

Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior

Leonor Santos

Universidade de Lisboa

leonor.santos@fc.ul.pt

Joana Brocardo

Escola Superior de Educação de Setúbal

jbroadcard@ese.ips.pt

Manuela Pires

Esc. Sec. Calazans Duarte

pirescaiado@mail.telepac.pt

Ana Isabel Rosendo

Universidade de Coimbra

arosendo@mat.uc.pt

A visão de que um ensino incidindo sobre a resolução de tarefas rotineiras é desajustado das necessidades colocadas por uma sociedade que evolui rapidamente, tem enquadrado e determinado opções e decisões ao nível do desenvolvimento curricular em Matemática. Este facto toma uma importância ainda maior se atendermos ao alargamento da escolaridade obrigatória verificado nos últimos anos. Conceber e implementar programas educativos que assumam que todos os indivíduos (e não apenas uma elite) se podem tornar pensadores competentes tem constituído assim um grande desafio.

Ao nível da aprendizagem da Matemática tem vindo a ser destacada a ideia de que aprender Matemática deve consistir, essencialmente, em *fazer* Matemática. De facto, considera-se importante que os alunos tenham oportunidades de fazer

Matemática, particularmente através do trabalho com tarefas de natureza investigativa e exploratória vivendo, ao seu nível de maturidade, uma experiência com características idênticas à dos matemáticos profissionais. Passa-se de uma visão do conhecimento matemático como um corpo de factos e procedimentos que trabalham com quantidades, medidas e formas de relações entre aqueles (Schoenfeld, 1992) para um entendimento da Matemática como uma ciência de padrões que se vai construindo por sucessivas tentativas, baseadas na observação e na experimentação.

As investigações matemáticas precisam de ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais (por exemplo, estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões).

No nosso país, tal como em muitos outros, apesar das recomendações curriculares realçarem a importância das investigações, o lugar que elas ocupam no ensino da Matemática é ainda bastante limitado (APM, 1998). Este facto, em grande parte, despertou o interesse de vários investigadores para uma maior compreensão sobre a importância a atribuir-lhes no currículo, associada às potencialidades das investigações matemáticas, às dificuldades que se colocam ao nível da sua introdução no currículo e aos factores que contribuem para o êxito da sua realização na aula de Matemática.

Neste texto, procuramos problematizar e discutir diferentes aspectos relacionados com as investigações matemáticas, tomando por base um conjunto de estudos desenvolvidos em Portugal que incidiram nesta temática e que foram realizados com alunos e/ou professores do 2º e 3º ciclos do ensino básico e do ensino secundário. Começa-se por fazer uma breve clarificação do conceito de investigação matemática e por contextualizar os estudos que serão analisados, apresentando-se um resumo dos seus principais propósitos, da metodologia seguida, do número de investigações propostas e dos anos de escolaridade em que foram realizados. A apresentação e discussão dos estudos considerados neste trabalho organizam-se em duas partes: uma relativa aos professores e outra relativa aos alunos. Em cada uma delas, a análise desenvolvida faz-se a partir dos itens e especificações considerados na figura seguinte:

<i>Itens</i>	<i>Especificação relativa aos professores</i>	<i>Especificação relativa aos alunos</i>
Tipo de actividade	<ul style="list-style-type: none"> • Objectivos presentes nas investigações • Modo como prepara a introdução das tarefas na aula 	<ul style="list-style-type: none"> • Ao longo de uma tarefa • Evolução ao longo de várias tarefas
Tipo de interacção	<ul style="list-style-type: none"> • Durante a exploração das tarefas na aula 	<ul style="list-style-type: none"> • Durante a exploração das tarefas na aula
Estratégias de ensino	<ul style="list-style-type: none"> • Modos de organização do trabalho: na aula e de uma aula para outra 	<ul style="list-style-type: none"> • Modo como os alunos vêem as estratégias de ensino
Produtos	<ul style="list-style-type: none"> • Pedidos 	<ul style="list-style-type: none"> • Produzidos

