



Instituto Superior de Contabilidade e Administração

Politécnico de Coimbra



**Instituto Superior
de Contabilidade
e Administração**

Politécnico de Coimbra

João André Santos Sêco

Futuros sobre o VIX

Coimbra, abril de 2022



**Instituto Superior
de Contabilidade
e Administração**

Politécnico de Coimbra

João André Santos Sêco

Futuros sobre o VIX

Dissertação submetida ao Instituto Superior de Contabilidade e Administração de Coimbra para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de **Mestre em Análise Financeira**, realizada sob a orientação do Professor José Carlos Gonçalves Dias.

Coimbra, abril de 2022

TERMO DE RESPONSABILIDADE

Declaro ser o autor desta dissertação, que constitui um trabalho original e inédito, que nunca foi submetido a outra Instituição de ensino superior para obtenção de um grau acadêmico ou outra habilitação. Atesto ainda que todas as citações estão devidamente identificadas e que tenho consciência de que o plágio constitui uma grave falta de ética, que poderá resultar na anulação da presente dissertação.

RESUMO

A recente crise nos mercados financeiros teve como origem o aparecimento dos primeiros casos da pandemia Covid-19. Este novo momento da história, provocou um aumento violento no índice de volatilidade VIX, para valores que não eram observados desde a crise de 1987 e 2008. A presente dissertação investiga a possibilidade do modelo *mean reversion Constant Elasticity of Variance* com *jumps* no processo do ativo subjacente, e os restantes modelos nele contidos, de valorizar os 12 contratos de futuros sobre o VIX do ano 2020.

A estimação dos parâmetros demonstra que o parâmetro de elasticidade varia em média entre 1,9 e 2, quando este parâmetro não é restrito e são considerados *jumps*, o que pode indicar problemas no processo de estimação. Adicionalmente, a diferença entre os parâmetros de elasticidade dos modelos CEV e CEVJ sugere que a implementação dos momentos no método GMM não foi realizada de modo apropriado. Por outro lado, os modelos *mean reversion Constant Elasticity of Variance* com e sem *jumps* são superiores aos restantes modelos considerados. Embora, nenhum destes modelos deva ser selecionado para valorizar os futuros sobre o VIX, devido aos erros produzidos serem muito superiores aos de outros modelos até agora desenvolvidos na literatura.

Palavras-chave: CEV, mean reversion, jumps, GMM, futuros sobre o VIX

ABSTRACT

The recent crisis in the financial markets was due to the appearance of the first cases of the pandemic Covid-19. The new historical moment in time, made the volatility index VIX spike to levels never seen, since the 1987 and 2008 crisis. The present study argues the possibility of the model mean reversion Constant Elasticity of Variance with jumps in the process of the underlying asset, and the other nested models, to price the 12 VIX futures contracts in 2020.

The parameter estimation shows that the elasticity parameter varies around 1.9 and 2, when the elasticity parameters isn't restricted and are considered jumps, which might indicate problems in the estimation procedure. Additionally, the difference between the elasticity parameters of the model CEV and CEVJ demonstrate that the implementation of the moments in the GMM weren't implemented properly. On the other hand, the mean reversion Constant Elasticity of Variance with and without jumps are the best fit to value the VIX futures contracts among the other models here considered. Even though none of these models should be selected to value the VIX futures, since the errors produced are very high compared to others models already developed in the literature.

Key words: CEV, *mean reversion*, *jumps*, GMM, VIX futures

ÍNDICE GERAL

INTRODUÇÃO	1
História do Índice VIX	1
VIX.....	4
Estrutura da dissertação	5
1 MODELO.....	8
1.1 Propriedades.....	8
1.2 Modelo MRCEVJ.....	9
1.3 Futuros sobre o VIX.....	10
2 SELEÇÃO DA AMOSTRA, TESTES E ESTIMAÇÃO	12
2.1 Construção da Amostra e Sumário Estatístico.....	12
2.2 Testes das Propriedades.....	15
2.2.1 Mean Reversion	15
2.2.2 Jumps.....	17
2.3 Estimação dos parâmetros	18
3 RESULTADOS.....	22
CONCLUSÃO	27
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	28
APÊNDICES.....	32
APÊNDICE 1. DERIVAÇÃO DA EXPRESSÃO DOS FUTUROS.....	33

ÍNDICE DE TABELAS E FIGURAS

Figura 2.1 Evolução dos preços de fecho do índice VIX entre 21 de abril de 2017 e 16 de dezembro de 2020.....	12
Figura 2.2 Regimes de volatilidade entre 2004 e 2020	17
Figura 3.1 Evolução dos preços dos Futuros sobre o VIX de mercado e dos preços dos Futuros sobre o VIX resultante do modelo MRCEV com baseado numa amostra de dados de dois anos.....	25
Figura 3.2. Evolução dos erros MAPE dos preços dos Futuros sobre o VIX de mercado e dos preços dos Futuros sobre o VIX resultante do modelo MRCEV baseado numa amostra de dados de dois anos	26
Tabela 1.1. Sumário dos modelos desenvolvidos	10
Tabela 2.1. Estatística Descritiva dos preços de fecho do índice VIX.....	13
Tabela 2.2. Contratos dos Futuros sobre o VIX: settlement price, volume diário e open interest.	14
Tabela 2.3. Estatística Descritiva dos settlement prices dos Futuros sobre o VIX....	15
Tabela 2.4. Teste de ADF	16
Tabela 2.5. Parâmetros estimados (GMM) 2 anos.....	20
Tabela 2.6. Parâmetros estimados (GMM) 1 ano	21
Tabela 3.1. Desempenho da valorização dos quatro Modelos (2 anos)	23
Tabela 3.2. Desempenho da valorização dos quatro Modelos(1ano).....	24

Lista de abreviaturas, acrónimos e siglas

ADF - *Augmented Dickey-Fuller*

APE – *Absolute percentage error*

ATM - *at-the-money*

CBOE - *Chicago Board Options Exchange*

CEV - *Constant Elasticity of Variance*

CFE – *CBOE Future Exchange*

CIR – *Cox, Ingersoll e Ross*

COE – *CBOE Options Exchange*

GARCH - *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*

HN-GARCH – *Heston e Nandi GARCH*

IG-GARCH - *Inverse Gaussian GARCH*

MAPE – *Mean absolute percentage error*

MRCEV – *mean reversion CEV*

MRCEVJ – *mean reversion CEV com jumps*

MRCIR – *mean reversion CIR*

MRCIRJ – *mean reversion CIR com jumps*

MSPE – *Mean signed percentage error*

OTM - *out-the-money*

RMSE – *Root mean square error*

SDE - *Equação Diferencial Estocástica*

SPE – *Signed percentage error*

S&P 100 - *Índice Standard & Poor's 100*

S&P 500 - *Índice Standard & Poor's 500*

VIX - *Índice de volatilidade do S&P500 da CBOE*

VXO - Índice de volatilidade do S&P100 da CBOE

INTRODUÇÃO

Atualmente, o mundo é ainda assolado pela pandemia Coronavírus, mais conhecida por Covid-19. Este novo episódio da história mundial implica a adoção de um novo comportamento em sociedade que está longe de ser completamente normalizado. Após o aparecimento dos primeiros casos deste novo vírus, seguiu-se um forte período de instabilidade nos mercados financeiros e consequente volatilidade.

As oscilações de volatilidade motivaram ao longo dos anos a introdução de instrumentos financeiros que permitam aos participantes de mercado, não só cobrir as suas posições a alterações dos preços das ações como também de variações do nível de volatilidade. De modo a responder a estas variações foram desenvolvidos estudos que possibilitaram a criação e o aperfeiçoamento de novos instrumentos financeiros, os denominados índices de volatilidade.

Os estudos pioneiros de Brenner e Galai (1989), Brenner e Galai (1993) e de Whaley (1993) tiveram um papel fundamental para a criação dos índices de volatilidade e posteriormente dos respetivos derivados. Brenner e Galai (1989) propõem o desenvolvimento de índices de volatilidade com a capacidade de introdução de derivados, opções e futuros. De forma aos investidores possuírem instrumentos para cobrir as suas posições a flutuações da volatilidade ao longo do tempo, principalmente em momentos de forte instabilidade de mercados. Brenner e Galai (1993) estendem esta abordagem para o mercado *Forex*. Finalmente, Whaley (1993) desenvolve fórmulas analíticas para valorizar os futuros e opções sobre o índice de volatilidade da *Chicago Board Options Exchange* (CBOE) conhecido pelo acrónimo VIX introduzido em 1993.

História do Índice VIX

O índice VIX consiste na medida de expectativa de mercado da volatilidade implícita para os próximos 30 dias, pelo que é também conhecido como *forward looking volatility*¹. Inicialmente o VIX, o agora índice VXO, era calculado segundo o modelo de Black e Scholes (1973) com base num total de oito opções do índice *Standard & Poor's 100* (S&P

1- Da mesma maneira que os investidores estudam a volatilidade histórica com a perspetiva de conhecer o passado para compreender e explicar o futuro, a volatilidade implícita fornece aos participantes de mercado uma perspetiva futura do sentimento de mercado.

100). Sendo considerado desde então a referência de volatilidade do mercado dos Estados Unidos da América.

Em 2003, a CBOE em colaboração com a *Goldman Sachs* procederam à alteração da fórmula de cálculo do índice VIX. Este passa a ser estimado tendo em conta o valor das opções, *calls* e *puts*, do índice S&P 500 sobre um número variado de *strike prices*, CBOE (2021). A alteração da fórmula de cálculo do índice VIX foi realizada com o principal objetivo de introduzir derivativos sobre volatilidade no mercado financeiro. Carr e Wu (2006) enunciam que a alteração da metodologia teve como principais motivos: a complexidade de replicação de *swaps* sobre a volatilidade; a crítica em redor da definição do VXO, provocada pela expressão de conversão dos dias de transação; e, por último, devido ao significado do próprio índice, que consistia numa transformação monótona e não linear do preço das opções *at-the-money* (ATM) do índice S&P 100.

Em 2014 a equação do índice VIX é novamente revista. O índice VIX passa a ser calculado com opções semanais sobre o S&P 500, com maturidades a variar entre os 23 e os 37 dias, o que permite expressar com maior precisão a volatilidade implícita de 30 dias do índice *Standard & Poor's 500* (S&P 500) (CBOE, 2021). Segundo o *white paper* da CBOE (2021) o índice VIX possui a seguinte expressão:

$$VIX^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (1)$$

com: T o tempo até à maturidade expresso em anos; F o valor do índice *forward* de acordo com os preços das opções do índice S&P 500; K_0 o primeiro *strike* inferior ao valor do índice *forward*; K_i o *strike* da opção *out-of-the-money* (OTM) sendo que a opção utilizada é: uma *call* se $K_i > K_0$, *put* se $K_i < K_0$ e quando $K_i = K_0$ a opção utilizada é indiferente; $\Delta K_i^2 = (K_{i+1} - K_i) / 2$, representa a média da diferença dos valores de *strike* K_{i+1} e K_{i-1} ; R , a taxa de juro sem risco para a maturidade; e $Q(K_i)$, é o valor intermédio entre o valor *bid* e *ask* das opções com *strike* K_i .

