Instituto Politécnico de Setúbal

Márcia Sofia
Roque Batista

Construindo uma sequência de tarefas de multiplicação: Um estudo realizado no 1.º ciclo de escolaridade

Tese orientada pela Professora Doutora
Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado

Dissertação de mestrado em Educação Pré-escolar e
Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico
Relatório de Projeto e Investigação

novembro de 2016

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo compreender as estratégias e procedimentos dos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação e as dificuldades com que alunos se deparam e, ainda, analisar as potencialidades da sequência de tarefas construída.

O quadro teórico deste relatório é constituído por cinco secções que apresentam temáticas diversas: a aprendizagem da multiplicação e as orientações curriculares; as caraterísticas das tarefas e a aprendizagem da multiplicação; as sequências de tarefas e a aprendizagem da multiplicação; estratégias e procedimentos de cálculo de resolução de tarefas de multiplicação; dificuldades na aprendizagem da multiplicação.

Para a realização do estudo foi tomada como opção metodológica a investigação-ação. Neste estudo participaram 26 alunos, sendo que metade pertencia ao 2.º ano de escolaridade e a outra metade ao 3.º ano de escolaridade. A fim de recolher os dados necessários foram utilizados os seguintes métodos: observação-participação; entrevista clínica; análise de conteúdo. Como instrumentos utilizaram-se: a captação aúdio, captação audiovisual, notas de campo e produções dos alunos.

A proposta de intervenção deste estudo diz respeito à realização de uma sequência de tarefas de multiplicação e exploração da mesma na sala de aula. A sequência era composta por oito tarefas que visavam a aprendizagem da multiplicação. A exploração ocorreu de acordo com as ideias subjacentes ao ensino exploratório da matemática.

Os resultados do estudo evidenciam que: (i) os alunos utilizam estratégias e procedimentos de cálculo bastante diversificados para resolver tarefas de multiplicação; (ii) a estratégia mais usada pelos alunos é a aditiva; (iii) os alunos demonstram três principais dificuldades: apresentar uma resposta à questão, explicitar o procedimento e/ou estratégia utilizada e necessidade de registar todos os elementos associados à malha retangular apresentada; (iv) a criação de uma sequência de tarefas permite uma coesão, adequação e articulação de tarefas que ajudará os alunos na evolução do raciocínio matemático e (v) os números e os contextos das tarefas ajudam os alunos a evoluir nas estratégias e nos procedimentos utilizados.

Palavra-chave: multiplicação, sequência de tarefas, procedimentos de cálculo, estratégias, dificuldades dos alunos, potencialidades da sequência de tarefas.

ABSTRACT

The present study has the objective of understanding the strategies and procedures of the students when they resolve multiplication tasks, the difficulties that they have in resolving them and analyzing the potentialities of the sequence of tasks constructed.

The theoretical board of this report is based in five sections that presents diverse themes: the acknowledgement of multiplication and the curricular orientations; The tasks and learning of multiplication; the sequence of tasks and the acknowledgement of multiplication; the strategies and procedures in the resolution of multiplication tasks; difficulties in learning multiplication.

For the achievement of this study it was used, has the methodological option, the investigation-action pathway. In this study have participated 26 students, half from the second grade and the other half from the third grade. To obtain the necessary data the following methods were used: observation-participation, clinic interview, content analysis. As instruments were used: the audio capture, the audiovisual capture, field notes and production from the students.

The intervention purpose of this study concerns in the implementation of a sequence of multiplication tasks and the exploitation of the same in the classroom. The sequence consisted in eight tasks that aimed at learning the multiplication. The operation took place in accordance with the ideas underlying the exploratory teaching of mathematics.

The study results show that: (i) the students use very diverse calculation strategies and procedures to solve multiplication tasks; (ii) the most used strategy by the students is the additive; (iii) students demonstrate three main difficulties: to present an answer to the question, explaining the procedure and / or the strategy used, and the need to register all the elements associated with the rectangular model presented; (iv) the creation of a task sequence enables cohesion, adequacy and coordination of tasks that will help students in the development of mathematical reasoning and (v) the numbers and the contexts of the tasks help students evolve in the strategies and procedures used.

Keywords: multiplication, sequence of tasks, calculation procedures, strategies, student difficulties, potentialities of sequence of tasks.

AGRADECIMENTOS

No momento final da concretização deste sonho não poderia deixar de agradecer a todas as pessoas que sempre me apoiaram, ajudaram e estiveram do meu lado. Por essa razão, agradeço:

À professora cooperante, pelo carinho, ajuda e dedicação. Também pela ‘liberdade’ que me concedeu para que pudesse desenvolver este projeto.

À professora orientadora, por contribuir para a transformação de um simples rascunho, o projeto real que aqui descrevo neste relatório. Pelo rigor, dedicação e apoio, pois sem estes três pilares a concretização deste sonho não seria possível.

Aos “meus alunos” (porque serão sempre os ‘meus’), porque com eles ri, chorei e aprendi. Por serem as pessoas mais sinceras, reguilas e confiantes que conheci ao longo deste estudo. Sem eles nada faria sentido.

À Sónia, por ser melhor amiga, confidente, companheira de casa, colega de licenciatura e mestrado e professora-estagiária na mesma sala. Pelas brigas e risadas. Por me mostrar o verdadeiro sentido da amizade. Por tudo e mais alguma coisa.

À Vanessa e à Mónica, por tanta coisa inexplicável que vivemos juntas ao longo de 3 anos.

À minha família, em especial ao meu pai e à minha mãe, pela amizade, carinho, alegria, força e educação que me deram.

Ao Rodrigo, pelo amor.

Obrigada!

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo começo por apresentar as motivações que me levaram a realizar um estudo focado na aprendizagem da multiplicação, os seus objetivos e as respetivas questões. Em seguida, refiro-me à pertinência da sua realização e explicito a organização deste relatório.

1.1 Motivações, objetivos e questões do estudo

O gosto que evidencio pela área da Matemática começou a revelar-se desde cedo. Durante a minha infância a brincadeira eleita era o ‘faz de conta’, em que representava sempre a professora de Matemática. Mesmo antes de saber o que significava “o mais”, “o menos”, “o vezes” ou “o dividir”, sentava todas as bonecas da escola (ou mesmo os colegas) e fingia dar aulas, quase sempre, de Matemática. No 1.º ciclo, os trabalhos de casa de Matemática eram sempre aqueles que eu realizava em primeiro lugar.

Apesar de revelar desde cedo um interesse por esta disciplina reconheço agora, como futura professora, que o ensino/aprendizagem desta disciplina tem sofrido diversas mudanças. Avaliando a experiência que tive enquanto aluna, reconheço que o modo como aprendi Matemática nada tem a ver com as perspetivas atuais do ensino desta disciplina e que pretendi desenvolver na minha prática durante o momento de intervenção.

Enquanto aluna tenho recordações das aulas de matemática em que o professor desempenhava o papel principal e os alunos tinham um papel passivo. No entanto, atualmente, sabe-se que “ensinar explicando, dando exemplos e solicitando os alunos que repitam um conjunto de procedimentos (…) não se traduz numa verdadeira compreensão das ideias e procedimentos matemáticos” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 1). Por esta razão, e por acreditar em novas formas de ensino que atribuem aos alunos um papel ativo na aprendizagem, escolhi realizar um estudo em que a minha ação fosse fortemente apoiada em opções didáticas que garantam que os alunos constroem ideias matemáticas fundamentais e desenvolvem a sua competência matemática.

Mas o gosto pela Matemática não se revelou apenas enquanto fui criança. Quando frequentava o 11.º ano, a convite da professora da disciplina de MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais) participei no curso de verão MatNova na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Neste curso desenvolvi o projeto "Biologia e Economia: Teoria de Jogos nos Modelos de Luta pela Vida" em parceria com colegas de outras escolas e de diferentes áreas da matemática. Esta experiência contribuiu para a escolha do tema deste estudo pois o principal foco do curso foi a Investigação Operacional que aborda desafios complexos, utiliza técnicas variadas na resolução de problemas e escolhe as melhores decisões e mais eficientes em busca de soluções ótimas. Uma vez que neste estudo procuro que os alunos desenvolvam o seu raciocínio matemático em busca de estratégias mais eficaz e simples para resolver tarefas de multiplicação, este curso proporcionou-me alguma inspiração.

Assim, sabendo que a Matemática sempre foi a minha área preferida era óbvio que me satisfaria realizar um Projeto de Intervenção nesta área. O gosto pela Matemática e a minha experiência enquanto aluna constituíram os motivos principais para a escolha de um tema nesta área disciplinar que abrangesse opções didáticas que encarem o aluno com um papel ativo na aprendizagem. No entanto, apesar de estar escolhida a área disciplinar na qual pretendia realizar o estudo, eram muitos os temas possíveis para investigar.

A turma na qual este estudo foi desenvolvido era composta por 13 alunos do 2.º ano e 13 alunos do 3.º ano de escolaridade. Durante várias semanas de observação concluí que os alunos revelavam dificuldades na aprendizagem da Matemática. Verifiquei, também, que os alunos do 3.º ano, que já tinham realizado a aprendizagem das tabuadas, não lhe atribuíam qualquer significado. Isto é, memorizavam as tabuadas mas não utilizavam as propriedades da multiplicação quando resolviam problemas. Assim, optavam por estratégias aditivas ou recorriam a desenhos para resolver tarefas de multiplicação. Ao aperceber-me desta situação, achei pertinente realizar um estudo que se centrasse na multiplicação.

No ensino da multiplicação salienta-se como opção didática a construção de uma sequência de tarefas, articuladas entre si que permitam aos alunos a evolução na aprendizagem. Este aspeto foi sendo salientado, frequentemente, nas aulas de didática da Matemática. Enquanto futura professora, pretendo proporcionar aos meus alunos um ensino adequado, articulado e previamente planeado. Por este motivo, decidi que o estudo iria focar-se no ensino/aprendizagem da multiplicação e que, para isso, iria ser construída uma sequência de tarefas que permitisse aos alunos a evolução dos conhecimentos e, ao mesmo, que me permitisse a mim, enquanto professora, acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos e identificar as suas dificuldades. Outro dos motivos que me levou a focar o meu estudo na sequência de tarefas foi o desafio que me iria proporcionar. Apesar de este modo de planificar as aulas ser bastante destacado nas aulas de Didática da matemática, foi abordado, meramente, do ponto de vista teórico. Portanto, este seria o melhor momento para o pôr em prática e vivenciar o que realmente é construir uma sequência de tarefas, neste caso de multiplicação, enquanto professora.

Assim este estudo foca-se na aprendizagem da multiplicação, tendo como objetivos: (i) compreender as estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação e as dificuldades com que alunos se deparam e (ii) analisar as potencialidades da sequência de tarefas construída no âmbito deste estudo.

Para orientar o meu estudo delineei três questões, às quais pretendo responder:

1. Quais as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?
2. Quais as dificuldades que os alunos evidenciam quando lidam com tarefas de multiplicação?
3. Quais as potencialidades da sequência de tarefas proposta na aprendizagem da multiplicação?

1.2 Pertinência do estudo

O Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) dá especial importância à resolução de tarefas que permitam a evolução do raciocínio matemático no 1.º ciclo, afirmando que "é fundamental que os alunos não terminem este ciclo de ensino [1.º ciclo] conseguindo responder apenas a questões de resposta imediata" (p. 5). Segundo "estudos nacionais e internacionais recentes, como o Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS), mostram que, em 2011, 60% dos alunos portugueses do 4.º ano não conseguem ultrapassar esse patamar" (p. 5). Por esta razão, torna-se relevante realizar um estudo que contenha tarefas que permitem aos alunos desenvolver a compreensão matemática, evitando exercícios que possam ser resolvidos sem existirem conexões matemáticas.

Uma vez que as orientações atuais para o ensino e aprendizagem da Matemática, em particular no tema Números e Operações, salientam que a resolução de tarefas como os problemas e as cadeias numéricas são tarefas que devem ser valorizadas e que uma das maiores dificuldades dos alunos do 1.º ciclo é a realização de questões que envolvam conexões matemáticas, torna-se relevante realizar um estudo que possa "dar um lugar de destaque a processos matemáticos" (Boavida, Paiva, Cebola, Vale & Pimentel, 2008, p. 7) a fim de "facilitar o envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem diversificadas e significativas que proporcionem uma visão global da Matemática e uma aprendizagem baseada na compreensão de conceitos e no desenvolvimento do raciocínio" (*ibidem*). Contudo, o objetivo não é apresentar alternativas à memorização ou treino de procedimentos, que também são importantes na Matemática, mas sim realizar um trabalho baseado no desenvolvimento das capacidades de nível cognitivo mais elevado, pois é neste campo que as crianças revelam mais dificuldades (Boavida et al, 2008).

O estudo que estou a realizar foca-se no conhecimento das estratégias e procedimentos de cálculo a que os alunos recorrem e das dificuldades que revelam quando lidam com tarefas de multiplicação. Uma das ideias fundamentais que surge na aprendizagem da multiplicação é a construção de uma sequência de tarefas articuladas, pois esta permite a evolução das ideias matemáticas dos alunos. Para construir uma sequência adequada é imprescindível analisar as produções dos alunos e caraterizar as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011).

Compreender as respostas dos alunos permite aceder a informações sobre o entendimento dos alunos acerca da multiplicação, pois as estratégias que os alunos utilizam representam as suas ideias matemáticas (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011). Assim, este estudo "poderá acrescentar conhecimento sobre o modo como os alunos resolvem tarefas de multiplicação [e] que procedimentos utilizam" (Mendes, 2012, p. 10). Quantas mais investigações existirem acerca do modo como os alunos pensam, mais os professores (e futuros professores) podem planificar e propor tarefas adequadas à aprendizagem dos alunos, a fim de colmatar os resultados desanimadores evidenciados em estudos internacionais como o TIMSS (1996) e PISA (2003). Quando os professores compreendem o modo de pensar dos alunos conseguem mais facilmente determinar os ajustes que são necessários efetuar e os caminhos que se podem tomar nas seguintes etapas da aprendizagem.

Apesar de existirem investigações no ramo da resolução de tarefas, “a investigação associada à aprendizagem da multiplicação tem sido em menor número quando comparada e relacionada com as operações adição e subtracção” (Mendes, 2012, p. 7). Para além disso, a falta de investigação relativamente às estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos para resolver tarefas é evidenciada por Mendes (2012).

A pertinência deste estudo prende-se, assim, com diversos fatores: (i) a importância dada à resolução de tarefas diversificadas nas orientações para o ensino da Matemática; (ii) a dificuldade, por parte dos alunos, em resolverem questões que envolvam conexões e raciocínio matemático; (iii) uma melhor compreensão acerca do modo como os alunos pensam e das dificuldades com que se debatem quando resolvem tarefas de multiplicação; (iv) a importância para a compreensão do pensamento dos alunos na adequação das tarefas que o professor propõe e (v) a reduzida investigação realizada sobre a multiplicação comparativamente com as operações de adição e substração.

1.3 Organização do relatório do estudo

O presente relatório é composto por seis distintos capítulos. O primeiro, intitulado Introdução, corresponde ao presente capítulo, no qual são apresentadas as motivações, os objetivos, as questões e a pertinência do estudo realizado.

No segundo capítulo apresento a revisão da literatura dividida em cinco secções diferentes. Começo por discutir as ideias expressas nos documentos oficiais da Matemática que estão em vigor, sendo eles, o Programa e Metas para o 1.º ciclo do Ensino Básico (ME, 2013) e os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007). De seguida, foco-me nas sequências de tarefas e na aprendizagem da multiplicação, onde realço a importância das sequências para a progressão da aprendizagem da multiplicação. Na terceira secção, realço algumas caraterísticas importantes que as tarefas das sequências devem comtemplar. Depois, na quarta secção, apresento as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos mais frequentemente utilizam na resolução de tarefas de multiplicação. Para terminar, saliento as dificuldades que os alunos apresentam na resolução de tarefas de multiplicação baseando-me nos estudos de Mendes (2012) e Silva (2015).

O terceiro capítulo corresponde à justificação e descrição da metodologia adotada. Começo por fundamentar o facto de o estudo ser uma investigação-ação e por justificar as opções metodológicas tomadas. Ainda neste capítulo, são caraterizados os participantes do estudo e o contexto onde este foi desenvolvido. O capítulo termina com a descrição e justificação dos métodos de recolha de dados e de análise dos mesmos.

O quarto capítulo descreve a proposta de intervenção que desenvolvi com os alunos. Para além de apresentar e descrever todas as tarefas propostas e exploradas com os alunos, faço referência à cultura de sala de aula. Também neste capítulo, justifico todas as opções tomadas enquanto professora da turma.

O quinto capítulo corresponde à análise dos dados. Esta análise centra-se em três aspetos: estratégias e procedimentos de cálculo; dificuldades com que os alunos se depararam e potencialidades da sequência.

Para terminar, o último capítulo apresenta as conclusões do estudo. As conclusões descritas emergem dos resultados obtidos na análise dos dados em confronto com a revisão da literatura. Para terminar, apresento uma reflexão sobre a realização deste estudo, na qual evidencio as dificuldades com que me deparei e as eventuais implicações que a realização deste estudo poderá ter na minha prática futura.

2. QUADRO TEÓRICO

No presente capítulo apresento a revisão da literatura, estando esta dividida em cinco secções diferentes. Na primeira secção, abordo a aprendizagem da matemática segundo as orientações curriculares. Depois, evidencio algumas das caraterísticas que se devem ser em conta na escolha das tarefas a propor. Na terceira secção, foco-me nas sequências de tarefas e na aprendizagem da multiplicação, onde realço a importância das sequências de tarefas para a aprendizagem da Matemática, mais propriamente, da multiplicação. Em seguida, explicito as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos mais frequentemente utilizam na resolução de tarefas de multiplicação. Para terminar, baseio-me nos estudos de Mendes (2012) e Silva (2015) para salientar as dificuldades que os alunos apresentam na resolução de tarefas de multiplicação.

2.1 A aprendizagem da multiplicação e as orientações curriculares

O Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (PMCM) (ME, 2013) refere que no 1.º ciclo, no domínio Números e Operações, “é fundamental que os alunos adquiram durantes estes anos fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos” (p. 6). Para além disso, acrescenta que “os professores são pois fortemente encorajados a trabalhar com os seus alunos (…) propondo as actividades que considerarem convenientes e apropriadas a esse efeito” (p. 6). Na sala de aula devem ser criados momentos de aprendizagem em que são exploradas tarefas que permitam aos alunos desenvolver o raciocínio matemático no que diz respeito às operações aritméticas. Cada professor é livre de escolher o método que considere mais adequado à turma com que trabalha.

Analisando o PMCM (ME, 2013) podemos constatar que na delineação dos objetivos para o 1.º ciclo é evidenciada a “memorização e compreensão [como] sendo complementares” (p. 4). Isto significa que na temática da multiplicação, área em estudo neste projeto, é importante conhecer as tabuadas básicas de memória, mas também, criar oportunidades para os alunos obterem novas estratégias de resolução de problemas. O programa refere mesmo que “conhecer as tabuadas básicas (…) de memória, permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direcionados para a execução de tarefas mais complexas” (ME, 2013, p. 4).

Outro dos objetivos gerais da Matemática é a comunicação matemática. Com os alunos deve ser realizado um trabalho que permita desenvolver a “capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que levantam (…) do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução” (ME, 2013, p. 5). Os alunos devem poder expressar as suas ideias e dúvidas, comentando as opiniões dos colegas. Para além disso, paralelo ao trabalho oral deve existir um trabalho escrito em que os alunos redigem as suas respostas, explicitando o seu raciocínio e as suas conclusões.

Relativamente à resolução de problemas, o objetivo para o 1.º ciclo é que os alunos consigam ler e interpretar os enunciados, mobilizar os conhecimentos de factos, estabeleçam conceitos e relações, selecionem e apliquem adequadamente regras e procedimentos e, por fim, que consigam rever a estratégia e interpretar os resultados finais (ME, 2013). A resolução de problemas não deve ser confundida com “atividades vagas de exploração e de descoberta” (ME, 2013, p. 5). O programa dá relevância à resolução de problemas e explicita que os alunos podem, e devem, começar por apresentar estratégias simples e informais mas que estas devem ser progressivamente trocadas por métodos formalizados ao longo dos anos. Contudo, estes ‘métodos formalizados’ têm significado semelhante ao uso do algoritmo. Assim, esta ideia expressa no programa, contraria o uso de procedimentos de cálculo diversificados por parte dos alunos para resolverem problemas de multiplicação. Acrescenta ainda que é “fundamental que os alunos não terminem este ciclo de ensino conseguindo responder corretamente apenas a questões de resposta imediata” (ME, 2013, p 5). Por isso, devem ser protagonizados momentos na sala de aula direcionados para o trabalho de resolução de problemas, em que o número de passos necessários à resolução aumente de ano para ano. No entanto, esta perspetiva parece contrariar a ideia do uso de estratégias diversificadas por parte dos alunos quando se envolvem na resolução de problemas.

Associado à multiplicação de números naturais, o PMCM (ME, 2013) refere que do 1.º ao 3.º ano de escolaridade deve ser realizado com os alunos um trabalho que ajude a desenvolver a compreensão dos vários sentidos da multiplicação, realçando o sentido aditivo (adicionar parcelas iguais) bem como as situações a si associadas. Nos dois anos seguintes, o programa revela que deve ser realizado com os alunos um trabalho que promova a compreensão profunda da multiplicação, utilizando cada vez números maiores, incluindo números decimais.

Neste contexto, é importante destacar algumas semelhanças e diferenças entre os vários documentos de Matemática em vigor, nomeadamente, o PMCM (ME, 2013) e os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007). Tal como no PMCM também pelo NCTM é destacada a importância de ser desenvolvida no 1.º ciclo a compreensão do sentido aditivo e combinatório da multiplicação. Para além disso, as normas evidenciam que "um trabalho contínuo, com os números e as suas propriedades, constrói os fundamentos da compreensão e uso de símbolos e expressões algébricas" (NCTM, 2007, p. 3). Com isto entende-se que os alunos devem começar desde cedo, logo no pré-escolar, a trabalhar com os números, sendo que estes e as suas relações deve aumentar de ano para ano.

Outro ponto comum entre o PMCM (ME, 2013) e o NCTM (2007) é a importância dada à resolução de problemas em diversos contextos. Em ambos os documentos existe uma preocupação em desenvolver a compreensão multiplicativa através da resolução de problemas. Nas metas curriculares existe uma específica que comprova esta preocupação: "Problemas de um ou mais passos envolvendo situações multiplicativas nos sentidos aditivo e combinatório" (ME, 2013, p. 8). Pelo NCTM (2007) é destacado um exemplo: "Temos 6 cadeiras e bancos. As cadeiras têm 4 pernas e os bancos apenas 3. O número total de pernas é 20. Quantas cadeiras e quantos bancos temos?" (NCTM, 2007, p. 9).

Uma das diferenças entre estes dois documentos diz respeito ao cálculo mental. Enquanto as Normas (NCTM, 2007) relacionam o sentido de número com o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental, o PMCM (ME, 2013) não utiliza o termo 'cálculo mental', mas sim fluência de cálculo que deve ser desenvolvido através de "atividades que os [professores] considerem convenientes e apropriadas" (p.6).

Segundo o PMCM (ME, 2013), "é fundamental que os alunos adquiram durante estes anos [1.º ao 4.º ano de escolaridade] fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos (…) associados a estas operações [soma, substração, multiplicação e divisão]" (p. 6). Ao que parece a preocupação expressa neste documento é que os alunos consigam calcular facilmente os algoritmos das operações. Contrariamente, as Normas (NCTM, 2007) situam o desenvolvimento do sentido de número no centro da educação da Matemática, desde o pré-escolar até ao 12.º ano. Os objetivos definidos são: compreender os números, formas de representação dos números e relações entre números e sistemas numéricos; compreender o significado das operações e o modo como se relacionam entre si e calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis (NCTM, 2007).

Outra relevante diferença entre os dois documentos que tenho vindo a discutir é o destaque dado pelas Normas (NCTM, 2007) à avaliação e tecnologia. Enquanto o PMCM (ME, 2013) não faz nenhuma ressalva a esse aspeto, as Normas (NCTM, 2007) referem-nas como "Princípios que constituem os pressupostos considerados essenciais a uma educação matemática de elevada qualidade" (NCTM, 2007, p. 2). A avaliação serve de apoio à aprendizagem e é utilizada como fonte de informação tanto para professores como para alunos (NCTM, 2007). A tecnologia deverá ser utilizada como uma ferramenta para o ensino e aprendizagem da matemática (NCTM, 2007).

2.2 As caraterísticas das tarefas e a aprendizagem da multiplicação

Para começar, é importante definir o termo 'tarefa'. Stein e Smith (1998) definem tarefa como "um segmento da actividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" (p. 268). Para as mesmas autoras, as tarefas podem incluir a resolução de problemas relacionados ou um longo trabalho acerca de um problema complexo (Stein & Smith, 1998).

A realização de tarefas na sala de aula pode ter abordagens de níveis cognitivos diferentes: baixo e elevado. Quando se propõe a realização de uma tarefa aos alunos, deve pensar-se no objetivo da mesma. Se o objetivo for "a memorização de formas equivalentes de quantidades fraccionárias específicas" (Stein & Smith, 1998, p. 269) a abordagem da tarefa é de baixo nível, se contrariamente, o objetivo for "usar procedimentos, mas de forma a desenvolver conexões com os significados matemáticos" (*ibidem*) a abordagem da tarefa é de nível elevado.

Na escolha das tarefas "devem ser incluídas tarefas de natureza diferente: nem só problemas e investigações, nem só exercícios" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 10). Cada tipo de tarefa desenvolve diferentes aprendizagens e o professor deverá escolher aquela que melhor se adequa ao objetivo de aprendizagem.

Mas como o que se entende por problema? E exercício? E investigações? Uma tarefa é considerada um problema quando propõe aos alunos um desafio e proporciona o gosto pela descoberta (Ponte, 2005). No entanto, é preciso ter dois aspetos em atenção: a dificuldade do problema e acessibilidade do mesmo. Apesar de os problemas terem associado um grau elevado de dificuldade, por um lado, é necessário que essa dificuldade não leve o aluno a desistir, por outro lado, o problema não poderá ser demasiado fácil, pois deixará de ser um problema e passará a ser considerado exercício (Ponte, 2005). A questão principal da distinção entre um problema e um exercício "é saber se o aluno dispõe, ou não, de um processo imediato para a resolver. Caso conheça esse processo e seja capaz de o usar, a questão será um exercício. Caso contrário, a questão será antes um problema" (Ponte, 2005, p. 14). Neste sentido, os exercícios são tarefas que visam a consolidação de conhecimentos. Ao contrário dos problemas e exercícios, as investigações "deixam muito trabalho ao aluno para fazer, quer em termos de elaboração de uma estratégia de resolução, quer em termos da formulação específica das próprias questões a resolver" (*ibidem*, p. 15).

É, também, importante que as tarefas integrem "três componentes: (i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer "sentido" para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 142). O contexto das tarefas deve ser detalhadamente preparado tendo em conta os três aspetos enunciados.

Os contextos das tarefas devem incluir situações próximas do quotidiano dos alunos, bem como imagens apropriadas a essas situações e às quais estejam associados modelos que ajudem os alunos a utilizar determinadas estratégias. Um dos exemplos mais comuns relativos à aprendizagem da multiplicação são situações que envolvem a malha retangular, como por exemplo produtos embalados em caixas, paletes, etc..

Outro ponto importante do contexto das tarefas são os números utilizados. Estes devem ser escolhidos "considerando dois aspetos: (i) a sua progressão em termos da sua ordem de grandeza e (ii) as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre eles" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 142). Deste modo, as tarefas devem incluir, progressivamente, números cada vez maiores e números de referência.

Para além das caraterísticas das tarefas é importante ter em conta o modo como elas se articulam. Na próxima secção discuto a importância da construção de sequências de tarefas e aspetos que devem estar subjacentes à sua construção tendo em vista a aprendizagem da multiplicação.

2.3 As sequências de tarefas e a aprendizagem da multiplicação

Uma vez que, ao longo dos anos, a visão sobre a aprendizagem foi progredindo e alterando, o papel do professor foi também, inevitavelmente, modificado. Sabemos que o ensino não se deve centrar na explicação, exemplificação e repetição de exercícios, mas sim na aprendizagem ativa em que o aluno é o centro da educação. Assim, as aulas devem ser cuidadosamente preparadas e exploradas. No ensino da multiplicação não é exceção.

Na aprendizagem da multiplicação "os alunos precisam de resolver uma grande variedade de problemas muito antes da aprendizagem formal [desta operação]" (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 23). O planeamento de uma sequência de tarefas permitirá selecionar uma variedade de tarefas de multiplicação, fazendo com os alunos desenvolvam "o sentido de operação" (*ibidem*, p. 24), isto é, "uma grande flexibilidade com os números, operações e suas relações" (*ibidem*) que só acontece "com muito trabalho e com recurso a uma variedade de situações de aprendizagem que intencionalmente estabeleçam estas conexões" (*ibidem*). Deste modo, as sequências de tarefas permitem que os alunos evoluam nos seus modos de pensar e no significado que atribuem a esta operação porque os contextos das tarefas, isto é, os números escolhidos e os modelos associados, são escolhidos pormenorizadamente, permitindo a articulação entre as diferentes tarefas. Ademais, as sequências de tarefas permitem que

> as crianças tenham a oportunidade de resolver uma grande variedade de problemas que apresentem diferentes tipos de situações e que conduzam a uma formalização desta operação, em vez de praticarem um número restrito de situações sem significado que muitas vezes, não são mais que a aplicação de um algoritmo aprendido muito precocemente e sem qualquer sentido. (*ibidem*)

Relativamente ao desenvolvimento do sentido de operação, Huinker (2002, citado por Carvalho & Gonçalves, 2003) defende sete dimensões importantes que devem ser alcançadas, progressivamente, pelos alunos:

> compreensão do significado de operação; capacidade para reconhecer e descrever situações de vida real para as várias operações; dar significado aos símbolos e à linguagem matemática formal; capacidade para mudar facilmente de um modo de representação para outro; compreender as relações entre as operações; capacidade para compor e decompor números e usar as propriedades das operações; capaz de raciocinar sobre os efeitos que estas têm nos números. (p. 24)

Para este autor, uma sequência de tarefas deve ser idealizada tendo em conta estas sete dimensões. As tarefas propostas devem fazer com que os alunos evoluam o seu pensamento matemático relativamente à operação em estudo, neste caso, em relação à multiplicação.

Para além disso, importa referir que na aprendizagem da multiplicação "a construção das "grandes ideias" está na base da progressão que os alunos vão fazendo em termos do raciocínio multiplicativo" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 141). À medida que os alunos compreendem a estrutura multiplicativa vão construindo "grandes ideias" associadas à multiplicação. Na multiplicação são consideradas "grandes ideias":

> o entendimento de um grupo como unidade (*unitizing*); a propriedade distributiva da multiplicação, em relação à adição e à subtração; a propriedade comutativa da multiplicação; os padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez e a propriedade associativa da multiplicação. (*ibidem*)

Quando o professor propõe uma tarefa de multiplicação tem subjacente um determinado modelo. No entanto, apesar do professor ter em mente esse modelo não significa que os alunos o utilizem para resolver a tarefa. O importante é que na discussão das tarefas o professor utilize as estratégias dos alunos para fazer emergir o modelo que pretendia. Desta forma conseguirá fazer com que os alunos, nas tarefas seguintes, "vão sendo capazes de recorrer a eles [aos modelos] para representar o seu próprio modo de pensar" (*ibidem*).

Inicialmente, nas tarefas de multiplicação devem ser usadas representações em linha vazia pois "os modelos construídos pelas crianças para representar situações multiplicativas estão associados à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais" (*ibidem*, p. 142). Mais tarde, quando os alunos evoluem os seus procedimentos de cálculo e modos de pensar, devem ser utilizadas representações em disposição retagular ou tabelas de razão porque "a disposição retangular é justificada por autores que a consideram uma das representações mais potentes que suporta a evolução do raciocínio multiplicativo" (*ibidem*).

Assim, para que a aprendizagem da multiplicação seja significativa, isto é, para que os alunos desenvolvam progressivamente ideias e conexões matemáticas relativas à multiplicação, o professor deve pensar numa sequência de tarefas, ou seja, deve idealizar um plano de ensino. Esta sequência não é mais do que uma intenção de aprendizagem pela qual o professor se rege, partindo “da definição clara do local onde se quer chegar” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p.2), considerando sempre os “marcos essenciais que assinalam as etapas de um percurso não linear” (*ibidem*). Como este plano não é estático e inalterável, as alterações do mesmo deverão ser feitas mediante “a aprendizagem de cada aluno, as ideias ou dúvidas que vão surgindo” (*ibidem*).

Planificar uma sequência de tarefas implica: selecionar tarefas, prever/planear a exploração das tarefas e explorar as tarefas na sala de aula.

A escolha das tarefas é fundamental para promover a aprendizagem, pois é a partir delas que o aluno evolui o seu raciocínio. Assim, se a escolha das tarefas permitir isso, o aluno atinge novos marcos e progride na aprendizagem.

Depois de escolher as tarefas, o professor terá que planificar a organização da aula. Para tal, deverá basear-se na sequência de tarefas para alcançar os objetivos definidos. Para além disso, o professor deverá também “pensar no que [os alunos] conseguirão fazer e nas dúvidas que podem ter” (*ibidem*, p. 13). Para o ajudar, poderá construir uma tabela em que antecipa as dificuldades e estratégias utilizadas pelos alunos.

Já na sala de aula, o professor põe em prática tudo o que planeou. Primeiro, a tarefa será apresentada aos alunos e estes devem resolvê-la. Enquanto os alunos o fazem, o professor supervisiona e relaciona o que os alunos estão a fazer com aquilo que ele previu, preparando a discussão. Para preparar a discussão o professor “interroga-se sobre os objectivos que delineou e identifica as potencialidades das estratégias usadas” (*ibidem*, p. 19) e escolhe para a discussão “[resoluções] progressivas, da menos para a mais abstracta” (*ibidem*, p. 20) ou resoluções que contenham erros frequentes. Na discussão das tarefas, que ocorre depois da exploração das mesmas, o professor poderá apoiar e ajudar os alunos tendo em conta o trabalho que realizou na previsão e exploração das tarefas.