Figura 1

O conceito de investigação matemática

Na tentativa de clarificar o conceito de investigação matemática vários autores recorrem à análise das diferenças e semelhanças entre a resolução de problemas e a actividade de investigação. Ernest (1996) considera que um primeiro aspecto distintivo é a formulação de problemas. De facto, na resolução de problemas as questões, de um modo geral, estão formuladas à partida, enquanto que nas investigações esse será o primeiro passo a desenvolver. Uma outra distinção entre resolução de problemas e actividade de investigação relaciona-se com os seus objectivos: num problema procura-se atingir algo que não é imediatamente acessível, procura-se a solução, e nas investigações o objectivo é a própria exploração. Deste modo, a exploração de uma investigação é um processo divergente e a resolução de problemas um processo convergente. Finalmente, apesar de tanto os problemas como as investigações poderem ser entendidos como uma abordagem pedagógica à Matemática, têm características diversas porque o papel do professor e dos alunos podem ser diferentes. Numa abordagem de resolução de problemas é ao professor que cabe colocar o problema enquanto o aluno tem a tarefa de encontrar um caminho que o conduza à solução. O aluno pode ter alguma criatividade mas o professor, de um modo geral, controla tanto o conteúdo como o modo de ensinar. Numa abordagem pedagógica de investigação, o professor poderá escolher a situação de partida mas é o aluno que, em princípio, formula as questões sobre a situação proposta definindo, assim, os seus próprios

problemas dentro dela. Desta forma, as relações de poder ao nível da aula de Matemática podem alterar-se.

Para Frobisher (1994), a ideia de que a exploração de uma investigação é uma actividade divergente é também bastante forte e é com base nesta característica que subdivide um conceito geral de problema (que designa como “problema”) em problemas e investigações.

A identificação dos processos matemáticos que estão envolvidos na exploração de uma investigação além de contribuir para clarificar o conceito de investigação matemática, ajuda a perceber as características da actividade que se pretende que os alunos desenvolvam ao investigar.

Ponte e Matos (1992) precisam as características da actividade inicial de exploração: idealização e realização de experiências iniciais. Em seguida, segundo Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas (1998), é necessário começar por colocar questões produtivas e formular e testar as primeiras conjecturas. Este processo pode mostrar a necessidade de recolher mais dados, de abandonar as conjecturas formuladas inicialmente e de formular novas conjecturas. Torna-se então importante procurar estabelecer argumentos plausíveis e provas formais de modo a poder-se rejeitar ou validar as conjecturas resultantes do processo anterior. É ainda de notar que uma outra característica deste processo resulta de poderem, ao longo dele, emergir novas questões para investigar.

Brocardo (2001) salienta que a actividade de investigação é caracterizada por vários processos matemáticos que não podem ser apenas seguidos de uma forma linear e ordenada. A recolha e organização de dados, a formulação e teste de conjecturas, a prova, são fases do processo investigativo que devem ser percorridos tanto num sentido como noutro, sendo fundamental analisar as interacções entre eles. A expressão “não linearidade” é usada por esta autora para resumir esta característica da actividade de investigação.

Breve caracterização dos estudos analisados

Este texto analisa trabalhos que foram realizados com o objectivo de estudar diferentes aspectos do trabalho investigativo. Na figura 2 resumem-se os principais propósitos de cada estudo, a metodologia usada, o número de tarefas de investigação propostas e os ciclos ou anos de escolaridade em que eles foram realizados.

<i>Autor(es) e ano</i>	<i>Principais propósitos</i>	<i>Metodologia</i>	<i>Nº de tarefas</i>	<i>Ciclo/anos de escolaridade</i>
(1991) Matos	Estudar as concepções e atitudes dos alunos de 8º ano em relação à Matemática, no contexto de actividades de projecto e de investigação com utilização da linguagem Logo	Qualitativa; estudo de caso	Em número variável (dependendo da dinâmica de cada grupo e dos problemas parcelares surgidos dos projectos)	8º ano
(1997) Mendes	Analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação na aula de Matemática	Qualitativa; estudo de caso	4	10º ano
(1997) Segurado	Perceber o modo como alunos de 6º ano de escolaridade se podem envolver em actividades de exploração e investigação na sala de aula e avaliar a sua influência na mudança das suas concepções.	Qualitativa; estudo de caso	5	2º ciclo
(1998) Cunha	Identificar os principais dilemas e dificuldades que os professores de Matemática encontram na realização de tarefas de investigações nas suas aulas, a sua origem e o modo como são resolvidos	Qualitativa; estudo de caso; narrativas	4	2º ciclo
(1998) Oliveira	Conhecer as perspectivas e práticas de professores no desenvolvimento de investigações matemáticas	Qualitativa; estudo de caso; narrativas	4	3º ciclo (8º ano)
(1999) Ponte <i>et al.</i>	Analisar os processos de pensamento do professor e dos alunos e as interacções e os papéis assumidos por estes dois actores na proposta e realização de investigações matemáticas	Qualitativa; estudo de caso	1	A tarefa foi proposta a várias turmas do 3º ciclo
(2000) Brunheira	Analisar o conhecimento matemático e didáctico do professor estagiário associado à realização de trabalho investigativo na aula de Matemática, bem como as atitudes que manifestam, a forma como evoluem e as relações que estabelecem entre esses conhecimentos e atitudes.	Qualitativa; estudo de caso	3	3º ciclo e secundário