O índice VIX é também conhecido na literatura como o índice do medo (Carr, 2017). O significado advém do sentimento de medo sentido pelos investidores, principalmente quando a volatilidade atinge os seus máximos históricos em períodos de forte instabilidade dos mercados financeiros. Como por exemplo: a crise de mercados de 1987, ilustrada em Whaley (2009, Exhibit 1); a crise financeira de 2008 e a crise pandémica

Covid-19 (ver a Figura 3.1). Ainda que seja consensual afirmar que a correlação entre volatilidade, VIX, e retornos, os retornos do S&P 500, seja negativa, esta continua a ser objeto de estudo. Whaley (2000) conclui que a correlação entre os retornos do índice S&P100 e o VXO é assimétrica negativa, isto é, os mercados reagem mais negativamente ao aumento de volatilidade do que positivamente à diminuição da mesma. Whaley (2009) atualiza o trabalho desenvolvido por Whaley (2000) para o novo VIX. Diversos estudos apresentam diferentes hipóteses ou explicações para justificar a relação assimétrica, tais como: fatores de mercado (Dennis, Mayhew e Stivers, 2006); endividamento das empresas, *leverage effect*, (Low, 2004) e fatores comportamentais (Hibbert, Daigler e Dupoyet, 2008).

Devido ao VIX ser um instrumento financeiro não transacionável existe a carência de produtos financeiros nos mercados que permitam negociar as flutuações das ações nos mercados, como também, flutuações de volatilidade. Assim em 2004, a CBOE *Futures Exchange* (CFE) introduziu os contratos de futuros sobre o VIX e, devido ao seu forte sucesso, a CBOE *Options Exchange* (CFO) introduz no ano 2006 as opções sobre o VIX (CBOE, 2021). O lançamento dos derivados sobre a volatilidade providencia aos participantes de mercado diversas ferramentas. As opções sobre o VIX permitem a cobertura, *hedging*, das carteiras dos investidores face ao risco da volatilidade, ou risco do mercado, e transacionar segundo o movimento da volatilidade². Por sua vez, os futuros sobre o VIX refletem o valor futuro do índice de volatilidade para uma maturidade pré-definida e são utilizados na diversificação de carteiras e gestão do risco de volatilidade³. Dash e Morah (2005), Szado (2009) e Moran e Liu (2020) explicam e elaboram algumas estratégias de como estes derivados podem ser utilizados, especialmente em períodos de instabilidade.

O sucesso destes instrumentos financeiros mantém-se até aos dias de hoje. De acordo com os dados fornecidos pelo *white paper* da CBOE (2021), em 2015 eram transacionados diariamente aproximadamente 800.000 contratos de opções e futuros sobre o VIX. Recentemente, em 2019 foram transacionados 127 milhões e 62 milhões contratos de opções e futuros sobre o VIX respetivamente (Moran e Liu, 2020).

2- Ver CBOE (2020a).

3- Ver CBOE (2020b).

A CBOE apresenta e calcula ainda outros índices de volatilidade com características semelhantes ao VIX. O índice de curto prazo de volatilidade da CBOE, VIX9DSM, reflete a volatilidade esperada do índice S&P 500 para os próximos 9 dias. Os índices de acrónimo VIX3MSM, VIX6MSM e VIX1YSM refletem a volatilidade diária esperada para os próximos 3, 6 e 12 meses do índice S&P 500 respetivamente (CBOE, 2021).

VIX

A modelização dos derivados sobre a volatilidade é uma temática ainda em discussão e desenvolvimento. A investigação em redor deste tema é acompanhada pela questão de qual o modelo e as características nele contidas, que devem ser eleitas para que a valorização destes instrumentos financeiros seja a mais eficiente e eficaz possível. Ao longo dos anos, principalmente depois da sua introdução nos mercados e da crescente popularidade que se seguiu, foram exibidos um vasto leque de estudos diferenciadores.

Zhang e Zhu (2006) foram os primeiros autores a valorizar os Futuros sobre o VIX, ao considerarem que o índice S&P 500 é melhor descrito segundo o modelo de Heston (1993). Baseado ainda no modelo de Heston outros autores como por exemplo: Sepp (2008a), Sepp (2008b) e Lian e Zhu (2013) focam-se na valorização de opções sobre VIX, enquanto que Lin (2007) e Zhu e Lian (2012) valorizam os futuros sobre o índice VIX. Lin (2007) deriva fórmulas fechadas sobre os futuros sobre o VIX para um conjunto de modelos de volatilidade estocástica com *jumps* tanto no processo do ativo subjacente como no de variância. O autor conclui ainda que a fórmula dos futuros sobre o VIX é igual àquela tratada pela CBOE, sendo por essa razão mencionado por outros autores e estudos um dos estudos mais completos. Zhu e Lian (2012) demonstram que o modelo Heston é um bom candidato para a valorização dos futuros sobre o VIX, adicionam ainda que a adição de *jumps* no processo da variância contribui pouco para a valorização dos derivados.

Considerando a família do modelo *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH), Wang, Shen, Jiang e Huang (2017) baseado no modelo de Heston e Nandi (2000) em tempo discreto, também conhecido por Heston e Nandi GARCH (HN-GARCH), valoriza os futuros sobre o VIX. Os autores Wang et al. (2017) determinam uma fórmula fechada para os futuros sobre o VIX, recorrendo à fórmula de Hao e Zhang (2013) para calcular o VIX como a média aritmética anual da variância esperada do próximo mês, sob a medida de risco neutro e, à proposição 1 de Zhu e Lian

(2012) para determinar a expressão dos futuros. Yang, Wang e Chen (2019) conclui que a adição de *jumps* infinitos produz resultados mais favoráveis do que o modelo HN-GARCH. Cao, Badescu, Cui e Jayaraman (2020) confronta os modelos HN-GARCH e *Inverse Gaussian* GARCH (IG-GARCH) e conclui que este último apresenta benefícios na valorização de opções sobre o VIX e sobre o índice S&P 500 por contrapartida do modelo HN GARCH. O modelo HN-GARCH é ainda superado na valorização de futuros sobre o VIX pelo modelo de Huang, Tong e Wang (2019).

Apesar do número crescente de estudos realizados sobre os futuros sobre o VIX não é oferecida uma atenção especial à valorização baseada no modelo *Constant Elasticity of Variance* (CEV) de Cox (1975) e as suas extensões. De acordo com o meu conhecimento apenas Jones (2003), Noosman e Wilhelmsson (2009), Dupoyet, Daigler e Chen (2011) e Zhao, Cui e Florescu (2018) adotam este modelo para explicar o comportamento da volatilidade e valorizar opções e futuros sobre o VIX. Jones (2003) compara o modelo de Heston e o modelo CEV para valorizar o antigo índice VIX, VXO, concluindo que este último apresenta vantagens em relação ao modelo de Heston. Noosman e Wilhelmsson (2009) utiliza o modelo CEV com *jumps* no processo da variância para valorizar o índice VIX, com o objetivo de testar a habilidade dos preços dos futuros sobre o VIX de prever os valores futuros do índice VIX. Baseado num modelo semelhante ao anterior, embora não sejam considerados prêmios de risco na modelização, Dupoyet, Daigler e Chen (2011) concluem que o modelo *mean reversion* CEV (MRCEV) é adequado para valorizar os futuros sobre o VIX. O que vai contra a noção de que a adição de *jumps* beneficia a valorização dos derivados sobre a volatilidade. Zhao, Cui e Florescu (2018) propõem uma nova metodologia baseada numa fórmula fechada da expansão da série Hermite, ao implementar os modelos de Heston, MRCEV e o modelo 3/2 no processo da variância.

Estrutura da dissertação

A modelização dos Futuros sobre o VIX está longe de concluída, apresenta muitas debilidades para com a valorização dos derivados sobre a volatilidade. O presente estudo prende-se com dois tópicos fundamentais: verificar as evidências literárias de que modelos com a componente *jumps* no processo do ativo subjacente produzem menos erros que os mesmos sem esta característica e de verificar se os mesmos modelos mantêm a mesma capacidade de valorização em momentos de instabilidade de mercado.

Seguindo o comentário de Daigler, Dupoyet e Patterson (2016) para a necessidade de aplicar modelos já existentes a períodos de maior incerteza de mercado, o objetivo do presente estudo é testar a capacidade do modelo *mean reversion* CEV com *jumps* (MRCEVJ) de Dupoyet et al. (2011) para valorizar os futuros sobre o VIX para os 12 contratos de futuros de 2020. O foco passa também por esclarecer as preocupações levantadas pelos autores Dupoyet et al. (2011). Como por exemplo se as diferenças encontradas entre os futuros de mercado e dos diferentes modelos foram provocadas devido a problemas de calibração e estimação dos parâmetros. De modo a permitir que a comparação é realizada de forma adequada, todo o processo e orientações mencionadas em Dupoyet et al. (2011) serão tidas em consideração.

A presente dissertação não apresenta nenhuma contribuição específica para a literatura do VIX e dos Futuros sobre o VIX. Consegue, no entanto, identificar possíveis debilidades do modelo MRCEVJ, particularmente no processo de estimação dos seus parâmetros. Inicialmente, através da implementação do processo de estimação dos parâmetros foi possível identificar que os parâmetros de elasticidade do modelo MRCEVJ variam, em média, entre 1,9 e 2, pelo que estes valores puderam indiciar à priori problemas devido à sua dimensão. Posteriormente, ao comparar os parâmetros de elasticidades dos modelos MRCEV e MRCEVJ, é verificada que a diferença entre ambos é significativa. Tal sugere que a aplicação dos momentos, cujo o objetivo é diferenciar os *jumps* e a variância, no método *Generalized Method of Moments* (GMM) não tiveram o impacto esperado. Por fim, é concluído que os modelos MRCEV e MRCEVJ exibem o melhor desempenho para valorizar os futuros sobre o VIX, sendo a sua eficácia diferente de maturidade para maturidade. Os modelos, no entanto, não apresentam para o período de instabilidade dos mercados de 2020 a aptidão necessária para valorizar os futuros sobre o VIX. Os erros produzidos são muito superiores aos do artigo original e a outros introduzidos até ao momento.