Definir uma sequência de tarefas não ajuda só os alunos, mas também os professores. Os alunos progridem mais facilmente na aprendizagem, uma vez que as tarefas são propositadamente escolhidas para esse efeito, tendo em conta os marcos importantes que devem alcançar. E os professores, como pensam mais claramente nos objetivos das tarefas, antecipam modos de pensar dos alunos e têm em conta estes aspetos na exploração das tarefas na sala de aula, conseguem mais facilmente ajudar os alunos nas suas dúvidas e na progressão e desenvolvimento do raciocínio matemático.

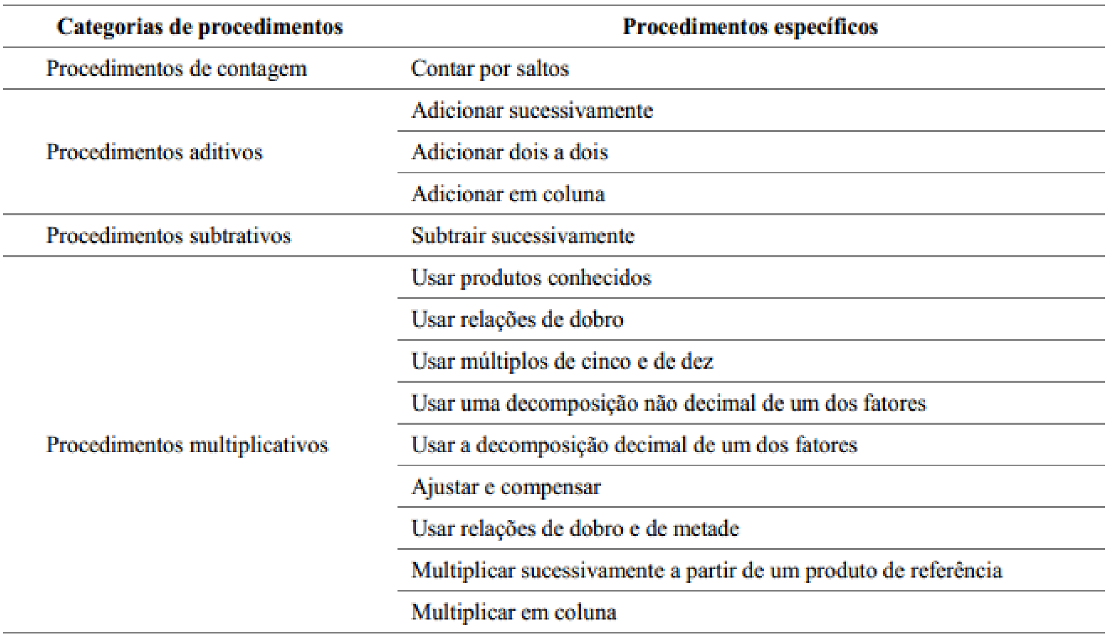
Resumindo, as sequências de tarefas são planos de aprendizagem que os professores devem traçar para facilitar o seu trabalho e ajudar os alunos na aprendizagem e no desenvolvimento do raciocínio matemático. Para que a sequência seja bem-sucedida e os marcos essenciais sejam alcançados, o professor deve preparar cuidadosamente as suas aulas, tendo em atenção a escolha da sequências de tarefas, a previsão das estratégias e das dificuldades dos alunos e a seleção das resoluções para a discussão. Ao longo de todo este tempo o professor nunca se deverá esquecer dos objetivos finais que determinou, pois são eles que dirigem toda a sua ação.

2.4 Estratégias e procedimentos de cálculo de resolução de tarefas de multiplicação

Na resolução de tarefas de multiplicação os alunos recorrem a diferentes estratégias e procedimentos. Importa, então, esclarecer o que se entende por estratégia e procedimento de cálculo. Segundo as autoras Mendes, Brocardo e Oliveira (2011, p. 8), "os procedimentos dos alunos são a forma como manipulam os números (…) [e] as estratégias determinam a estrutura matemática destas manipulações". Portanto, "estratégia diz respeito à modelação; os procedimentos dizem respeito às operações de cálculo" (*ibidem*). Assim, neste estudo são estes os entendimentos que se assumem para estratégia e procedimento de cálculo.

Mendes (2012) apresenta um conjunto de procedimentos associados à resolução de tarefas de multiplicação, a quais relaciona um conjunto de procedimentos específicos que podem ser usados pelos alunos (tabela 1).

Tabela 1: Categorização de Procedimentos e Procedimentos específicos de Mendes (2012)



Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

Neste estudo, e segundo a distinção entre estratégia e procedimentos de cálculo anteriormente apresentada, entende-se os procedimentos, indicados na primeira coluna da tabela, como sendo estratégias e os procedimentos específicos, que constam na segunda coluna da tabela, como sendo os procedimentos de cálculo.

Estratégias de contagem. São, por norma, as primeiras que os alunos utilizam para resolver tarefas de multiplicação, como se pode verificar na tabela 1. Tal como o nome indica, nesta estratégia os alunos realizam contagens sem recorrer/efetuar operações aritméticas.

Contar por saltos – Neste procedimento de cálculo, descrito do lado direito da tabela, os alunos partem de um número e, a partir dele, dão saltos do mesmo valor. Por exemplo, de 1 em 1 (1, 2, 3…), de 2 em 2 (2, 4, 6…) e assim sucessivamente. Os registos contam apenas com o resultado da adição (Mendes, 2012).

Estratégias aditivas. Implicam que os alunos utilizem a adição como procedimento de cálculo. Nesta estratégia os alunos podem optar por três procedimentos distintos.

Adicionar sucessivamente – Tal como o nome indica, neste procedimento de cálculo os alunos adicionam sucessivamente o mesmo valor. O registo dos cálculos é registado horizontalmente através da soma de parcelas iguais (Mendes, 2012). Por exemplo, calcular 2+2+2+2+2=10 ou 6+6+6+6=24.

Adicionar as parcelas duas a duas – Consiste na adição de parcelas iguais mas agrupadas duas a duas. Os alunos recorrem a este procedimento de cálculo por ser mais rápido e, por norma, apresentam-no sob um esquema em árvore (Mendes, 2012).

Exemplo: $\underbrace{\underbrace{2 + 2}_{4} + \underbrace{2 + 2}_{4}}_{8}$

Adicionar as parcelas em coluna – Este procedimento identifica-se com o anterior. No entanto, a disposição dos algarismos é realizada na vertical. Apesar da disposição usada, não significa que os alunos utilizem o algoritmo da adição. Um exemplo seria:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

Estratégias subtrativas. Este tipo de estratégias surge em contextos de tarefas de divisão.

Subtrair sucessivamente – A substração parte do aditivo e subtrai-se repetidamente o mesmo número, o subtrativo. Enquanto o aditivo se altera nos cálculos, o subtrativo mantem-se. Os cálculos são apresentados horizontalmente ou verticalmente (Mendes, 2012).

Estratégias multiplicativas. São as últimas estratégias utilizadas pelos alunos, pois nesta fase estes já têm conhecimentos relativos à multiplicação. Nesta estratégia são muito diversificados os procedimentos de cálculo utilizados, como se pode verificar no lado direito da tabela 1.

Usar produtos conhecidos – Implica que os alunos já tenham trabalhado e estudado algumas tabuadas (Mendes, 2012), uma vez que resolvem a questão justificando, por exemplo, que “2x3=6 porque sei a tabuada”.

Utilizar relações de dobro – Neste procedimento de cálculo os alunos utilizam o dobro de um número para resolver o problema (Mendes, 2012). Por exemplo, 2x4=8 e 2x8=16.

Usar múltiplos de 5 e de 10 – Usar, explicitamente, os múltiplos de 5 e 10 no cálculo de produtos (Mendes, 2012). Por exemplo, para calcularem o produto de 2x6, os alunos recorrem aos produtos de 2x5+2x1.

Recorrer a uma decomposição não decimal de um dos fatores – Os alunos, para facilitar os cálculos, substituem um número por uma adição de parcelas iguais (Mendes, 2012). Para calcularem o produto de 30x2, por exemplo, recorrem a decomposição do número 30 em 15+15. Assim começam por calcular 15x2+15x2 = 30x2.

Recorrer a uma decomposição decimal de um dos fatores – Tal como no procedimento anterior, os alunos decompõe um dos fatores para facilitar o cálculo. No entanto, neste caso a decomposição é realizada tendo em atenção o número de referência 10 (Mendes, 2012). Por exemplo, para calcular o produto de 15x2 os alunos decompõe o número 15 em 10+5.

Ajustar e compensar – Os números são ajustados de acordo com as suas características a fim de facilitar a realização dos cálculos. Despois, o ajuste dos cálculos é realizado através da subtração (Mendes, 2012). Por exemplo, para calcular o produto de 19x5 os alunos podem recorrer ao produto de 20x5-5.

Usar relações de dobro e metade – Neste procedimento de cálculo os alunos fazem relações de dobro e metade entre fatores de um mesmo produto (Mendes, 2012). O cálculo de 30x4 pode ser efetuado através do cálculo do produto de 15x8, porque 15 é metade de 30 e 8 é o dobro de 4.

Multiplicar sucessivamente a partir de um produto conhecido – Quando os alunos já têm conhecimentos da tabuada, isto é, já a construíram, podem multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência (Mendes, 2012). Para calcular, por exemplo, 13x2 os alunos começam pelo cálculo de 10x2 porque é aquele cujo produto conhecem. Depois, calculam 11x2, 12x2 e 13x2.

Multiplicar em coluna – Neste tipo de procedimento pode parecer que os alunos já conhecem o algoritmo da multiplicação, no entanto, pode não ser verdade. O que distingue este procedimento é a apresentação do cálculo e não o conhecimento do algoritmo (Mendes, 2012). Por exemplo, 10x2 seria apresentado desta forma: $\begin{array}{c} 2 \\ 10 \\ \hline 20 \end{array}$.

No entanto, Silva (2015) apresenta no seu estudo uma nova estratégia que sobressaiu da análise dos dados. A autora denomina esta nova estratégia por “percepção visual de uma quantidade” pois “resultou de um raciocínio no qual os alunos analisaram a imagem da tarefa e constataram que se tratava de uma disposição retangular com um determinado número de objetos” (p. 126). Esta estratégia pode ser utilizada pelos alunos em duas situações diferentes. A primeira, é ter a percepção visual de uma pequena quantidade de objetos. A título de exemplo, imaginemos que se tem uma caixa com quatro maçãs. Quando questionados sobre o número de maçãs da caixa os alunos podem responder "A caixa tem 6 maçãs, porque olhei e vi o número de maçãs". Nesta situação os alunos não recorrem a nenhum cálculo, simplesmente observaram a imagem do problema e perceberam que existiam quatro maçãs. A segunda, é ter a percepção visual do número de objetos devido à realização de questões anteriores do problema. Imaginemos um problema em que a malha retangular está organizada pelo conjunto de dez quadrados de quatro cores diferentes: amarelo, verde, azul e preto. Se em questões anteriores do problema os alunos já calcularam as quantidades dos quadrados de cor amarelo e verde, ao surgir a questão "Quantos quadrados existem de cor preta?" os alunos podem responder "Existem 10 quadrados de cor preta, porque já sei que existem 10 quadrados de cada uma das outras cores".

A escolha das estratégias e procedimentos de cálculo pelos alunos é feita de acordo com as ideias que têm sobre essa operação. Na aprendizagem da multiplicação pretende-se que os alunos progridam nas estratégias que utilizam, abandonando as estratégias menos potentes em prol de estratégias mais eficazes. Durante o processo de progressão Mendes, Brocardo e Oliveira (2011) apresentam duas vertentes distintas de aprendizagem: o ensino de estratégias ou a construção de estratégias pelos alunos. No presente estudo foi adotada a segunda vertente, pois as mesmas autoras revelam que a compreensão da multiplicação progride quando os alunos se deparam com contextos que fazem emergir: ideias, estratégias e modelos. Desta forma, não se pretende que os alunos conheçam as diferentes estratégias existentes e que as apliquem, mas sim que as descubram durante a resolução das tarefas. Seguindo esta linha de pensamento, "o importante é que a criança possa recorrer aos seus próprios métodos, às suas estratégias de resolução" (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 25). Para isso, as tarefas propostas devem fazer com que os alunos sigam as suas ideias e construam estratégias de resolução eficazes ao mesmo tempo que vão evoluindo e descobrindo novas estratégias.

É importante que o professor conheça diferentes estratégias de resolução de tarefas de multiplicação e os procedimentos de cálculo associados pois isso ajuda-o a "desenvolver actividades cada vez mais elaboradas no sentido de os alunos progredirem no desenvolvimento dos conceitos" (Carvalho & Gonçalves, 2003, p. 25).

Na aprendizagem da multiplicação os alunos escolhem estratégias muito diversificadas para resolverem as tarefas (Mendes, 2012). Uma vez que, como já foi referido, a escolha dessas estratégias depende do modo de pensar dos alunos, numa fase inicial os alunos optam por utilizar estratégias de contagem ou aditivas e só depois utilizam estratégias baseadas nas propriedades da multiplicação. Na tabela 1, pode verificar-se a evolução das estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos. Esta progressão está relacionada "com o aprofundar da sua compreensão sobre a multiplicação e ancorada na resolução e na discussão coletiva" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013, p. 145).

A discussão das resoluções dos alunos é um fator importante na aprendizagem da multiplicação, pois é neste momento que existe uma consciencialização de que existem estratégias mais potentes que podem ser utilizadas. O professor deve incentivar a discussão fazendo com os alunos explicitem as estratégias que utilizaram, evidenciando as propriedades da multiplicação. Deste modo, os alunos compreendem novos modos de pensar e, progressivamente, evoluem nas suas próprias estratégias. À medida que as tarefas são propostas e discutidas, os alunos evoluem nas suas ideias, nos seus modos de pensar e nas estratégias que utilizam, uma vez que se apercebem das vantagens de utilizar estratégias multiplicativas, principalmente, quando a grandeza dos números aumenta (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013).

Inicialmente, os alunos começam por utilizar estratégias de contagem um a um, de adição ou de utilização de desenhos e esquemas (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2013). Nesta fase, "é-lhes [aos alunos] difícil, ainda, pensar num grupo enquanto unidade, aspeto essencial ao raciocínio multiplicativo" (*ibidem*, p. 146). Quando se inicia a aprendizagem da multiplicação as estratégias utilizadas pelas crianças "estão associadas à ideia de multiplicação como adição sucessiva de parcelas iguais" (*ibidem*, p. 142). Progressivamente, as ideias dos alunos progridem e as estratégias utilizadas também. Assim, começam a compreender e a utilizar estratégias multiplicativas que implicam o conhecimento das propriedades da multiplicação. Por outras palavras,

> no início da aprendizagem da multiplicação, os alunos começam por resolver problemas através da contagem por grupos, usando adições repetidas e recorrendo depois a factos multiplicativos conhecidos, evoluindo no cálculo à medida que o conceito de multiplicação se vai construindo e se demarca da adição. (Trefffers & Buys, 2008, citados por Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 8)

No entanto, esta evolução não é perceptível em todos os alunos ao mesmo tempo (Mendes, 2012). Isto é, apesar de todos os alunos progredirem para estratégias mais eficazes, alguns tendem a utilizar por mais tempo uma determinada estratégia. Isto deve-se às "características particulares das tarefas, como o contexto e o tipo de grandeza dos números envolvidos" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 18). As imagens e as questões da tarefa bem como a utilização de números pequenos podem fazer com que os alunos escolham regularmente a mesma estratégia. Para além disso, se os alunos utilizam uma determinada estratégia e esta continua sendo eficaz nas seguintes tarefas é normal que a mantenham, pois como ela é infalível não precisam de a alterar ou substituir por outra (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011).

No que diz respeito às estratégias utilizadas pelos alunos devem ser evidenciados dois aspetos importantes: (i) os alunos, por vezes, utilizam mais do que uma estratégia e (ii) existem estratégias que tendem a ser mais utilizadas pelos alunos (Mendes, 2012). Muitas vezes os alunos optam por resolver as tarefas recorrendo a mais do que uma estratégia o que "parece estar fortemente ligado à sua falta de segurança no uso de procedimentos multiplicativos" (*ibidem*, pp. 11/12). Os alunos começam por realizar um cálculo associado a uma estratégia que para eles é mais fácil, no entanto, voltam a repetir o cálculo associado a outras estratégias para provar que a mesma tarefa pode ser resolvida de outras maneiras (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011). No entanto, ao longo do tempo, os alunos compreendem que o objetivo é utilizarem apenas uma estratégia, neste caso, a que melhor se adequar à tarefa proposta (*ibidem*).

No que diz respeito aos procedimentos de cálculo, existem aqueles que os alunos utilizam mais frequentemente e os que raramente utilizam (*ibidem*). Por norma, os mais utilizados são os procedimentos de adicionar sucessivamente ou multiplicar recorrendo a produtos e factores conhecidos (*ibidem*). Em contrapartida, os menos utilizados são os procedimentos que recorrem à utilização de relações de dobro e metade (*ibidem*). Estas escolhas estão relacionadas com o facto de os números envolvidos nas tarefas serem baixos, por isso, os procedimentos aditivos continuam eficazes. Para além disso, são procedimentos em que os alunos se sentem mais seguros na sua utilização.

Em suma, o contexto das tarefas propostas bem como os números envolvidos na tarefa devem ser escolhidos de modo a permitir que os alunos utilizem estratégias cada vez mais eficazes. A progressão das estratégias utilizadas pelos alunos, que pode ser mais visível nuns do que noutros, na resolução de tarefas de multiplicação acontece de estratégias de contagem para estratégias multiplicativas. Apesar de ser esta a ordem lógica da evolução, por vezes, os alunos podem regredir o que se deve ao contexto da tarefa, à segurança que sentem em utilizar uma determinada estratégia ou aos números envolvidos na tarefa.

2.5 Dificuldades na aprendizagem da multiplicação

No decorrer da aprendizagem da Matemática são muitas as dificuldades que os alunos sentem. Na aprendizagem da multiplicação não é exceção. No estudo realizado por Silva (2015) são evidenciadas quatro principais dificuldades: a compreensão de enunciados, o sentido de número dos alunos, a organização e a apresentação dos registos e a compreensão dos modos de pensar diferentes do seu. Também Mendes (2012) organiza as dificuldades em quatro tipos distintos: associadas ao contexto das tarefas, relativas aos números incluídos nas tarefas, na realização dos registos escritos e na compreensão dos raciocínios dos colegas.

No que diz respeito à compreensão dos enunciados, Silva (2015) revela que procurou "que os enunciados não tivessem muito texto, recorrendo a imagens que, para além de ilustrativas da situação associada ao contexto, incluíssem informações e apoiassem os alunos na compreensão e resolução das tarefas" (p. 112). Para além disso, existia sempre um aluno que lia o enunciado em voz alta antes da resolução do mesmo, pois poderiam ser esclarecidas dúvidas acerca do significado das palavras e/ou do que a tarefa lhes solicitava (Silva, 2015). Outra dificuldade evidenciada na compreensão dos enunciados foi "a distinção entre, explicitação do modo de pensar e a resposta dada ao problema que se encontravam a resolver" (Silva, 2015, p. 113). Uma vez que os alunos têm dificuldades em redigir o modo como pensam (procedimentos de cálculo e estratégias utilizadas), julgam que ao responder de forma completa à pergunta da tarefa traduz o modo como pensaram a resolução da mesma. Ou seja, existe na cabeça das crianças uma confusão entre explicitar o modo de pensar e responder à pergunta que lhes é feita. Silva (2015) afirma que "parece-me que a ideia dos alunos de explicação de raciocínio está associada à existência de uma resposta não estando necessariamente relacionada com a apresentação do raciocínio" (p. 113).

Relativamente ao sentido de número, os alunos revelam dificuldades na utilização da decomposição dos números em números de referência (Silva, 2015). Quando os alunos resolvem tarefas que contêm, por exemplo, o número 25 podiam decompô-lo em 10+10+5 ou 20+5, visto que são números de referência e, por isso, mais fáceis dos alunos trabalharem com eles. No entanto, este facto não ocorre. Mendes (2012) acrescenta, ainda, que "os números utilizados nas tarefas podem, também, criar dificuldades ligadas à grandeza dos números" (p. 504).

A organização dos registos é outra dificuldade que os alunos sentem na realização de tarefas e problemas. Os registos dos alunos devem ser mantidos organizados e claros para que no momento de discussão da tarefa se apoiem neles. Muitas vezes, os alunos não têm essa percepção e acabam por registar os dados e a resolução do problema de forma desorganizada o que dificulta a apresentação dos seus raciocínios na hora da discussão (Silva, 2015).

Se por um lado, os alunos têm dificuldade em expressar e registar o seu modo de pensar, por outro lado, pode ocorrer também a dificuldade de perceber as explicações dadas pelos colegas durante o momento de discussão (Silva, 2015). Também Mendes (2012) identifica esta dificuldade no seu estudo.

Mendes (2012) refere também que os alunos têm dificuldades associadas aos contextos das tarefas, como por exemplo, "a compreensão semântica, a visualização espacial, o lidar com várias características ao mesmo tempo" (Mendes, 2012, p. 504). Ou seja, o facto de os alunos não conheceram alguns palavras e/ou expressões condiciona a compreensão dos enunciados das tarefas; o facto de as imagens que acompanham as tarefas poderem criar dificuldades aos alunos, pois estes poderão não conseguir visualizá-las corretamente e o facto de existirem restrições nas tarefas.

Outra dificuldade que sobressai no estudo de Mendes (2012) é a dificuldade ligada aos números utilizados nas tarefas. A utilização de números grandes poderá criar dificuldades aos alunos na resolução das tarefas. Para além disso, o facto de realizarem tarefas em contexto de problema e, outras vezes, em contexto de cadeia numérica também poderá representar uma dificuldade para os alunos, pois o modo de trabalhar os números e as suas propriedades é diferente.

Resumindo, “as dificuldades dos alunos são originárias de aspetos distintos, umas relacionadas com aspetos linguísticos e interpretativos e outras com a própria aprendizagem da Matemática” (Silva, 2015, p. 123).

3. METODOLOGIA

No terceiro capítulo identifico e caraterizo as opções metodológicas tomadas relativamente ao Projeto de Investigação. O estudo realizado segue uma abordagem qualitativa e insere-se na metodologia de investigação-ação. Por essa razão, o capítulo inicia-se com a caraterização destas opções metodológicas. Neste capítulo indico e justifico, ainda, os métodos de recolha de dados que utilizei. Por último, descrevo como foram analisados os dados recolhidos ao longo da realização do estudo.

3.1 Opções metodológicas

Do ponto de vista metodológico, o estudo que realizei segue uma abordagem qualitativa e insere-se na metodologia de investigação-ação.

Tal como referi no capítulo Introdução, os objetivos do estudo realizado são: (i) compreender as estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação e as dificuldades com que alunos se deparam e (ii) analisar as potencialidades da sequência de tarefas construída no âmbito deste estudo. Por esta razão, o estudo segue uma abordagem qualitativa, pois "os investigadores que adoptam [esta] perspectiva […] estão mais interessados em compreender as percepções individuais do mundo. Procuram compreensão, em vez de análise estatística" (Bell, 2010, p. 20). Neste tipo de abordagem, "os actos, as palavras e os gestos só podem ser compreendidos no seu contexto" (Vilelas, 2009, p. 331), por isso, os investigadores "tentam viver a realidade, do mesmo modo que os sujeitos" (*ibidem*).

A utilização de uma abordagem qualitativa adequa-se ao tipo de estudo realizado, visto que "segundo esta perspectiva, um fenômeno pode ser melhor compreendido no contexto em que ocorre e do qual é parte, devendo ser analisado numa perspectiva integrada" (Godoy, 1995, p. 21). Desta forma, os investigadores "chegam à compreensão dos fenómenos provenientes da recolha de dados" (Vilelas, 2009, p. 331).

O método de investigação utilizado para a realização do estudo, tal como já identifiquei, foi a investigação-ação.

Existem diversos significados atribuídos à investigação-ação. O autor Jonh Elliot define a investigação-ação como o "estudo de uma situação social com o objetivo de melhorar a qualidade da acção desenvolvida no seu interior" (citado por Afonso, 2014,

p. 76). E o autor Corey assume que este método é “um processo através do qual os ‘práticos’ procuram estudar os seus problemas cientificamente, com o objetivo de orientar, corrigir e avaliar as suas decisões e ações” (citado por Afonso, 2014, p. 76).

Para ambos os autores citados, este tipo de investigação desenvolve-se do “ponto de vista dos professores, como atores e investigadores das suas próprias práticas” (Afonso, 2014, p. 76). Existe então uma dualidade no papel do investigador: o de investigar e o de intervir. O investigador não se limita a realizar o seu estudo sendo um membro exterior ao contexto, pelo contrário, ele faz parte do contexto onde o estudo é realizado.

Deste modo, o meu estudo enquadra-se no método da investigação-ação porque necessariamente faria parte do contexto, enquanto professora-estagiária, e, ao mesmo tempo, realizaria o meu estudo de investigação. Assim, este é um método de investigação que realça a importância do investigador desempenhar em simultâneo dois papéis: o de professora e o de investigadora.

Para além do ponto de vista do professor como ator e investigador, os autores Elliot e Corey abordam outra questão da investigação-ação. Ambos referem a investigação-ação como um método que pretende a mudança.

Também os autores Cohen e Manion partilham desta opinião defendendo que a investigação-ação é “um procedimento […] com vista a lidar com um problema concreto […] de modo que os resultados possam ser traduzidos em modificações, ajustamentos, mudanças de direcção, redefinições” (citado por Bell, 2010, p. 21).

O autor Vilelas (2009) afirma que este tipo de investigação “orienta-se para a melhoria das práticas mediante a mudança e a aprendizagem a partir das consequências dessa mudança” (p. 195). Acrescentando que a metodologia da investigação-ação “tem como duplo objectivo a acção e a investigação, no sentido de obter resultados em ambas as vertentes: ACÇÃO – para obter mudança […]; INVESTIGAÇÃO – no sentido de aumentar a compreensão por parte do investigador” (Vilelas, 2009, pp. 194-195).

Assim, pode afirma-se que, de forma global, “os objectivos dos estudos de investigação-acção centram-se habitualmente na melhoria” (Afonso, 2014, p. 79).

Assumindo que a mudança, a melhoria e a transformação são os grandes objetivos da investigação-ação, este método adequa-se ao meu estudo porque através dele pretendo realizar uma investigação. Por um lado, com vista a melhorar a minha prática. Quer isto dizer que o meu estudo irá permitir-me compreender as estratégias e as dificuldades dos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e, através dessa compreensão, melhorar a minha prática pedagógica, pois permitir-me-á adequar as tarefas às capacidades, necessidades e dificuldades dos alunos, de forma a ajudá-los. Assim, com esta investigação, perspetiva-se que a minha prática seja melhorada e as minhas propostas pedagógicas mais adequadas. É de salientar que, como está subentendido, com a melhoria da minha prática e das minhas intervenções pretendo alcançar a melhoria do desempenho e da aprendizagem dos alunos. Por outro lado, o facto de me envolver num processo de construção de uma sequência de tarefas exige uma constante avaliação e reflexão sobre as aprendizagens dos alunos, efetuando ajustes e alterações mediante essa reflexão/avaliação. São estes ajustes e alterações que podem contribuir para desenvolver as aprendizagens dos alunos.

Segundo Afonso (2014) para uma investigação ser considerada uma investigação-ação deve comtemplar os seguintes aspetos:

- A investigação é realizada por pessoas envolvidas na situação social que é o objeto da pesquisa;
- A pesquisa parte de questões práticas do trabalho desenvolvido no quotidiano;
- É obrigatório o respeito e adequação dos valores às condições de trabalho na organização;
- As técnicas de recolha de dados utilizadas devem ser compatíveis com os recursos disponíveis e não podem interferir nas práticas da organização;
- Deve ser feito um esforço para relacionar a ação e a reflexão.

No que diz respeito à investigação por mim realizada, (i) eu representava, em simultâneo, o papel professora-estagiária e investigadora; (ii) a pesquisa partiu de um conteúdo abordado no 1.º ciclo: a resolução de tarefas de multiplicação; (iii) respeitei e adequei o meu trabalho às práticas desenvolvidas na escola onde a investigação foi realizada; (iv) utilizei as técnicas de recolha de dados adequadas aos recursos que possuía sem interferir nas práticas da escola e, por fim, (v) fui realizando uma reflexão da ação que me permitia avaliar a minha ação, de modo a melhorá-la, ao mesmo tempo que avaliava e refletia acerca do modo como os alunos pensavam a fim de criar uma sequência de tarefas o mais adequada possível.

Desta forma, constata-se que a investigação que realizei cumpre todas as caraterísticas enunciadas, por isso, trata-se claramente de uma investigação que utiliza a metodologia da investigação-ação.

Concluindo, “a abordagem adoptada […] dependerá da natureza do estudo e do tipo de informação que se pretende obter” (Bell, 2010, p. 20). Deste modo, a metodologia de investigação deste estudo segue uma abordagem qualitativa tomando como método de estudo a investigação-ação. Através deste método pude desempenhar, ao longo de sete semanas de estudo, dois papéis: professora-estagiária e investigadora. Ao fazer parte do contexto da sala de aula, participei nas rotinas dos alunos e, ao mesmo tempo, recolhi informações e dados necessários para realizar uma investigação associada à aprendizagem da multiplicação. Através da compreensão do modo de pensar dos alunos e da compreensão das dificuldades que sentem, posso alterar, ajustar e melhorar a minha prática pedagógica.

3.2 Contexto do estudo e participantes

As escolas do Agrupamento Vertical de Escolas de Azeitão estão situadas, tal como o nome indica, na região de Azeitão. O agrupamento foi criado por despacho da Senhora Diretora Regional Adjunta de Educação de Lisboa em 2003 e é, atualmente, constituído por sete escolas.

Este estudo realizou-se numa escola básica deste agrupamento constituída por: três salas de aula de 1.º ciclo, cerca de cinco casas de banho, biblioteca, sala de professores, sala de não docentes, sala de arrumos e refeitório. A zona do pátio é pequena, cimentada, sem espaços verdes e sem infra-estruturas associadas ao divertimento das crianças (baloiços, escorregas, etc.). Existe uma zona de areia e um campo de futebol.

Relativamente à sala de aula, esta é uma sala com uma dimensão média, arrumada e com muita luminosidade natural. No que diz respeito ao equipamento, a sala tem afixados três *placards* grandes, nos quais se encontram cartazes de apoio à leitura e escrita; cartazes de apoio a alguns conteúdos matemáticos; horário semanal; contactos dos encarregados de educação; exposição de trabalhos elaborados pelas crianças no âmbito dos diversos temas desenvolvidos em sala de aula. Para além do material afixado nos *placards*, existe também material de apoio nas paredes e janelas, tais como, abecedários e números. Para além disso, a sala tem dois grandes móveis de arrumação, com manuais escolares dos alunos, as capas de arquivo, material didático, os cadernos dos alunos e outros materiais, como folhas brancas, cartolinas, musgami, etc.. Contudo, o material não é só arrumado nestes armários, pois existe um armário numa pequena sala adjunta à sala de aula com material disponível para professores (lápis, canetas, borrachas, marcadores, folhas, etc.). Existe um quadro branco e um quadro interativo.

Quanto à caraterização da turma, esta é constituída por 26 alunos, dos quais 14 são do 2.º ano e 12 são do 3.º ano de escolaridade.

De acordo com o Plano de Trabalho de Turma (PTT), a turma de estágio revela-se interessada nos conteúdos programáticos, no entanto, é pouco trabalhadora e mantém uma postura pouco empenhada relativamente às aprendizagens. No que diz respeito ao comportamento, os alunos apresentam alguns problemas com o cumprimento de regras e são bastante agitados. Os alunos têm níveis de aprendizagem bastante diferentes, mesmo dentro de cada ano de escolaridade. Alguns alunos revelam dificuldades acrescidas e, por essa razão, 9 alunos têm um plano de acompanhamento devido a: dificuldades de adaptação e comportamento desajustado; ritmo de trabalho lento e falta de atenção; défice de concentração e dificuldade de adaptação ao meio escolar.

No grupo do 2.º ano de escolaridade existem alunos que ainda não iniciaram a aprendizagem da leitura e escrita, alunos que apenas reconhecem as letras mas realizam uma leitura silabada e alunos que já escrevem pequenas frases (PTT, 2016-2017).

No grupo de 3.º ano destaque-se o facto de os alunos não terem hábitos nem ritmo de trabalho. No que diz respeito às aprendizagens, possuem dificuldades a nível da escrita de texto, nomeadamente, aplicação das regras básicas de escrita e ortografia. Na área da Matemática, apresentam dificuldades na noção de número e na resolução de algoritmos e de situações problemáticas (PTT, 2016-2017).

Globalmente, o maior problema detetado na turma é a falta de concentração dos alunos. O facto de a turma ser composta por dois anos de escolaridade e ser constituída por vários níveis de aprendizagem dificulta o trabalho a desenvolver e torna mais complicado um acompanhamento mais individualizado dos alunos atendendo às suas dificuldades e necessidades específicas.

No que diz respeito à organização dos alunos na sala, por vezes, as mesas estão dispostas por filas e, para facilitar o trabalho de tutoria, um aluno que precise de mais apoio está sentado ao lado de outro que tem capacidades de aprendizagem e interajuda mais desenvolvidas. Outras vezes, os alunos são organizados em pequenos grupos (quatro ou cinco alunos) para que possam interagir e realizar um trabalho cooperado.

Desta forma, a disposição dos alunos é realizada de acordo com o trabalho que é desenvolvido e com os resultados que os alunos vão obtendo.

