]', 'FontSize', 20, 'FontWeight', 'bold');
90 title('Propagação do raio Acústico', 'FontSize', 20, 'FontWeight',
    ↪ 'bold');
91
92 % Salva os resultados em um arquivo
93 name_file=['RAYTRACING_2D_WITH_REFLEX_DEC_',num2str(ceil(100*declive))];
94 save(name_file);
95
96 return;
```