O restante estudo está organizado da seguinte forma. A primeira secção apresenta um breve resumo sobre as propriedades existentes na dinâmica do índice VIX, bem como as expressões do modelo MRCEVJ e a fórmula que permite calcular os futuros sobre o VIX. A segunda secção desenvolve a obtenção dos dados, estimação dos parâmetros dos modelos para todos os contratos de futuros em análise e a elaboração de testes para verificar as características dos modelos em estudo, *mean reversion* e *jumps*. A terceira

secção apresenta os resultados e a respetiva discussão. Por fim, a conclusão finaliza o estudo.

1 MODELO

1.1 Propriedades

As características que um modelo contém reflete substancialmente a sua eficiência e eficácia. A literatura sobre volatilidade enuncia a existência de duas propriedades que estão presentes na dinâmica do VIX. A propriedade *mean reversion* e a ocorrência de *jumps*.

A propriedade *mean reversion* sugere que o *spot* do VIX dirige-se para um determinado valor específico. Por outras palavras, caso o *spot* se encontre elevado (baixo) num dado momento t , no longo prazo é expectável que o *spot* tenda a diminuir (aumentar) e a se aproximar de um dado valor referência. No entanto, o valor de referência para o qual o VIX se dirige varia de período para período. Gou e Wohar (2006) demonstram que é possível dividir uma amostra temporal do índice VIX entre 1990 e 2003 em três regimes de volatilidade: de 1990 a 1992, 1992 a 1997 e, por fim, de 1997 a 2003. Dondoni, Montagna e Maggi (2018) acrescentam ainda os regimes de 2004 a 2007 e 2007 a 2012, marcado pelas crises financeiras de 2008 e 2011. Considerando os recentes acontecimentos é possível afirmar que iram surgir novos regimes de volatilidade. Especificamente um regime que contenha o ano 2020, marcado pelo aparecimento da pandemia com um fim ainda incerto⁴. Tal vai-se confirmar correto mais à frente.

Outra propriedade também importante para explicar a dinâmica do índice de volatilidade é a componente dos *jumps*, sendo uma das vantagens da sua adoção, a capacidade de explicar os aumentos violentos que ocorrem em momento de grande instabilidade nos mercados (Todorov e Tauchen, 2011). A presença de *jumps* no processo de volatilidade foi abordada por diversos autores, como por exemplo: Bates (2000), Duffie, Pan e Singleton (2000), Pan (2002), Eraker, Johannes e Polson (2003) e Wagner e Szimayer (2004). A adoção dos *jumps* nos diferentes modelos já existentes vem cada vez mais, suportar a ideia de que não só esta característica está presente no índice VIX como também é uma propriedade que aumenta a eficácia dos modelos. Dotsis, Psychoyios e Skiadopoulos (2007), Zhu e Lian (2012), Psychoyios e Skiadopoulos (2006) e Lin (2007),

4- À data de realização, o índice VIX atingiu, na terceira semana do mês de fevereiro de 2021, o menor preço de fecho desde o aparecimento da pandemia Covid-19. Tal sugere, que foi necessário aproximadamente um ano para os valores de volatilidade do mercado reverterem para os números pré pandémicos.

encontram evidências de que a inclusão de *jumps*, especificamente *jumps* positivos, melhora o desempenho de valorização dos derivados sobre volatilidade, quando comparado com os mesmos modelos sem *jumps*. Park (2016), baseado nos modelos de Kou (2002) e Kou e Wang (2004), embora não apresente estes resultados, acrescenta ainda que embora *jumps* positivos possuam maior impacto na valorização dos derivados sobre a volatilidade, os *jumps* negativos não devem ser negligenciados. Noutro ramo de investigações dos *jumps*, Yang, Wang e Chen (2019) e Cao, Ruan, Su e Zhang (2019) demonstram que a inclusão de *jumps* infinitos não deve ser ignorada na valorização dos derivados.

Embora ambas as propriedades referidas tenham um impacto importante na valorização dos futuros sobre o VIX, Dotsis, Psychoyios e Skiadopoulos (2007) evidenciam que a característica *mean reversion* apresenta uma importância de segunda ordem.

1.2 Modelo MRCEVJ

O modelo doravante MRCEVJ desenvolvido por Dupoyet et al. (2011) possui a seguinte expressão, com uma ligeira alteração de notação:

$$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma S_t^\gamma dW_t + y_t dq_t \quad (2)$$

onde S_t representa o valor do índice VIX no momento t ; os parâmetros α e β respeitantes ao membro do *drift* do modelo, onde $\frac{\alpha}{\beta}$ é o valor de *mean reversion*⁵, β o valor da velocidade de *mean reversion*; W_t representa o processo *standard Brownian motion*; γ o parâmetro de elasticidade e y_t a dimensão do *jump*, caso ocorra. A frequência dos *jumps* segue um processo de *Poisson* q_t , com a probabilidade de ocorrer um *jump* entre o momento t e $t + dt$, representada por λdt , isto é:

$$Prob[dq_t = 1] = \lambda dt \quad (3)$$

$$Prob[dq_t = 0] = 1 - \lambda dt$$

5 - No caso específico do modelo MRCEVJ, e modelos nele contido, é possível definir o valor de *mean reversion*, porque não é considerada a presença de prémio de risco no parâmetro β .

e onde o tamanho do *jump* segue uma distribuição exponencial:

$$y_t \sim \text{Exponential}(\mu_y) \quad (4)$$

com μ_y o valor da média da distribuição de y_t .

O modelo MRCEVJ dá origem a outros modelos já conhecidos na literatura. O modelo de Cox, Ingersoll e Ross (1985), desenvolvido inicialmente para valorizar taxas de juro sem risco, adaptado com a propriedade *mean reversion*, doravante modelo *mean reversion* CIR (MRCIR), surge quando o parâmetro de elasticidade é igual a 0,5 e não ocorrem *jumps*, $dq_t = 0$. Caso ocorram *jumps*, $dq_t = 1$, estamos perante o modelo *mean reversion* CIR com *jumps* (MRCIRJ). Por fim, o modelo MRCEV, de Chan, Karolyi, Longstaff e Sanders (1992) é assumido quando não ocorrem *jumps*, $dq_t = 0$.

A tabela 1.1 resume as expressões e especificidades dos diferentes modelos em análise.

Tabela 1.1. Sumário dos modelos desenvolvidos

Modelos	Equação	Restrições
MRCIR	$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t$	$\gamma = 0.5; dq_t = 0$
MRCEV	$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma S_t^\gamma dW_t$	γ não é restrito; $dq_t = 0$
MRCIRJ	$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma\sqrt{S_t}dW_t + y_t dq_t$	$\gamma = 0.5; y_t$ não é restrito com $dq_t = 1$
MRCEVJ	$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma S_t^\gamma dW_t + y_t dq_t$	γ e y_t não são restritos com $dq_t = 1$

Fonte: Adaptado de Zhao et al. (2018)

1.3 Futuros sobre o VIX

O preço dos futuros sobre o índice VIX é igual ao valor esperado do índice VIX num dado dia de negociação, t , com a maturidade T , sob a medida de risco neutro Q :

$$F(S_t, t, T) = E^Q[S_T] \quad (5)$$

A expressão do preço dos futuros sobre o VIX segundo o modelo geral CEVJ, é dada por:

$$F(S_t, t, T) = S_t e^{-\beta(T-t)} + \frac{\alpha + \mu\lambda}{\beta} (1 - e^{-\beta(T-t)}) \quad (6)$$

onde: $\alpha, \beta, \mu, \lambda$ os parâmetros do modelo; $(T - t)$ o tempo para a maturidade e S_t o valor do índice VIX no momento t .⁶

A análise da expressão dos futuros sobre o VIX (Equação 6) permitir verificar que:

- i) a dependência do valor dos Futuros sobre o VIX em relação ao ativo subjacente, índice VIX, diminui à medida que o tempo para a maturidade aumenta (Grünbichler e Longstaff, 1996). O preço dos futuros irá aproximar-se de uma constante, o valor de *mean reversion* da volatilidade de longo prazo:

$$\lim_{(T-t) \rightarrow \infty} F(S_t, t, T) = \text{Constante} = \frac{\alpha + \mu\lambda}{\beta} \text{ ou } \frac{\alpha}{\beta} \quad (7)$$

- ii) por outro lado, à medida que o tempo para a maturidade diminui, o valor dos Futuros irá tender para o valor do índice VIX (Zhang, Shu e Brenner, 2010);

$$\lim_{(T-t) \rightarrow 0} F(S_t, t, T) = S_t \quad (8)$$

- iii) o valor dos Futuros sobre o VIX não possui uma relação linear com o valor do índice VIX, tal variação é explicada através do comportamento do membro $e^{-\beta(T-t)}$.

6- Ver o Apêndice 1 onde se encontram as operações matemáticas realizadas para obter a expressão dos Futuros sobre o VIX, equação 6.

2 SELEÇÃO DA AMOSTRA, TESTES E ESTIMAÇÃO

2.1 Construção da Amostra e Sumário Estatístico

A base de dados fornecida pela CBOE inclui os preços de abertura, mínimo, máximo e preços de fecho do índice VIX desde 2004. Bem como os valores do índice VIX no intervalo temporal de 1990 a 2003 atualizados com a nova metodologia de cálculo e os valores do índice VXO desde 1986. A informação dos contratos dos Futuros sobre o VIX disponível, desde 2004, inclui o preço de abertura, mínimo, máximo, de fecho, o *settlement price*, volume diário e *open interest* diários.⁷

A estimação dos parâmetros dos modelos foi realizada utilizando uma amostra dos preços de fecho do índice VIX de 21 de abril de 2017 a 16 de dezembro de 2020 (ver Figura 2.1).