3.3 Técnicas e processo de recolha de dados

De acordo com o modelo de investigação utilizado num estudo, “é necessário escolher as técnicas de recolha necessárias para construir os instrumentos que nos permitem obter os dados da realidade” (Vilelas, 2009, p. 265).

Aires (2015), refere que “as técnicas de recolha de informação predominantemente utilizadas na metodologia qualitativa agrupam-se em dois blocos: técnicas directas [observação participante; entrevistas qualitativas; histórias de vida] e técnicas indirectas [documentos oficiais; documentos]” (p. 24).

Para recolher os dados necessários para o meu estudo utilizei três tipos de técnicas de recolha de dados, sendo elas, a observação participação, a entrevista clínica e a recolha documental.

Para cada uma destas técnicas utilizei diversos instrumentos de registo das informações recolhidas. Os instrumentos de registo de dados são um “recurso que o investigador pode recorrer para conhecer os fenómenos e extrair deles a informação” (Vilelas, 2009, p. 265).

Na seguinte tabela (tabela 2) apresento os instrumentos de recolha de dados que utilizei para cada uma das técnicas escolhidas. Para além disso, apresento também o tipo de dados que recolhi através da utilização de cada um dos instrumentos.

Tabela 2:Técnicas e formas de registo de recolha de dados utilizados no estudo

Técnica de recolha de dados	Formas de registo de recolha de dados	Dados recolhidos
Observação participação	Áudio e vídeo	-Estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação -Explicação, por parte dos alunos, do raciocínio matemático na resolução das tarefas de multiplicação
	Notas de campo	-Raciocínios e conexões matemáticas realizadas pelos alunos
Entrevista clínica	Áudio	-Dificuldades sentidas pelos alunos durante a resolução das tarefas de multiplicação -Estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução das tarefas de multiplicação
Recolha documental	Produções dos alunos	

Observação participação

A observação participação, segundo Aires (2015, pp. 24-25), “consiste na recolha de informação, de modo sistemático através do contacto direto com situações específicas”. Para tal,

> o investigador deve em primeiro lugar integrar-se no grupo […] para aí, ir realizando uma dupla tarefa: desempenhar algumas rotinas dentro do grupo, como se a ele pertencesse, ao mesmo tempo que vai recolhendo os dados de que necessita para a investigação. (Vilelas, 2009, p. 273)

O papel do observador-participante consiste em “observar e registar da forma mais objectiva possível e em interpretar depois os dados recolhidos” (Bell, 2010, p. 164).

Apesar de esta ser uma das técnicas mais utilizadas em estudos de investigação qualitativa, a autora Bell (2010) refere que “há problemas característicos desta [técnica] […], a começar pela própria interpretação do investigador do que é observado” (p.162). Para evitar isso e

> no sentido de obter informações válidas a partir dos dados, é provável que tenha [o investigador] que adoptar uma abordagem mais estruturada e de estabelecer um mecanismo de registo de informação para identificar os aspectos comportamentais que tenha determinado previamente que serão relevantes para o […] estudo. (Bell, 2010, p. 163)

No entanto, a mesmo autora realça que a “observação direta pode ser mais fiável que aquilo que as pessoas dizem” (Bell, 2010, p. 163), pois “pode ser particularmente útil descobrir se as pessoas fazem o que dizem fazer ou se se comportam da forma como afirmam comportar-se” (*ibidem*, p. 162).

É importante que o investigador utilize formas de registo que lhe permitam aceder aos acontecimentos o mais próximo possível dos momentos em que ocorrem. Uma forma de registo útil nestes casos específicos são as notas de campo. Este tipo de instrumento de recolha de dados diz respeito ao “relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha” (Bogdan & Biklen, 2013, p. 150). Esta recolha de dados “detalhada, precisa e extensiva” (*ibidem*) ajuda no sucesso de estudos de investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 2013). As notas de campo são, portanto, um registo escrito dos dados recolhidos utilizando uma linguagem corrente e simples que se devem fazer no momento de observação de um acontecimento (Sousa & Baptista, 2011).

A utilização da técnica descrita adequa-se à natureza do estudo desenvolvido, pois segundo Vilelas (2009), a observação-participação “permite reunir um corpo de informação variada e completa, muito importante para os estudos do tipo qualitativo” (p.273). Para além deste motivo, a sua utilização é apropriada porque “é uma técnica de investigação qualitativa adequada ao investigador que pretende compreender […] um fenómeno que lhe é exterior e que lhe vai permitir integrar-se nas actividades/vivências das pessoas que nele vivem” (*ibidem*, p. 274). Como eu pretendia recolher, durante o período de estágio na sala de aula, dados acerca das estratégias e dificuldades que os alunos sentiam na resolução de tarefas de multiplicação recorri à observação-participação.

Entrevista

A entrevista, “é uma forma específica de interacção social que tem como objectivo recolher dados para uma investigação. O investigador faz perguntas às pessoas capazes de fornecer dados de interesse” (*ibidem*, p. 279). Almeida (1990) distingue três tipos de entrevistas: clínicas, em profundidade ou centradas. No meu caso, utilizei as entrevistas que o autor define como clínicas.

Nas entrevistas clínicas “ao entrevistado é […] deixada uma grande margem de liberdade e de iniciativa no que respeita inclusivamente ao tipo de assuntos focados em cada sessão” (Almeida, 1990, p. 109). O objetivo destas é “recolher informação sobre factos” (Afonso, 2005, p. 99), não utilizando “nenhum questionário ou guião” (Vilelas, 2009, p. 281). “O importante [destas entrevistas] [é] incentivar o entrevistado a falar, de modo a obter uma panorama dos problemas mais salientes, dos mecanismos lógicos e mentais do respondente, dos temas que para ele são importantes” (*ibidem,* p. 281).

Estas entrevistas adequam-se à natureza do estudo pois são “de grande utilidade nos estudos exploratórios e descritivos” (*ibidem*) e podem “desenvolver-se numa lógica descritiva, em que se pretende recolher informação sobre factos, ou pode ser orientada num sentido interpretativo, em que se recolhem opiniões e representações” (Afonso, 2005, pp. 98-99).

Utilizei este tipo de entrevistas enquanto os alunos realizavam autonomamente as tarefas de multiplicação por me permitir perceber o raciocínio dos alunos e, sobretudo, as dificuldades que sentiam durante a resolução de tarefas. Nestes momentos realizei perguntas que me permitiram recolher informação relevante para o estudo.

Recolha documental

Os documentos "são considerados importantes fontes de dados" (Godoy, 1995, p. 21) e "a palavra "documentos", neste caso, deve ser entendida de uma forma ampla, incluindo os materiais escritos" (*ibidem*).

Por um lado, a utilização da análise documental é pertinente na medida em que "os documentos constituem uma fonte […] [em que] as informações neles contidas permanecem as mesma após longos períodos de tempo" (Godoy, 1995, p. 22). Por outro lado, é apropriada ao meu estudo porque esta "é […] apropriada quando queremos estudar […] buscando identificar um ou mais tendências no comportamento de um fenômeno" (Godoy, 1995, p. 22).

Uma vez que um dos objetivos do estudo é analisar as estratégias que os alunos utilizam na resolução da tarefas de multiplicação, tornou-se pertinente analisar os documentos que os mesmos produziram quando resolveram as tarefas, para deles extrair a informação necessária para melhor compreender as estratégias e os procedimentos de cálculo usados pelos alunos na resolução das tarefas. Para além disso, adequa-se à natureza do estudo porque "propicia uma análise qualitativa em profundidade" (Almeida, 1990, p. 104).

3.4 Processo de análise de dados

Neste estudo a análise dos dados decorreu em duas fases distintas. Primeiramente, foram analisadas as produções dos alunos que resultavam da realização das tarefas. Esta análise serviu, essencialmente, para orientar a minha prática de modo a adaptar a sequência de tarefas às dificuldades e conquistas dos alunos. A segunda fase da análise de dados ocorre na fase final do projeto. Depois de todas as tarefas serem exploradas e de todos os dados serem recolhidos analisei as produções dos alunos, as entrevistas e os episódios das discussões das tarefas com o objetivo de fazer uma análise mais apropriada das estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos, das suas dificuldades e das potencialidades da sequência de tarefas.

Para analisar e classificar as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos utilizaram nas tarefas de multiplicação que lhes foram propostas é utilizado o quadro apresentado na tabela 3.

Tabela 3: Estratégias e procedimentos de cálculo

Estratégias	Procedimentos de cálculo
Contagem	Contar por saltos
Aditivas	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
	Usar somas conhecidas
Multiplicativas	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar relações de triplo
	Usar múltiplos de 5 e de 10
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar uma decomposição decimal de um dos factores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna
Perceção visual de uma quantidade	

A tabela 3 foi construída recorrendo às ideias apresentadas pelas autoras Mendes (2012) e Silva (2015) nos estudos que realizaram. Tendo por base este quadro serão analisadas as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos utilizaram nas tarefas de multiplicação.

Para começar, organizei todas as produções dos alunos por tarefas e transcrevi todos os episódios de vídeo gravados correspondentes à discussão das tarefas. Depois dos dados organizados analisei as produções dos alunos e os episódios das discussões das tarefas.

O capítulo da análise de dados encontra-se organizado em três secções. Na primeira descrevo e analiso as estratégias e os procedimentos de cálculo usados pelos alunos na resolução das tarefas propostas no âmbito deste projeto. Na segunda secção, identifico e avalio as dificuldades evidenciadas pelos alunos na resolução destas tarefas. Finalmente, na última secção, analiso as potencialidades da sequência de tarefas face à aprendizagem dos alunos, cruzando os dados relativos ao modo como os alunos resolvem algumas tarefas e as intencionalidades subjacentes à construção da sequência de tarefas.

É de salientar que, apesar da sequência ser construída por oito tarefas, a análise que efetuo centra-se apenas em quatro delas devido à extensão dos dados recolhidos. Esta opção exigiu uma escolha das tarefas sobre as quais iria recair a minha análise, tendo optado por escolher tarefas que correspondiam a momentos diferentes do projeto. Assim, optei por seleccionar a primeira e a última tarefa da sequência e duas tarefas que se realizaram entre estas duas. A escolha destas tarefas teve como critérios corresponderem a problemas, por considerar que os dados revelam melhores evidências das estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos.

Importante, também, é referir que na análise das produções dos alunos com vista à classificação das estratégias e procedimentos de cálculo usados, deparei-me com situações em que foram efectuados registos que se enquadram em dois tipos de estratégias diferentes. Nestes casos, optei por contabilizá-los nas estratégias de nível inferior. Ainda relativamente à análise dos dados, para a análise de estratégias e procedimentos de cálculo foram selecionados, preferencialmente, as produções de alunos que foram apresentar as suas estratégias à turma, visto que tal permite uma melhor ilustração dos raciocínios usados por eles.

4. PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Este capítulo destina-se à descrição da proposta pedagógica que desenvolvi com os alunos. Primeiro, descrevo o processo de criação da sequência de tarefas. Depois, para cada uma das oito tarefas exploradas no âmbito deste projeto refiro o tipo de tarefa e os seus objetivos, tendo como referência o Programa e Metas de Matemática (ME, 2013). Para terminar este capítulo explico como cada uma das tarefas foi explorada em sala de aula, destacando alguns dos motivos que me levaram a escolher determinadas tarefas.

4.1 A sequência de Tarefas

Para pôr em prática o meu Projeto de Intervenção construi uma sequência de tarefas de multiplicação perspectivando a sua articulação. Esta sequência de tarefas foi criada com objetivo de fazer com que os alunos, progressivamente, recorram a estratégias e procedimentos de cálculo que incluam o uso de propriedades da multiplicação e de relações numéricas associadas a esta operação, como por exemplo, dos desenhos e esquemas para o uso de estratégias que envolvam o uso e a compreensão da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, da propriedade comutativa da multiplicação, da propriedade associativa da multiplicação, da relação do dobro e da metade.

Considerando a importância atribuída à construção de sequências de tarefas, sendo encarada como “um plano global que inclui marcos precisos e a definição clara do local onde se quer chegar no final” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 2) e que no ensino da multiplicação “o professor deve ter um plano global que lhe permite orientar as propostas de trabalho que organiza” (*ibidem*) construi uma sequência de tarefas de multiplicação que, inicialmente, era composta por apenas cinco. A construção desta sequência foi baseada na sequência e nas tarefas propostas na brochura “Números e Operações: 3.º ano”[1]. No entanto, “[o professor] tem de ir alterando o seu plano global, tendo em conta a aprendizagem de cada aluno, as ideias ou dúvidas que vão surgindo e

---

[1] Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalvez, F. (2013). Sequência 2 - Multiplicação. In *Números e Operações - 3º ano* (pp. 35-71).

os imprevistos com que se depara” (*ibidem*). Deste modo, a primeira versão da sequência de tarefas era provisória, sofrendo, ao longo do tempo, diversas alterações. Numa primeira fase, em discussão com a professora orientadora Catarina Delgado, foram realizadas alterações nas tarefas relativamente ao contexto das mesmas, particularmente, no que respeita aos números envolvidos nas tarefas. Numa segunda fase, a sequência de tarefas foi modificada de acordo com a análise das produções dos alunos relativas à resolução das tarefas que iam sendo propostas. Assim, de acordo com as dificuldades e conquistas que os alunos revelavam numa tarefa, a tarefa seguinte poderia ser modificada ou até mesmo inserida uma nova tarefa na sequência. Na fase final, a sequência de tarefas ficou composta por oito tarefas de multiplicação.

Segundo Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), a definição de uma sequência de tarefas “implica uma grande atenção às características específicas de cada uma das (…) tarefas que a constituem” (p. 7). Por essa razão, a seleção das tarefas e das questões que as constituem foram escolhidas de forma intencional a fim de concretizar o objetivo da sequência. Houve, também, uma escolha intencional na grandeza e no tipo de números utilizados. A tabela 4 apresenta as tarefas exploradas no momento de intervenção, explicitando o tipo e os objetivos de cada tarefa.

Tabela 4: Sequência de tarefas propostas

Nome da tarefa	Tipo de tarefa	Objetivos específicos
Quantas meias? Quantos desenhos?	Problema	- Efetuar contagens de 2 em 2 - Efetuar multiplicações adicionando parcelas iguais, envolvendo números até 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a esquemas - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação contanto o número de objetos colocados numa malha retangular e verificando que é igual ao produto do número de linhas pelo número de colunas
Construir a tabuada do 2	Tabuada	- Recorrer, intuitivamente, à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição - Recorrer a relações numéricas na construção da tabuada do 2 - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação - Reconhecer que o produto de qualquer número por 1 é igual a esse mesmo número
Cadeia numérica	Cadeia numérica	- Desenvolver estratégias de cálculo mental relacionando a propriedade distributiva da multiplicação - Compreender, construir e memorizar a tabuada do 2 - Usar diferentes representações para o mesmo produto

Parque do Moranguinho	Problema	- Reconhecer a propriedade distributiva da multiplicação - Resolver problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas no sentido aditivo - Efetuar multiplicações adicionando parcelas iguais - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação contando o número de quadrados numa malha retangular e verificando que é igual ao produto, por qualquer ordem, do número de linhas pelo número de colunas
Quantos gelados? Quantos lanches?	Problema	- Resolver problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas no sentido combinatório - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação
Imper-meáveis	1.ª parte: Exercício 2.ª parte: Problema	- Resolver problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas no sentido combinatório - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação
Construir a tabuada do 4	Tabuada	- Recorrer, intuitivamente, à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição - Recorrer a relações numéricas na construção da tabuada do 2 - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação - Reconhecer que o produto de qualquer número por 1 é igual a esse mesmo número
Gang dos Frescos	Problema	- Resolver problemas de um ou dois passos envolvendo situações multiplicativas no sentido aditivo - Efetuar multiplicações adicionando parcelas iguais recorrendo a desenhos e esquemas - Reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação contando o número de objetos colocados numa malha retangular e verificando que é igual ao produto, por qualquer ordem, do número de linhas pelo número de colunas - Reconhecer a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

Tal como referem Mendes, Brocardo e Oliveira (2011), numa sequência de tarefas "devem ser incluídas tarefas de natureza diferente: nem só problemas e investigações, nem só exercícios" (p. 10). Esta foi a principal razão que me levou a selecionar e criar tarefas diversificadas quanto à sua natureza, como se pode verificar na tabela acima apresentada. Para além deste aspeto, procurei, também, incluir tarefas às quais estivessem associados os diferentes sentidos da multiplicação: sentido aditivo e sentido combinatório.

Descrevo em seguida as tarefas que foram propostas no âmbito deste estudo e os motivos associados à sua seleção/construção, explicitando as intencionalidades subjacentes à sua exploração.

- **Quantas meias? Quantos desenhos?**

Os alunos com os quais desenvolvi este projeto frequentavam o 2.º ano de escolaridade e não tinham, até ao momento, qualquer contacto com a operação multiplicação. Optei, por este motivo, por iniciar a sequência com esta tarefa que se foca, sobretudo, na ideia de multiplicação associada à adição sucessiva de parcelas iguais.

A tarefa estava dividida em duas partes, respetivamente, “Quantas meias?” e “Quantos desenhos?” e, em ambas, a sua exploração consistia na contagem de um conjunto de objetos.

A primeira parte da tarefa consistia em apresentar aos alunos um conjunto de 5 pares de meias de cores diferentes, como mostra a imagem (figura 1).

Figura 1: Fotografia da exploração da tarefa "Quantas Meias?"

Os alunos teriam de determinar o número total de meias que se encontrava no conjunto mostrado (figura 1). Com esta parte da tarefa pretendia iniciar a abordagem à multiplicação promovendo a contagem por saltos (de 2 em 2). Escolhi dispor as meias desta forma, pois este tipo de disposição antecipa a disposição em malha retangular e auxilia os alunos na contagem dos objetos.

Escolhi agrupar as meias aos pares para evitar, por parte dos alunos, a contagem por saltos de um a um. Através desta organização das meias, os alunos poderiam resolver a questão realizando uma contagem por saltos de dois em dois (2, 4, 6, 8, 10). O facto de utilizar meias, agrupadas em pares, prende-se, ainda, com duas questões. A primeira, para garantir que são realizadas tarefas articuladas. Isto é, se a próxima tarefa a ser explorada é a construção da tabuada do 2 o número do contexto desta tarefa é o 2.

A segunda, porque, normalmente, os alunos associam o par de meias ao número 2. Assim, apesar de as meias estarem enroladas, a sua contagem seria facilitada.

Na segunda parte da tarefa, algumas das produções gráficas dos alunos foram organizadas no quadro em grupos de três cores: vermelho, verde e preto. Como apresenta a figura 3. O grupo vermelho era constituído por 6 desenhos, o grupo verde por 10 desenhos e o grupo preto por 20 desenhos (figura 2).

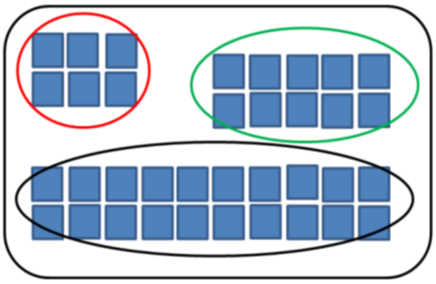


Figura 2: Esquema da tarefa "Quantos desenhos?"

Nesta fase da aula, o desafio era os alunos calcularem quantos desenhos estavam em cada grupo de cor diferente. Primeiro, seria pedido aos alunos que dissessem o número de desenhos do grupo vermelho. Depois, os do grupo verde. E, por fim, os do grupo preto. À medida que os alunos davam a sua resposta, essa seria escrita, por mim, no quadro. Para além das respostas dos alunos seriam também registadas no quadro a/as estratégia/s que os alunos utilizassem para contabilizar o número de desenhos.

No cálculo do número de desenhos do grupo vermelho os alunos poderiam optar por utilizar uma estratégia de contagem. Assim, poderiam usar uma contagem por saltos por linhas – 3, 6 – ou por colunas – 2, 4, 6.

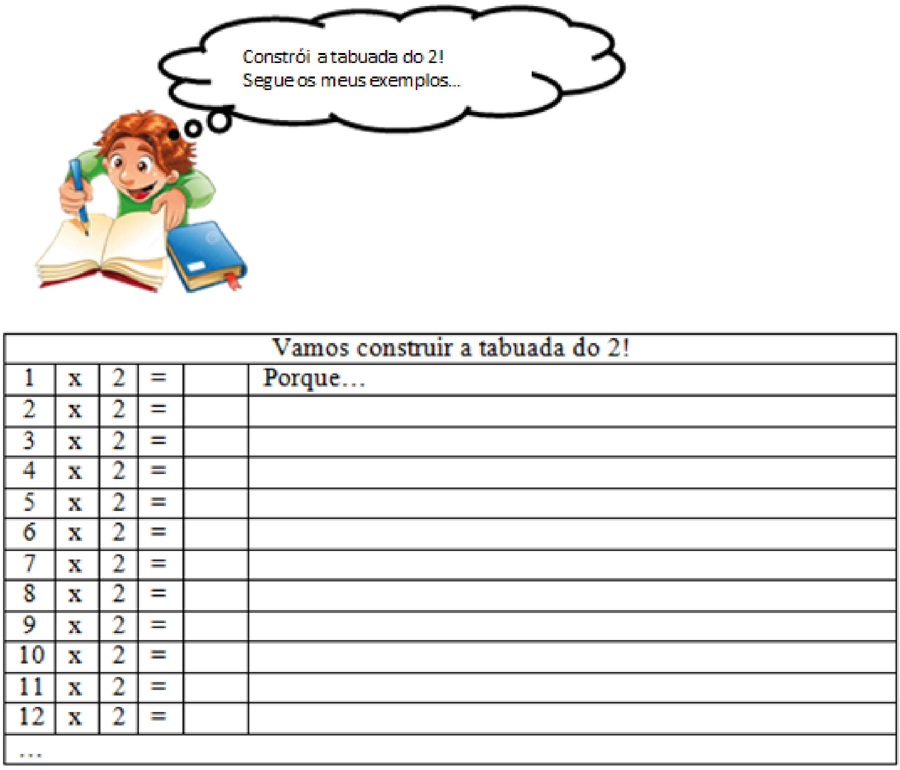
No cálculo dos desenhos do grupo verde os alunos poderiam utilizar, também, a estratégia anteriormente referida, calculando o número de desenhos por saltos (de 5 em 5 ou de 2 em 2). Apesar de a quantidade de desenhos ainda permitir a contagem por saltos de um a um, pretendia fazer com que os alunos se apercebessem que quanto maior for o número de objetos, mais difícil se torna o uso desta estratégia.

Por fim, com o cálculo do número de desenhos do grupo preto, o grupo com maior número de desenhos, pretendia que os alunos reconhecessem que o número total de desenhos é igual ao produto do número de linhas pelo número de colunas. Esta tarefa possibilitava aos alunos perceberem que é mais prático utilizar uma estratégia multiplicativa para determinar o número total de objetos organizados numa malha retangular do que contá-los por saltos.

Escolhi organizar os desenhos numa malha retangular com 2 linhas, pois a próxima tarefa da sequência era a construção da tabuada do 2. Assim, os alunos nesta tarefa estariam a trabalhar produtos importantes para a próxima tarefa da sequência, ou seja, em que um dos fatores é 2.

- **Construir a Tabuada do 2**

Para explorar a construção da tabuada do 2 foi projetado, no quadro interativo, a figura 3.



Constrói a tabuada do 2!
Segue os meus exemplos...

Vamos construir a tabuada do 2!					
1	x	2	=		Porque…
2	x	2	=		
3	x	2	=		
4	x	2	=		
5	x	2	=		
6	x	2	=		
7	x	2	=		
8	x	2	=		
9	x	2	=		
10	x	2	=		
11	x	2	=		
12	x	2	=		
…					

Figura 3: Enunciado da tarefa "Construir a Tabuada do 2"

A tabuada seria construída, em grande grupo, produto a produto, em que os alunos participariam calculando os produtos, explicando como os obtiveram. Todas as respostas dos alunos seriam registadas, por mim, no quadro interativo.

A tarefa “Construir da tabuada do 2” foi integrada na sequência de tarefas por diferentes motivos. O primeiro, porque tal como indica o Programa e Metas

Curriculares de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013), no 2.º ano de escolaridade os alunos devem “construir e saber de memória a tabuada do 2” (p. 10). Mas, para além dos objetivos delineados pelo programa, esta tarefa tinha como objetivos que os alunos recorressem (i) à decomposição dos números (ii) à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e (iii) à propriedade comutativa da multiplicação para calcularem novos produtos da tabuada do 2.

Tal como foi referido anteriormente, a tarefa promoveria a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para obter novos produtos. A título de exemplo, para os alunos calcularem o produto de 9x2 poderiam decompor o número 9 em 7+2 e realizar o produto de 9x2 calculando 7x2+2x2. Assim, os alunos iriam recorrer ao conhecimento que 7x2=14 e 2x2=4, produtos já calculados anteriormente.

Terminada a construção da tabuada, seria explicado que esta, ao contrário do que muitos alunos possam pensar, ‘não tem fim’. Posteriormente, seriam escritas no quadro expressões para os alunos resolverem, individualmente, no seu caderno diário, nomeadamente, 15x2, 19x2 e 21x2.

Optei escolher o produto 15x2, pois o número 15 é constituído pelos números de referência 10 e 5. Para além disso, os produtos de 10x2 e 5x2 já seriam conhecidos dos alunos, o que permitiria que estes resolvessem o cálculo recorrendo à propriedade distributiva da multiplicação, ou seja, 15x2=10x2+5x2.

Os produtos 19x2 e 21x2 foram escolhidos por estarem próximos do produto 20x2. Mesmo que os alunos não conhecessem o produto 20x2, o mesmo poderia ser calculado a partir do dobro de 10x2. Deste modo, poderiam calcular 19x2 fazendo 20x2-1x2 e 21x2 fazendo 20x2+1x2. Se os alunos não recorressem ao produto de 20x2, conheceriam os produtos de 10x2, 9x2 e 1x2 e com estes poderiam resolver os dois produtos propostos.

O cálculo destes três produtos incentiva os alunos a deixarem de recorrer a estratégias aditivas e passarem a utilizar estratégias que recorram às propriedades distributiva e comutativa da multiplicação, uma vez que os alunos não conheciam os produtos anteriores.

- **Cadeia Numérica**

A exploração das cadeias numérica com os alunos “visam o desenvolvimento do cálculo mental baseado no uso de propriedades e relações importantes da multiplicação” (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 11). Por isso, decidi integrar uma cadeia numérica na sequência de tarefas. Outra razão que me levou a explorar uma cadeia numérica foi a dificuldade dos alunos em utilizar estratégias que usem a propriedade distributiva e comutativa da multiplicação.

A construção da cadeia numérica incluiu produtos da tabuada do 2 (figura 4), visto que esta seria trabalhada na tarefa anterior e, assim, os alunos já conheciriam alguns produtos.

2x2=
4x2=
8x2=
10x2=
12x2=
14x2=
18x2=

Figura 4: Cadeia numérica explorada com os alunos

Para iniciar, seriam escritos no quadro as várias expressões da cadeia numérica, uma de cada vez, em que os alunos deveriam indicar o produto, bem como explicar como efetuaram cada cálculo, ou seja, indicar a estratégia que utilizassem.

O objetivo desta tarefa seria os alunos compreenderem e usarem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para resolverem os produtos da cadeia numérica. Decidi começar a cadeia pelo produto de 2x2 por ser um produto já conhecido dos alunos. Depois, todos os outros cálculos poderiam ser resolvidos recorrendo à decomposição dos números e à propriedade distributiva da multiplicação. Recorrendo ao exemplo do cálculo 14x2, este poderia ser resolvido por 10x2+4x2 ou 10x2+2x2+2x2. Os segundo e terceiro produtos também poderiam ser encontrados a partir da relação do dobro.

O facto de esta tarefa ter sido criada, sobretudo, com o objetivo dos alunos recorrerem à propriedade distributiva para resolver produtos da tabuada do 2, não significa que os alunos não utilizassem outras estratégias, como por exemplo, estratégias aditivas. Para resolverem os cálculos da cadeia numérica os alunos poderiam usar a estratégia que, para eles, fosse mais fácil. Porém, no decorrer da exploração da cadeia seria dada maior relevância às estratégias que recorriam a esta propriedade da multiplicação.

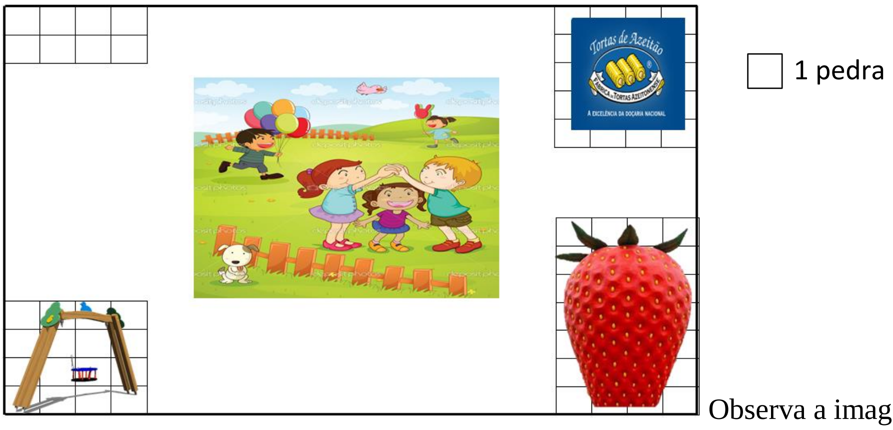
- **Parque do Moranguinho**

A quarta tarefa da sequência iria completar as tarefas “Construir a Tabuada do 2” e “Cadeia Numérica”, pois o seu objetivo seria, também, trabalhar a propriedade distributiva, aquela em que os alunos tendiam a não utilizar.

Escolhi realizar esta tarefa utilizando o Parque do Moranguinho e os estabelecimentos comerciais nele presentes, pois é um parque infantil muito frequentado pelos alunos. Assim, esta tarefa estaria contextualizada com o quotidiano dos alunos.

Com esta tarefa (figura5), de forma geral, pretendia que os alunos recorressem à propriedade distributiva da multiplicação. Para isso, ser-lhes-ia apresentado uma imagem representativa do parque e quatro questões sobre o espaço que o baloiço, o café e a estátua do morango ocupam.

PARQUE DO MORANGUINHO



Observa a imagem.

1- Quantas pedras tem o espaço vazio? Explica como pensaste.
2- Quantas pedras tem o espaço com o baloiço? Explica como pensaste.
3- Quantas pedras tem o espaço com o café Tortas de Azeitão? Explica como pensaste.
4- Quantas pedras tem o espaço do morango? Explica como pensaste.

Figura 5: Problema "Parque do Moranguinho"

Na questão 1 seria apresentado um espaço vazio. Este facto faz com os alunos possam recorrer ao procedimento de cálculo de contar por saltos (por linhas ou por colunas). No entanto, escolhi uma malha retangular com duas linhas visto que os alunos já teriam conhecimentos dos produtos da tabuada do 2. Assim, os alunos com raciocínio matemático mais avançado, poderiam recorrer a produtos já conhecidos para resolver a questão.

Na questão 2 seria apresentado um espaço com a imagem de um baloiço. Esta imagem, embora sobreposta nas pedras, não tapa por completo o quadriculado. Por um lado, para resolverem a questão, os alunos poderiam, tal como na questão 1, utilizar como estratégia a contagem por saltos de um a um ou de quatro em quatro. Por outro lado, poderiam realizar uma adição sucessiva do número de pedras por linha ou por coluna (4+4+4+4). Por fim, o número de linhas e colunas da malha retangular estava relacionado com a questão 1. Tal permitiria aos alunos resolverem a questão 2 visualizando a imagem e percebendo que o número de pedras que o espaço vazio ocupa é dobro de pedras desta imagem.

Na questão 3 seria apresentada uma imagem do café das Tortas de Azeitão. Esta imagem tapa por completo as quadrículas interiores, deixando apenas à vista as quadrículas envolventes à imagem. Optei por tapar, nesta pergunta, grande parte das quadrículas para incentivar os alunos a recorrer à ideia da multiplicação do número de quadrados das linhas por o número de quadrados das colunas. Nesta questão, ao contrário das anteriores, os alunos poderiam também olhar para as questões anteriores e perceber que o número de pedras que o café ocupa é o número de pedras que o baloiço ocupa mais 4, ou seja, mais uma linha de 4 pedras.

Por fim, na questão 4 seria apresentado um espaço com a imagem da estátua do Morango. Tal como na questão 3, a imagem tapa grande parte das quadrículas. Através da visualização de todas as imagens do problema, os alunos poderiam perceber que somando o produto obtido na questão 1 e o produto obtido na questão 3 obtiam a resposta à questão 4, como se pode verificar na figura 6.

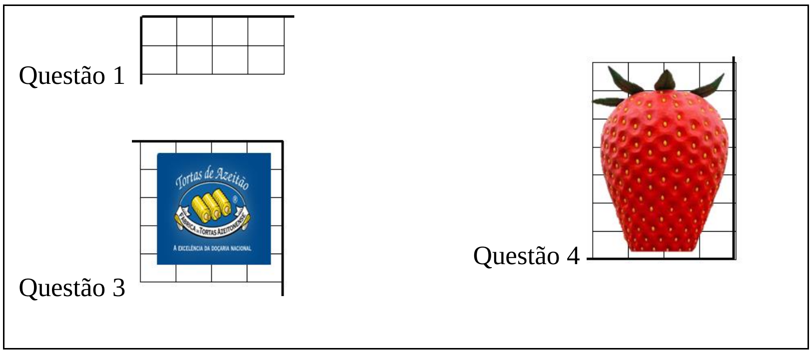


Figura 6: Relação entre as imagens do problema “Parque do Moranguinho”

Tal permitiria salientar o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, uma vez que os alunos puderam observar que 7x4=(5+2)x4=5x4+2x4.