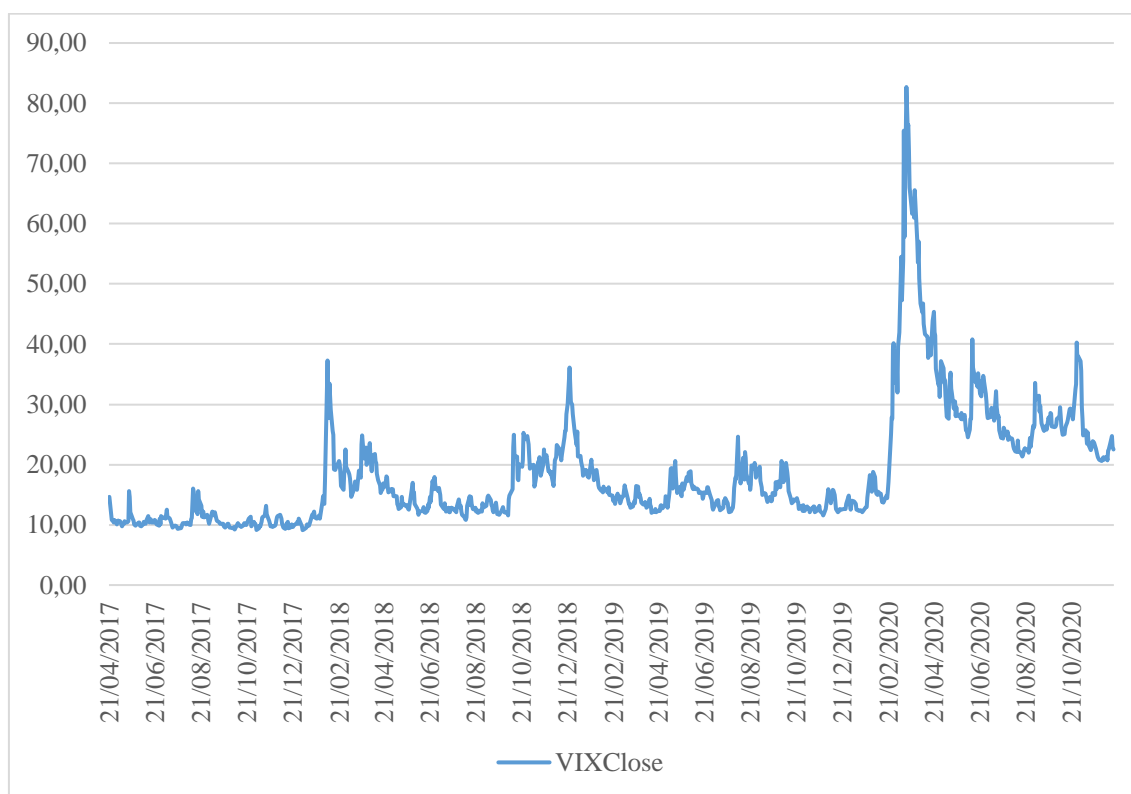


Figura 2.1 Evolução dos preços de fecho do índice VIX entre 21 de abril de 2017 e 16 de dezembro de 2020

Fonte: Adaptado de *cboe.com*

7 - Ver por exemplo: <https://ww2.cboe.com/products/vix-index-volatility/vix-options-and-futures/vix-index/vix-historical-data> e https://markets.cboe.com/us/futures/market_statistics/historical_data/

O intervalo foi selecionado com base no artigo original de Dupoyet et al. (2011) no qual os autores utilizam um intervalo de dois anos posterior a cada dia para o qual é realizada a estimação. Adicionalmente, devido à descoberta de Zhang e Zhu (2006) que a estimação de parâmetros baseada em períodos mais recentes beneficia a valorização, será ainda realizada uma outra estimação com dados até um ano.

A seleção dos valores dos Futuros sobre o VIX requer um cuidado especial, devido a problemas de liquidez de mercado. De modo a ultrapassar este obstáculo foram empregues os critérios de seleção definidos por Huang et al. (2019). Estes consistem na eliminação de todos os futuros com um *open interest* inferior a 200 e com uma maturidade inferior a 5 dias.

As Tabela 2.1 e 2.3 apresentam uma análise estatística da amostra dos preços de fecho do índice VIX e do *settlement price* dos Futuros sobre o VIX respetivamente. Os resultados dos valores máximos e mínimos obtidos vão ao encontro das expectativas da relação entre volatilidade e instabilidade dos mercados. O valor mínimo do índice VIX de 9,14 é registado no período de estabilidade dos mercados entre 2017 e 2019. O valor máximo de 82,69 destaca o período de forte instabilidade de mercados, marcado pelas notícias e acontecimentos relacionados com a pandemia Covid-19.

Tabela 2.1. Estatística Descritiva dos preços de fecho do índice VIX

	Preço de Fecho do VIX entre 2017 e 2020	Preço de Fecho do VIX entre 2017 e 2019	Preço de Fecho do VIX no ano de 2020
Número de Observações	922	679	243
Média	18,5513	14,6270	29,5167
Desvio-padrão	9,8821	4,2703	12,5148
Assimetria	2,5303	1,4241	1,6760
Curtose	9,1345	3,0331	3,7068
Mínimo	9,14	9,14	12,1
Máximo	82,69	37,32	82,69

Nota: O período da amostra em análise considerado vai desde a data que corresponde à data dois anos antes do primeiro dia do contrato de futuros F20 até à data de maturidade do contrato de futuros Z20, entre 21 de abril de 2017 e 16 de dezembro de 2020 respetivamente.

Futuros sobre o VIX

A Tabela 2.2 apresenta um resumo da amostra final obtida de todos os contratos de futuros sobre o VIX no ano 2020 com a aplicação dos critérios de seleção referidos.

Tabela 2.2. Contratos dos Futuros sobre o VIX: settlement price, volume diário e open interest.

Códigos dos Contratos Futuros	Número de observações	Período dos Contratos Futuros		Média do preço dos Contratos Futuros	Média do <i>Open Interest</i>	Média do Volume
		Início	Maturidade			
VXF20	172	22/04/2019	22/01/2020	17,48	50019	25195
VXG20	165	28/05/2019	19/02/2020	17,76	54114	28998
VXH20	166	24/06/2019	18/03/2020	18,80	51505	41411
VXJ20	175	22/07/2019	15/04/2020	22,40	40151	32677
VXK20	170	26/08/2019	20/05/2020	24,77	34059	24602
VXM20	174	23/09/2019	17/06/2020	24,31	27835	17361
VXN20	169	21/10/2019	22/07/2020	25,81	34447	21543
VXQ20	176	25/11/2019	19/08/2020	25,97	31109	17220
VXU20	180	09/12/2019	16/09/2020	26,80	31845	16754
VXV20	208	09/12/2019	21/10/2020	28,66	33422	14679
VXX20	228	09/12/2019	18/11/2020	27,39	28745	13571
VXZ20	157	23/03/2020	16/12/2020	28,49	37040	18431
Média				24,05	37858	22704

Nota: O Código dos Contratos dos Futuros sobre o VIX apresenta uma simbologia específica, para os meses da maturidade dos respetivos contratos. A simbologia é a seguinte: janeiro, F; fevereiro, G; março, H; abril, J; maio, K; junho, M; julho, N; agosto, Q; setembro, U; outubro, V; novembro, X e dezembro, Z.

A Tabela 2.3 apresenta a análise estatística dos *settlement price* dos Futuros sobre o VIX. Esta permite visualizar a relação entre os preços dos futuros e a maturidade dos mesmos. Seguindo por exemplo o estudo de Lin (2007) foram consideradas as seguintes maturidades: curto prazo quando o tempo para a maturidade, $T - t$, é inferior a 60 dias; médio prazo, quando $T - t$ é superior a 60 e inferior a 180 dias e de longo prazo quando a maturidade é superior a 180 dias.

Tabela 2.3. Estatística Descritiva dos settlement prices dos Futuros sobre o VIX

	Preços Diários dos Futuros sobre o VIX			
	Todas as maturidades	< 60 Dias	60 – 180 Dias	>180 dias
Número de Observações	2135	436	998	701
Média	24,1244	28,2815	24,9185	20,4082
Desvio-padrão	7,5171	8,9807	7,3679	4,3972
Assimetria	1,0550	0,7242	0,5454	1,6823
Curtose	1,7711	2,0461	0,0660	1,2868
Mínimo	13,075	13,075	15,375	16,775
Máximo	70,475	70,475	59,925	34,125

Nota: O período em análise considerado vai desde a data que corresponde à data dois anos antes do primeiro dia do contrato de futuros F20 até à data de maturidade do contrato de futuros Z20, entre 21 de abril de 2017 e 16 de dezembro de 2020 respetivamente.

2.2 Testes das Propriedades

A presente subsecção tem como propósito averiguar a existência das características *mean reversion* e *jumps* no índice da volatilidade VIX.

2.2.1 Mean Reversion

O teste *Augmented Dickey-Fuller* (ADF), baseado no estudo de Dickey e Fuller (1979), tem como objetivo testar a hipótese nula de que uma determinada série temporal apresenta uma raiz unitária, ou seja, se esta é ou não estacionária.

De modo a obter uma clara imagem da propriedade *mean reversion* na dinâmica do índice VIX ao longo dos recentes anos, o teste ADF foi efetuado face a 4 amostras de dados diferentes. O primeiro intervalo temporal diz respeito a todos os preços de fecho do VIX de 2004 até ao final de 2020. O segundo período refere-se ao conjunto de dados utilizados para estimar os parâmetros dos modelos desenvolvidos, de 2017 a 2020. O terceiro e quarto intervalos consistem na divisão do segundo período, mencionado anteriormente, de acordo com a instabilidade dos mercados. Assim, o terceiro período refere-se ao

momento de estabilidade dos mercados entre 2017 e 2019 e o quarto período ao período de instabilidade, o ano 2020.

Os resultados obtidos e exibidos na Tabela 2.4⁸ para os quatro períodos em análise suportam a literatura. O índice VIX apresenta a propriedade *mean reversion* para todas as séries temporais, exceto para o período isolado de instabilidade dos mercados do ano 2020.

Tabela 2.4. Teste de ADF

Período em análise		Estatística de Teste	<i>p-value</i>	Hipótese Nula (H ₀)
Início	Fim			
02/01/2004	16/12/2020	-5.67165	8.894042e-07***	Rejeitada (1%)
21/04/2017	16/12/2020	-2,77427	0.062044*	Rejeitada (10%)
21/04/2017	31/12/2019	-4,48351	0,00021***	Rejeitada (1%)
02/01/2020	16/12/2020	-1,81866	0.37123	Não Rejeitada

Conferida a existência da propriedade *mean reversion* na dinâmica do índice VIX. A atenção passa agora a centrar-se na existência de alterações de estrutura. Por outras palavras, se existem mudanças no valor para o qual o VIX se dirige a longo prazo. O teste de Bai e Perron (2003) permite determinar não só as alterações de estrutura das séries temporais, como também identificar os momentos em que estas ocorrem. Considerando as evidências, mencionadas anteriormente na subsecção Propriedades, a implementação do teste Bai e Perron foi realizada sob a amostra de dados dos preços de fecho do índice VIX de 2004 a 2020⁹.

O resultado do teste Bai e Perron permite distinguir 5 regimes de volatilidade, ver figura 2.2. O primeiro e segundo regimes compreendem os períodos de estabilidade anteriores à crise de 2008 e 2009, de 2004 a 2007 e de 2007 a 2008 respetivamente. O terceiro regime identificado compreende o período histórico entre a crise do soberano de 2009 a

8- A implementação do teste ADF foi realizada através da linguagem de programação *Python*, através do uso da função *adfuller*.

9- Os resultados finais foram obtidos utilizando a linguagem de programação R Studio, seguindo as orientações de Zeileis, Leisch, Hornik e Kleiber (2002) e de Zeileis, Kleiber, Krämer e Hornik (2003).

inícios de 2011. Posteriormente, o quarto regime identificado consiste no período de estabilidade de mercado entre 2011 a 2017. Por fim, o último regime de volatilidade de 2017 a 2020 é marcado pelo aparecimento da pandemia Covid-19.