Os alunos poderiam, ainda, optar por recorrer à multiplicação do número de quadrados das linhas vezes o número de quadrados das colunas, obtendo assim o produto de 7x4, ou vice-versa, obtendo o produto de 4x7. Apesar dos alunos não conhecerem os produtos da tabuada do 4, conhecem os produtos da tabuada do 2. Nesta questão poderiam relacionar os produtos que já conhecem para resolver as questões. Por exemplo, o produto de 7x4 é igual ao produto de 4x7, então os alunos poderiam recorrer ao produto de 7x2+7x2 que decompõe a parcela 4 em 2+2. Deste modo, os alunos recorreriam também às propriedades comutativa e distributiva da multiplicação.

Relativamente à escolha do número de quadrados das colunas da malha retangular, optei pelo número 4, pois a próxima tabuada que os alunos iriam trabalhar seria a tabuada do 4.

- **Quantos Gelados? Quantos Lanches?**

Tal como o nome desta tarefa indica, esta estava dividida em duas partes, ambas com o objetivo de trabalhar a multiplicação no sentido combinatório, mas com valores e possibilidades de combinações diferentes. Dividi a tarefa em duas partes para que os alunos pudessem, numa primeira fase, resolver o problema e discuti-lo, esclarecendo todas as dúvidas para que, numa segunda fase, pudessem perceber que utilizando a multiplicação este tipo de problema poderia ser eficazmente/rapidamente resolvido.

A primeira parte da tarefa consistia na resolução do problema apresentado na figura 7.

QUANTOS GELADOS?

A Maria foi a uma gelataria e viu o seguinte cartaz:

1- A Maria quer comer um gelado só com uma bola. Quantos gelados diferentes pode escolher? Explica como pensaste.

Figura 7: Problema "Quantos Gelados?"

Para resolver este problema os alunos poderiam recorrer a diferentes estratégias, como por exemplo: esquemas, desenhos ou produtos. O mesmo possibilitaria, também, o uso de um dos produtos em que um dos fatores é 2, visto que a quantidade de bases de gelados era dois. Para além disso, proporcionaria o reconhecimento da propriedade comutativa, pois os alunos poderiam resolver o problema multiplicando o número de sabores pelo número de bases obtendo o produto 3x2, mas podiam também multiplicar o inverso obtendo o produto 2x3.

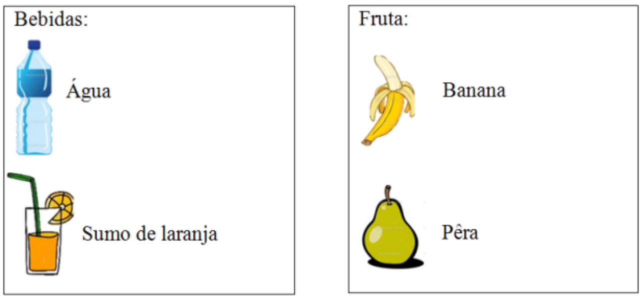
A segunda parte da tarefa, diz respeito à resolução do problema “Quantos Lanches?” (figura 8).

QUANTOS LANCHES?

Na semana seguinte, a Maria voltou à gelataria. Desta vez, a Maria viu o cartaz do Menu dos lanches.

Menu lanche:

- Um gelado com um sabor
- Uma peça de fruta
- Uma bebida



1- Quantos lanches diferentes pode escolher a Maria? Explica como pensaste.

Figura 8: Problema "Quantos lanches?"

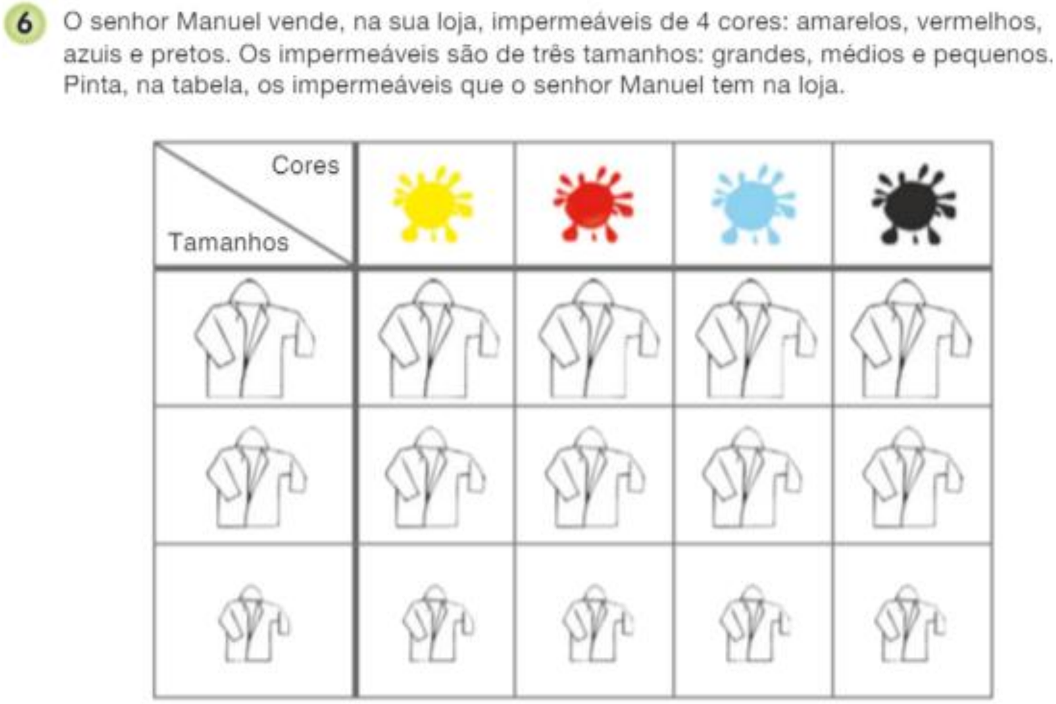
Nesta parte da tarefa, seria pedido aos alunos que calculassem quantas possibilidades diferentes de lanches existem sabendo que (i) podem escolher um menu com um gelado, uma peça de fruta e uma bebida, (ii) existem seis opções diferentes de gelados (iii) existem duas opções de frutas e (iv) existem duas opções de bebidas. A partir destas informações e após a discussão do problema “Quantos Gelados?” pretenderia que os alunos recorressem ao uso da multiplicação para resolver o problema.

Com a resolução desta tarefa surge, ainda, o reconhecimento da propriedade associativa, visto que existiria uma combinação com três ingredientes diferentes. Para calcular o resultado, os alunos poderiam pensar no produto de (6x2)x2 que representa o número de gelados vezes o número de peças de fruta multiplicado pelo número de bebidas. Ou ainda, calcular o produto de 6x(2x2) que representa o número de gelados multiplicado pelo número de peças de fruta vezes o número de bebidas.

- **Impermeáveis**

A tarefa “Impermeáveis” surge na sequência de tarefas a fim de se averiguar se as dificuldades sentidas pelos alunos surgiriam por força do contexto dos problemas ou se existiriam dificuldades na compreensão dos problemas de sentido combinatório. Visto que o problema de sentido combinatório anterior, “Quantos gelados? Quantos lanches?”, representava um contexto do quotidiano – comer um gelado – fiquei sem perceber se os resultados obtidos derivavam de este facto ou representavam, efetivamente, dificuldades dos alunos.

Desta vez, seria usado um problema do manual escolar dos alunos, como está na figura 9.



6 O senhor Manuel vende, na sua loja, impermeáveis de 4 cores: amarelos, vermelhos, azuis e pretos. Os impermeáveis são de três tamanhos: grandes, médios e pequenos. Pinta, na tabela, os impermeáveis que o senhor Manuel tem na loja.

Figura 9: Exercício do manual Alfa2 Matemática

Para começar, os alunos realizaram autonomamente, no seu manual escolar, o exercício da figura 9. Este limitava-se à pintura dos impermeáveis e possível contagem por saltos de um a um. Por esse motivo, decidi que iria comentar com os alunos que teriam descoberto o número de impermeáveis que o Senhor Manuel tinha na loja porque os pintaram e perguntar: “será que podiam descobrir quantos impermeáveis existiam na loja recorrendo a outra estratégia?”. Com esta pergunta pretendia que os alunos avançassem no raciocínio matemático e percebessem que poderiam utilizar estratégias diferentes e mais eficazes para calcular o número de impermeáveis, como por exemplo, recorrer a estratégias de multiplicação (calculando o produto do número de tamanhos dos impermeáveis pelo número de cores ou vice-versa).

Em seguida, propunha uma extensão da tarefa do manual aumentando o número de cores possíveis para venda (figura 10).

LOJA DO SENHOR MANUEL

A loja do Senhor Manuel recebeu impermeáveis novos. Agora na sua loja o Senhor Manuel vende impermeáveis de vários tamanhos: grande, médio e pequeno. E de várias cores: amarelo, vermelho, azul, preto, rosa e verde.

Tamanhos	Cores
	

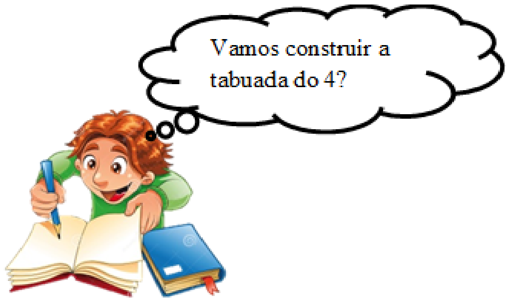
Quantos impermeáveis estão à venda na loja do Senhor Manuel? Explica como pensaste.

Figura 10: Problema "Loja do Senhor Manuel”

Com a proposta deste problema pretendia verificar se os alunos estavam, progressivamente, a abandonar as estratégias de contagem ou as estratégias com utilização de desenhos e esquemas para resolver problemas deste tipo. Isto é, apesar da imagem e da questão do problema permitirem aos alunos utilizarem estratégias como recorrer a desenhos e esquemas ou adições sucessivas, pretendia, através da tarefa do manual e da sua exploração em grande grupo, relembrar a possibilidade de utilizarem a multiplicação do número de tamanhos pelo número de cores ou vice-versa.

- **Construir a Tabuada do 4**

A sétima tarefa proposta seria a construção da tabuada do 4 (figura 11). Esta tarefa iria desenrolar-se da mesma forma que a Tabuada do 2, tendo os mesmos objetivos.



Vamos construir a tabuada do 4…					
1	x	4	=		Porque…
2	x	4	=		
3	x	4	=		
4	x	4	=		
5	x	4	=		
6	x	4	=		
7	x	4	=		
8	x	4	=		
9	x	4	=		
10	x	4	=		
11	x	4	=		
12	x	4	=		
…					

Figura 11: Enunciado da tarefa "Construir a Tabuada do 4"

- **Gang dos Frescos**

Para terminar a sequência seria proposta a tarefa “Gang dos Frescos” que tinha como principal objetivo verificar se os alunos tinham ou não alcançado o grande objetivo da sequência de tarefas, ou seja, se os alunos utilizariam estratégias que recorressem às propriedades da multiplicação para resolver tarefas.

Os números envolvidos nesta tarefa seriam o 2 e o 4, por serem as tabuadas que os alunos já haviam aprendido. Para além destes dois números, seria também incluído o número 5, que seria a próxima tabuada a ser construída com os alunos. Para além disso, as imagens dos cromos seriam organizadas em disposição retangular, para que os alunos pudessem utilizar os seus conhecimentos adquiridos ao longo da resolução das tarefas da sequência proposta. Por fim, algumas quadrículas seriam tapadas para incentivar os alunos a recorrer à multiplicação como estratégia de resolução do problema.

Esta tarefa estaria dividida em duas partes. A primeira parte do problema seria constituída por 3 questões, como mostra a figura 12.

GANG DOS FRESCOS

A Sofia está a fazer a coleção dos cromos “Gang dos Frescos” do Lidl. A sua caderneta está preenchida como a da figura.

1- Quantos cromos já colou a Sofia na sua caderneta? Explica como pensaste.
2- Quantos cromos faltam para a Sofia completar a caderneta? Explica como pensaste.
3- Quando terminar, quantos cromos vai ter a Sofia na caderneta? Explica como pensaste.

Figura 12: 1ª parte do tarefa “Gang dos Frescos”

Na primeira questão seria pedido aos alunos que contabilizem o número de cromos colados na caderneta. A imagem representativa da questão permitiria que os alunos contabilizassem os cromos por saltos (de um em um, de dois em dois ou de cinco em cinco). Mas, como os cromos estavam colocados em disposição retangular os alunos poderiam recorrer à multiplicação. No entanto, existiam três opções. Os alunos poderiam calcular o número total de cromos realizando o produto de linhas por colunas (4x5), o produto de colunas por linhas (5x4) ou recorrendo ao produto do dobro de 2 linhas por 5 colunas 2x(2x5)=2x5+2x5. Escolhi, intencionalmente, esta imagem uma vez que os alunos teriam trabalhado as tabuadas do 2 e 4. Ao responder a esta questão, os alunos estariam a utilizar as propriedades da multiplicação, concretamente, a distributiva e a comutativa.

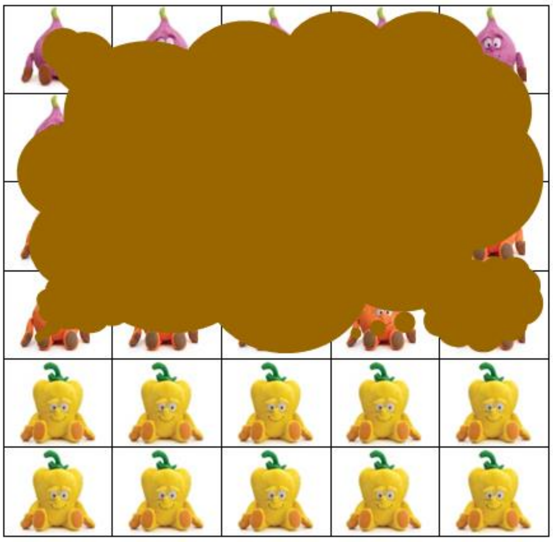
Na segunda questão, os alunos teriam que calcular o número de cromos que faltavam colar na caderneta. Para o fazerem, teriam de contar o número de quadrículas vazias que estavam na caderneta. Tal como na questão 1, a imagem permite que os alunos realizem a contagem dos cromos que faltam colar por saltos ou por adições sucessivas. Todavia, com a disposição retangular, pretendia que os alunos visualizassem a imagem e calculassem o produto de linhas por colunas (2x5), o produto de colunas por linhas (5x2), olhassem para os produtos anteriores e percebessem que o número de cromos que faltam colar é metade dos cromos já colados ou, ainda, que o número de cromos que falta colar é igual ao número de cromos de um grupo.

Na terceira questão seria perguntado aos alunos qual o número total de cromos quando a caderneta estivesse cheia. Para resolverem esta questão os alunos poderiam recorrer a estratégias como: contagem por saltos; adições sucessivas; soma dos produtos obtidos nas questões 1 e 2. Através da visualização da imagem do problema os alunos deveriam concluir que o número de cromos total quando a caderneta tivesse cheia é igual ao número de cromos já colados mais o número de cromos que falta colar.

A segunda parte do problema seria explorada depois da discussão da primeira parte. Este problema seria constituído apenas por uma questão, como mostra a figura 13.

ACIDENTE COM A CADERNETA DA SOFIA!

O Ricardo, amigo da Sofia, deixou cair um pacote de leite com chocolate na caderneta.



1- Quantos cromos precisam de ser colados novamente? Explica como pensaste.

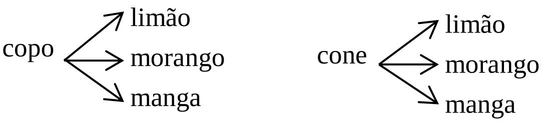
Figura 13: 2ª parte da tarefa “Gang dos Frescos”

Neste problema, ao contrário da primeira parte da tarefa, seria pedido aos alunos que contabilizem cromos que não são visíveis na imagem. Os cromos seriam propositadamente tapados para ajudar os alunos a abandonar estratégias de contagem e incentivá-los a usar a multiplicação. Para responder à questão do problema, os alunos poderiam recorrer a três estratégias diferentes. Como a imagem estava disposta numa malha retangular, os alunos poderiam recorrer à multiplicação para calcular o número de cromos que teriam de ser novamente colados (4x5 ou 5x4). Poderiam, também, olhar para a resolução que tinham realizado na primeira parte da tarefa e perceber que já tinham calculado aquele valor na questão 2. Podiam, ainda, perceber que o número de cromos que faltavam colar era o dobro dos cromos que não foram atingidos pelo leite.

4.2 A preparação da exploração das tarefas

Depois de selecionar as tarefas da sequência tendo em conta a sua articulação com as anteriores e as dificuldades dos alunos, "o professor tem ainda de preparar dois momentos importantes: prever como poderá organizar a aula e colocar em acção essa previsão, ao explorar a tarefa na aula" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 13). A fase de prever a organização da aula deverá incluir a preparação da exploração das tarefas na sala de aula, em que o professor deve pensar no que conseguirão os alunos fazer e nas dúvidas que poderão surgir (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011). Assim, depois de selecionadas as tarefas, fiz uma antecipação das estratégias que os alunos poderiam utilizar e das dificuldades que poderiam ter. Para cada uma das tarefas da sequência criei uma tabela com as possíveis estratégias e dificuldades dos alunos (ver Apêndice). A título de exemplo, para o problema "Quantos gelados?" (página 47) construí a tabela 5.

Tabela 5: Tabela de possíveis estratégias e dificuldade do problema "Quantos gelados?"

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
Desenho de todas as opções	Existem os sabores: limão, morango e manga. Existem as bases: cone e copo.  A Maria pode escolher seis gelados diferentes.	Não foram antecipadas dificuldades.	
Diagrama	 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		

Adição	A Maria pode escolher 3 sabores (limão, morango e manga) no cone e 3 (limão, morango e manga) sabores no copo. 3+3=6 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Multiplicação	Existem 3 sabores de gelado (limão, morango e manga) e 2 bases (copo e cone). 3x2=6 **OU** 2x3=6 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Outra:			

4.3 A exploração das tarefas na sala de aula

Os momentos previstos para a exploração das tarefas na sala de aula foram semelhantes em todas elas. Para iniciar e introduzir cada uma das tarefas, seria realizada uma conversa com os alunos sobre o tema em causa. Por exemplo, na introdução da tarefa "Quantos gelados? Quantos lanches?" (página 47) seriam desenhados diversos gelados no quadro e seria realizada, com os alunos, uma conversa sobre o verão, os sabores de gelado preferidos dos alunos e os tipos de gelados que comiam com mais frequência (cone, copo, caixa…).

Depois da apresentação das tarefas, os alunos, a pares, iniciavam a sua resolução. A cada par de alunos seria fornecido um enunciado da tarefa, uma folha A3, dois marcadores coloridos e um marcador preto. A resolução das tarefas era escrita, pelos alunos, na folha A3. Enquanto isso, o meu papel era monitorizar o trabalho dos alunos e começar a preparação da discussão da tarefa. Esta preparação incluía a seleção das resoluções para serem discutidas em grande grupo. Neste momento, o papel do professor é "interrogar-se sobre os objectivos que delineou e identificar as potencialidades das estratégias usadas [pelos alunos], numa perspectiva de seleccionar as que devem ser apresentadas e discutidas com toda a turma" (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011, p. 19). Terminado o tempo para a resolução da tarefa, todas as resoluções dos alunos seriam expostas no quadro.

Escolhidas as estratégias para apresentação, procedia-se à discussão das estratégias. No quadro, para além de expostas todas as resoluções selecionadas, seria também colocado um enunciado da tarefa ampliado, a fim de apoiar os alunos nas apresentações. A ordem das apresentações realizar-se-ia da menos para a mais eficaz. Durante as apresentações dos alunos, nortearia a minha intervenção, enquanto professora, pelas seguintes ideias:

> a acção do professor deve ser norteada pelas seguintes questões: como orientar a apresentação (…) das resoluções de modo a facilitar as interacções entre os alunos? Como gerir a discussão colectiva de maneira a estabelecer 'pontes' entre diferentes resoluções, umas mais informais outras mais potentes? Como orientar a discussão de maneira a que os alunos em níveis de aprendizagem mais baixos evoluam?. (*ibidem,* p. 21)

Em todas as apresentações e discussões das tarefas o meu objetivo seria incentivar os alunos a realizarem o confronto entre as diferentes estratégias utilizadas, por acreditar que esta prática "pode auxiliar (…) [os alunos] com diferentes níveis de compreensão sobre a multiplicação a progredir em termos das ideias e relações que podem ser estabelecidas" (*ibidem,* p. 22). Com a discussão das tarefas pretendia que os "alunos que usaram estratégias pouco potentes consigam compreender as resoluções mais eficazes de outros colegas e que progridam em termos de nível de aprendizagem" (*ibidem,* p. 18).

5. ANÁLISE

Neste capítulo é apresentada a análise dos dados recolhidos ao longo do estudo. Numa primeira secção descrevo as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos utilizaram na resolução das tarefas de multiplicação. Esta secção está dividida em quatro partes, que correspondem às quatro tarefas analisadas, organizadas de acordo com os momentos da exploração de cada uma das tarefas na sala de aula. Assim, para cada uma das tarefas apresento uma breve descrição da exploração que foi realizada na sala de aula e analiso as estratégias e os procedimentos de cálculo que os alunos utilizaram para as resolver. No final de cada uma destas partes apresento um quadro que sintetiza as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados. A segunda secção apresenta uma descrição e análise das dificuldades sentidas pelos alunos. Para terminar, a terceira e última secção foca-se nas potencialidades da sequência de tarefas.

5.1 Estratégias e procedimentos de cálculo

- **Quantas meias? Quantos desenhos?**

A primeira tarefa da sequência de tarefas, "Quantos meias? Quantos desenhos?", foi explorada em grande grupo com os alunos do 2.º ano de escolaridade (14 alunos) e teve uma duração média de 40 minutos. A exploração desta tarefa foi realizada oralmente pelo que apenas existem registos áudio da mesma, não existindo qualquer tipo de registo escrito realizado pelos alunos.

Primeiramente, foi explorada a primeira parte da tarefa, "Quantas meias?", que consistia na contagem de cinco pares de meias, enroladas duas a duas. E, só depois, foi explorada a segunda parte da tarefa, "Quantos desenhos?", em que os alunos deveriam contabilizar grupos de desenhos organizados em malhas retangulares (6, 8 e 20 desenhos).

Primeira parte da tarefa – Quantas meias?

Estratégias de contagem

Quévin foi o primeiro aluno a responder à questão, utilizando uma estratégia de contagem e tendo como procedimento de cálculo a **contagem de dois em dois**. Durante o momento de exploração da tarefa explicitou:

> **Quévin:** Seis.
> **Eu:** E porque é que tu dizes que eu aqui tenho 6 meias?
> **Quévin:** Porque eu tive a contá-las.
> **Eu:** Então anda aqui mostrar, se faz favor, aos teus colegas como é que tu contaste.
> **Quévin:** (conta as meias apontando) Ah não! São 10.
> **Eu:** Explica lá como é que tu contaste…
> **Quévin:** Contei de duas em duas.
> **Eu:** O Quévin contou de duas em duas, portanto… 2, 4, 6, 8, 10 (com a ajuda do Quévin). Toda a gente concorda?
>
> Exploração da tarefa Quantas meias?, 17-11-2015

Depois de algumas intervenções, Gabriel decide participar e explicitar como contabilizou as meias. Utilizou, tal como Quévin, um procedimento de cálculo de **contagem**, no entanto, **de um em um**, como explicita:

> **Gabriel:** Eu fiz de maneira diferente.
> **Eu:** Boa! Anda mostrar à professora e aos colegas. Olhem o Gabriel ainda fez de uma maneira diferente vamos ouvir…
> **Gabriel:** (aponta para as meias de frente para trás e de trás para a frente) 1,2,3,4,5…6,7,8,9,10.
>
> Exploração da tarefa Quantas meias?, 17-11-2015

Estratégias aditivas

Depois da resposta de Quévin vários alunos afirmaram concordar que se encontravam 10 meias naquele conjunto. Apesar disso, voltei a questionar os alunos se alguém teria contado as meias de forma diferente, ou seja, se tinham utilizado outra estratégia.

Martim A participa na discussão da tarefa e afirma ter contabilizado as meias utilizando uma **adição sucessiva**, pois explicita: “Eu contei diferente… 5 mais 5. Aqui estão 5 meias (apontando para as meias exteriores) e lá dentro estão mais 5 meias. Por isso é 5 mais 5 que dá 10” (Exploração da tarefa Quantas meias?, 17-11-2015). Martim A utiliza, então, uma estratégia aditiva para contabilizar o total de meias.

Estratégias multiplicativas

Durante a exploração da tarefa vários alunos participam e explicitam como contabilizaram as meias, no entanto, repetem as estratégias e procedimentos de cálculo anteriormente referidos.

Já no final da exploração da tarefa, António decide intervir e explicar aos colegas que contou as meias utilizando uma estratégia multiplicativa, explicitando:

> **António:** Eu fiz uma conta de multiplicar.
> **Eu:** Fizeste uma conta de multiplicar? Então vem aqui explicar aos colegas como se faz essa conta de multiplicar. Vamos prestar atenção…
> **António:** (pausa)
> **Eu:** Que conta é que tu fizeste?
> **António:** Duas vezes o cinco.
> **Eu:** O António fez a conta 2x5, ou seja, duas vezes o 5. Porquê?
> **António:** Porque são 5 pares de meia com duas meias cada par.
> Exploração da tarefa Quantas meias?, 17-11-2015

Apesar de me dizer que fez 2x5 em vez de 5x2, António parece reconhecer que a multiplicação facilita a contagem das meias visto que estas estão agrupadas duas a duas e são cinco pares. Contudo, ao não questionar o aluno acerca do procedimento de cálculo que utilizou para calcular o produto de 2x5, fiquei sem perceber qual o procedimento de cálculo utilizado.

Segunda parte da tarefa – Quantos desenhos?

Estratégias de contagem

Quando questiono os alunos acerca do número de desenhos que estão dentro do círculo vermelho, Martim A responde: “1, 2, 3, 4, 5, 6” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015). Assim, utiliza como procedimento de cálculo a **contagem por saltos de um em um**.

Na contagem dos desenhos que se encontravam dentro da linha vermelha, Anamar foi a primeira aluna a responder e contabilizou os desenhos de um em um. Na sua resposta justifica: “São 10. (conta os desenhos, apontando com o dedo) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9, 10” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015). Assim, esta aluna utiliza, também, como procedimento de cálculo a **contagem por saltos de um em um**.

Estratégias aditivas

Ainda na contagem dos desenhos do círculo vermelho, Gabriel afirma ter utilizado outra estratégia:

> **Gabriel:** Eu fiz de maneira diferente.

> **Eu:** Mostra lá como fizeste!
> **Gabriel:** (apontado) 2+2+2
>
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Este aluno utiliza uma estratégia aditiva para contabilizar o número total de desenhos. Apoiando-se na disposição dos desenhos realiza uma **adição sucessiva** do número de desenhos por coluna.

Durante a contagem dos desenhos rodeados a cor preta, Bruna começa por afirmar que contou os desenhos realizando a soma 10+10, utilizando como procedimentos de cálculo a **adição sucessiva**. No entanto, para contabilizar os dez desenhos utilizou, segunda a mesma, uma estratégia de contagem por saltos de um em um. Apesar de não ter utilizado uma estratégia de contagem para todos os desenhos, Bruna começar por contar uma fila de desenhos e adicionar esse mesmo valor. Ao utilizar este procedimento, a aluna revela perceber que se existem 10 desenhos na primeira linha existem, também, 10 desenhos na segunda linha.

Martim A revela ter utilizado, tal como Bruna, um procedimento de cálculo de **adição sucessiva**. No entanto, este aluno adiciona os desenhos dois a dois, ou seja, por coluna. Assim realizou a seguinte adição: 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2.

Durante a exploração da tarefa questionei os alunos se existiam diferentes formas de calcular o número de desenhos do grupo verde. Quévin afirmou: “Eu queria fazer diferente, de vezes… (olha para os registos das estratégias utilizadas para contar os desenhos do gruo verde)” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015). Após esta intervenção, vários alunos tentaram perceber como poderiam calcular o número de desenhos utilizando uma multiplicação. Depois de várias tentativas:

> **Eu:** Então vamos pensar… quantas vezes temos o número 2?
> **Carolina:** Cinco.
> **Quévin:** (em voz baixa) Cinco.
> **Eu:** Que multiplicação seria Quévin?
> **Quévin:** Duas vezes o cinco. Porque estão ali cinco e ali mais cinco. Tipo duas linhas com cinco desenhos.
> **Eu:** Então, é duas vezes o cinco. Não é muito mais fácil do que fazer 2+2+2+2+2 ou 5+5?
>
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Desta forma, partindo da distribuição em malha retangular e aproveitando a intervenção de um aluno, foi explorada a multiplicação como estratégia para calcular o número total de desenhos.

Como os alunos exploraram, por vontade própria, a utilização da multiplicação para contabilizar os desenhos, tentei motivá-los a realizar a mesma operação para calcular o número de desenhos que se encontravam dentro do maior círculo.

Enquanto anoto no quadro o procedimento de cálculo utilizado por um aluno incentivo os alunos a utilizar uma estratégia mais rápida:

> **Eu:** Então de dois em dois. Ajuda-me lá (a escrever) 2+2+2+2+2+2+2… Isto é aborrecido! Quantas vezes temos ali o número dois?
> **Diogo e Quévin:** 10!
> **Eu:** 10! Então que conta de multiplicar é que será que nós podemos fazer?
> **Diogo:** Dez vezes o dois.
> **Eu:** 10 vezes 2. Porquê?
> **Quévin:** Porque estão ali dez vezes o número 2.
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Na exploração desta tarefa os alunos utilizam a multiplicação como estratégia para calcular o valor total dos desenhos dispostos em malha retangular. Aparentemente percebem que 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 é igual e 10x2, pois existem dez vezes o número dois. Apesar de não saberem calcular o produto de 10x2, percebem a representação que lhe é dada.

Para iniciar a aprendizagem da propriedade comutativa da multiplicação lanço a seguinte questão aos alunos: “Se temos duas vezes o número dez, quantas vezes temos o número 2?” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015). Martim A, quase imediatamente, responde: “Dez!” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015). Ao que Diogo acrescenta: “São 10 vezes o 2” (Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015).

Para analisar um pouco mais esta propriedade e terminar a exploração da tarefa explico:

> **Eu:** Podemos observar a distribuição dos desenhos de duas maneiras: por linhas ou por colunas. Se olharmos para os desenhos temos duas linhas com dez desenhos, então para os calcularmos podemos fazer a multiplicação duas vezes o dez. E se for por colunas? Alguém sabe?
> **Diogo:** São dez colunas com dois desenhos.
> **Carolina:** Eu sei! Dez vezes o dois.
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Nas anteriores intervenções de Martim A, Diogo e Quévin, em que é abordada a multiplicação como estratégia de resolução de tarefas, os alunos reconhecem que a multiplicação corresponde à adição de parcelas iguais. Por esse motivo, a estratégia usada pelos alunos foi aditiva e o procedimento de cálculo foi a **adição sucessiva**.

Estratégias de percepção visual

No cálculo dos desenhos rodeados a vermelho, Rafael afirma que estão seis desenhos lá dentro. Quando pergunto como pensou para calcular o número de desenhos explícita que: "vejo 6 desenhos, são três desenhos em cima mais três desenhos em baixo" (Exploração da tarefa Quantas desenhos?, 17-11-2015). Neste caso, o aluno utiliza como estratégia a perceção visual de uma quantidade, visto que não contabilizou os desenhos nem realizou nenhuma adição.

Carolina, no cálculo dos desenhos rodeados a verde, afirma que a resposta de alguns colegas está correta, mas que ela utilizou outra estratégia para contabilizar os desenhos.

> **Carolina:** Contei os de cima e os de baixo
> **Eu:** Contaste 1,2,3,4,5,6,7,8, 9, 10 (apontando de um em um)?
> **Carolina:** Não, cinco e cinco.
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Neste diálogo percebe-se que a aluna utilizou como estratégia a perceção visual de uma quantidade. Observando a disposição dos desenhos verificou que existiam 5 desenhos na primeira linha e 5 desenhos na segunda linha.

Na tabela 6 podemos observar as estratégias e os procedimentos de cálculo usados pelos alunos na exploração da tarefa "Quantas meias? Quantos desenhos?".

Tabela 6:Resumo das estratégias utilizadas pelos alunos na tarefa “Quantas meias? Quantos desenhos?”

Estratégias	Procedimentos de cálculo	1ª parte	2ª parte
Contagem	Contagem de 1 em 1	2	3
	Contagem de 2 em 2	1	0
Aditivas	Adição sucessiva	3	9
Multiplicativas	*Não identificada*	1	0
Percepção visual de uma quantidade		0	2

Observando os valores indicados na tabela 6 percebe-se que nem todos os alunos participaram na exploração da tarefa, contribuindo com a explicitação da estratégia que utilizaram para realizar o cálculo das meias ou dos desenhos. É importante referir que devido ao contexto da tarefa grande parte dos alunos não identificou a estratégia que utilizaria por esta já ter sido explorada por outro aluno. Assim, a contabilização do número de alunos que utilizou determinada estratégia fica em aberto.

Dos alunos que participaram na discussão da primeira parte da tarefa três utilizam uma estratégia de contagem, três utilizam uma estratégia aditiva e apenas um aluno utiliza estratégia multiplicativa. Esta foi a primeira tarefa da sequência, por essa razão, seria de esperar que grande parte dos alunos utilizasse ou uma estratégia de contagem ou uma aditiva. Ainda assim, um aluno utiliza uma estratégia multiplicativa. Relativamente aos procedimentos de cálculo utilizados, nas estratégias de contagem o procedimento de cálculo mais usado foi a contagem por saltos de um em um. Nas estratégias aditivas, os alunos optaram pelo uso do mesmo procedimento: adicionar sucessivamente.