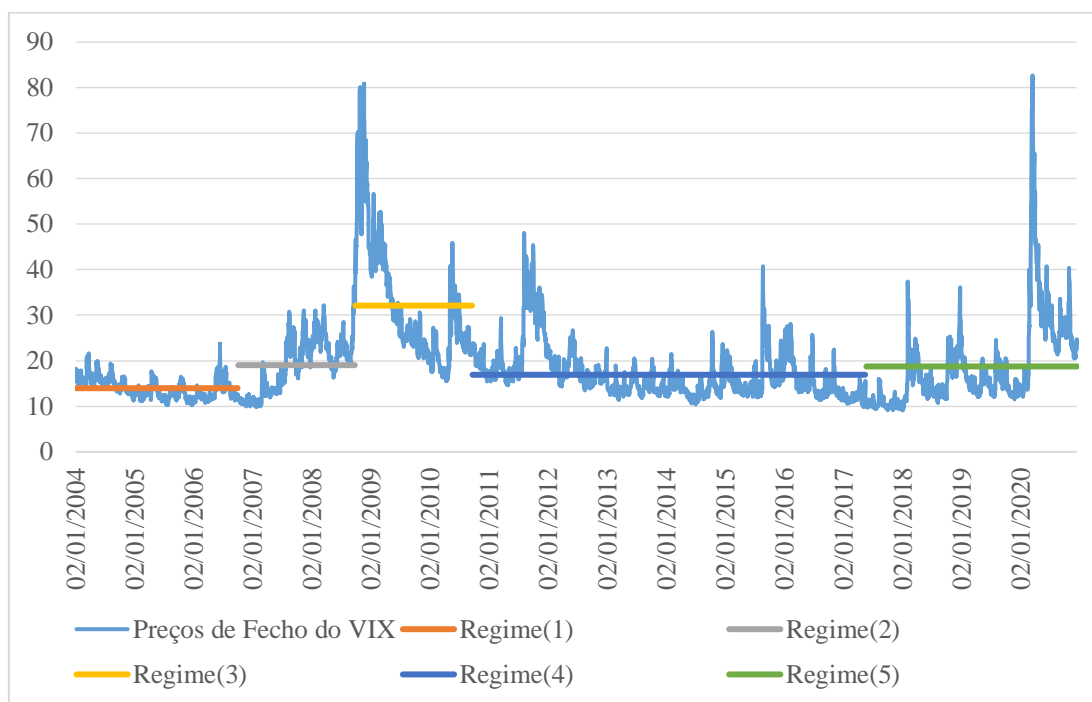


Figura 2.2 Regimes de volatilidade entre 2004 e 2020

Fonte: Adaptado de cboe.com

2.2.2 Jumps

Existem múltiplos estudos cujo objetivo é capturar a existência de *jumps*, como por exemplo: Barndorff-Nielsen & Shephard (2006), Jiang e Oomen (2008) e Aït-Sahalia e Jacod (2009). Aït-Sahalia e Jacod (2011) descrevem um novo modelo capaz não só de identificar *jumps* como também de distinguir entre *jumps* finitos e infinitos. Assim, e da mesma maneira como foi executado para a propriedade *mean reversion* seria interessante verificar se existem *jumps* no índice VIX.

No entanto, todos os testes requerem a utilização de dados de alta frequência, dados estes que não estão disponíveis gratuitamente, o que torna a realização dos testes pouco apetecível e não é merecedora dessa atenção.

Assim, a presente dissertação é realizada no pressuposto da existência de *jumps* na dinâmica do índice VIX no intervalo temporal considerado de 2018 a 2020. Este pressuposto é definido não só por esta característica ter sido debatida, mas também comprovada repetidamente ao longo dos anos. Provas estas dadas por exemplo em

Dupoyet et al. (2011) e Cao et al. (2019). Primeiramente Dupoyet et al. (2011) demonstram a existência de *jumps* no índice VIX para o intervalo de 2002 a 2006 ao aplicar o teste de Jiang e Oomen (2008). Cao et al. (2019) encontram evidências da existência dos *jumps* ao realizar o teste de Aït-Sahalia e Jacod (2009) para uma amostra do índice VIX, e os respectivos retornos logarítmicos para o período de 1992 a 2017.

2.3 Estimação dos parâmetros

A estimação dos parâmetros dos modelos foi realizada ao aplicar o método GMM de Hansen (1982) à equação diferencial estocástica (SDE) do modelo MRCEVJ, dada por:

$$S_{t+1} - S_t = \alpha - \beta S_t + \sigma S_t^{2\gamma} \xi_t + \gamma_t \Delta Q_t, \xi_t i. i. d. N(0,1) \quad (9)$$

com o vetor dos parâmetros $\theta = \{\alpha, \beta, \sigma^2, \gamma, \mu_\gamma, \lambda\}$.

Considerando $\varepsilon_{t+1} = S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t)\Delta t$, foram construídos um total de seis momentos. Os momentos do método GMM são:

$$f_t(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ S_t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} - \mu_\gamma \lambda \Delta t \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 S_t^{2\gamma} \Delta t - 2\mu_\gamma^2 \lambda \Delta t \\ \varepsilon_{t+1}^3 - 6\mu_\gamma^3 \lambda \Delta t \\ \frac{\pi}{2} |\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t| - (S_{t+1} S_t)^\gamma \sigma^2 \Delta t \\ |\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}|^{4/3} - (S_{t+1} S_t S_{t-1})^{4\gamma/3} \sigma^4 (\Delta t)^2 \left(2^{2/3} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(1/2)} \right)^3 \\ |\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}| - (S_{t+1} S_t S_{t-1} S_{t-2})^\gamma \sigma^4 \left(\frac{2}{\pi} \Delta t \right)^2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

com $E[f_t(\theta)] = 0$. As três primeiras condições são utilizadas para determinar $E(\varepsilon)$, $E(\varepsilon^2)$ e $E(\varepsilon^3)$. As restantes condições são necessárias para distinguir a componente dos *jumps* da variância de acordo com Ait-Sahalia (2004). Seguindo os trabalhos desenvolvidos por Barndorff-Nielsen e Shephard (2004) e Tauchen e Zhou (2010) a variação quadrática é calculada segundo a seguinte expressão:

$$\mu_k = 2^{k/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (11)$$

sendo que quando $k = 1$ e $k = 4/3$ temos que: $\mu_1 = 2^{1/2} \Gamma(1) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}$ e $\mu_{4/3} = 2^{2/3} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. Assim:

$$|\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t| = (\mu_1)^2 (S_{t+1} S_t)^\gamma \sigma^2 \Delta t$$

$$|\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}|^{4/3} = (\mu_{4/3})^3 (S_{t+1} S_t S_{t-1})^{4\gamma/3} \sigma^4 (\Delta t)^2$$

$$|\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-2}| = (\mu_1)^4 (S_{t+1} S_t S_{t-1} S_{t-2})^\gamma \sigma^4$$

Por fim, a amostra dos momentos $g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\theta)$, tem o seguinte aspeto:

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T [S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t - \mu_\gamma \lambda \Delta t] \\ \sum_{t=1}^T [S_t (S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t - \mu_\gamma \lambda \Delta t)] \\ \sum_{t=1}^T [(S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t)^2 - \sigma^2 S_t^{2\gamma} \Delta t - 2\mu_\gamma^2 \lambda \Delta t] \\ \sum_{t=1}^T [S_t ((S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t)^2 - \sigma^2 S_t^{2\gamma} \Delta t - 2\mu_\gamma^2 \lambda \Delta t)] \\ \sum_{t=1}^T [(S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t)^3 - 6\mu_\gamma^3 \lambda \Delta t] \\ \sum_{t=1}^T [S_t ((S_{t+1} - S_t - (\alpha - \beta S_t) \Delta t)^3 - 6\mu_\gamma^3 \lambda \Delta t)] \\ \sum_{t=1}^T \left[(S_{t+1} S_t)^\gamma \sigma^2 \Delta t \left(\frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \right)^2 - 1 \right) \right] \\ \sum_{t=1}^T \left[S_t \left((S_{t+1} S_t)^\gamma \sigma^2 \Delta t \left(\frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \right)^2 - 1 \right) \right) \right] \\ \sum_{t=1}^T \left[(S_{t+1} S_t S_{t-1})^{4\gamma/3} \sigma^4 (\Delta t)^2 \left[\left(2^{2/3} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^3 - \left(2^{2/3} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(1/2)} \right)^3 \right] \right] \\ \sum_{t=1}^T \left[S_t \left((S_{t+1} S_t S_{t-1})^{4\gamma/3} \sigma^4 (\Delta t)^2 \left[\left(2^{2/3} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)^3 - \left(2^{2/3} \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(1/2)} \right)^3 \right] \right) \right] \\ \sum_{t=1}^T \left[(S_{t+1} S_t S_{t-1} S_{t-2})^\gamma \sigma^4 \left[\left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \right)^4 - \left(\frac{2}{\pi} \Delta t \right)^2 \right] \right] \\ \sum_{t=1}^T \left[(S_{t+1} S_t S_{t-1} S_{t-2})^\gamma \sigma^4 \left[\left(\left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \right)^4 - \left(\frac{2}{\pi} \Delta t \right)^2 \right] \right] \end{bmatrix} \quad (12)$$

O vetor dos parâmetros dos diferentes modelos desenvolvidos, $\hat{\theta}$, surge como o vetor que permite minimizar a fórmula quadrática, J_T :

$$J_T = g'_T(\theta) W_T g_T(\theta)$$

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J_T,$$

com: $W_T = \hat{S}^{-1}(\theta)$ e $S(\theta) = E[f_t(\theta) f'_t(\theta)]$.

Foi considerado o estimador de Newet e West (1987) com o número de *lags* até um terço do número de observações de dados utilizado.¹⁰

As tabelas 2.5 e 2.6 evidenciam os parâmetros estimados dos quatro modelos segundo uma amostra dos preços de fecho do índice VIX de 2017 a 2020 e de 2018 a 2020, respetivamente.

Os valores estimados de α e β são muito inferiores aos apresentados em Dupoyet et al. (2011) quanto à sua dimensão. Para o modelo MRCEV os valores de alfa e beta são 0,045 e 0,255, enquanto que os valores dos mesmos parâmetros no estudo de Dupoyet et al. (2011) são respetivamente 3,2472 e 23,967. Os modelos sem *jumps* possuem alfas superiores aos respetivos modelos com *jumps*. Por outro lado, a velocidade de *mean reversion*, β , demonstra que a velocidade aumenta entre os modelos MRCIR e MRCIRJ e diminui entre os modelos MRCEV e MRCEVJ.