Na segunda parte da tarefa a estratégia mais escolhida pelos alunos foi a estratégia aditiva, visto que foi utilizada por nove alunos. Nesta parte da tarefa, a estratégia que nenhum aluno utilizou foi a estratégia multiplicativa. Apesar de existir um discurso que realça a multiplicação como estratégia de resolução de tarefas, os alunos apenas associam um produto a uma adição sucessiva. Dois alunos utilizam uma estratégia de percepção visual e apenas três utilizam uma estratégia de contagem. Os procedimentos de cálculo escolhidos pelos alunos não variam muito de acordo com a primeira parte da tarefa, apenas o procedimento de contar por saltos de dois em dois não é usado.

- **Parque do Moranguinho**

A tarefa “Porque do Moranguinho” foi explorada durante 90 minutos pelos alunos do 2.º e 3.º ano de escolaridade (20 alunos). Primeiramente, os alunos agruparam-se em pares de acordo com o seu ano de escolaridade, isto é, os alunos do 2.º ano só podiam formar par com alunos desse mesmo ano, tal como os alunos do 3.º ano. Depois, procedeu-se a explicação da tarefa. O objetivo desta tarefa era os alunos contabilizarem o número de pedras de cada espaço apresentado, sendo que existia um espaço vazio, um espaço com um baloiço, um espaço com um café e um espaço com uma estátua de um morango. Para terminar, realizou-se o momento de discussão da tarefa, em que três pares foram escolhidos para apresentarem as suas resoluções.

Questão 1

Estratégias aditivas

Para resolver a primeira questão da tarefa 18 alunos utilizaram uma estratégia aditiva. Assim, esta foi a estratégia mais utilizada nesta questão. Apesar de todos os alunos utilizarem o mesmo procedimento de cálculo, **adição sucessiva**, as representações das resoluções que apresentam são diversificadas. Há também algumas situações em que os alunos apresentam mais do que uma.

Bruna e Sarah foram um dos grupos escolhidos para o momento de discussão da tarefa. Na resolução da questão 1 apresentam a resolução da figura 14.

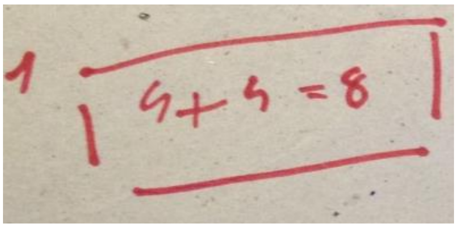


Figura 14: Resolução de Bruna e Sarah, questão 1, tarefa Parque do Moranguinho

Durante a discussão as alunas afirmam:

> **Sarah:** Nós contámos quatro mais quatro (apontando para as duas linhas da imagem da tarefa).
> **Bruna:** E deu oito.
> **Sarah:** Fizemos a conta e deu oito.
> Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015

Tal como Bruna e Sarah, o grupo de Lourenço e Martim B, utiliza uma estratégia aditiva. A malha retangular numerada (figura 15) parece constituir um modo de mostrar que cada linha tem 4 pedras.

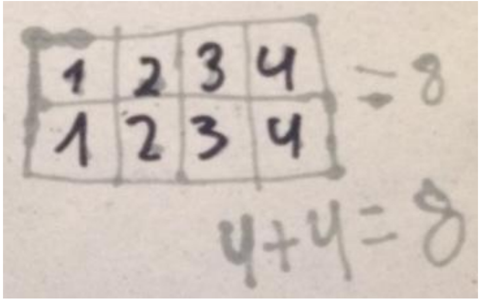


Figura 15: Resolução de Lourenço e Martim B, questão 1, tarefa Parque do Moranguinho

Apesar de não ter questionado os alunos sobre o esquema que desenharam na sua resolução da questão, este parece ter constituído o suporte para a contagem das pedras uma a uma até 4, tendo concluído em seguida que teriam 4+4 que é igual a 8.

Por fim, Alexandre e Beatriz apresentam duas estratégias diferentes para resolver a mesma questão. Primeiro, parece que começam por registar uma **adição sucessiva** e, em seguida, apresentam uma multiplicação (figura 16). Neste caso, tendo como referência a imagem da tarefa, quando os alunos escrevem 4+4, parece que analisaram a disposição da figura por linhas, pois existem duas linhas com quatros quadradinhos casa. Quando apresentam o produto 4x2 parece que tiveram em conta a disposição da figura por linhas e colunas, sendo que existem quatro colunas com dois quadradinhos cada.

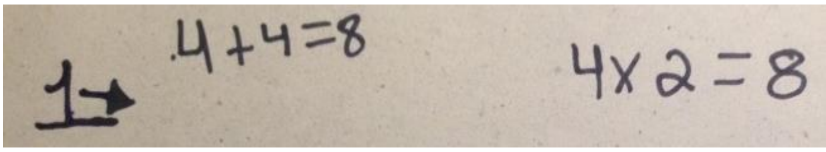
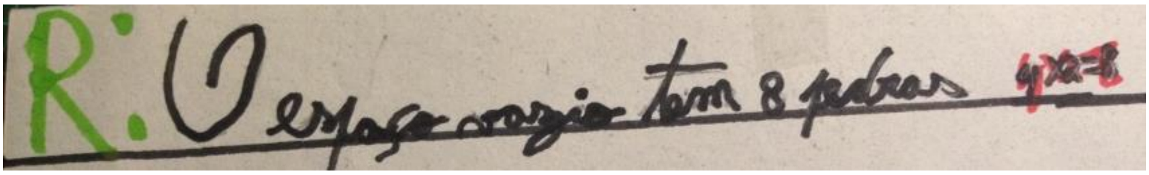


Figura 16: Resolução de Alexandre e Beatriz, questão 1, tarefa Parque do Moranguinho

Estratégia multiplicativas

Nesta questão apenas dois alunos, João e Teresa, utilizaram uma estratégia multiplicativa. Apesar de os alunos não identificarem o procedimento de cálculo e de eu não os ter questionado quanto a esse facto, parece que os alunos **recorreram a produtos conhecidos**, uma vez que são alunos do 3.º ano de escolaridade e já construíram todas as tabuadas. Na sua resolução, como está na figura 17, apresentam o produto de 4x2, uma vez que a figura da tarefa corresponde a uma disposição retangular com duas linhas e quatro colunas.



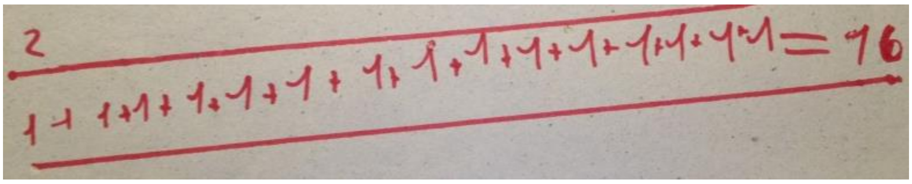
R: O espaço vazio tem 8 pedras 4x2=8

Figura 17: Resolução de João e Teresa, questão 1, tarefa Parque do Moranguinho

Questão 2

Estratégias de contagem

Bruna e Sarah apresentam a seguinte resposta: “Fizemos de 1 em 1 e deu 16”. Apesar de apresentarem na sua resolução os cálculos presentes na figura 18, durante o momento de discussão da tarefa Bruna explica: “No baloiço contámos de um em um” (Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015), o que parece indiciar uma **contagem por saltos de um em um** utilizando a imagem.



2

1-1 1+1+ 1+1+1 + 1+ 1+1+1+1+1+1+1+1+1=16

Figura 18: Resolução de Bruna e Sarah, questão 2, tarefa Parque do Moranguinho

Estratégias aditivas

Na segunda questão da tarefa, 12 alunos utilizaram uma estratégia aditiva e o procedimento de cálculo de **adicionar sucessivamente**. Apesar disso, utilizam valores diferentes, de acordo com a leitura que fazem da tarefa e da representação da figura.

Lourenço e Martim B voltam a utilizar a mesma representação que na questão anterior. Para além de apresentaram a adição que realizaram, desenham o esquema da figura e atribuem a cada quadradinho um número (figura 19). Em seguida contabilizam grupos de 3 quadradinhos e de um quadradinho, **adicionando-os sucessivamente**.

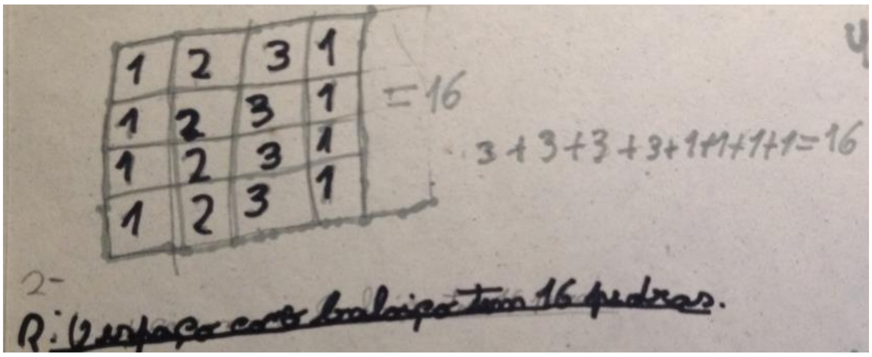


Figura 19: Resolução de Lourenço e Martim B, questão 2, tarefa Parque do Moranguinho

O par Rafael e Martim A realizam uma **adição sucessiva** de acordo com o número de pedras que cada linha ou cada coluna tem. Como se observa na figura 20, os alunos apresentam a adição 4+4+4+4. Uma vez que a figura da tarefa é constituída por quatro linhas e quatro colunas, não é possível afirmar se os alunos analisaram a figura por colunas ou por linhas.

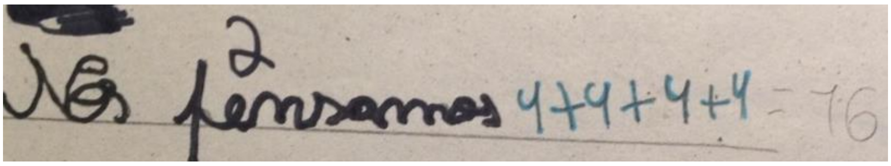


Figura 20: Resolução de Rafael e Martim A, questão 2, tarefa Parque do Moranguinho

Por fim, Carolina e Diogo realizam um pensamento diferente de todos os outros alunos. Tal como todos os grupos anteriores utilizam como procedimento de cálculo a **adição sucessiva**. Mas, estes alunos relacionam a questão 1 e a questão 2 da tarefa. Na questão 1 o grupo concluiu que existiam 8 pedras no espaço vazio. Desta vez, adicionaram o valor obtido na questão anterior, pois perceberam que o espaço ocupado pelo baloiço era o dobro do espaço vazio, apesar de não realizarem uma multiplicação (figura 21).

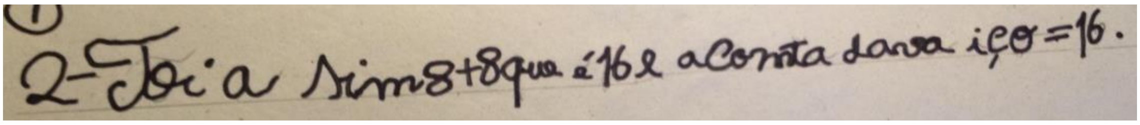
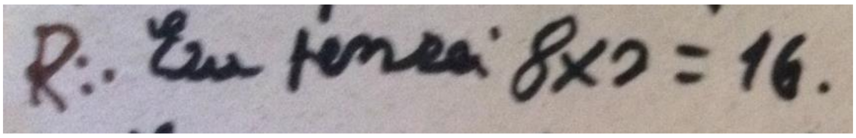


Figura 21: Resolução de Carolina e Diogo, questão 2, tarefa Parque do Moranguinho

Estratégia multiplicativas

Nesta questão António e Tiago A parecem **recorrer a produtos conhecidos** para resolver a questão. Tal como Carolina e Diogo (que utilizaram uma estratégia aditiva), António e Tiago A, ao visualizaram as imagens da tarefa, percebem que o espaço ocupado pelo baloiço é o dobro do espaço vazio. No entanto, quando os alunos representam os cálculos que efetuaram indicam o produto 8x2, como está na figura 22. Através desta representação do produto pode concluir-se dois factos. O primeiro é que os alunos podem não reconhecer que a representação do dobro de 8 é 2x8 e não 8x2, como indicam. O segundo é os alunos poderem reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação e saberem então que o produto de 8x2=2x8 e, por isso, não se preocupam com a representação do produto mas, sim, com o resultado desse produto.



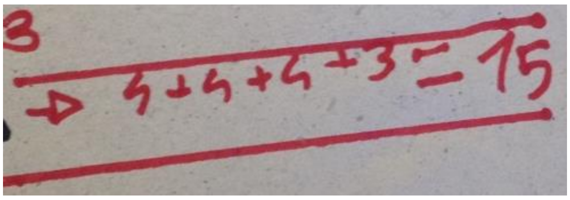
R:. Eu pensei 8x2 = 16.

Figura 22: Resolução de António e Tiago A, questão 2, tarefa Parque do Moranguinho

Questão 3

Estratégias aditivas

Bruna e Sarah foram escolhidas para o momento de discussão das tarefas por duas razões: utilizaram uma estratégia aditiva e apresentam uma resolução errada, pois parecem não ter contabilizado alguns dos quadrados tapados pela figura. Na resposta a esta questão respondem: “A resposta é 15 porque contámos 4+4+4+3” e apresentam o cálculo 4+4+4+3=15 (figura 23).



3

→ 4+4+4+3=15

Figura 23: Resolução de Sarah e Bruna, questão 3, tarefa Parque do Moranguinho

No momento da discussão desta questão explicam como calcularam o número de quadrados:

> **Bruna:** Nas tortas contámos de um em um e deu…
> **Sarah:** Não! Contámos quatro, mais quatro, mais quatro e depois mais três e deu quinze (apontando apenas para os quadrados laterais da imagem).
> **Eu:** Todos ouviram? (…) Elas calcularam quatro, mais quatro, mais quatro, mais três.
> **Sarah:** Não, não. Foi sempre quatro. Quatro, mais quatros, mais quatro mais quatro…
> **Eu:** Então explica lá..

> **Sarah:** Quatro, mais quatro, mais três (apontado para a imagem).
>
> **Eu:** O que é que falta aqui? Falta alguma coisa?
>
> **Alunos:** Sim!
>
> **Eu:** O que falta Bruna?
>
> **Bernardo:** Os quadrados que estão tapados.
>
> **Bruna:** Não percebi.
>
> **Eu:** A professora vai explicar… Por baixo da imagem estão quadradinhos. Vocês só calcularam os de fora… faltam os de dentro.
>
> **Bruna:** Eu não sabia que tinha.
>
> **Eu:** Então como é que agora podiam contar todos?
>
> **Bruna:** Já sei, já sei… É fácil! Como estes estão aqui (aponta para uma das laterais) também estão lá dentro.
>
> Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015

Após este diálogo, Bruna e Sarah perceberam que tinham errado os cálculos e repensaram o procedimento de cálculo para contabilizar o número de quadradinhos. Utilizam, então, um procedimento de cálculo de **adição sucessiva**.

Joana e Bernardo também participaram na discussão das tarefas. Na sua resolução apresentam os cálculos da figura 24.

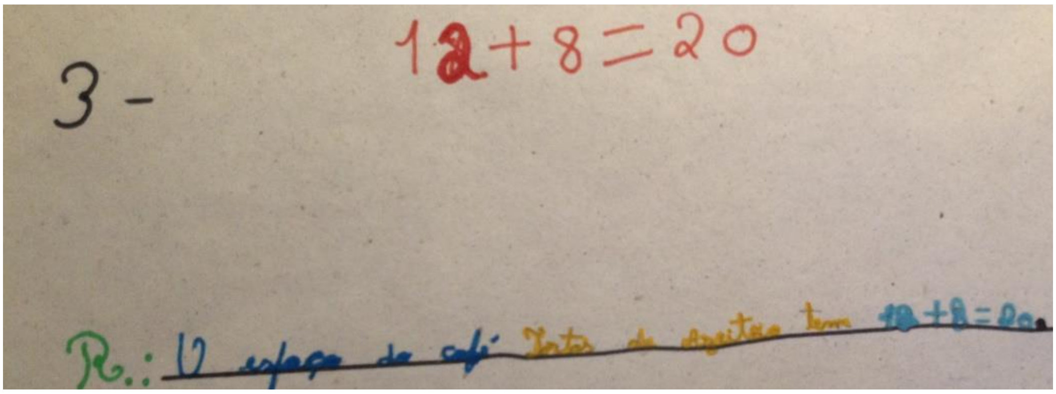
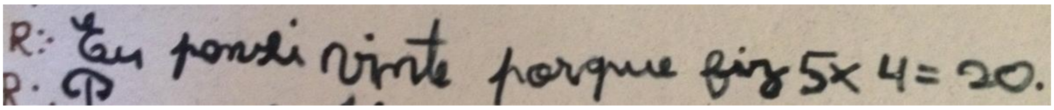


Figura 24: Resolução de Joana e Bernardo, questão 3, tarefa Parque do Moranguinho

No momento de discussão das tarefas Joana explicita o procedimento de cálculo que utilizaram: "Neste fizemos 12+8. Porque aqui estão 8 (aponta para duas linhas de quadradinhos) e depois aqui estão 8 e mais 4 (apontada para as restantes três linhas de quadrados). Como 8+4 é 12, nós fizemos a conta 12+8" (Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015). De acordo com o registo escrito dos alunos e a forma como explicitaram o seu raciocínio, conclui-se que os alunos, para resolver esta questão, utilizam os resultados obtidos na primeira questão. Ou seja, sabendo que a primeira figura tem 8 pedras, nesta questão, visualizaram um grupo de oito pedras mais um grupo de 4 pedras (=12) somando, depois, mais um grupo de 8 pedras.

Estratégia multiplicativas

Para resolver a terceira questão da tarefa apenas quatro alunos utilizaram uma estratégia multiplicativa. António e Tiago A apresentam na sua resolução o produto 5x4 (figura 25). Os alunos parecem ter-se apoiado na imagem associada a esta questão, reconhecendo que existem cinco colunas com quatro quadradinhos cada. Como procedimento de cálculo pondero que tenham **recorrido a produtos conhecidos**, uma vez que estes alunos frequentam o 3.º ano de escolaridade e já teriam trabalhado a tabuada do 4.



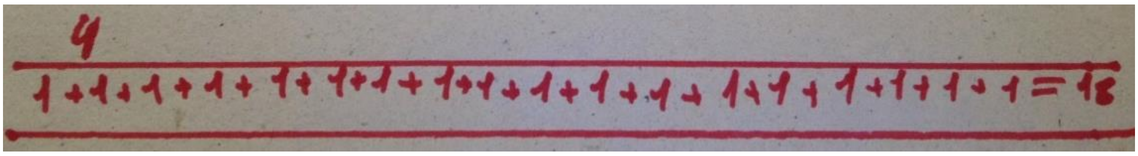
R: Eu pensei vinte porque fiz 5x 4 = 20.

Figura 25: Resolução de António e Tiago A, questão 3, tarefa Parque do Moranguinho

Questão 4

Estratégias de contagem

Tal como na questão anterior, Bruna e Sarah não apresentam uma resolução correta, contabilizando apenas os quadradinhos exteriores da figura (figura 26). Apesar de apresentarem uma representação aditiva a estratégia usada parece ter sido a **contagem por saltos**, contando os quadrados de um em um.



4

1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=18

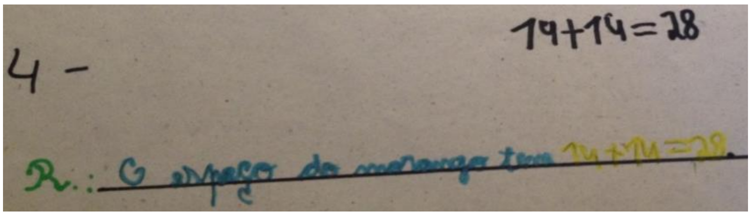
Figura 26: Resolução de Bruna e Sarah, questão 4, tarefa Parque do Moranguinho

Ainda assim, no momento de discussão da tarefa parecem evoluir para o uso de uma estratégia aditiva, adicionando sucessivamente a quantidade 7:

> **Bruna:** E neste (na quarta questão) é a mesma coisa. Estão quadradinhos escondidos.
> **Sarah:** Então podíamos fazer… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (conta os quadrados de uma coluna), 7 mais 7 mais 7 mais 7.
> **Bruna:** Sim! Porque estão quatro colunas com sete quadradinhos, não é?
> Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015

Estratégias aditivas

Joana e Bernardo utilizam como procedimento de cálculo a **adição sucessiva** (figura 27).



4 -

14+14=28

R.: O espaço do morango tem 14+14=28.

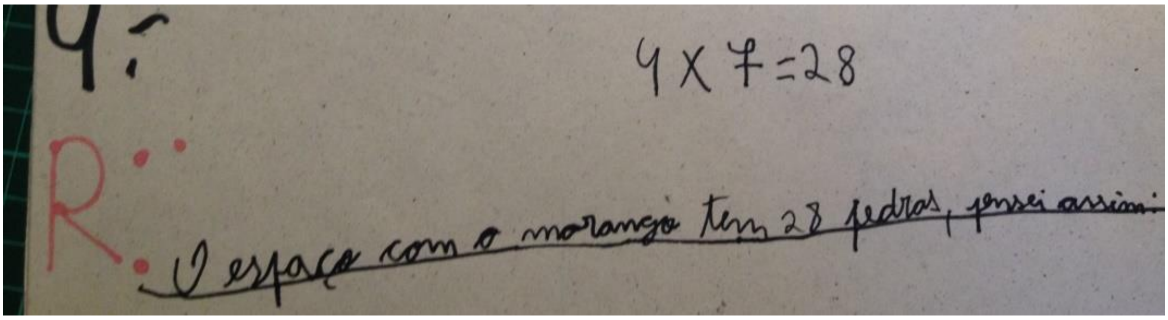
Figura 27: Resolução de Joana e Bernardo, questão 4, tarefa Parque do Moranguinho

No momento de discussão da tarefa Bernardo explicita o procedimento de cálculo que utilizaram: "Aqui fizemos 14 mais 14 porque uma coluna tem 7 e as outras também. Por isso, 7 mais 7 é 14. Então, 14 mais 14 é 28" (Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015). Na folha de resolução da tarefa os alunos registam apenas 14+14 mas na discussão da tarefa explicitam como chegaram a esse valor. Primeiro, os alunos começam por contar quantos quadradinhos tem uma coluna e, depois, verificam quantas colunas existem. Mas, em vez de calcularem 7+7+7+7 que seria o número de quadrados que cada coluna tem, os alunos simplificam o cálculo e começam por realizar a soma 7+7 que diz respeito a duas colunas e, só depois, realizam a soma 14+14, ou seja, o valor de quadradinhos de duas colunas mais duas colunas. Assim, do ponto de vista do procedimento de cálculo usado, esta resolução pode situar-se no procedimento **adicionar dois a dois**.

Estratégia multiplicativas

O par Tiago B e Catarina apresenta como resolução o produto 4x7 (figura 28), parecendo apoiar-se na imagem da questão, que apresenta uma disposição de quatro colunas por sete quadradinhos.

Apesar de os alunos não explicitarem o procedimento de cálculo utilizado, pondero o facto de **recorrerem a produtos conhecidos**, visto que são alunos do 3.º ano de escolaridade e já trabalharam todas as tabuadas.



4:

4 x 7 = 28

R: O espaço com o morango tem 28 pedras, pensei assim:

Figura 28: Resolução de Tiago B e Catarina, questão 4, tarefa Parque do Moranguinho

Na seguinte tabela (tabela 7) constam o número de estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução das quatro questões da tarefa “Parque do Moranguinho”.

Tabela 7: Resumo das estratégias utilizadas pelos alunos na tarefa “Parque do Moranguinho”

Estratégias	**Procedimentos de cálculo**	**Questão 1**	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**
Contagem	Contagem de um em um	0	2	0	2
Aditivas	Adição sucessiva	18	12	10	6
	Adicionar dois a dois	0	0	0	2
Multiplicativas	Recorrer a produtos conhecidos	2	4	4	4
Perceção visual de uma quantidade		0	0	0	0
Não explicita a estratégias utilizada		2	2	4	4
Não responde/Responde errado		0	2	4	4

Analisando a tabela 7, percebe-se que na primeira questão 18 alunos utilizaram uma estratégia aditiva e um procedimento de cálculo de adicionar sucessivamente. Apenas dois alunos resolveram a questão recorrendo a produtos conhecidos, ou seja, utilizando uma estratégia multiplicativa. Também na segunda questão, a estratégia aditiva foi a mais utilizada pelos alunos. Nesta questão, o número de alunos que recorreu a uma estratégia multiplicativa duplicou. A terceira questão foi resolvida por dez alunos com uma estratégia aditiva. Tal como na segunda questão, quatro alunos utilizaram estratégias multiplicativa para resolver a pergunta. Na última questão da tarefa, oito alunos utilizaram estratégias aditivas. No entanto, os procedimentos de cálculo que usam são diferentes. Enquanto seis alunos usam adições sucessivas para resolver a questão, dois alunos usam a adição dois a dois. O número de aluno que recorre a uma estratégia multiplicativa mantém-se igual aos valores da questão 2 e 3.

Observando a tabela 7, pode concluir-se que o número de alunos que recorreu a uma estratégia multiplicativa aumentou. Na primeira questão apenas dois alunos recorrem a uma estratégia multiplicativa. No entanto, na questão 2, 3 e 4 o número de alunos que usa uma estratégia multiplicativa aumenta para o dobro. Ao mesmo tempo que o número de estratégias multiplicativas aumenta, o número de estratégias aditivas diminui. Na primeira questão 18 alunos usam uma estratégia aditiva, mas na última questão apenas seis alunos recorrem a esta estratégia.

É importante salientar, como se pode observar na tabela 7, que na primeira e segunda questão dois alunos não explicitam a estratégia que utilizaram, referindo apenas o resultado da questão. Na terceira e quarta questão o mesmo acontece, no entanto, com quatro alunos. Nesta tarefa não foram utilizadas estratégias de percepção visual de uma quantidade.

- **Impermeáveis**

A tarefa Impermeáveis foi explorada com os alunos do 2.º e 3.º ano de escolaridade. Os alunos agruparam-se em pares e realizaram a tarefa durante, aproximadamente, 30 minutos. Esta tarefa foi explorada depois dos alunos realizaram no seu manual escolar de matemática o exercício Loja do Senhor Manuel (problema ao qual está associado o sentido combinatório da multiplicação).

Estratégias de contagem

Para resolver esta tarefa Fábio e Arthur desenham, em forma de tabela, todas as opções de impermeáveis possíveis, como se pode ver na figura 29. Existiam três tamanhos diferentes de impermeáveis (que os alunos desenham na primeira coluna da tabela) e seis cores diferentes (que os alunos desenham na primeira linha da tabela). Durante o momento de discussão da tarefa questionei os alunos sobre como contabilizaram o número total de impermeáveis:

> **Arthur:** Desenhamos todos primeiro e depois contámos.
> **Eu:** Como é que os contaram?

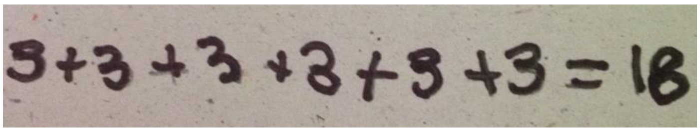
> **Fábio:** Contámos assim: um, dois, três…dezoito (aponta com o dedo os impermeáveis de um em um)
>
> Exploração da tarefa Impermeáveis, 4-1-2016

Desta forma, os alunos utilizaram um procedimento de cálculo de **contagem por saltos** com o apoio do desenho de todas as possibilidades existentes, contando de um em um todos os elementos.

Figura 29: Resolução de Fábio e Arthur, tarefa Impermeáveis

Estratégias aditivas

Para resolver esta tarefa, seis alunos utilizaram uma estratégia aditiva. Martim A e Sarah usam como procedimento de cálculo a **adição sucessiva** (figura 30). Uma vez que existiam três tamanhos de impermeáveis e seis cores, os alunos adicionaram seis vezes o número três.

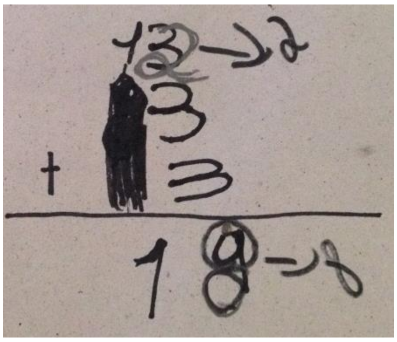


3+3+3+3+3+3=18

Figura 30: Resolução de Martim A e Sarah, tarefa Impermeáveis

O grupo de António e Tiago A, para resolver esta questão, usam um procedimento de cálculo não referido até então – o **uso do algoritmo da adição**. Anteriormente à realização desta tarefa, os alunos realizaram um exercício do manual escolar de matemática em que teriam de calcular o número total de impermeáveis da Loja do Senhor Manuel, sendo que existiam quatro cores e três tamanhos. António e Tiago A, ao invés de calcularem novamente o número de todos os impermeáveis, adicionaram, utilizando o algoritmo da adição, apenas o número de impermeáveis de mais duas cores.

Como se pode ver na figura 31, o par adiciona 12 (que diz respeito ao número total de impermeáveis de três tamanhos e quatro cores) mais 3, mais 3 (que diz respeito a mais três impermeáveis de cada nova cor).



12→2
3
+ 3
18→8

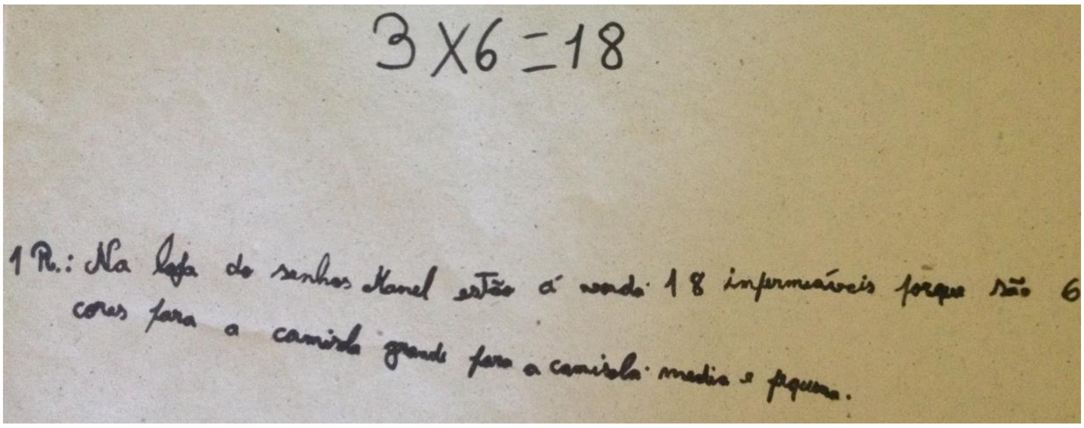
Figura 31: Resolução de António e Tiago A, tarefa Impermeáveis

Observando a resolução apresentada pelos alunos, percebe-se que estes têm conhecimentos explícitos da matemática que lhes permite usar corretamente o algoritmo da adição (Santana, 2012). Isso nota-se quando, por exemplo, os alunos seguem as regras do algoritmo: correspondência dos números nas casas das unidades e dezenas.

Estratégia multiplicativas

A estratégia mais utilizada na resolução desta tarefa foi a estratégia multiplicativa, sendo que oito alunos a utilizaram.

Anamar e Rita foram um dos pares que apresentaram a sua resolução no momento de discussão das tarefas. Como se vê na figura 32, as alunas recorrem a uma estratégia multiplicativa.



3X6=18

1 R.: Na lofa do senhor Manel estão á venda 18 infermeáveis porque são 6
cores para a camisola grande para a camisola media e pequena.

Figura 32: Resolução de Anamar e Rita, tarefa Impermeáveis

Durante a discussão da tarefa as alunas explicam que **recorreram a produtos conhecidos** para resolver o produto 3x6.:

Anamar: Nós pensamos 3x6 que dá 18.
Eu: O que representa o número seis e o número três, Anamar?
Anamar: (não responde)
Rita: O três são o número dos tamanhos e o seis o número de cores.
Eu: Como sabem que 3 vezes o 6 é 18?
Rita: Porque eu sei a tabuada e expliquei à Anamar.
Exploração da tarefa Impermeáveis, 4-1-2016

Na tabela 8 podemos verificar, resumidamente, as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos para resolver a tarefa “Impermeáveis”.

Tabela 8: Resumo das estratégias utilizadas pelos alunos na tarefa “Impermeáveis”

Estratégias	**Procedimentos de cálculo**	**Questão 1**
Contagem	Contagem de 1 em 1	4
Aditivas	Adição sucessiva	4
	Algoritmo da adição	2
Multiplicativas	Recorrer a produtos conhecidos	8
Perceção visual de uma quantidade		0
Não explicita a estratégias utilizada		0
Não responde/Responde errado		2

Nesta tarefa, as estratégias multiplicativas foram as mais usadas, pois foram escolhidas por oito alunos. Todos os alunos usaram como procedimentos de cálculo: recorrer a produtos conhecidos. Pelo contrário, a estratégia de contagem foi a menos escolhida pelos alunos. A estratégia aditiva foi usada por seis alunos. Nesta estratégia foram utilizados dois procedimentos de cálculo destintos: a adição sucessiva e o algoritmo da adição.

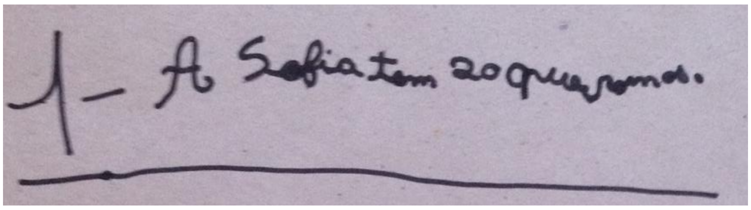
- **Gang dos Frescos**

A tarefa Gang dos Frescos foi explorada em dois momentos distintos. Inicialmente, foi explorada a primeira parte da tarefa e só depois da discussão desta foi explorada a segunda parte da tarefa. Os 22 alunos, do 2.º e 3.º ano de escolaridade, que resolveram esta tarefa encontravam-se agrupados em pares. A exploração foi realizada em duas horas.