Tabela 2.5. Parâmetros estimados (GMM) 2 anos

Parâmetros	MRCIR	MRCIRJ	MRCEV	MRCEVJ
α	0,050	0,033	0,045	0,034
β	0,288	0,336	0,255	0,245
σ^2	0,013	0,003	0,079	0,421
γ	----	----	1,180	1,954
μ_y	----	0,044	----	0,106
λ	----	0,842	----	0,140

Nota: O período em análise considerado vai desde a data que corresponde à data dois anos antes do primeiro dia do contrato de futuros F20 até à data de maturidade do contrato de futuros Z20, entre 21 de abril de 2017 e 16 de dezembro de 2020 respetivamente.

O parâmetro de elasticidade do modelo MRCEV é substancialmente inferior ao do modelo MRCEVJ. Tal sugere, que as condições entre *jumps* e variância, mais precisamente os momentos 4, 5 e 6 da equação 10, não foram bem-sucedidas no decorrer da estimação dos parâmetros.

10- A implementação da estimação dos parâmetros foi realizada em MATLAB de acordo com o enunciado no trabalho de Kladivko (2007).

Os parâmetros da componente *jumps*, μ_γ e λ , apresentam valores distintos para os modelos MRCEVJ e MRCIRJ, que é explicado devido ao impacto significativo da restrição do parâmetro de elasticidade, γ , para 0,5 nos modelos MRCIR e MRCIRJ.

Tabela 2.6. Parâmetros estimados (GMM) 1 ano

Parâmetros	MRCIR	MRCIRJ	MRCEV	MRCEVJ
α	0,065	0,051	0,054	0,036
β	0,372	0,444	0,278	0,243
σ^2	0,015	0,004	0,203	0,611
γ	----	----	1,301	2,058
μ_γ	----	0,043	----	0,105
λ	----	1,052	----	0,144

Nota: O período em análise considerado vai desde a data que corresponde à data dois anos antes do primeiro dia do contrato de futuros F20 até à data de maturidade do contrato de futuros Z20, entre 09 de maio de 2018 e 16 de dezembro de 2020 respetivamente.

O conjunto de parâmetros resultantes da estimação com base na amostra de dados de um ano não são muito distintos daqueles determinados pela amostra de dois anos. Uma das vantagens é o facto de os parâmetros de elasticidade dos modelos MRCEVJ e MRCEV serem mais próximos um do outro. Esta aparente vantagem desvanece quando se analisa o parâmetro de elasticidade quanto à sua dimensão. Por exemplo, Chacko e Viceira (2004) defendem que os parâmetros de elasticidade devem estar compreendidos entre 1 e 2 e quando os parâmetros de elasticidade são superiores a 2 existem problemas na estimação de parâmetros. Assim, e tendo em conta os valores estimados para ambas amostra de dados, devem ser tidos em consideração os possíveis problemas existentes na metodologia da estimação dos parâmetros aqui identificados.

3 RESULTADOS

A presente seção determina os preços dos futuros sobre o VIX para cada um dos modelos, recorrendo à equação 6, expressão dos futuros sobre o VIX, e também ao conjunto de parâmetros estimados utilizando o método GMM sobre os dois conjuntos de dados dos preços de fecho do índice VIX entre 2017 e 2020. Posteriormente, a eficiência dos diferentes modelos é discutida através da análise da diferença entre os preços dos futuros sobre o VIX de mercado, f_t , e preço dos futuros sobre o VIX dos modelos, $F(S_t, t, T)$.

A análise do desempenho dos modelos é efetuada de acordo com os seguintes erros: *absolute percentage error* (APE);

$$APE = \frac{|f_t - F(S_t, t, T)|}{f_t} \quad (13)$$

signed percentage error (SPE), com uma expressão semelhante à de APE, mas sem a componente módulo;

$$SPE = \frac{f_t - F(S_t, t, T)}{f_t} \quad (14)$$

Posteriormente, foram calculados os erros *mean absolute percentage error* (MAPE); *mean signed percentage error* (MSPE) e o *root mean square error* (RMSE) para todos os futuros diários dos 12 contratos de futuros sobre o VIX de 2020. As expressões de cálculo dos erros são as seguintes:

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|f_t - F(S_t, t, T)|}{f_t} \quad (15)$$

$$MSPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{f_t - F(S_t, t, T)}{f_t} \quad (16)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (F(S_t, t, T) - f_t)^2}{n}} \quad (17)$$

As Tabelas 3.3 e 3.4 apresentam os erros para cada um dos quatro modelos em estudo sobre uma amostra de dados de dois anos e um ano respetivamente. As tabelas diferenciam ainda os erros entre os futuros dos modelos e mercado quanto ao tempo para a maturidade em três planos: todos os futuros com uma maturidade igual ou superior a

180 dias; todos os futuros com uma maturidade entre 180 e 60 dias e, por fim, todos os futuros com uma maturidade igual ou inferior a 60 dias.

Os resultados sugerem que o modelo MRCEVJ apresenta a melhor eficácia de valorização dos futuros, seguindo-se o modelo MRCEV e MRCIR com desempenhos semelhantes e por último o modelo MRCIRJ.

Tabela 3.1. Desempenho da valorização dos quatro Modelos (2 anos)

Tipo de Erros	Modelos	Tempo para a Maturidade			
		Todas as Maturidades	≤ 60 dias	60-180 dias	≥180 dias
MAPE	MRCEV	0,246	0,134	0,241	0,315
	MRCEVJ	0,242	0,150	0,248	0,290
	MRCIR	0,248	0,141	0,247	0,309
	MRCIRJ	0,279	0,156	0,320	0,288
MSPE	MRCEV	0,086	0,062	0,089	0,093
	MRCEVJ	0,095	0,084	0,108	0,084
	MRCIR	0,085	0,065	0,089	0,092
	MRCIRJ	0,141	0,098	0,132	0,165
RMSE	MRCEV	8,162	4,904	8,046	9,665
	MRCEVJ	7,702	4,971	7,659	8,996
	MRCIR	8,390	5,184	8,392	9,753
	MRCIRJ	6,615	4,390	6,032	7,745

Tabela 3.2. Desempenho da valorização dos quatro Modelos(1ano)

Tipo de Erros	Modelos	Tempo para a Maturidade			
		Todas as Maturidades	≤ 60 dias	60-180 dias	≥180 dias
MAPE	MRCEV	0,246	0,143	0,239	0,309
	MRCEVJ	0,234	0,158	0,218	0,296
	MRCIR	0,247	0,148	0,245	0,307
	MRCIRJ	0,263	0,179	0,266	0,290
MSPE	MRCEV	0,107	0,070	0,114	0,119
	MRCEVJ	0,125	0,094	0,147	0,102
	MRCIR	0,115	0,087	0,121	0,122
	MRCIRJ	0,202	0,139	0,234	0,195
RMSE	MRCEV	7,484	4,754	7,173	8,927
	MRCEVJ	7,100	4,864	6,165	9,110
	MRCIR	7,869	4,722	7,263	9,825
	MRCIRJ	6,779	4,222	5,482	8,425

O modelo MRCEV apresenta os menores erros para maturidades inferiores a 60 dias. Para maturidades superiores a 60 dias e inferiores a 180 dias a adição de *jumps* a escolha do modelo dever ser discutida, devido ao facto de quando baseado numa amostra de um ano os erros do modelo MRCEVJ diminuem 3%. Por fim, para maturidades superiores a 180 dias o modelo MRCEVJ apresenta resultados próximos, mas mais satisfatórios. O modelo MRCIRJ não é considerado na discussão porque o número de observações para as maturidades é muito inferior ao dos restantes modelos, resultante de problemas na estimação dos parâmetros, independentemente das amostras utilizadas. A análise dos erros MSPE permite afirmar que todos os modelos sobrevalorizam os preços dos futuros sobre o VIX, especialmente para o modelo MRCIRJ. Esta observação também foi verificada em Dupoyet et al. (2011).

Como referido anteriormente, os modelos MRCEV e MRCEVJ apresentam o melhor desempenho. De modo, a visualizar a valorização destes dois modelos entre si e a sua capacidade para prever os valores dos futuros sobre o VIX de mercado as figuras 3.1 e

3.2 comparam a evolução dos preços dos futuros sobre o VIX de mercado e do modelo MRCEV para o contrato de futuros do mês de dezembro de 2020, VXZ20. Os valores do modelo MRCEV e do modelo MRCEVJ são muito semelhantes para o contrato de dezembro, sendo por isso apenas apresentado a evolução dos futuros do modelo MRCEV.

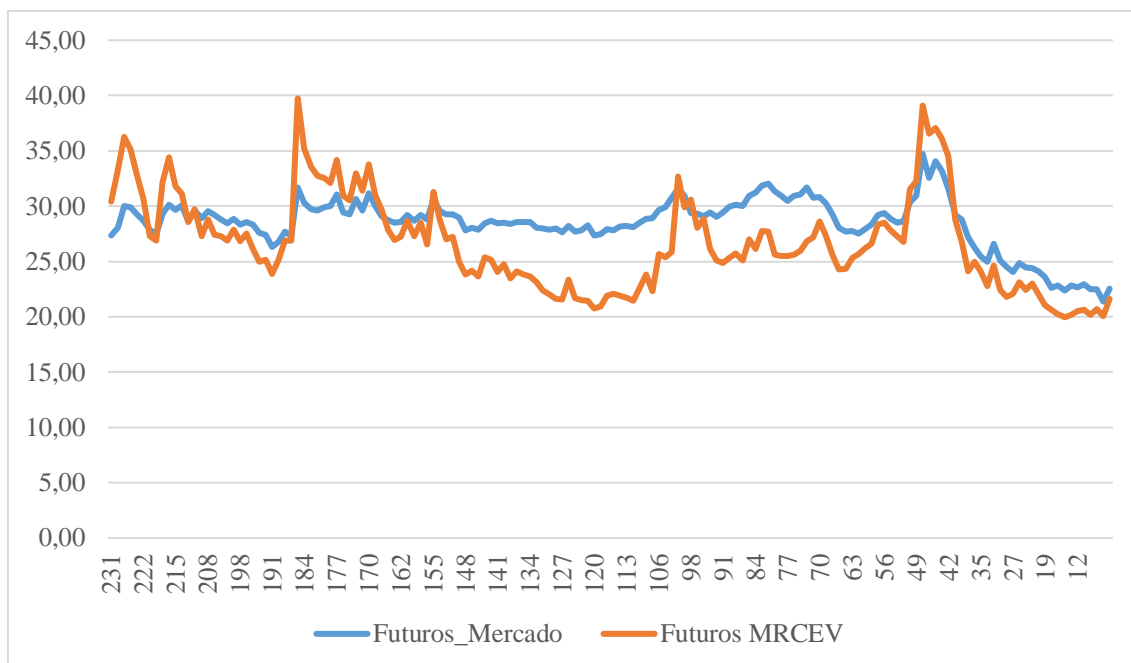


Figura 3.1 Evolução dos preços dos Futuros sobre o VIX de mercado e dos preços dos Futuros sobre o VIX resultante do modelo MRCEV com baseado numa amostra de dados de dois anos