1ª parte da tarefa - Questão 1

Estratégias de contagem

Carolina e Bruna foram selecionadas para apresentarem a resolução do problema à restante turma. Na folha de resoluções apenas escreveram o que está na figura 33.



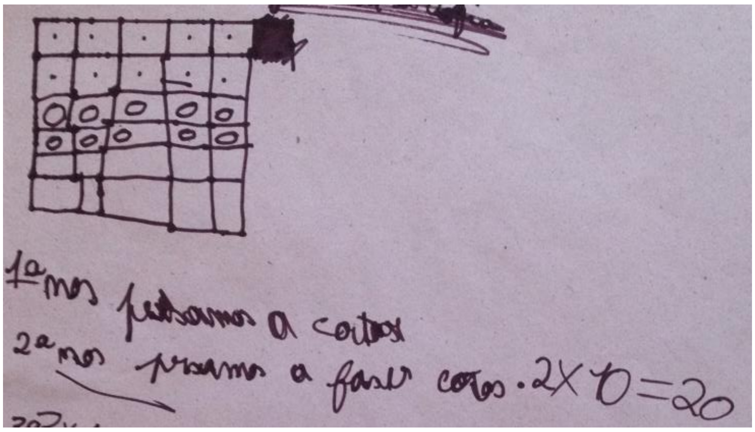
1- A Sofia tem 20 quacromos.

Figura 33: Resolução de Carolina e Bruna, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

Estas alunas, tal como outros pares, apenas escreveram a resposta à questão, não apresentando qualquer cálculo nem justificação de como a resolveram. No entanto, no momento de discussão coletiva explicitaram o procedimento de cálculo que utilizaram, evidenciando o uso da **contagem por saltos de um em um**:

> **Carolina:** Nós contámos.
> **Eu:** Então explica lá como é que contaram…
> **Bruna:** Nós contámos de um em um.
> **Carolina:** (aponta para os cromos, saltitando de um em um)
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Também Miguel e Quévin parecem ter utilizado um procedimento de cálculo de **contagem por saltos**. Na folha de resoluções, como se pode verificar na figura 34, desenharam o esquema dos cromos, e escreveram “pensámos a contar”, o que leva a crer que contaram os cromos. No entanto, estes alunos apresentam ainda outra estratégia para a mesma questão. Escreveram: “nós pensámos a fazer contas” e o seu registo parece evidenciar o recurso a uma estratégia multiplicativa. No entanto, como os alunos já tinham contado os cromos este produto pode aparecer pelo facto de os alunos reconhecerem que 2x10=20 e não por terem percebido que poderiam resolver a questão calculando o produto de dois grupos de 10 cromos.

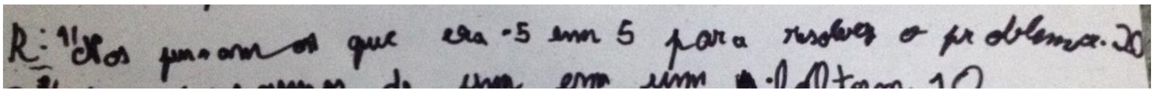


1ª nos pintamos a cortes

2ª nos passamos a fazer contas. 2X10=20

Figura 34: Resolução de Miguel e Quévin, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

Por fim, o par de alunos Martim C e Diogo também utiliza uma estratégia de contagem. Mas, desta vez, a **contagem foi realizada por saltos de 5 em 5**, como os próprios alunos explicitam na sua resposta à questão (figura 35). Em vez de contarem 1, 2, 3… até aos 20 cromos realizaram uma contagem de 5 em 5, ou seja, 5, 10, 15, 20, contando por linhas.

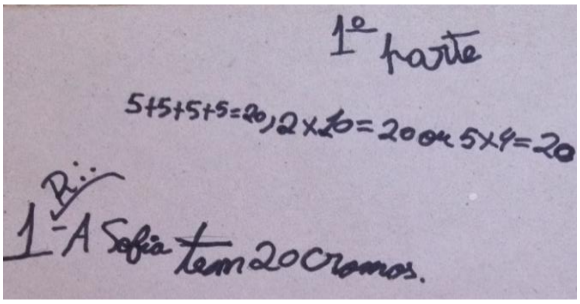


R: 1ª Nós pensamos que era 5 em 5 para resolver o problema. 20

Figura 35: Resolução do Martim C e Diogo, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

Estratégias aditivas

Teresa e Beatriz resolveram a primeira questão do problema recorrendo a uma estratégia aditiva, parecendo utilizar o procedimento de cálculo **adicionar sucessivamente** como se verifica na figura 36. Como a imagem do problema estava disposta em 4 linhas de 5 cromos, para calcularem o número total de cromos colados na caderneta somaram sucessivamente o número 5, quatro vezes.



1º parte

5+5+5+5=20, 2×10=20 ou 5×4=20

R:

1-A Sofia tem 20cromos.

Figura 36: Resolução de Teresa e Beatriz, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

No entanto, apesar de começarem por apresentar um procedimento aditivo apresentam também os produtos 2x10 e 5x4. O produto 2x10 aparece porque as alunas perceberam que existiam 10 cromos de figos e 10 cromos de abóbora:

> **Eu:** Vocês disseram que pensaram duas vezes o 10? Como fizeram?
> **Beatriz:** Hum, duas vezes o dez… porque… (pausa)
> **Eu:** Vocês escreveram 2 vezes 10 porque sabem que dá 20 ou como chegaram a esse resultado?
> **Alunas:** (pausa)
> **Eu:** Perceberam a minha pergunta?
> **Teresa:** É porque é 10 mais 10, aqui são 10 (cromos de figos) e aqui mais 10 (cromos de abóbora)
>
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Apesar de não me ter ocorrido questionar as alunas sobre o registo do produto 5x4, considero que este poderá estar relacionado com a imagem da tarefa, pois os cromos estão dispostos numa malha retangular com 5 colunas e 4 linhas.

O grupo Anamar e Sarah, tal como outro par, também utilizou o procedimento de cálculo **adicionar sucessivamente** (figura 37). Tal como o grupo de Teresa e Beatriz, estas alunas realizaram o cálculo 10+10, considerando existiam 10 cromos de figo e 10 cromos de abóbora. Então, o cálculo não diz respeito ao número de cromos por linha e coluna, mas sim ao número de cromos que existe de um legume e de outro.

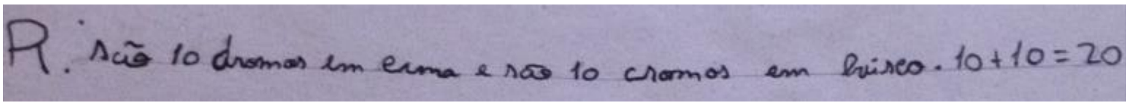
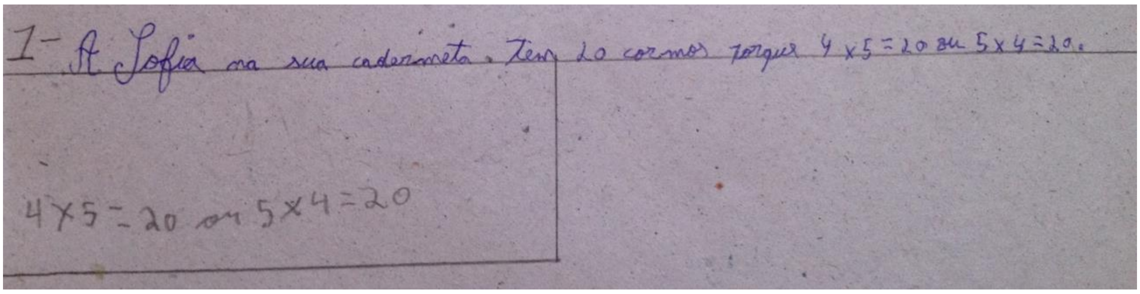

R. São 10 dromos em cima e são 10 cromos em baixo. 10+10=20

Figura 37: Resolução de Anamar e Sarah, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

Este raciocínio é explicitado por Sarah quando afirma: “Nós vimos que aqui estavam dez cromos de figo (apontado para a grelha) e dez de abóbora… por isso era 10 mais 10” (Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016).

Estratégias multiplicativas

João e Lourenço foram um dos pares escolhidos para a discussão do problema uma vez que utilizaram uma estratégia multiplicativa como se vê na figura 38.



1- A Sofia na sua caderneta. Tem 20 cormos porque 4x5=20 ou 5x4=20.

4x5=20 ou 5x4=20

Figura 38: Resolução de João e Lourenço, questão 1, tarefa Gang dos Frescos

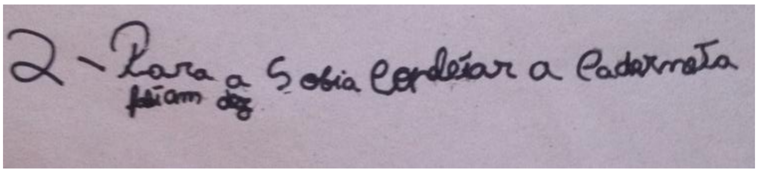
Na folha de respostas apresentaram apenas os produtos 4x5=20 ou 5x4=20. No entanto, no momento de discussão coletiva apresentaram a justificação da realização destes cálculos, explicitando o seguinte: “Nós na primeira pergunta fizemos 4 (apontando para o número de linhas) vezes 5 (apontando para o número de colunas)” (Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016). Aparentemente, o par **usa produtos conhecidos** para resolver a questão e justifica que realiza o produto de 4x5 porque os cromos estavam dispostos em 4 linhas e 5 colunas. Apresentam também a expressão 5x4=20, parecendo reconhecer que o número de figuras na disposição retangular pode ser determinada pelo produto do número de linhas por colunas ou vice-versa. A escolha desta expressão pode também resultar do reconhecimento da propriedade comutativa da multiplicação.

Tal como João e Lourenço, outros pares resolveram a questão recorrendo a estratégias multiplicativas. Apesar de nestes casos não poder afirmar qual o procedimento utilizado, considero que os alunos poderão ter **recorrido a produtos conhecidos**, pois tinham construído e trabalhado a Tabuada do 4 na aula anterior.

1ª parte da tarefa - Questão 2

Estratégias de contagem

Tal como na questão 1, as alunas Carolina e Bruna não apresentaram ou justificaram o cálculo que efetuaram para resolver a questão 2 do problema, como se pode ver na figura 39.



2- Para a Sobia Cordeiar a Caderneta
faltam dez

Figura 39: Resolução de Carolina e Bruna, questão 2, tarefa Gang dos Frescos

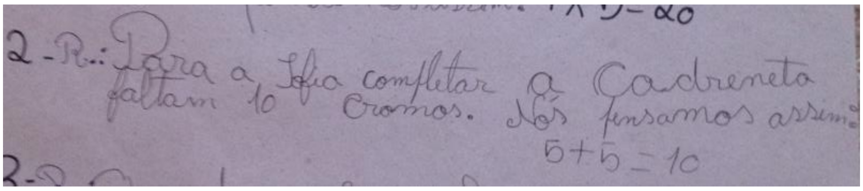
No entanto, como este foi um dos pares escolhidos para apresentar a sua resolução no momento de discussão coletiva, durante o mesmo as alunas evidenciaram usar o procedimento de cálculo **contar por saltos**:

> **Bruna:** Para a Sofia terminar a caderneta faltam dez (lê a resposta)
> **Eu:** Como é que pensaram?
> **Carolina:** Contámos.
> **Eu:** Mostrem lá como é que contaram…
> **Bruna:** Um, dois, três… (apontando para os cromos de um em um) dez. Faltam 10.
>
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Para resolver esta questão, seis alunos recorreram à mesma estratégia e ao mesmo procedimento de cálculo que este par. No entanto, existiram pares que explicitaram o procedimento de cálculo utilizado.

Estratégias aditivas

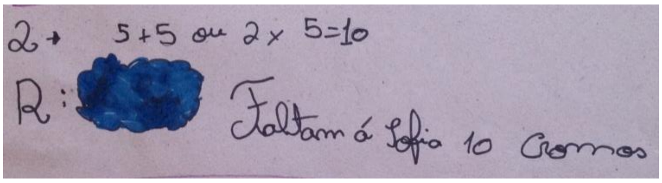
Para responder à segunda questão dez alunos utilizaram o procedimento de **adicionar sucessivamente**. Uma vez que os cromos estavam organizados numa malha retangular os alunos contabilizaram o número de cromos de cada linha e somaram-nos, obtendo o cálculo 5+5, como realizou o grupo de Joana e Catarina (figura 40).



2-R.: Para a Sofia completar a Cadreneta faltam 10 Cromos. Nós pensamos assim:
5+5=10

Figura 40: Resolução de Joana e Catarina, questão 2, tarefa Gang dos Frescos

O grupo Teresa e Beatriz recorreu ao mesmo procedimento. No entanto, como se pode ver na figura 41, para além de utilizarem uma estratégia aditiva registam também um produto. Apesar disso, tudo indica que a multiplicação 2x5=10 ocorre depois da realização da soma 5+5. Isto leva a crer que as alunas perceberam que se os cromos estão dispostos em 2 linhas e 5 colunas, pelo que podem calcular o número de cromos multiplicando 2 por 5.



2→ 5+5 ou 2x 5=10

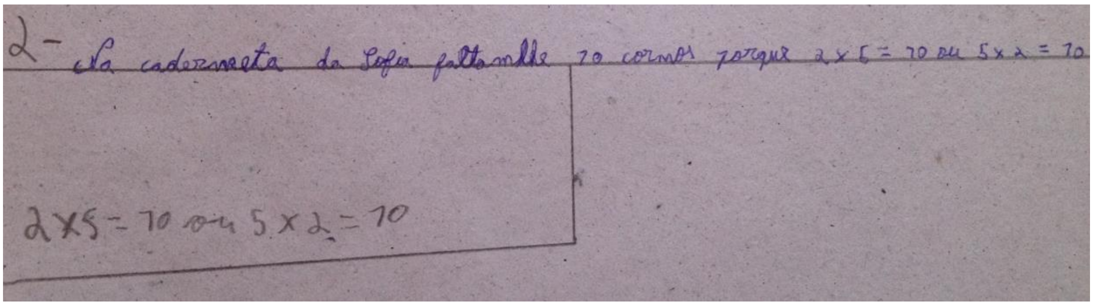
R: [redacted] Faltam á Sofia 10 Cromos

Figura 41: Resolução de Teresa e Beatriz, questão 2, tarefa Gang dos Frescos

Estratégias multiplicativas

Os oito alunos que utilizaram uma estratégia multiplicativa nesta questão parecem ter **recorrido a produtos conhecidos**. Alguns grupos resolvem a questão apresentando o produto 2x5 ou 5x2. Os alunos parecem apresentar estas expressões de acordo com a leitura que fazem da imagem do problema. Nesta questão os alunos deveriam calcular o número de cromos que faltavam colar na caderneta, isto é, o número de quadrados que não tinham cromos colados. Como estes quadrados estavam organizados em malha retangular de duas linhas e cinco colunas, os alunos realizaram os produtos 2x5 e 5x2.

No entanto, existiu um grupo que utilizou o mesmo procedimento e indicou “2x5= 10 ou 5x2=10” como está na figura 42. Este grupo, constituído pelo João e Lourenço, parece, assim, reconhecer a propriedade comutativa da multiplicação, pois identifica que calcular o produto do número de colunas pelo número de linhas ou vice-versa dá o mesmo resultado.



2- Na caderneta da Sofia faltamlhe 10 cormos porque 2x5 = 10 ou 5x2 = 10

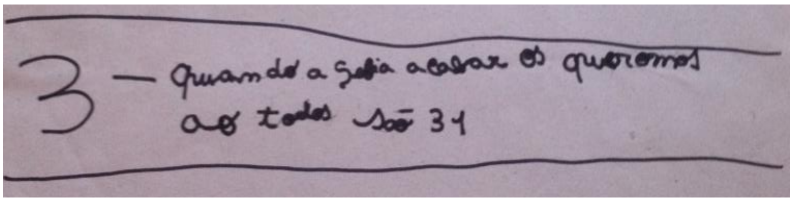
2x5=10 ou 5x2=10

Figura 42: Resolução de João e Lourenço, questão 2, tarefa Gang dos Frescos

1ª parte da tarefa - Questão 3

Estratégias de contagem

Nesta questão apenas as alunas Carolina e Bruna utilizaram uma estratégia de contagem. Na sua folha registaram apenas a resposta, como se pode ver na figura 43.



3 — quando a Sofia acabar os quoromos
ao todos são 31

Figura 43: Resolução de Carolina e Bruna, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

Estas alunas utilizaram como procedimento de cálculo a **contagem de um em um.** Segundo a resposta das mesmas, o valor total de cromos quando a caderneta estiver cheia é 31. Contudo, no momento da discussão da tarefa surge o seguinte diálogo:

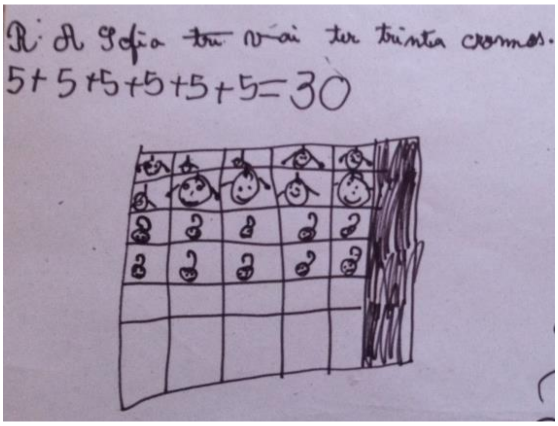
> **Carolina:** Quando a Sofia acabar os cromos ao todo são 31 (lê a resposta).
> **Eu:** São 31, como é que chegaram a esse resultado?
> **Bruna:** Todos!
> **Eu:** Então contem lá…
> **Bruna:** 1, 2, 3, … 19 (apontado para o cromo 20)… (pausa)
> **Lourenço:** Han? Conta lá de início…
> **Bruna:** 1, 2,… 30.
> **Martim:** Então é 30…
> **Lourenço:** A Carolina disse 31, depois de contar deu 30.
> **Eu:** Então são 30 ou 31?
> **Bruna:** 30!
> **(…)**
> **Eu:** O que acham da estratégia que escolheram?
> **Bruna:** Podia ser esta, mas nós contámos mal.
> **Carolina:** Não, devíamos ter utilizado outra estratégia… uma mais fácil.
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Através desta discussão, as alunas perceberam que esta estratégia e este procedimento resulta mas que poderá não ser a melhor escolha quando o número de figuras é elevado, pois pode acontecer enganarem-se na contagem, como foi o caso.

Estratégias aditivas

Nesta questão as estratégias mais escolhidas pelos alunos foram as estratégias aditivas, tendo sido utilizadas por dez alunos.

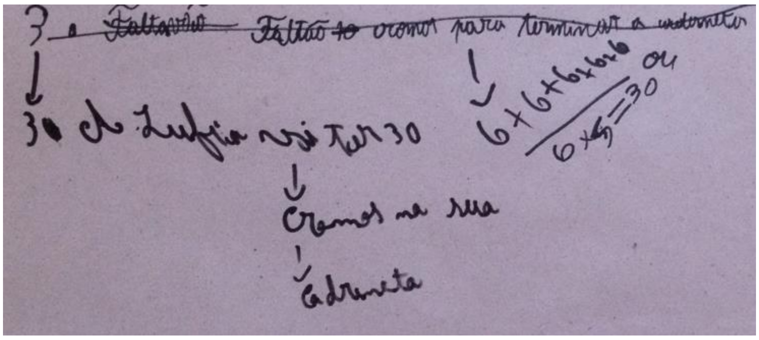
O grupo de Martim C e Diogo **adicionaram sucessivamente** o número de cromos por linha. Assim, já que existiam 5 cromos por linha dispostos em 6 colunas os alunos calcularam “5+5+5+5+5+5”. Para além disso, estes alunos desenharam também a caderneta da Sofia (figura 44). Apesar de parecer que a desenharam apenas para compor a resposta, coloco também possibilidade de os alunos poderem ter realizado uma contagem um a um dos cromos enquanto desenhavam a caderneta, de modo a confirmar, ou mesmo, para determinar, o resultado.



R: A Sofia ~~tem~~ vai ter trinta cromos.
5+5+5+5+5+5=30

Figura 44: Resolução de Martim C e Diogo, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

O par Gabriel e Tiago A também parecem ter utilizado o mesmo procedimento de cálculo, no entanto, os valores que adicionaram foram diferentes. Enquanto Martim C e Diogo (figura 44) adicionaram o número de cromos que estavam dispostos por linha, Gabriel e Tiago A adicionaram o número de cromos que se encontravam por coluna (figura 45).

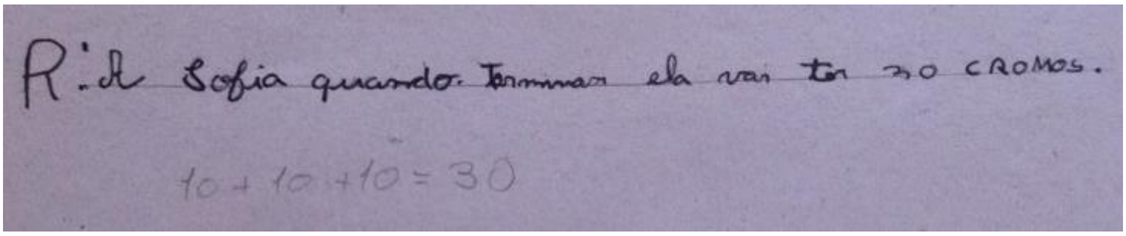


3. ~~a Faltavão Faltão 10 cromos para terminar a caderneta~~
3. A Sofia vai ter 30
cromos na sua
caderneta
6+6+6+6+6 ou
6×5=30

Figura 45: Resolução de Gabriel e Tiago A, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

Como já referi, esta estratégia foi a mais utilizada nesta questão. Apesar dos alunos utilizarem todos o mesmo procedimento de cálculo recorreram a números diferentes.

Alguns pares realizaram o cálculo 10+10+10=30 pois perceberam que existiam três grupos de 10, sendo eles, dez cromos de figo, dez cromos de abóbora e dez cromos em falta, como foi o caso de Anamar e Sarah (figura 46).


R: A Sofia quando terminar ela vai ter 30 CROMOS.

10+10+10=30

Figura 46: Resolução de Anamar e Sarah, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

Durante o momento de discussão da tarefa, Anamar e a Sarah explicitaram que tinham calculado o valor total dos cromos quando a caderneta estivesse cheia da seguinte forma: “Nós pensamos juntar os dez mais dez mais dez (apontado para os cromos) que é 30” (Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016).

Por sua vez, o grupo de Fábio e Arthur realizaram o cálculo “30=20+10” (figura 47). Apesar de não ter verificado com os alunos o procedimento de cálculo utilizado, ao analisar esta resolução, parece que os alunos associaram as respostas da questão 1 e 2 do problema. Na primeira questão era pedido aos alunos para calcularem o número total de cromos já colados na caderneta (20) e na segunda questão era pedido para calcularem o número de cromos que faltava colar na caderneta (10). Assim, para calcular o valor total de cromos quando a caderneta estivesse cheia, terceira questão do problema, os alunos calcularam 20+10.

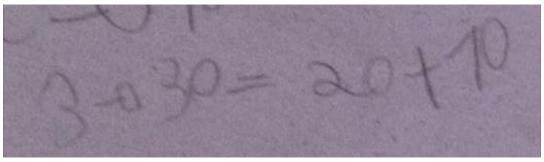
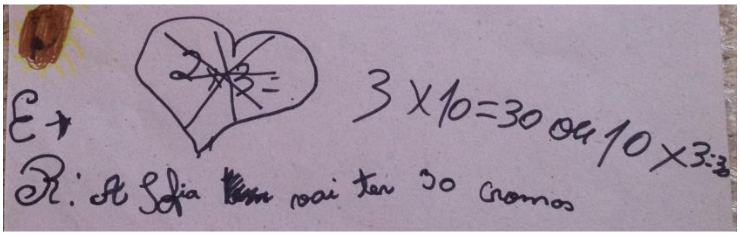

3-a 30=20+10

Figura 47: Resolução de Fábio e Arthur, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

Estratégias multiplicativas

Nesta questão oito alunos utilizaram uma estratégia multiplicativa. Aparentemente, todos os alunos **recorrem a produtos conhecidos** para resolverem o produto.

O grupo de Teresa e Beatriz optou por realizar o produto de 3x10=30 (figura 48), uma vez que os cromos estavam dispostos em três grupos de dez, como já referi, dez cromos de figo, dez cromos de abóbora e dez cromos em falta. Apesar disso, visualizando a resolução das alunas (figura 48) percebe-se que já compreenderam a propriedade comutativa da multiplicação, pois indicam que “3x10=30 ou 10x3=30”.

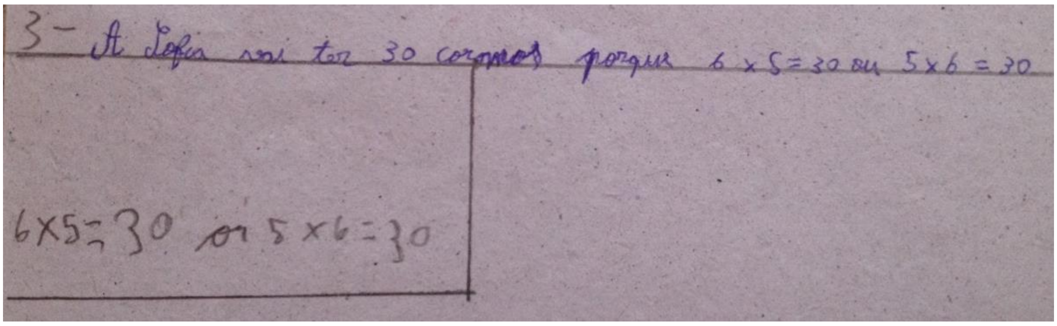


E→ ~~2x3=~~ 3x10=30 ou 10x3=3

R: A Sofia vai ter 30 cromos

Figura 48: Resolução da Teresa e Beatriz

Por último, o par constituído por João e Lourenço também utilizou uma estratégia multiplicativa e **recorreu a produtos conhecidos**. Apesar disso, os valores dos produtos que calcularam foram diferentes dos anteriores grupos. Estes alunos, como se pode ver na figura 49, realizaram o cálculo “6x5=3’”. Neste caso, o número 6 representa o número de colunas e número 5 o número de linhas. Deste modo, os alunos calcularam o total de cromos a partir da distribuição dos mesmos em malha retangular e não fazendo grupos de 10. Também estes alunos parecem ter entendido a propriedade comutativa da multiplicação.



3 – A Sofia vai ter 30 cromos porque 6x5=30 ou 5x6=30

6x5=30 ou 5x6=30

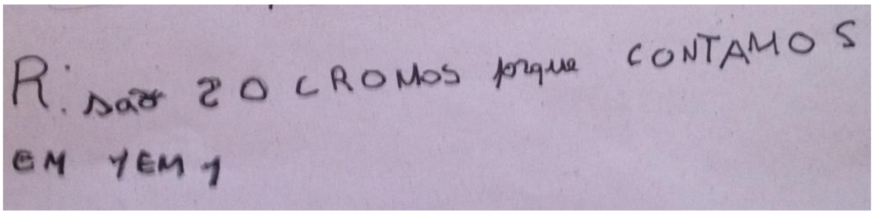
Figura 49: Resolução de João e Lourenço, questão 3, tarefa Gang dos Frescos

2ª parte da tarefa

Estratégias de contagem

Nesta parte do problema os cromos foram tapados propositadamente de modo a estimular a utilização de estratégias multiplicativas. Apesar disso, quatro alunos parecem utilizar o procedimento de cálculo de **contagem por saltos** para resolver a questão e seis grupos utilizam uma estratégia aditiva.

O grupo da Anamar e Sarah afirmam mesmo que **“contaram de um em um”** como se vê na figura 50. Uma das possibilidades é terem reconstruído mentalmente a malha retangular e efetuado a contagem.



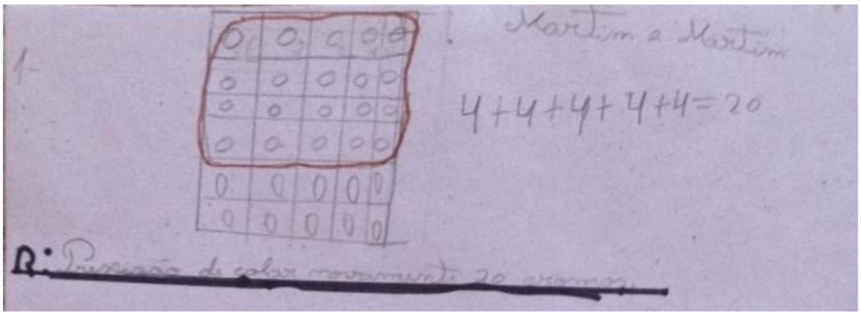
R: são 20 CROMOS porque CONTAMOS EM 1EM 1

Figura 50: Resolução da Anamar e Sarah

Estratégias aditivas

Nesta questão, doze alunos utilizaram uma estratégia aditiva para resolver o problema.

O par Martim A e Martim B utilizou como procedimento de cálculo a **adição sucessiva**. Na figura 51 pode verificar-se que estes alunos desenharam a caderneta dos cromos. Apesar do registo apresentado corresponder a uma estratégia aditiva, nada contraria o facto de os alunos poderem ter contado os cromos um a um, uma vez que os desenharam. Na figura 51 podemos, ainda, observar que os alunos rodearam, a vermelho, os cromos que necessitavam de ser novamente colados.



1-

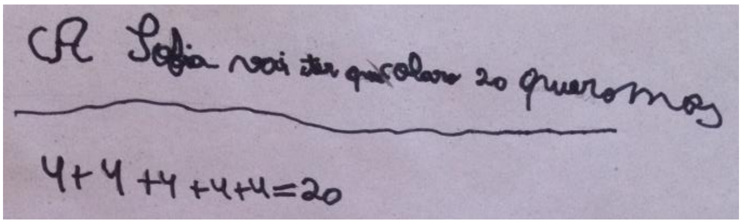
Martim e Martim

4+4+4+4+4=20

R: Precisão de colar novamente 20 cromos.

Figura 51: Resolução de Martim A e Martim B, 2ª parte da tarefa Gang dos Frescos

O grupo de Carolina e Bruna, tal como o grupo anterior, efetuou uma **adição sucessiva**, adicionando o número 4 cinco vezes (figura 52), dado que os cromos se encontravam dispostos em 4 linhas e 5 colunas. Apesar dos cromos não serem visíveis, este grupo, parece ter percebido quantos cromos tinha cada linha e quantas colunas existiam.

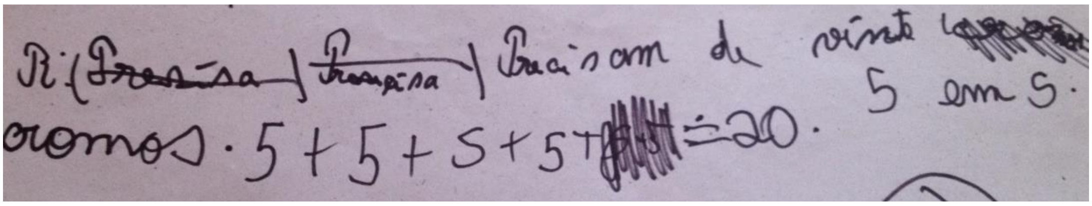


R Sofia vai ter que colar 20 queromos

4+4+4+4+4=20

Figura 52: Resolução de Carolina e Bruna, 2ª parte da tarefa Gang dos Frescos

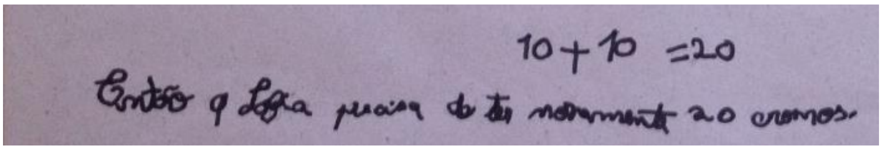
Martim C e Diogo usaram, tal como os anteriores alunos, uma **adição sucessiva** como procedimento de cálculo. Os alunos adicionam sucessivamente o número de cromos que existiam por linha (figura 53).



R: (~~Precisa~~) ~~Precisa~~) Precisam de vinte [illegible]
5 em 5.
cromos. 5+5+5+5+[illegible]=20.

Figura 53: Resolução de Martim C e Diogo, 2ª parte da tarefa Gang dos Frescos

Existiram, ainda, grupos que recorreram às respostas anteriores da 1ª parte da tarefa. Os grupos parecem ter percebido que os cromos que precisavam de ser colados eram os cromos de figo e abóbora. Assim, se já sabiam que existiam dez cromos de figos e dez cromos de abóboras realizaram a soma 10+10 (figura 54) para descobrir quantos cromos precisavam de ser colados novamente, como o grupo de Rafael e António.



10+10 =20
Então q Sofia precisa de ter novamente 20 cromos.

Figura 54: Resolução de Rafael e António, 2ª parte da tarefa Gang dos Frescos

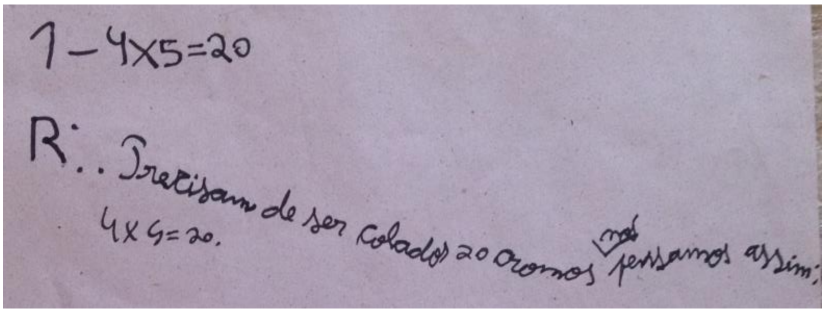
Durante o momento de discussão da tarefa, o António explica como o seu grupo resolveu a questão:

> **António:** Nós fizemos a conta 10+10.
> **Eu:** Explica lá os 10+10…
> **António:** (apontado para o grupo de 10 cromos de figo) dez… mais dez (apontado para o grupo de 10 cromos de abóbora)
>
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Estratégias multiplicativas

Nesta questão seria esperado que grande parte dos alunos recorresse a estratégias multiplicativas. No entanto, isso só ocorreu com seis alunos.

O grupo de Tiago B e Bernardo (figura 55) realizaram o cálculo 4x5=20, isto porque os cromos estavam dispostos em 4 linhas e 5 colunas. Este par parece ter **recorrido a produtos conhecidos**.



1 – 4x5=20

R:.. Precisam de ser colados 20 cromos nós pensamos assim:

4x5=20.

Figura 55: Resolução de Tiago B e Bernardo, 2ª parte da tarefa Gang dos Frescos

Durante a discussão coletiva desta questão, Tiago B e Bernardo quiseram apresentar a estratégia a que recorrem, por a considerarem a mais eficaz:

> **Eu:** Algum grupo utilizou uma estratégia diferente?
> **Tiago B:** Sim! A nossa era a mais fácil.
> (…)
> **Tiago B:** Nós fizemos quatro vezes cinco (apontado para as linhas e colunas da imagem da tarefa)
> **Eu:** Apesar de não conseguirmos ver todos os cromos, porque estavam sujos de leite, nós conseguimos contar as laterais. Portanto, o número de cromos que estão de lado e o número de cromos que estão por cima. O que poderíamos fazer?
> **Bernardo:** Quatro vezes cinco.
> **Eu:** Porquê?
> **Tiago B:** Porque existem quatro cromos assim (apontando para a linha) e cinco assim (apontado para a coluna)
> (…)
> **Bernardo:** Se fizerem assim é muito mais fácil, nunca se enganam. Podem contar os quadradinhos e fazem uma multiplicação.
> Exploração da tarefa Gang dos Frescos, 11-1-2016

Depois da discussão, explicaram aos colegas que esta seria a forma mais fácil de resolver o problema, pois assim nunca se iam enganar no número dos cromos que estavam escondidos debaixo do leite.

Resumindo, na tabela 9 podemos observar as estratégias e os procedimentos de cálculo usados pelos alunos para responder ao problema “Gang dos Frescos”.

Tabela 9: Resumo das estratégias utilizadas pelos alunos na tarefa “Gang dos Frescos”

		1.ª parte			**2.ª parte**
Estratégias	**Procedimentos de cálculo**	**Questão 1**	**Questão 2**	**Questão 3**	**Questão 4**
Contagem	Contagem de 1 em 1	6	6	2	4
	Contagem de 5 em 5	2	0	0	0
Aditivas	Adição sucessiva	8	10	10	12
Multiplicativas	Recorrer a produtos conhecidos	8	8	8	6
Perceção visual de uma quantidade		0	0	0	0
Não explicita a estratégias utilizada		0	0	0	0
Não responde/Responde errado		0	0	4	2

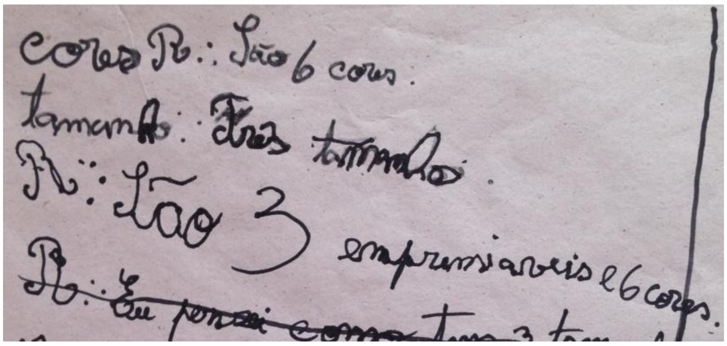
Na primeira questão as estratégia de contagem, aditivas e multiplicativas foram escolhidas pelo mesmo número alunos. Observando os procedimentos de cálculo utilizados nas estratégias de contagem, surgem dois diferentes: contagem por saltos de um em um e de cinco em cinco. Já na segunda questão, as estratégias aditivas ganham destaque, visto que foram as mais utilizadas. Enquanto as de contagem foram as menos utilizadas. Na questão 3 o uso de uma estratégia de contagem baixa drasticamente, relativamente à questão 1, visto que é usada apenas por dois alunos. A mais escolhida, nesta questão, foi, também, a estratégia aditiva.

Por fim, na segunda parte da tarefa, doze alunos utilizaram uma estratégia aditiva, tornar-se, assim, na estratégia mais usada pelos alunos na resolução da questão. Apenas quatro alunos usam uma estratégia de contagem. As estratégias multiplicativas foram usadas por seis alunos.

5.2 Dificuldades com que os alunos se deparam

Mediante a análise das resoluções dos alunos de todas as tarefas propostas existem dificuldades que sobressaem. Uma das dificuldades mais reveladas pelos alunos, ao longo da resolução de todas as tarefas da sequência, foi a apresentação de uma resposta à questão da tarefa.

Uma das dificuldades averiguadas foi a apresentação de uma resposta que, na verdade, não responde à questão da tarefa. Na tarefa “Impermeáveis” os alunos deveriam responder à questão: “Quantos impermeáveis estão à venda na loja do Senhor Manuel? Explica como pensaste”. Na figura 56 podemos observar a resolução de um par de alunos que ilustra esta situação.



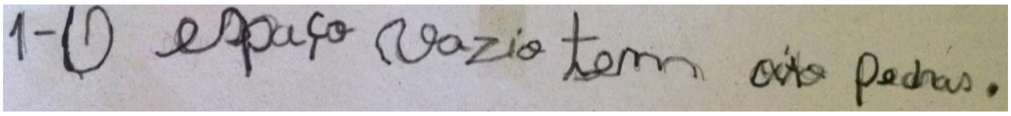
cores R.: São 6 cores.
tamanho: Três tamanhos.
R.: São 3 empremiaveis e 6 cores.
R.: ~~E eu pensei como tem 3~~

Figura 56: Registo efetuado por António e Tiago A na resolução da tarefa “Impermeáveis”

Apesar de estes alunos apresentarem corretamente o procedimento de cálculo a que recorreram para resolver a questão, a resposta apresentada pelos alunos não responde à questão enunciada. Os alunos apresentam o “R:” de resposta e escrevem “São 3 impermeáveis e 6 cores”. Esta resposta não corresponde à questão da tarefa, mas sim aos dados fornecidos para os alunos responderem à questão.

A análise das produções dos alunos evidencia também a dificuldade de alguns deles em explicitar os procedimentos de cálculo usados e, por vezes, a estratégia a que recorreram. Apesar de esta dificuldade ser mais visível nas primeiras tarefas exploradas, na exploração da tarefa “Gang dos frescos”, última tarefa da sequência, ainda é visível por parte de Bruna e Carolina (figura 33) a dificuldade em explicitar o procedimento de cálculo e estratégia utilizada. Ainda nesta tarefa, Anamar e Sarah revelam a mesma dificuldade (figura 50).

Também Anamar e Quévin revelam esta dificuldade na resolução da tarefa “Parque do Moranguinho”. No entanto, quando são questionados no momento de discussão da tarefa, explicitam o procedimento de cálculo utilizado. O registo efetuado por Anamar e Quévin na realização da tarefa “Parque do Moranguinho” ilustra esta situação (figura 61). Na resolução escrita da tarefa estes alunos não apresentam qualquer cálculo, limitando-se a afirmar que o empedrado tem 8 pedras.



1-(1) espaço vazio tem oito pedras.

Figura 61: Registo efetuado por Anamar e Quévin na resolução da tarefa “Parque do Moranguinho”

No entanto, durante o momento de resolução da tarefa, enquanto circulo pela sala, questiono os alunos:

> **Eu:** Cada quadradinho representa uma pedra. E a questão é: quantas pedras ocupa o espaço vazio? Explica como pensaste. Quantas pedras estão neste espaço?
> **Quévin:** Ah! Então espera, aqui já vi. (pausa)
> **Eu:** Tens que calcular quantas pedras são!
> **Quévin:** Eu contei-as… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Oito aqui!
> **Eu:** Então como é que tu fizeste? Como é que pensaste?
> **Quévin:** Então… a contar.
> **Eu:** Contaram uma a uma, então na resposta têm que explicar isso.
> **Quévin:** Também podíamos contar de dois em dois…
> **Eu:** Claro! Têm que contar da maneira mais fácil.
> **Quévin:** 2, 4, 6, 8…
> **Eu:** Não se esqueçam de escrever na resposta a explicação de como pensaram…
>
> Exploração da tarefa Parque do Moranguinho, 2-12-2015

Apesar de os alunos não terem registado o procedimento e a estratégia que utilizaram para resolver a questão, oralmente essa explicitação foi realizada. Quévin começa por afirmar que contou as pedras, portanto pode-se concluir que utilizou uma estratégia de contagem. O modo como o aluno conta as pedras “1, 2, 3…” leva-nos a afirmar que utiliza uma contagem por saltos de um em um. No entanto, no decorrer da conversa Quévin percebe que existem diferentes formas, e até mais fáceis, de contar as pedras. Afirma que se podiam contar as pedras por saltos de dois em dois. Assim, a estratégia utilizada continuaria a ser de contagem, mas seria realizada por saltos de dois em dois ao invés de um em um.

Estes exemplos ilustram, assim, dificuldades manifestadas por alguns alunos em dar resposta às tarefas após a sua resolução, identificando-se duas situações distintas: (i) a redação de um texto que não corresponde à resposta da tarefa, apesar de lhe atribuir essa função apresentando a ideia de “R.:” e (ii) a apresentação de uma resposta sem que seja registado nenhuma estratégia ou procedimento de cálculo.

Relativamente às estratégias apresentadas pelos alunos nas resoluções das tarefas, alguns deles evidenciam o uso de diferentes estratégias através dos seus registos. Na secção anterior foram apresentadas vários exemplos desta situação (ver figuras 16, 36 e 45). Na figura 60 abaixo apresenta-se mais um exemplo desta situação. Corresponde à resolução da tarefa "Parque do Moranguinho", feita por António e Tiago A. Pode ver-se que os alunos apresentam duas estratégias diferentes para resolver a questão.

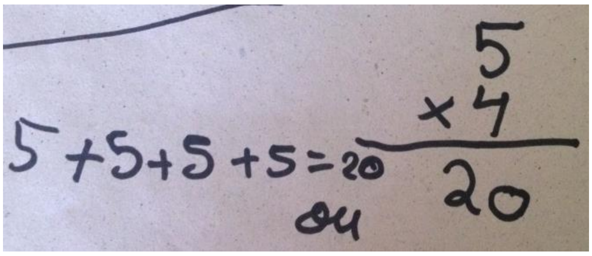


Figura 60: Registo efetuado por António e Tiago A na resolução da tarefa "Parque do Moranguinho"

Por um lado, os alunos utilizam uma estratégia aditiva e apresentam como procedimento de cálculo a adição sucessiva: 5+5+5+5=20. Por outro lado, apresentam, também, uma estratégia multiplicativa com o produto 4x5. Este tipo de registo surge mais no início da sequência de tarefas, ou seja, inicialmente, os alunos começam por apresentar uma resolução onde constam duas estratégias distintas. Este facto poderá significar alguma insegurança, por parte dos alunos, em apresentar apenas uma estratégia multiplicativa, sentindo a necessidade de ainda se apoiarem em estratégias aditivas.

Alguns alunos sentem dificuldades no que diz respeito à explicitação das estratégias e/ou procedimentos de cálculo usados. Há que assinalar as situações em que os alunos respondem corretamente à questão mas apresentam procedimentos que parecem não corresponder ao modo como efetivamente pensaram. Por exemplo na resolução da tarefa "Quantos desenhos?", que foi explorada apenas oralmente, Martim explícita como contabilizou o número total de desenhos:

> **Martim:** Fiz 7-1.
> **Eu:** Porquê 7-1?
> **Martim:** Porque dá 6.
> Exploração da tarefa Quantos desenhos?, 17-11-2015

Analisando a resposta do aluno pode concluir-se que, neste caso, o que Martim fez foi “arranjar” uma operação entre dois números cujo resultado fosse 6, pois sabia de antemão que o número total de desenhos era 6.

Também na realização da tarefa “Tabuada do 2”, explorada oralmente, se pode verificar esta dificuldade. Quando questiono os alunos como se pode calcular seis vezes o dois (6x2) Rafael responde:

> **Rafael:** É 13-1.
> **Eu:** Como calculaste, explica-nos.
> **Rafael:** Fiz a conta 13-1 porque dá 12.
> Exploração da tarefa Tabuada do 2, 19-11-2015

Mais uma vez, o aluno procura uma operação aritmética cujo resultado seja 12.

Coloco a hipótese do surgimento de situações como esta estarem associadas a uma tarefa que a turma costuma realizar todos os dias, na primeira aula da manhã, e que consiste na realização de operações cujo resultado seja o número do dia. O número do dia corresponde ao dia do mês em que nos encontramos. Por exemplo, no dia 23 de maio os alunos devem realizar operações cujo resultado seja 23, assim: 20+3; 30-7; etc. Parece-me que os alunos confundiram esta tarefa com os cálculos das tarefas envolvidas na sequência.

Deste modo, conclui-se que estes exemplos manifestam por parte de alguns alunos a dificuldade de explicitar os procedimentos de cálculo e/ou estratégia utilizada, reconhecendo-se duas dificuldades distintas: (i) apresentar duas estratégias distintas devido à falta de confiança no uso de estratégias multiplicativas e (ii) responder corretamente à questão mas não explicitar o procedimento utilizado de acordo com o modo como pensaram.

Uma outra dificuldade manifestada pelos alunos foi: a necessidade de representar, através de um esquema, todos os elementos associados à malha retangular. Como exemplo, recordemos a resolução apresentada por Martim B e Martim C na resolução da 2.ª parte de tarefa “Gang dos frescos” (figura 51).

Pela observação desse registo pode ver-se que os alunos apresentam o procedimento de cálculo que utilizaram para resolver a questão, mas também apresentam uma imagem da malha retangular associado à tarefa que traduz os cálculos que realizaram. É importante referir que a malha retangular que representava a questão da tarefa proposta continha os cromos tapados por uma mancha de leite, o que impossibilitava a contagem direta dos mesmos utilizando uma estratégia de contagem. A representação dos cromos pelos alunos mostra não só a organização dos cromos na caderneta como também mostra a representação de todos os cromos. Para além disso, os alunos rodeiam a vermelho os cromos que necessitam de contabilizar. Então, apresentam o cálculo 4+4+4+4+4=20 que representa a adição dos cromos por coluna. Assim, pode-se concluir que os alunos sentiram necessidade de representar a malha retangular desenhando todos os cromos.

Por último, nas tarefas em que as imagens foram, propositadamente, tapadas os alunos sentem dificuldades em contabilizar todos os quadrados da malha retangular. Esta dificuldade é visível na tarefa "Parque do Moranguinho". Sarah e Bruna contabilizam apenas os quadrados que estão visíveis (figura 23).

Resumindo, pode concluir-se que ao longo da resolução das várias tarefas da sequência, os alunos sentiram dificuldades como: apresentar uma resposta à questão, explicitar o procedimento e/ou estratégia utilizada, necessidade de registar todos os elementos associados à malha retangular apresentada e contabilizar os quadrados de uma malha retangular quando esta se encontra parcialmente tapada.

5.3 Potencialidades da sequência de tarefas

Para analisar as potencialidades da sequência de tarefas é importante ter em conta todas as tarefas propostas. Por essa razão, a tabela 10 inclui todas as tarefas exploradas na sala de aula e não apenas as tarefas que foram analisadas na secção "Análise de dados". Para cada tarefa é identificado o seu tipo, o modelo associado, os números envolvidos e um breve resumo da tarefa. Na tabela 11 são descriminadas as estratégias que os alunos utilizaram para resolver as tarefas. Tal como na tabela 10, também nesta tabela são consideradas todas as tarefas, pois é importante analisar o progresso dos alunos tendo em conta todas as tarefas desenvolvidas. Através do cruzamento destes dados irei avaliar as potencialidades da sequência de tarefas criada. Apesar de as tabelas 10 e 11 contarem com os dados referentes a todas as tarefas da sequência explorada na sala de aula, para ilustrar eventuais aspetos na análise, centrar-me-ei nas quatro tarefas que aqui já foram alvo de análise a propósito das estratégias usadas pelos alunos. A descrição das outras tarefas serve, essencialmente, para que o leitor possa ter acesso a elementos importantes, como por exemplo, os tipos de tarefas, os números envolvidos e as estratégias que foram utilizadas pelos alunos na resolução dessas tarefas.

É importante destacar que os números apresentados na tabela 11 representam o número de alunos que utilizaram aquelas estratégias.

Observando as tabelas 10 e 11 percebemos que estão organizadas segundo um sistema de cores. Este sistema permite que o leitor consiga, por um lado, ter uma melhor visão das tabelas e, por outro, consiga facilmente verificar os dados expressos nas tabelas de cada uma das tarefas. Assim, a cada tarefa está associada uma cor diferente. As tarefas de fundo branco dizem respeito às tarefas que foram exploradas em sala de aula mas que, por motivos já referenciados, não foram analisadas neste relatório.

Tabela 10: Resumo das tarefas exploradas com os alunos

	Tipo de tarefa	**Modelo associado à tarefa**	**Números envolvidos**	**Resumo da tarefa**
Quantas meias?	Exercício	Linear	5 pares de meias	Determinar o número total de meias.
Quantos desenhos?		Malha retangular	Desenhos agrupados em 6, 10 e 20	Determinar o número total dos desenhos de cada grupo.
Construir a tabuada do 2	Tabuada		Produtos da tabuada do 2 (desde 1x2 até 12x2)	Calcular, em grande grupo, os produtos da tabuada do 2.
Cadeia Numérica	Cadeia numérica		Produtos de 2x2, 4x2, 8x2, 10x2, 12x2, 14x2 e 18x2	Calcular diversificados produtos da tabuada do 2.
Parque do Moranguinho	Problema	Malha retangular	Malha retangular de 2x4, 4x4, 5x4 e 7x4	Completar as tarefas “Construir a tabuada do 2” e “Cadeia numérica”. Determinar o número total de pedras de cada malha retangular.
Quantos gelados?	Problema	Sentido combinatório	Dois tipos de bases de gelados e três sabores de gelados diferente	Determinar o número total de gelados diferentes que se podiam fazer.
Quantos lanches?			Dois tipos de bases de gelados e três sabores de gelados diferente, duas bebidas e duas peças de fruta	Determinar o número total de possibilidades diferentes que existiam para um lanche composto por: um gelado de um sabor, uma peça de fruta e uma bebida.
Impermeáveis	Exercício	Sentido combinatório	Malha retangular de 3x4	Pintar o número total de impermeáveis.
	Problema		Três tamanhos e seis cores de impermeáveis	Determinar o número total de impermeáveis sabendo que existiam três tamanhos e seis cores.
Construir a tabuada do 4	Tabuada		Produtos da tabuada do 4 (desde 1x4 até 12x4)	Calcular, em grande grupo, os produtos da tabuada do 4.
Gang dos Frescos	Problema	Malha retangular	Malha retangular de 2x5, 4x5 e 6x5	Determinar o número de cromos distribuídos em malha retangular.
			Malha retangular de 4x5	Determinar o número de cromos distribuídos em malha retangular parcialmente tapados.

Tabela 11: Estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das tarefas

Tarefas			**Estratégias**											
			Contagem		**Aditivas**		**Multiplicativas**		**Percepção visual**		**Não explícita**		**Não responde/responde errado**	
			Alunos	%	Alunos	%	Alunos	%	Alunos	%	Alunos	%	Alunos	%
Quantas meias? Quantos desenhos?	1.ª parte		3	43%	3	43%	1	14%	0	0%	0	0%	0	0%
	2.ª parte		3	21%	9	64%	0	0%	2	14%	0	0%	0	0%
Construir a tabuada do 2			0	0%	6	46%	4	31%	0	0%	0	0%	3	23%
Cadeia numérica			0	0%	7	54%	4	31%	0	0%	0	0%	2	15%
Parque do Moranguinho		Questão 1	0	0%	18	82%	2	9%	0	0%	2	9%	0	0%
		Questão 2	2	9%	12	55%	4	18%	0	0%	2	9%	2	9%
		Questão 3	0	0%	10	45%	4	18%	0	0%	4	18%	4	18%
		Questão 4	2	9%	8	36%	4	18%	0	0%	4	18%	4	18%
Quantos gelados? Quantos lanches?	1.ª parte		6	23%	6	23%	8	31%	0	0%	0	0%	6	23%
	2.ª parte		0	0%	0	0%	4	15%	0	0%	0	0%	22	85%
Impermeáveis	2.ª parte		4	20%	6	30%	8	40%	0	0%	0	0%	2	10%
Construir a tabuada do 4			0	0%	4	36%	7	64%	0	0%	0	0%	0	0%
Gang dos Frescos	1.ª parte	Questão 1	8	33%	8	33%	8	33%	0	0%	0	0%	0	0%
		Questão 2	6	25%	10	42%	8	33%	0	0%	0	0%	0	0%
		Questão 3	2	8%	10	42%	8	33%	0	0%	0	0%	4	17%
	2.ª parte	Questão 1	4	17%	12	50%	6	25%	0	0%	0	0%	2	8%

Analisando a primeira linha da tabela 10 percebemos que a primeira tarefa realizada consistia na contagem de meias e desenhos, organizados em linha e malha retangular. Esta tarefa, como já referi anteriormente, foi explorada na sala de aula oralmente. Por este motivo, nem todos os alunos participaram. Assim, o número de alunos que utilizou determinada estratégia diz respeito apenas aos alunos que participaram na tarefa e responderam à questão lançada. Na primeira parte da tarefa a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a de contagem e aditiva (ver tabela 11). Dos sete alunos observados apenas um utiliza uma estratégia multiplicativa. Embora que as meias estivessem agrupadas a pares, o que não facilitava a contagem por saltos de um em um, os alunos conseguiram utilizar esta estratégia porque o número de meias era reduzido. Na segunda parte da tarefa, as estratégias mais utilizadas foram as aditivas e as de contagem (ver tabela 11). Dos 14 alunos observados nove utilizam estratégias aditivas e três de contagem. Nesta parte da tarefa, os alunos referem a multiplicação como uma estratégia de resolução de tarefas, no entanto, ainda não têm conhecimentos que lhes permita escolher uma estratégia de multiplicação para resolver a tarefa. Por essa razão, os alunos utilizam uma adição sucessiva e associam-na à multiplicação. Com a disposição retangular dos desenhos pretendia que os alunos compreendessem que podiam calcular o número total de desenhos multiplicando o número de colunas pelo número de linhas ou vice-versa. Através do aumento progressivo do número de desenhos nos três grupos (6, 10 e 20) desejava que os alunos abandonassem a contagem por saltos.

A segunda e terceira tarefas realizadas não foram analisadas na secção anterior, no entanto, neste capítulo é importante fazer referência às mesmas. A segunda tarefa explorada foi “Construir a tabuada do 2” e a terceira foi a exploração de uma “Cadeia numérica”. A realização destas tarefas serviu para os alunos aprenderem a multiplicar, mas também, para recorrerem à decomposição de números, à propriedade da multiplicação em relação à adição e à propriedade comutativa da multiplicação para calcularem novos produtos na tabuada do 2.

A quarta tarefa da sequência, apresentada na segunda linha da tabela 10, tinha como objetivo determinar o número de pedras distribuídas em malha retangular. Esta tarefa completava a segunda e terceira tarefa da sequência, pois os alunos tinham trabalhado as propriedades da multiplicação. A primeira malha da tarefa, na questão 1, estava representada em duas linhas e quatro colunas, pois a tabuada trabalhada anteriormente pelos alunos fora a tabuada do 2. Desta forma, os alunos poderiam recorrer a produtos conhecidos. No entanto, analisando as estratégias utilizadas na questão 1 da tarefa “Parque do Moranguinho” (ver tabela 11) verificamos que apenas dois alunos utilizaram uma estratégia multiplicativa. Nas seguintes questões (2, 3 e 4) os alunos teriam que calcular, também, o número de pedras, no entanto, estas estavam tapadas por objetos/logotipos. O facto de as imagens taparem parcialmente as pedras ajudaria os alunos a abandonarem a contagem por saltos em prol de outras estratégias. Verificando a quarta linha da tabela 11 verificamos que tal facto ocorreu. Nas questões 2 e 4 da tarefa “Parque do Moranguinho” apenas dois alunos utilizaram estratégias de contagem. A estratégia mais utilizada pelos alunos nesta tarefa foi a aditiva. Apesar de as pedras estarem parcialmente tapadas, conseguiam-se visualizar o número de pedras envolventes, por isso, os alunos conseguiram realizar adições sucessivas para resolver as questões. Na exploração desta tarefa pretendia-se que os alunos chegassem a conclusões como: para calcular o número total de pedras poderia ter sido utilizada uma estratégia multiplicativa, através do cálculo do produto do número de pedras da linha pelo número de pedras da coluna.

A tarefa “Impermeáveis” foi a sexta tarefa explorada com os alunos. Anteriormente a esta deu-se a exploração da tarefa “Quantos gelados? Quantos lanches?”. Ambas as tarefas tinham como objetivo trabalhar o sentido combinatório da multiplicação. A tarefa “Impermeáveis” dividiu-se em duas partes. Uma vez que a primeira parte foi realizada no manual escolar dos alunos e correspondia apenas à pintura dos impermeáveis, decidi focar a minha análise nos resultados obtidos na segunda parte da tarefa. A segunda parte da tarefa é uma extensão da primeira e os alunos deveriam calcular, utilizando a estratégia que mais conveniente fosse, o número total de impermeáveis sabendo que existiam três tamanhos e seis cores. Analisando as estratégias utilizadas pelos alunos na segunda parte da tarefa, tabela 11, percebemos que a estratégia mais utilizada foi a multiplicativa – escolhida por 40% dos alunos – e a menos utilizada foi a de contagem – escolhida por 20% dos alunos.

A última tarefa da sequência, “Gang dos frescos” (ver tabela 10), foi realizada depois da construção da tabuada do 4. Esta tarefa era muito idêntica à tarefa “Parque do Moranguinho”, pois os alunos teriam que calcular o número de cromos de uma caderneta dispostos em malha retangular. Na primeira parte da tarefa os alunos calculavam o número de cromos colados, o número de cromos que faltavam colar e o número total de cromos que a caderneta teria. Na segunda parte da tarefa os alunos calculavam os cromos que teriam de ser colados novamente devido à mancha de leite (a macha de leite tapava parcialmente os cromos). Na questão 1 da primeira parte os alunos usaram igualmente estratégias de contagem, aditivas e multiplicativas. O facto de serem poucos cromos e distribuídos em malha retangular parece ter permito que os alunos usassem qualquer uma das estratégias. Na questão 2 não existiram muitas alterações nas estratégias usadas. Na questão 3 houve uma alteração significativa nas estratégias usadas. Apenas dois alunos utilizaram uma estratégia de contagem. Nesta questão a estratégia mais utilizada foi a aditiva, escolhida por 42% dos alunos. Na segunda parte da tarefa, em que os cromos estavam tapados, apenas 6 alunos utilizam uma estratégia multiplicativa e 12 utilizam estratégias aditivas (ver tabela 11). A malha retangular desta tarefa estava dividida em duas linhas por cinco colunas. Estes números deveriam ter ajudado os alunos a recorrer a produtos conhecidos para resolverem as questões. No entanto, 50% dos alunos preferiram a adição para resolver as questões. Este facto pode dever-se a vários motivos: falta de confiança no uso de estratégias multiplicativas; pouco tempo de trabalho em torno da multiplicação.

Observando, na tabela 11, as percentagens de alunos que utilizaram estratégias multiplicativas ao longo da exploração das tarefas da sequência, nota-se que existe uma evolução. Na tarefa “Construir a tabuada do 4” a estratégia multiplicativa foi usada por 64% dos alunos. Contudo, na tarefa seguinte – que corresponde à última tarefa explorada da sequência – apenas 33% dos alunos recorrem a uma estratégia multiplicativa. Neste caso, nota-se que os alunos usam estratégias menos eficazes. Este facto poderá estar relacionado com o contexto das tarefas. A construção da tabuada do 4 indicia, de forma explícita, o uso da multiplicação, o que não ocorre no contexto da tarefa “Gang dos frescos”.

Olhando de forma global para a tabela 11 percebemos que existiu uma evolução nas estratégias utilizadas pelos alunos. No decorrer da exploração das tarefas os alunos utilizaram, progressivamente, mais vezes as estratégias aditivas e multiplicativa ao invés das estratégias de contagem. É importante referir que os números utilizados nas tarefas foram números pequenos (2, 4, 5, 10) pois os alunos estavam a iniciar a aprendizagem da multiplicação. Este facto poderá ter interferido na utilização de estratégias multiplicativas, uma vez que as tarefas eram compostas por números pequenos o que facilitava a contagem por saltos. Apesar disso, em algumas tarefas as imagens foram parcialmente cobertas para evitar a contagem por saltos de um em um.

Resumidamente, na tabela 11 podemos observar a evolução das estratégias utilizadas pelos alunos na exploração das tarefas da sequência. Ao longo das várias tarefas os alunos utilizam cada vez mais estratégias multiplicativas. O modelo associado a cada tarefa, os números utilizados, as imagens representativas da tarefa e as questões realizadas ajudam os alunos a repensarem as estratégias que poderão utilizar. Para além disso, e mais importante ainda, a conexão estabelecida entre as tarefas ajuda os alunos a compreenderem e utilizarem estratégias cada vez mais eficazes. A sequência de tarefas criada neste estudo permitiu que os alunos abandonassem, progressivamente, estratégias de contagem em prol das estratégias aditivas e multiplicativas.

6. CONCLUSÃO

Ao iniciar o estágio com os alunos com os quais realizei este estudo percebi que sentiam dificuldades na aprendizagem da Matemática, mais concretamente, no que se refere à multiplicação. A turma com que desenvolvi todo este projeto era composta por alunos do 2.º e 3.º ano de escolaridade. Enquanto os alunos do 2.º ano ainda não tinham iniciado a aprendizagem da multiplicação, os alunos do 3.º ano já tinham trabalhado as tabuadas mas não utilizavam as propriedades da multiplicação e as relações numéricas para resolver problemas ou tarefas. Por outras palavras, os alunos em vez de recorrerem a produtos conhecidos, a relações de dobro ou metade e às propriedades da multiplicação para resolver tarefas nas quais estava envolvida esta operação, utilizavam esquemas, desenhos ou adições. Assim, fazia todo o sentido criar um projeto e desenvolver uma investigação em torno da aprendizagem da multiplicação, que incluísse tanto os alunos de 2.º ano como os de 3.º ano.

Durante esta investigação desempenhei dois importantes papéis: professora-estagiária e investigadora. Enquanto, por um lado, apoiava e ajudava os alunos nos seus trabalhos diários para que ultrapassem as duas dificuldades na área da Matemática, por outro, realizava um estudo sobre as estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos utilizam quando resolvem tarefas de multiplicação, bem como as dificuldades que sentem. Por esta razão, a metodologia adoptada foi a investigação-ação. O estudo seguia, assim, uma abordagem qualitativa pois tinha como principal objetivo a compreensão em profundidade de um determinado fenómeno, neste caso aspetos relacionados com a aprendizagem da multiplicação.

Para iniciar a realização do estudo criei uma sequência de oito tarefas de multiplicação, que tentei articular entre si. Apesar de a sequência ser criada antes da sua exploração na sala de aula, esta não era estática, ou seja, sofreu alterações de acordo com os resultados obtidos ao longo da exploração das diferentes tarefas. O contexto, os números envolvidos nas tarefas, bem como, os modelos subjacentes foram cuidadosamente selecionados para que a sequência fosse coerente e adequada aos alunos com os quais estava a desenvolver o projeto. Depois do planeamento das tarefas, deu-se a exploração das mesmas na sala de aula. O momento de exploração das tarefas dividia-se em três partes, nomeadamente, apresentação e leitura da tarefa, resolução da tarefa por parte dos alunos (individualmente ou a pares) e discussão da tarefa em grande grupo.

Por fim, terminado o estudo, apresento as conclusões do mesmo de acordo com as questões a que me propus responder no início da realização do projeto.

6.1 Conclusões do estudo

Com este estudo pretendia focar-me na aprendizagem da multiplicação, compreendendo as estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos quando resolvem tarefas de multiplicação, bem como, as dificuldades com que se deparam quando resolvem essas mesmas tarefas. Para além disso, queria analisar as potencialidades da sequência de tarefas construída. Para orientar o meu estudo delineei três questões, às quais pretendo responder agora: (i) Quais as estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação?, (ii) Quais as dificuldades que os alunos evidenciam quando lidam com tarefas de multiplicação? e (iii) Quais as potencialidades da sequência de tarefas proposta na aprendizagem da multiplicação? Organizo esta secção tendo em conta estas três questões.

6.1.1 Estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos

Apresento, na seguinte tabela (tabela 12), as estratégias e os procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos nas tarefas exploradas no âmbito deste projeto.