Fonte: Adaptado de cboe.com

A evolução dos preços dos futuros calculados segundo o modelo MRCEV permite, como referido, que os modelos tendem a sobrevalorizar os futuros de mercado especialmente quando existem ligeiros picos. Por outro lado, no caso específico do mês de dezembro, o modelo desvaloriza os futuros continuamente entre 160 a 70 dias, com erros a variar entre 10 a 20 por cento na maioria das observações, ver figura 3.2

Futuros sobre o VIX

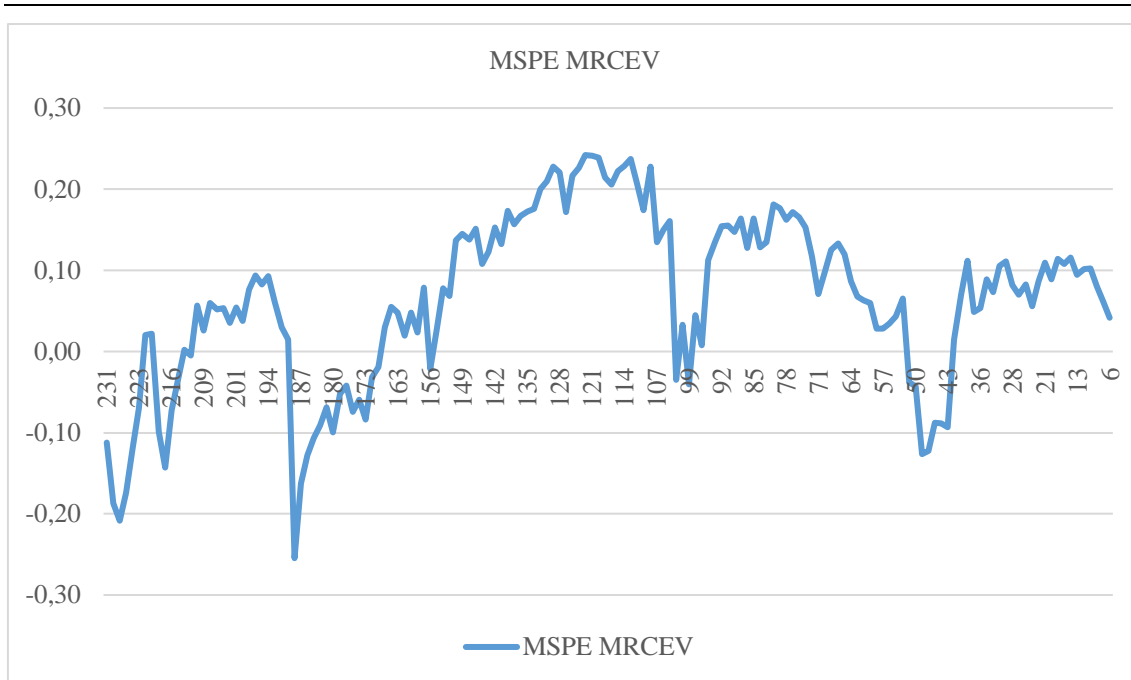


Figura 3.2. Evolução dos erros MAPE dos preços dos Futuros sobre o VIX de mercado e dos preços dos Futuros sobre o VIX resultante do modelo MRCEV baseado numa amostra de dados de dois anos

CONCLUSÃO

Os derivados sobre a volatilidade são um instrumento financeiro com um enorme impacto nos mercados, principalmente em períodos de turbulência. No passado ano 2020, devido ao aparecimento dos primeiros casos da pandemia Covid-19, foram verificados níveis de volatilidade que não eram observados desde a crise de 1987 e 2008 nos Estados Unidos da América. Este momento da história moderna mais recente serviu e serve como um momento de reflexão, para lembrar aos investigadores e investidores de mercado o papel dos derivados sobre a volatilidade e a consequente utilidade em possuir estes produtos nas carteiras de investimento.

A presente dissertação testa a possibilidade do modelo MRCEVJ, e dos modelos nele contido, de valorizar os contratos dos futuros sobre o VIX do ano 2020. De modo a realizar a replicação o melhor possível, foram aplicadas todas as metodologias do artigo original e os comentários do mesmo tidos em consideração.

A estimação dos parâmetros, umas das preocupações iniciais, apresenta problemas. Estes são visíveis através da mensuração dos parâmetros de elasticidade, principalmente quando não se verifica a sua restrição. Os valores dos parâmetros de elasticidade dos modelos MRCEV e MRCEVJ não são próximos, tal sugere que a implementação das condições dos *jumps* e da variância nos momentos do método GMM não teve o final desejado. Adicionalmente, ao analisar o parâmetro de elasticidade do modelo MRCEVJ, de forma isolada, constata-se que a sua mensuração é muito próxima e ou superior a 2, dependendo da amostra de dados utilizada, o que pode indicar a origem do problema referido anteriormente.

Os resultados da valorização dos futuros demonstram que o modelo MRCEVJ tem o melhor desempenho entre os restantes modelos de um modo geral. Apesar de o modelo CEV ser mais eficaz na valorização dos futuros cuja maturidade é inferior a 60 dias e entre 60 a 180 dias quando se utiliza uma amostra de dados de dois e um ano do índice VIX respetivamente. No entanto, os modelos MRCEVJ e MRCEV não devem ser utilizados porque os erros produzidos são muito superiores aos de outros modelos apresentados até hoje. Repare-se que os erros gerados pelo modelo MRCEVJ variam em média entre: os 29% e 29,6% para maturidades superiores a 180 dias; 21,8% e 24,8% para maturidades entre os 60 e 180 dias e entre 15% e 15,8% para maturidades inferiores a 60 dias.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aït-Sahalia, Y. (2004). Disentangling diffusion from jumps. *Journal of Financial Economics*, 74(3), 487-528.
- Aït-Sahalia, Y., & Jacod, J. (2009). Testing for Jumps in a Discretely Observed Process. *The Annals of Statistics*, 37(1), 184-222.
- Aït-Sahalia, Y., & Jacod, J. (2011). Testing Whether Jumps have finite or infinite activity. *The Annals of Statistics*, 39(3), 1689-1719.
- Bai, J., & Perron, P. (2003). Critical values for multiple structural change tests. *The Econometrics Journal*, 6(1), 72-78.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2004). Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2(1), 1-37.
- Barndorff-Nielsen, O. E., & Shephard, N. (2006). Econometrics of Testing for Jumps in Financial Economics Using Bipower Variation. *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), 1-30.
- Bates, D. S. (2000). Post-'87 crash fears in the S&P 500 futures option market. *Journal of Econometrics*, 94(1-2), 181-238.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Brenner, M., & Galai, D. (1989). New Financial Instruments for Hedge Changes in Volatility. *Financial Analysts Journal*, 45(4), 61-65.
- Brenner, M., & Galai, D. (1993). Hedging Volatility in Foreign Currencies. *The Journal of Derivatives*, 1(1), 53-59.
- Cao, H., Badescu, A., Cui, Z., & Jayaraman, S. K. (2020). Valuation of VIX and target volatility options with affine GARCH models. *Journal of Futures Markets*, 40(12), 1880-1917.
- Cao, J., Ruan, X., Su, S., & Zhang, W. (2020). Pricing VIX derivatives with infinite-activity jumps. *Journal of Futures Markets*, 40(3), 329-354.
- Carr, P. (2017). Why is VIX a fear gauge?. *Risk and Decision Analysis*, 6(2), 179-185.
- Carr, P., & Wu, L. (2006). A Tale of Two Indices. *The Journal of Derivatives*, 13(3), 13-29.
- CBOE. (2021). VIX White paper. Acedido a 20 de março de 2022, disponível em <https://cdn.cboe.com/resources/vix/vixwhite.pdf>
- CBOE. (2020a). Chicago Board of Options Exchange. VIX Options. Acedido a 18 de outubro de 2020, disponível em <http://www.cboe.com/products/vix-index-volatility/vix-options-and-futures/vix-options>
- CBOE. (2020b). Chicago Board of Options Exchange. VIX Futures. Acedido a 18 de outubro de 2020, disponível em <http://www.cboe.com/products/futures/vx-cboe-volatility-index-vix-futures>

- Chacko, G., & Viceira, L. M. (2003). Spectral GMM estimation of continuous-time processes. *Journal of Econometrics*, 116(1-2), 259-292.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A., & Sanders, A. B. (1992). An Empirical Comparison of Alternative Models of the Short-term Interest Rate. *Journal of Finance*, 47(3), 1209-1227.
- Cox, J. C. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. Working Paper, Stanford University. Reprinted in *Journal of Portfolio Management*, 23(1996), 15–17.
- Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385-408.
- Daigler, R. T., Dupoyet, B., & Patterson, F. M. (2016). The Implied Convexity of VIX Futures. *Journal of Derivatives*, 23(3), 73-90.
- Dash, S., & Moran, M. T. (2005). VIX as a Companion for Hedge Fund Portfolios. *Journal of Alternative Investments*, 8(3), 75-80.
- Dennis, P., Mayhew, S., & Stivers, C. (2006). Stock Returns, Implied Volatility Innovations, and the Asymmetric Volatility Phenomenon. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 41(2), 381-406.
- Dickey, D. A., & Fuller, W. A. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root. *Journal of the American Statistical Association*, 74(366a), 427-431.
- Dondoni, A., Montagna, D. M., & Maggi, M. (2018). VIX Index Strategies: Shorting Volatility As a Portfolio Enhancing Strategy. Acedido a 20 de abril de 2021, disponível em <https://ssrn.com/abstract=3104407>.
- Dotsis, G., Psychoyios, D., & Skiadopoulos, G. (2007). An empirical comparison of continuous-time models of implied volatility indices. *Journal of Banking & Finance*, 31(12), 3584-3603.
- Duffie, D., Pan, J., & Singleton, K. (2000). Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. *Econometrica*, 68(6), 1343-1376.
- Dupoyet, B., Daigler, R. T., & Chen, Z. (2011). A simplified pricing model for volatility futures. *Journal of Futures Markets*, 31(4), 307-339.
- Eraker, B., Johannes, M., & Polson, N. (2003). The Impact of Jumps in Volatility and Returns. *Journal of Finance*, 58(3), 1269-1300.
- Grünbichler, A., & Longstaff, F. A. (1996). Valuing futures and options on volatility. *Journal of Banking & Finance*, 20(6), 985-1001.
- Guo, W., & Wohar, M. E. (2006). Identifying Regime Changes in Market Volatility. *Journal of Financial Research*, 29(1), 79-93.
- Hansen, L. P. (1982). Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, 50(4), 1029-1054.
- Hao, J., & Zhang, J. E. (2013). GARCH Option Pricing Models, the CBOE VIX, and Variance Risk Premium. *Journal of Financial Econometrics*, 11(3), 556-580.
- Heston, S. L. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.