Tabela 12: Estratégias e procedimentos de cálculo usados pelos alunos

Estratégia	Procedimento de cálculo
Contagem	Contagem de um em um
	Contagem de dois em dois
	Contagem de cinco em cinco
Aditiva	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Algoritmo da adição
Multiplicativa	Recorrer a produtos conhecidos
Percepção Visual	______________________

Observando os dados da tabela 12 podemos afirmar que os alunos usam diferentes estratégias e procedimentos de cálculo para resolver tarefas de multiplicação. A primeira coluna na tabela dá-nos a informação que os alunos utilizam quatro estratégias diferentes quando se deparam com tarefas de multiplicação, sendo elas: estratégias de contagem, aditivas, de multiplicação e de percepção visual. Na segunda coluna da tabela podemos verificar os procedimentos de cálculo que os alunos utilizaram para cada uma das estratégias. Na estratégia de contagem utilizam como procedimento: contar de um em um, contar de dois em dois e contar de cinco em cinco. Relativamente a estratégias aditivas usam como procedimentos: adicionar sucessivamente, adicionar dois a dois e o algoritmo da adição. Este último procedimento surge na análise dos dados e não faz parte do quadro de categorias de análise adotado neste estudo, visto que este foi baseado nos resultados obtidos por Mendes (2012). Este procedimento de cálculo poderá ter surgido uma vez que os alunos já tinham conhecimentos do mesmo. No que diz respeito a estratégias multiplicativas usam procedimento de cálculo recorrer a produtos conhecidos. Por fim, respeitante à estratégia de percepção visual, esta não tem nenhum procedimento associado pois está relacionada com a determinação de uma quantidade sem recorrer a cálculos (Silva, 2015).

Assim, os resultados obtidos neste estudo mostram que os alunos recorrem a estratégias e procedimentos de cálculo variados para resolver tarefas de multiplicação, resultado também evidenciado por Mendes (2012) e Silva (2015).

A análise das quatro tarefas de multiplicação evidencia conclusões importantes relativas às estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos utilizam.

Na primeira tarefa explorada, “Quantas meias? Quantos desenhos?”, a estratégia mais usada pelos alunos foi a aditiva, quer na primeira parte da tarefa, quer na segunda.

A tarefa “Parque do Moranguinho” foi a segunda tarefa analisada e a quarta tarefa da sequência a ser explorada. Nesta tarefa, na questão 1 e 3, nenhum aluno utilizou uma estratégia de contagem. A estratégia aditiva continua a ser aquela que é usada em maior número de vezes. Em todas as questões existiram alunos a recorrer a estratégias multiplicativas.

“Impermeáveis” foi a sexta tarefa da sequência e a terceira tarefa a ser analisada. A estratégia multiplicativa foi a mais usada pelos alunos, visto que foi escolhida por 40%. Ainda assim, segue-se a estratégia aditiva (30%) e, só depois, a de contagem (20%).

Por último, foi analisada a tarefa "Gang dos Frescos". Nesta tarefa os alunos recorrem, sobretudo, a estratégias aditivas. Contudo, as estratégias multiplicativas foram usadas em maior quantidade do que em alguma outra tarefa explorada. Por este motivo, pode afirmar-se que ao longo da exploração das tarefas da sequência houve um amento no uso de estratégias multiplicativas.

Concluindo, relativamente às estratégias e procedimentos de cálculo utilizados pelos alunos na exploração das tarefas de multiplicação propostas podemos afirmar que:

- Os alunos utilizam estratégias diversificadas para resolver tarefas de multiplicação, nomeadamente, estratégias de contagem, aditivas, multiplicação e percepção visual de uma quantidade;
- Nas estratégias de contagem os alunos utilizam, maioritariamente, como procedimento de cálculo a contagem de um em um; Nas aditivas usam com maior frequência a adição sucessiva como procedimento de cálculo; E nas multiplicativas recorrem com mais frequência ao procedimento de cálculo usar produtos conhecidos;
- Globalmente, a estratégia mais utilizada pelos alunos foi a aditiva;
- As estratégias a que os alunos menos recorreram foram a percepção visual e contagem.
- Ao longo da resolução das tarefas da sequência observa-se um aumento na utilização de estratégias multiplicativas.

6.1.2 Dificuldades sentidas pelos alunos na exploração das tarefas

Mediante a análise das produções dos alunos relativas à exploração das tarefas, emergem algumas dificuldades.

Pela análise das produções escritas dos alunos pude verificar que, por vezes, os alunos associam a resposta da tarefa ao resultado obtido ou à explicação da estratégia e/ou do procedimento utilizado para resolver a tarefa.

Os resultados evidenciam que, algumas vezes, os alunos redigem um texto precedido de "R.:" em que explicitam o procedimento de cálculo utilizado ou apresentam os dados contidos na questão. Estas foram dificuldades relativas à resposta às questões das tarefas.

Relativamente à explicitação da estratégia e do procedimento de cálculo usado, que era pedido em todas as questões das tarefas, esta nem sempre foi realizada pelos alunos. Muitas vezes os alunos respondem apenas à questão sem explicar o seu raciocínio.

Durante a análise dos dados foi, ainda, identificada uma outra dificuldade: por vezes, os alunos utilizam duas estratégias diferentes para resolver uma mesma questão. Estes resultados são também evidenciados no estudo de Mendes (2012). O uso de duas estratégias numa mesma questão parece surgir associado à falta de confiança no uso da multiplicação. Assim, ou os alunos começam por resolver a questão usando outra estratégia e, só depois, fazem referência à estratégia multiplicativa ou recorrem à estratégia multiplicativa e, para comprovar a veracidade dos resultados obtidos, utilizam outra estratégia que considerem mais segura.

Para terminar, a última dificuldade que os alunos evidenciaram foi a necessidade de desenhar ou esquematizar todos os elementos da malha retangular. Em algumas questões os objetos constituintes da malha retangular foram, propositadamente, tapados para incentivar o uso da multiplicação. No entanto, os alunos com mais dificuldades desenharam uma nova malha com todos os objetos para depois os poderem contar. Tal parece revelar que alguns alunos na fase final da exploração da sequência ainda revelam dificuldades em compreender a ideia de multiplicação.

Em suma, as dificuldades reveladas pelos alunos na exploração das tarefas da sequência foram:

- Os alunos indicam o “R.:” de resposta, mas o texto não corresponde à verdadeira resposta da questão da tarefa;
- Os alunos assumem que a explicação do procedimento de cálculo e/ou da estratégia corresponde à resposta da questão da tarefa;
- Os alunos apresentam, por aparente por falta de confiança no uso da multiplicação, duas estratégias para a mesma questão;
- Os alunos respondem corretamente à questão da tarefa, no entanto, não explicitam o procedimento e/ou estratégia utilizada;
- Alguns alunos parecem sentir dificuldades no uso da multiplicação, pois sentem a necessidade de desenhar todos os elementos associados à malha retangular.

6.1.3 Potencialidades da sequência de tarefas criada

Na construção da sequência de tarefas tive em atenção diversos aspetos: o contexto da tarefa, os números envolvidos e o modelo associado a cada tarefa. Para além disso, fiz um levantamento dos conhecimentos dos alunos da turma em relação à operação da multiplicação. O meu objetivo seria criar uma sequência de tarefas que ajudasse os alunos a progredir nas suas estratégias e procedimentos de cálculo.

Analisando os resultados pode afirmar-se que se nota uma evolução nas estratégias usadas pelos alunos, pois no final da sequência de tarefas recorreram com maior frequência ao uso de estratégias multiplicativas. Esta evolução parece relacionar-se com a escolha criteriosa dos contextos e números envolvidos nas tarefas.

Verificando a quarta coluna da tabela 10, a tarefa "Gang dos Frescos" envolve o número 5, visto que a malha retangular prossupunha o cálculo dos seguintes produtos: 2x5, 4x5, 6x5. O número cinco é um número dos números de referência do nosso sistema numérico. Como se pode observar, também na tabela 10, ainda não tinha sido trabalhada e construída a tabuada do 5 com os alunos. No entanto, os resultados obtidos das estratégias utilizadas pelos alunos para resolver esta tarefa (tabela 11) mostram que oito alunos usaram uma estratégia multiplicativa. Assim, os números de referência parecem facilitar os cálculos realizados pelos alunos.

Na exploração da tarefa "Impermeáveis" verificou-se que existiu uma diferença entre as estratégias usadas na primeira parte da tarefa e na segunda. Enquanto na primeira parte os alunos não utilizam estratégias multiplicativas, na segunda parte esta estratégia é usada por oito alunos. Este facto poderá ter ocorrido devido ao momento de discussão da primeira parte da tarefa, pois os alunos puderam partilhar as suas ideias e estratégias conseguindo utilizar na segunda parte da tarefa estratégias mais potentes e que foram discutidas na primeira parte da tarefa.

Os tipos de tarefas associados à sequência eram diversificados: exercícios, problemas, explorações de tabuadas, cadeias numéricas. Cada uma destas tarefas tinha o seu objetivo específico. No caso da exploração das tabuadas e cadeia numérica o objetivo era que os alunos pudessem utilizar as propriedades da multiplicação para calcularem novos produtos. Apesar de nestas tarefas os alunos realizarem esse tipo de trabalho mais específico, parece não se ter evidenciado na mobilização do uso dessas propriedades nas restantes tarefas da sequência. Por exemplo, foram propostas tarefas com questões que pressuponham o uso das propriedades da multiplicação e os alunos não recorreram às aprendizagens realizadas com a exploração da cadeia numérica. É o caso da tarefa “Parque do Moranguinho”. Esta tarefa foi explorada a seguir à exploração da cadeia numérica. Na tabela 11 pode verificar-se que o número de alunos que recorreram a estratégias multiplicativas na questão 1 foi bastante baixo. Efetivamente, nesta tarefa, apenas dois alunos usaram esta estratégia. Assim, poderá pensar-se que as cadeias facilitam o uso de algumas propriedades da multiplicação, mas que os alunos usam pouco essas propriedades na resolução de tarefas de multiplicação.

Na sequência de tarefas há algumas tarefas (e.g.: “Parque do Moranguinho” e “Gang dos Frescos”) que apresentam imagens com a malha retangular que foram parcialmente tapados para incentivar os alunos no uso da multiplicação. No entanto, os resultados indicam que tapar os objetos, por si só, não induz ao uso da multiplicação, visto que nestas questões a estratégia multiplicativa não foi a mais usada.

Apesar de a evolução do número de alunos que usa uma estratégia multiplicativa estar evidente na tabela 11, nota-se, também, por vezes, o uso de estratégias menos eficazes. Isto parece relacionar-se com os contextos das tarefas.

Contudo, globalmente, pela análise das resoluções dos alunos, pode dizer-se que o contexto das tarefas contribuiu para ajudar os alunos a usarem, cada vez com mais frequência, estratégias multiplicativas.

Para terminar, sintetizo as potencialidades evidenciadas da sequência de tarefas criada:

- Os contextos das tarefas, principalmente o uso de malha retangular, contribuem para o uso de estratégias multiplicativas;
- Os números de referência incluídos nas tarefas parecem facilitar os cálculos;
- O momento de discussão da 1.ª parte da tarefa pode ajudar os alunos a evoluírem as suas estratégias e procedimentos de cálculo na 2.ª parte da tarefa;
- As cadeias numéricas facilitam o uso das propriedades da multiplicação, no entanto, na resolução de outras tarefas os alunos usam pouco essas propriedades;
- Tapar parcialmente os objetos constituintes da malha retangular, por si só, não induz ao uso da multiplicação;

- As caraterísticas dos contextos das tarefas podem contribuir para o uso de estratégias menos eficazes por parte dos alunos.

6.2 Reflexão sobre a realização do estudo

Terminado o percurso de investigação é importante realizar um balanço final sobre as dificuldades com que me deparei ao longo deste percurso. Para além disso, é importante, ainda, referir o que aprendi com este projeto e de como perspetivo a minha prática de ensino da matemática enquanto futura professora.

Relativamente ao projeto desenvolvido, de forma global, é importante sublinhar que foi bastante desafiador e complexo. Em muitos momentos surgiram dúvidas e dificuldades. No entanto, com trabalho, pesquisa e dedicação foram ultrapassados.

Criar uma sequência de tarefas articuladas entre si foi um trabalho bastante desafiante. Neste estudo, propus-me desenvolver uma sequência de oito tarefas de multiplicação articuladas e adequadas aos alunos com os quais estava a trabalhar. Esta ideia surgiu por dois motivos. Primeiro, por acreditar que as sequências de tarefas de multiplicação ajudam os alunos a desenvolver o raciocínio matemático desta operação. Segundo, porque gosto de desafios e de testar os meus limites enquanto professora.

Aprendi que para criar uma sequência de tarefas exequível, adequada e potente é necessário que o professor conheça as potencialidades, as dificuldades e os limites da sua turma. Cada tarefa deve ser planeada ao detalhe: os números envolvidos, o contexto da tarefa, o modo de exploração, as possíveis estratégias e procedimentos de cálculo que os alunos vão utilizar. Só assim o professor consegue acompanhar os alunos, apoiá-los e fazer com que as suas ideias sejam partilhadas e evoluídas. Este foi o primeiro desafio deste estudo. Ao contrário do que era suposto só iniciei o trabalho com a turma no presente ano em que desenvolvi o projeto, por esse motivo, realizei um grande trabalho de pesquisa junto da professora cooperante para perceber as características da turma relativamente à área da Matemática. Apesar disso, considero que consegui construir uma boa sequência de tarefas, visto que os resultados apresentados evidenciam que os alunos evoluíram as suas estratégias de resolução de tarefas de multiplicação.

Realizar tarefas ‘soltas’ sem conexão entre si não ajuda os alunos a evoluírem os seus raciocínios matemáticos, pois não existe qualquer ligação entre as tarefas. Assim, torna-se importante criar uma sequência com vista a alcançar um objetivo. Até esse objetivo ser alcançado devem ser delineadas marcos que os alunos devem atingir. Deste modo, as sequências permitem que as tarefas sejam articuladas entre si, ou seja, que exista uma relação entre os contextos e números envolvidos de modo a que os alunos evoluam e melhorem as estratégias e procedimentos de cálculo que usam para resolver tarefas de multiplicação.

A minha primeira dificuldade surgiu logo no início do estudo enquanto preparava a antevisão das estratégias, procedimentos de cálculo e dificuldades dos alunos. Para planear estes três pontos construi uma tabela (ver apêndice I). Nesta tabela deveriam constar os seguintes itens: nome da tarefa, tipo de tarefa, possíveis estratégias, possíveis procedimentos de cálculo (com a descrição detalhada de cada um) e possíveis dificuldades. Relativamente às estratégias foi fácil de as definir. No entanto, no que diz respeito aos procedimentos de cálculo foi onde senti maiores dificuldades. Apesar de prever como os alunos poderiam responder às questões não me debrucei muito sobre os diferentes procedimentos de cálculo, apontando apenas um ou dois para cada estratégia sem perceber que tipo de procedimento de cálculo poderia estar envolvido na resolução. Assim, durante a exploração das tarefas com os alunos também não dei grande importância aos procedimentos de cálculo, focando-me, principalmente, nas estratégias. Este foi um dos pontos fracos do trabalho que realizei. Apesar de ser importante reconhecer a estratégia que o aluno utiliza é também importante perceber o procedimento de cálculo que efetou, pois permite compreender melhor qual o caminho que o aluno adotou na resolução da tarefa e em que nível de cálculo se situa.

Através da previsão das estratégias e procedimentos de cálculo dos alunos, realizada anteriormente à exploração da tarefa na sala de aula, consegui identificar as dificuldades que os alunos sentiam e, por vezes, os motivos das mesmas, o que me permitiu encontrar uma forma de os ajudar a ultrapassá-las (Mendes, Brocardo & Oliveira, 2011). Consegui, ainda, registar nestas tabelas as estratégias utilizadas pelos alunos. Este registo, apoiou-me na seleção das resoluções para o momento de discussão coletiva. A construção destas tabelas foi essencial para o trabalho desenvolvido na sala de aula durante a exploração das tarefas, pois consegui, desta forma, realizar um trabalho mais consistente e direcionado para a melhoria das aprendizagens dos alunos.

Outro dos desafios foi o facto de a sequência não ser estática. Para que esta seja adequada tem que existir um equilíbrio entre as dificuldades e facilidades que os alunos vão apresentando numa tarefa e o contexto da seguinte. Isto é, se numa dada tarefa os alunos apresentam uma dificuldade específica, na tarefa seguinte essa dificuldade deve ser tida em conta na conceção/seleção desta tarefa de modo a ser ultrapassada. Por essa razão, as tarefas poderiam ser modificadas a qualquer momento. Para que esta mudança fosse bem afetuada era necessário ser realizado um trabalho diário após a exploração das tarefas, ou seja, realizar uma análise diária das aulas. Mas, na minha opinião, este aspeto que, inicialmente, parecia ser uma dificuldade tornou-se um dos pontos fortes do meu trabalho. Após a exploração de cada tarefa realizava um longo trabalho de análise e reformulação da sequência para que esta fosse adequada aos alunos.

Depois de todo o planeamento da sequência, surge a exploração das tarefas. Neste momento surgiram dois grandes desafios relacionados com a cultura da sala de aula já instituída. Os alunos trabalhavam a pares frequentemente, no entanto, não na disciplina de matemática. Por essa razão, foi importante comunicar com os mesmos o que se pretendia. O objetivo era realizar tarefas de matemática e criar momentos de partilha de ideias. Para que isto acontecesse houve um trabalho diário junto dos alunos. Também, realizar aulas de matemática seguindo o modelo do ensino exploratório não é só um desafio para o professor, como já referi, mas, também, para os alunos. Durante a discussão das primeiras tarefas necessitei de interromper por diversas vezes os discursos dos alunos para que estes percebessem algumas das ´regras´ que deviam cumprir. Contudo, após algumas semanas, os alunos não sentiam timidez ao falar para o grande grupo, explicitavam o seu modo de pensar e criavam momentos de partilha de ideias, sem criticar as divergentes opiniões.

Em conclusão, este estudo permitiu-me perceber que no futuro, enquanto professora, deverei debruçar-me e trabalhar mais sobre os procedimentos de cálculo que os alunos utilizam para resolver tarefas de multiplicação. Deverei, também, continuar a utilizar este método de trabalho visto que através dele obtive resultados positivos. Considero que todas as dificuldades e dúvidas pelas quais passei fizeram com que pensasse, estudasse e pesquisasse mais acerca do assunto e só assim consegui desempenhar as minhas funções o melhor possível. Futuramente, irei, provavelmente, tomar melhores decisões e o ensino/aprendizagem da multiplicação poderá tornar-se mais eficaz, adequado e planeado. Ao olhar para todo o trabalho que desenvolvi percebo que consegui ultrapassar grandes desafios e dificuldades. Por esse motivo, noto que cresci e evolui a nível profissional.

A nível pessoal também obtive grandes conquistas. Primeiro, este foi um projeto no qual me envolvi imenso e meu deu muito gozo realizar, não só pelas pessoas com quem me cruzei ao longo da realização do estudo, mas também porque incidia numa área disciplinar pela qual sou encantada. Depois, foi um projeto que envolvia muitas horas de pesquisa, de reformulação, de dedicação.

Findando este relatório, resta-me dizer que não poderia estar mais satisfeita com o meu desempenho relativamente ao estudo que desenvolvi e aos resultados que obtive. Foram horas e horas de trabalho que se transformaram em importantes momentos de aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Afonso, N. (2014). *Investigação naturalista em Educação: um guia prático e crítico.* Gaia: Fundação Manuel Leão.

Aires, L. (2015). *Paradigma Qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

Almeida, J. (1990). *A investigação nas ciências sociais*. Lisboa: Presença.

Bell, J. (2010). *Como realizar um projecto de investigação*. Lisboa: Gravida.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2013). *Investigação qualitativa em educação: uma instrodução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carvalho, A., & Gonçalves, H. (2003). Multiplicação e divisão: conceitos em construção. *Educação e Matemática*, 75, pp. 23-25.

Godoy, A. (1995). Pesquisa Qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas* , pp. 20-29.

Leitão, A., & Cangueiro, L. (2007). *Princípios e Normas do NCTM – um percurso pela Álgebra.* (ATM, Ed.) Obtido em 28 de julho de 2016, de http://www.apm.pt/files/_Conf_Cangueiro_Leitao_487e4d92df2e1.pdf

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). La Multiplicación: Construyendo oportunidades para su aprendizaje. In M. Isoda & R. Olfos (Ed.). *Enseñanza de la multiplicación: Desde el estudio de clases japonés a las propuestas iberoamericanas* (pp. 321-350). Valparaíso, Chile: Ediciones universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Mendes, M. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º Ciclo.* Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação . *Quadrante: Revista de investigação em Educação Matemática, XXII*, pp. 133-162.

Ministério da Educação (ME). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

NCTM. (2007). *Normas para a Matemática Escolar: do pré-escolar ao 12º ano.* Lisboa: APM - Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Santana, E. (2012). *Adição e subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?* Santa Cruz: Editora dos UESC.

Silva, C. (2015). A aprendizagem da multiplicação: Um estudo no 2.º ano de escolaridade. (Dissertação de Mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal)

Sousa, M., & Baptista, C. (2011). *Como fazer investigação, dissertações, teses e relatórios*. Lisboa: Pactor.

Stein, M., & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 105, 268-275.

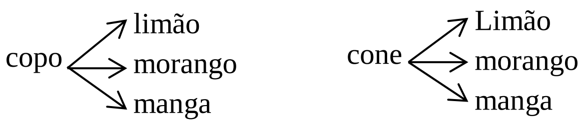
Vilelas, J. (2009). *O processo de construção do conhecimento*. Lisboa: Sílabo.

APÊNDICE

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Cadeia Numérica”

2x2= 4 porque sei a tabuada
4x2=8 porque 2x2+2x2=8
8x2=16 porque 4x2+4x2=16 OU 4x2+2x2+2x2=16
10x2=20 porque 8x2+2x2=20
12x2=24 porque 10x2+2x2=24 OU 8x2+4x2=24
14x2=28 porque 12x2+2x2=28 OU 10x2+4x2=28
18x2=36 porque 14x2+4x2=36 OU 10x2+8x2=36

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Quantos Gelados?”

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
Desenho de todas as opções	Existem os sabores: limão, morango e manga. Existem as bases: cone e copo.  A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Diagrama	 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Adição	A Maria pode escolher 3 sabores (limão, morango e manga) no cone e 3 (limão, morango e manga) sabores no copo. 3+3=6 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Multiplica-ção	Existem 3 sabores de gelado (limão, morango e manga) e 2 bases (copo e cone). 3x2=6 **OU** 2x3=6 A Maria pode escolher seis gelados diferentes.		
Outra:			

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Quantos Lanches?”

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
Desenho de todas as opções	 A Maria pode escolher 24 lanches diferentes.	Como existem muitos desenhos para fazer (24) os alunos podem esquecer-se de alguma combinação. Por exemplo, colocar o cone de limão com banana e água e não colocar o cone de limão com banana e sumo de laranja.	

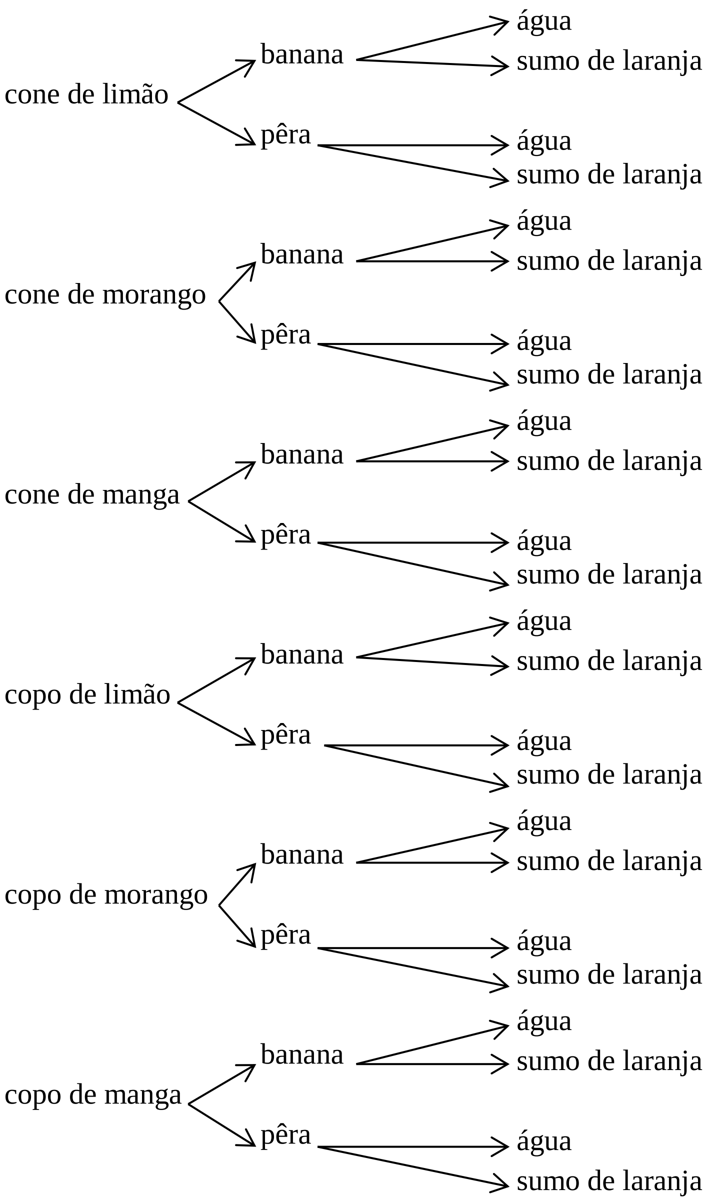
Diagrama	O lanche é composto por um gelado, uma peça de fruta e uma bebida. Opções – o gelado pode ser de cone ou copo e com os sabores limão, morango e manga. A peça de fruta pode ser banana ou pêra. A bebida pode ser água ou sumo de laranja.  A Maria pode escolher 24 lanches diferentes.	Os alunos podem enganar-se na contagem de combinações, isto é, em cada diagrama existem 4 opções de lanches, mas os alunos podem considerar apenas 2 opções. Os alunos podem considerar que cada seta representa uma opção de lanche e assim cada diagrama é considerado como 6 opções de lanches e não como 4 opções diferentes de lanche.	

Tabela I

Água

Copo de limão	Banana
Copo de morango	Banana
Copo de manga	Banana
Cone de limão	Banana
Cone de morango	Banana
Cone de manga	Banana

Sumo de laranja

Copo de limão	Banana
Copo de morango	Banana
Copo de manga	Banana
Cone de limão	Banana
Cone de morango	Banana
Cone de manga	Banana

Água

Copo de limão	Pêra
Copo de morango	Pêra
Copo de manga	Pêra
Cone de limão	Pêra
Cone de morango	Pêra
Cone de manga	Pêra

Sumo de Laranja

Copo de limão	Pêra
Copo de morango	Pêra
Copo de manga	Pêra
Cone de limão	Pêra
Cone de morango	Pêra
Cone de manga	Pêra

A Maria pode escolher 24 lanches diferentes.

Tabela II

O lanche é composto por gelado + bebida + fruta.

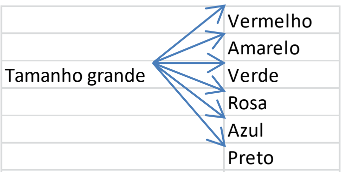
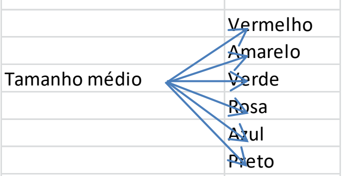
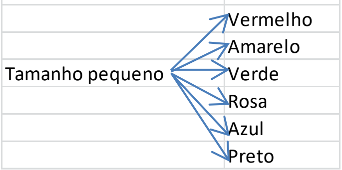
Gelado	Bebida	Fruta
Copo de limão	Água	Banana
Copo de morango	Água	Banana
Copo de manga	Água	Banana
Cone de limão	Água	Banana
Cone de morango	Água	Banana
Cone de manga	Água	Banana
Copo de limão	Sumo de laranja	Pêra
Copo de morango	Sumo de laranja	Pêra
Copo de manga	Sumo de laranja	Pêra
Cone de limão	Sumo de laranja	Pêra
Cone de morango	Sumo de laranja	Pêra
Cone de manga	Sumo de laranja	Pêra
Copo de limão	Água	Pêra
Copo de morango	Água	Pêra
Copo de manga	Água	Pêra
Cone de limão	Água	Pêra
Cone de morango	Água	Pêra
Cone de manga	Água	Pêra
Copo de limão	Sumo de laranja	Banana
Copo de morango	Sumo de laranja	Banana
Copo de manga	Sumo de laranja	Banana
Cone de limão	Sumo de laranja	Banana
Cone de morango	Sumo de laranja	Banana
Cone de manga	Sumo de laranja	Banana

A Maria pode escolher 24 lanches diferentes.

Multiplicação	Existem 6 gelados diferentes. Existem 2 tipos de bebidas. Existem 2 tipos de frutas. 6x2x2= 24 A Maria pode escolher 24 lanches diferentes.		
Outra:			

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Impermeáveis”

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
De senho de todas as opções	 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.	Os alunos podem desenhar todas as cores mas apenas um tamanho de impermeáveis, ou seja, consideram 6 cores e um só tamanho.	
Tabela	 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.		

Diagrama	   Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.		
Adição	Existem 3 tamanhos de impermeáveis de seis cores. Por isso, para cada tamanho existem seis cores. 6+6+6= 18 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.	Os alunos poderão adicionar o número de cores novas (2) ao número total de opções obtidas na tarefa do livro de fichas. Assim, calculam 12+2=14, por isso, existem 14 impermeáveis à venda na loja.	
	Existem 3 tamanhos de impermeáveis de seis cores. Por isso, para cada cor existem 3 tamanhos. 3+3+3+3+3+3= 18 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.		
Multiplicação	Existem 3 tamanho de impermeáveis. Existem 6 cores de impermeáveis. 3x6=18 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.		
	Existem 6 cores de impermeáveis. Existem 3 tamanho de impermeáveis. 6x3=18 Existem à venda na loja do Senhor Manuel 18 impermeáveis.		
Outra:			

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Gang dos Frescos: 1ª parte”

1ª pergunta

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
Contagem de Um em um	Contei os cromos que estão na caderneta. A Sofia já colou 20 cromos na sua caderneta.		
Adição sucessiva	Uma linha tem 5 cromos. São 4 linhas. 5+5+5+5= 20 A Sofia já colou 20 cromos na sua caderneta. <u>OU</u> Uma coluna tem 4 cromos. São 5 colunas. 4+4+4+4+4 = 20 A Sofia já colou 20 cromos na sua caderneta. <u>OU</u> Os cromos da cebola são 2+2+2+2+2= 10 A quantidade de cromos de abóbora é igual à quantidade de cromos de cebola. 10+10=20 A Sofia já colou 20 cromos na sua caderneta.		
Multiplicação	Cromos da cebola 2x5=10 <u>OU</u> 5x2=10 Cromos da abóbora 2x5= 10 <u>OU</u> 5x2=10 10+10=20 <u>OU</u> Os cromos estão em colunas de 4 cromos e em linhas de 5 cromos. 4x5= 20 <u>OU</u> 5x4=20 A Sofia já colou 20 cromos na sua caderneta.		
Outra:			

2ª pergunta

	Possíveis resoluções	Dificuldades	Alunos
Contagem de um em um	Contei os quadrados que faltam preencher com cromos. Para a Sofia completar a caderneta faltam colar 10 cromos.		
Adição sucessiva	Uma linha tem 5 cromos. São 2 linhas. 5+5= 10 Para a Sofia completar a caderneta faltam colar 10 cromos. <u>OU</u> Uma coluna tem 2 cromos. São 5 colunas. 2+2+2+2+2 = 10 Para a Sofia completar a caderneta faltam colar 10 cromos.		
Relação com apergunta 1	Eu vi que a quantidade de cromos que faltavam colar na caderneta era igual é quantidade de cromos de cebola ou abóbora, portanto faltam colar 10 cromos. Para a Sofia completar a caderneta faltam colar 10 cromos.		
Multiplicação	Número de linhas sem cromos = 2 Número de colunas sem cromos = 5 2x5= 10 <u>OU</u> 5x2=10 Para a Sofia completar a caderneta faltam colar 10 cromos.		
Outra:			

3ª pergunta

	Possíveis resoluções	Dificuldades	Alunos
Contagem de um em um	Contei os cromos que já estavam colados e os quadrados em branco. Quando terminar, a Sofia vai ter 30 cromos na caderneta.		
Adição sucessiva	Uma linha tem 5 cromos. São 6 linhas. 5+5+5+5+5+5= 30 Quando terminar, a Sofia vai ter 30 cromos na caderneta. OU Uma coluna tem 6 cromos. São 5 colunas. 6+6+6+6+6 = 30 Quando terminar, a Sofia vai ter 30 cromos na caderneta.		
Relação com a pergunta 1 e 2	Na primeira pergunta calculei o número de cromos já colados. Estavam colados 20 cromos. Na segunda pergunta calculei o número de cromos que faltavam colar. Faltavam colar 10 cromos. 20+10=30 Quando terminar, a Sofia vai ter 30 cromos na caderneta.		
Multiplicação	Número de linhas = 6 Número de colunas = 5 6x5= 30 OU 5x6=30 Quando terminar, a Sofia vai ter 30 cromos na caderneta.		
Outra:			

Possíveis estratégias e dificuldades dos alunos na resolução da tarefa “Gang dos Frescos: 2ª parte”

	Possíveis resoluções	**Dificuldades**	**Alunos**
Contagem progressiva	Uma linha tem 5 cromos e o leite ocupou 4 linhas. 5+5+5+5= 20 A Sofia precisa de colar novamente 20 cromos na caderneta.		
	Uma coluna tem 4 cromos e o leite ocupou 5 linhas. 4+4+4+4+4= 20 A Sofia precisa de colar novamente 20 cromos na caderneta.		
Relação com a pergunta 1	Eu vi que os cromos que ficaram sujos de leite foram os cromos da cebola e da abóbora. Na pergunta 1 descobri que esses cromos eram 10+10, portanto os cromos sujos de leite são 20. A Sofia precisa de colar novamente 20 cromos na caderneta.		
	Eu vi que os cromos que ficaram sujos de leite foram os que a Sofia já tinha colado na caderneta na pergunta 1. Por isso, a Sofia precisa de colar novamente 20 cromos. A Sofia precisa de colar novamente 20 cromos na caderneta.		
Multiplicação	A parte suja de leite ocupou 5 linhas e 4 colunas de cromos. 5x4=20 OU 4x5=20 A Sofia precisa de colar novamente 20 cromos na caderneta.		
Outra:			