- Heston, S. L., & Nandi, S. (2000). A Closed-Form GARCH Option Valuation Model. *The Review of Financial Studies*, 13(3), 585-625
- Hibbert, A. M., Daigler, R. T., & Dupoyet, B. (2008). A behavioral explanation for the negative asymmetric return–volatility relation. *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2254-2266.
- Huang, Z., Tong, C., & Wang, T. (2019). VIX term structure and VIX futures pricing with realized volatility. *Journal of Futures Markets*, 39(1), 72-93.
- Jiang, G. J., & Oomen, R. C. (2008). Testing for jumps when asset prices are observed with noise—a “swap variance” approach. *Journal of Econometrics*, 144(2), 352-370.
- Jones, C. S. (2003). The dynamics of stochastic volatility: evidence from underlying and options markets. *Journal of Econometrics*, 116(1-2), 181-224.
- Kladivko, K. (2007). The General Method of Moments (GMM) using MATLAB: The practical guide based on the CKLS interest rate model. *Department of Statistics and Probability Calculus, University of Economics, Prague*.
- Kou, S. G. (2002). A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. *Management Science*, 48(8), 1086-1101.
- Kou, S. G., & Wang, H. (2004). Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model. *Management Science*, 50(9), 1178-1192.
- Lian, G. H., & Zhu, S. P. (2013). Pricing VIX options with stochastic volatility and random jumps. *Decisions in Economics and Finance*, 36(1), 71-88.
- Lin, Y. N. (2007). Pricing VIX futures: Evidence from integrated physical and risk-neutral probability measures. *Journal of Futures Markets*, 27(12), 1175-1217.
- Low, C. (2004). The Fear and Exuberance from Implied Volatility of S&P 100 Index Options. *Journal of Business*, 77(3), 527-546.
- Moran, M. T., & Liu, B. (2020). *The VIX Index and Volatility-Based Global Indexes and Trading Instruments: A Guide to Investment and Trading Features*. CFA Institute Research Foundation.
- Newey, W. K., & West, K. D. (1986). A Simple, Positive Semi-Definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica*, 55(3), 703-708.
- Nossman, M., & Wilhelmsson, A. (2009). Is the VIX Futures Market Able to Predict the VIX Index? A Test of the Expectation Hypothesis. *Journal of Alternative Investments*, 12(2), 54-67.
- Pan, J. (2002). The jump-risk premia implicit in options: Evidence from an integrated time-series study. *Journal of Financial Economics*, 63(1), 3-50.
- Park, Y. H. (2016). The effects of asymmetric volatility and jumps on the pricing of VIX derivatives. *Journal of Econometrics*, 192(1), 313-328.
- Psychoyios, D., Dotsis, G., & Markellos, R. N. (2010). A jump diffusion model for VIX volatility options and futures. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 35(3), 245-269.
- Sepp, A. (2008a). Pricing Options on Realized variance in the Heston Model with Jumps in Returns and Volatility. *Journal of Computational Finance*, 11(4), 33-70.

- Sepp, A. (2008b). VIX Option Pricing in a Jump-Diffusion Model. *Risk Magazine*, 84-89.
- Szad, E. (2009). VIX Futures and options: A Case Study of Portfolio Diversification During the 2008 Financial Crisis. *Journal of Alternative Investments*, 12(2), 68-85.
- Tauchen, G., & Zhou, H. (2011). Realized jumps on financial markets and predicting credit spreads. *Journal of Econometrics*, 160(1), 102-118.
- Todorov, V., & Tauchen, G. (2011). Volatility Jumps. *Journal of Business & Economic Statistics*, 29(3), 356-371.
- Wagner, N., & Szimayer, A. (2004). Local and spillover shocks in implied market volatility: evidence for the US and Germany. *Research in International Business and Finance*, 18(3), 237-251.
- Wang, T., Shen, Y., Jiang, Y., & Huang, Z. (2017). Pricing the CBOE VIX Futures with the Heston–Nandi GARCH Model. *Journal of Futures Markets*, 37(7), 641-659.
- Whaley, R. E. (1993). Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue, *Journal of Derivatives* 1, 71-84
- Whaley, R. E. (2000). The Investor Fear Gauge. *Journal of Portfolio Management*, 26(3), 12-17.
- Whaley, R. E. (2009). Understanding the VIX. *Journal of Portfolio Management*, 35(3), 98-105.
- Yang, X., Wang, P., & Chen, J. (2019). VIX Futures Pricing with Affine Jump-GARCH Dynamics and Variance-Dependent Pricing Kernels. *Journal of Derivatives*, 27(1), 110-127.
- Zeileis, A., Kleiber, C., Krämer, W., & Hornik, K. (2003). Testing and dating of structural changes in practice. *Computational Statistics & Data Analysis*, 44(1-2), 109-123.
- Zeileis, A., Leisch, F., Hornik, K., & Kleiber, C. (2002). strucchange: An R package for Testing for Structural Change in Linear Regression Models. *Journal of Statistical Software*, 7, 1-38.
- Zhang, J. E., Shu, J., & Brenner, M. (2010). The new market for volatility trading. *Journal of Futures Markets*, 30(9), 809-833.
- Zhang, J. E., & Zhu, Y. (2006). VIX Futures. *Journal of Futures Markets*, 26(6), 521-531.
- Zhao, Z., Cui, Z., & Florescu, I. (2018). VIX derivatives valuation and estimation based on closed-form series expansions. *International Journal of Financial Engineering*, 5(02), 1850020.
- Zhu, S. P., & Lian, G. H. (2012). An Analytical formula for VIX futures and its applications. *Journal of Futures Markets*, 32(2), 166-190.

APÊNDICES

APÊNDICE 1. DERIVAÇÃO DA EXPRESSÃO DOS FUTUROS

O processo do índice VIX, segundo a medida de risco neutro, é definido de acordo com a seguinte expressão:

$$dS_t = (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma S_t^\gamma dW_t + y_t dq_t \quad A1.$$

A equação (1) na forma de equação diferencial estocástica integral é dada por:

$$S_t = S_0 + \int_0^t (\alpha - \beta S_t)dt + \sigma \int_0^t S_t^\gamma dW_t + \int_0^t y_t dq_t \quad A2.$$

onde: S_t representa o valor esperado do índice VIX no momento t ; S_0 o valor do índice VIX no momento $t = 0$; o segundo membro, $\int_0^t (\alpha - \beta S_t)dt$, descreve o *drift* do índice VIX; $\sigma \int_0^t S_t^\gamma dW_t$ define o processo de volatilidade do índice VIX, ou seja, volatilidade de volatilidade e, por último, $\int_0^t y_t dq_t$ descreve a componente dos *jumps* na dinâmica do índice VIX ao longo do período t .

O valor esperado de S_t pode ser escrito, considerando as propriedades da distribuição dos *jumps*, como:

$$E(S_t) = S_0 + \int_0^t [(\alpha - \beta E(S_u))] du + \int_0^t \mu \lambda du \quad A3.$$

onde: $E(S_t)$ consiste no preço esperado do futuro sobre o VIX no momento u ; o primeiro membro possui o *drift* do processo VIX; o membro $\mu \lambda du$ consiste na multiplicação do valor da probabilidade caso ocorro um *jump*, λdu , e do tamanho do mesmo, μ .

Ao realizar a derivação do $E(S_t)$ tendo em consideração o tempo, t , temos que:

$$E(S_t) = S_0 + \int_0^t [(\alpha - \beta E(S_u))] du + \int_0^t \mu \lambda du$$

com:

$$f(x) = S_0$$

$$g(x) = \int_0^t [(\alpha - \beta E(S_u))] du$$

$$k(x) = \int_0^t \mu \lambda du$$

ou seja:

$$E(S_t) = f(x) + g(x) + k(x)$$

Utilizando a regra da soma da derivação:

$$\frac{df}{dt} = 0$$

$$\frac{dg}{dt} = \alpha - \beta E(S_t)$$

$$\frac{dk}{dt} = \mu \lambda$$

$$\frac{dE(S_t)}{dt} = \frac{df}{dt} + \frac{dg}{dt} + \frac{dk}{dt} \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{dE(S_t)}{dt} = \alpha - \beta E(S_t) + \mu \lambda$$

É possível verificar que:

$$\frac{d}{dt} E(S_t) * e^{\beta t} = [\beta E(S_t) + \alpha - \beta E(S_t) + \mu \lambda] * e^{\beta t} \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{d}{dt} [e^{\beta t} E(S_t)] = e^{\beta t} \left[\beta E(S_t) + \frac{dE(S_t)}{dt} \right] \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{d}{dt} [e^{\beta t} E(S_t)] = e^{\beta t} (\alpha + \mu \lambda)$$

Resolvendo o integral em função a $E(S_t)$ é obtida a expressão dos futuros sobre o VIX com base no modelo *mean reversion CEV com jumps*.

$$\frac{d}{dt} [e^{\beta t} E(S_t)] = e^{\beta t} (\alpha + \mu \lambda) \quad (=)$$

$$(=) \quad [e^{\beta t} E(S_t)] = \int_0^t e^{\beta t} (\alpha + \mu \lambda) dt \quad (=)$$

$$(\Rightarrow) \quad [e^{\beta t} E(S_t)] = (\alpha + \mu\lambda) * \frac{1}{\beta} * \int_0^t \beta e^{\beta t} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad [e^{\beta t} E(S_t)] = S_0 + (\alpha + \mu\lambda) * \frac{1}{\beta} * (e^{\beta t} - e^{\beta*0}) \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad [e^{\beta t} E(S_t)] = S_0 + (\alpha + \mu\lambda) * \frac{1}{\beta} * (e^{\beta t} - 1) \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad E(S_t) = \frac{1}{e^{\beta t}} \left[S_0 + (\alpha + \mu\lambda) * \frac{1}{\beta} * (e^{\beta t} - 1) \right] \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad E(S_t) = S_0 * e^{-\beta t} + \frac{(\alpha + \mu\lambda)}{\beta} * \frac{e^{\beta t} - 1}{e^{\beta t}} \quad (\Rightarrow)$$

Concluindo com a fórmulas que nos permite calcular os futuros do VIX:

$$E(S_t) = S_0 * e^{-\beta t} + \frac{(\alpha + \mu\lambda)}{\beta} * (1 - e^{-\beta t})$$

A4.