(2000) Fonseca	Analisar os processos matemáticos utilizados pelos alunos ao realizarem tarefas de investigação na aula de Matemática, assim como o discurso promovido nessas mesmas aulas.	Qualitativa, estudo de caso	5	10º ano
(2000) Rocha	Compreender as percepções dos alunos face à Matemática e à calculadora gráfica e a sua relação com o uso que lhe é dado	Qualitativo; estudo de caso	5	10º ano
(2000) Varandas	Estudar o processo de avaliação do desempenho dos alunos na realização de investigações matemáticas na sala de aula	Qualitativa; estudo de caso.	4	10º ano
(2001) Brocardo	Estudar o modo como o desenvolvimento de um currículo, em que a exploração de tarefas de investigação é encarado como metodologia privilegiada, influencia a forma como os alunos aprendem e vêem a Matemática e quais os aspectos de carácter curricular que emergem da implementação de um tal projecto	Qualitativa, estudo de caso	13	3º ciclo

Figura 2

As investigações e o professor de matemática

Tipo de actividade

A integração das investigações no currículo de Matemática pode ser justificada por diversas razões. Por exemplo, Goldenberg (1999) aponta razões de três tipos. Uma, é relacionada com a natureza da própria ciência, isto é, é tão necessário conhecer uma parte do corpo dos resultados como saber como se pensa matematicamente, ou seja, conhecer os modos de pensar que designa por “hábitos matemáticos de pensamento” (p. 37); outra, é porque as investigações motivam os alunos; e ainda, porque desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem. Também se pode encontrar em Jaworski (1994) e Pirie (1987) argumentos na mesma linha de raciocínio, muito embora esta segunda autora acrescente uma quarta ordem de razões ligadas ao estabelecimento de um ambiente de aprendizagem vivo em que os alunos

participam activamente. Mas poder-se-á perguntar em quem medida os estudos realizados em Portugal apontam igualmente para estas potencialidades das investigações?

Segundo Cunha (1998), as investigações motivam os alunos, ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior expressas no programa, em particular, o raciocínio e a perspicácia, para além de constituírem um contributo significativo para que os alunos percepcionem a Matemática como uma ciência em evolução e construção. A mudança de concepções face à Matemática é também destacada por Segurado (1997). Esta autora acrescenta ainda o desenvolvimento de um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e reconhecimento das interacções entre pares. A realização de investigações é ainda potenciadora do desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática (Mendes, 1997).

Dada a natureza das actividades de investigação matemáticas, em particular a necessidade de se partir de uma situação aberta, desenvolver com os alunos investigações coloca novos desafios ao professor sobretudo ao nível da planificação. A necessidade de uma formação matemática sólida parece imprescindível (Goldenberg, 1999), não só para que o professor seja capaz de desenvolver e percepcionar níveis diversos de aprofundamento, como se aperceber quando uma via escolhida pelos alunos poderá levá-los para um território matemático por eles ainda desconhecido, isto é, apetrechar o professor de um sentido matemático indispensável para a gestão destas aulas de Matemática.

Do mesmo modo, a capacidade do professor recorrer a estratégias diversificadas de resolução é igualmente identificada como um factor essencial na actividade de planificação. Este aspecto é aliás salientado por Brunheira (2000) que refere as dificuldades levantadas durante a planificação de aulas quando os professores apresentam uma preferência clara pela utilização de métodos analíticos, em detrimento de estratégias informais e a quase total ausência de estratégias geométricas.

Uma atitude positiva face a este tipo de actividade é, no entanto, apontada como um factor facilitador para o trabalho a desenvolver pelo professor. O professor lida melhor com o imprevisto (dada a natureza aberta das investigações por muito exaustiva que seja a planificação da aula é sempre possível surgirem situações não previstas) e envolve-se com mais entusiasmo e motivação na resolução das tarefas (Brunheira, 2000).

Uma das principais actividades a desenvolver na planificação é a selecção, adaptação ou construção de situações possíveis de serem investigadas pelos alunos. No entanto, tal não é simples: “É um trabalho criativo (para o qual não há receitas)” (Oliveira, Ponte, Santos e Brunheira, 1999, p. 100). É uma tarefa complexa que envolve a ponderação de diferentes aspectos, tais como as potencialidades e

interesses dos alunos, os conhecimentos necessários, e os materiais envolvidos. O papel da experiência é neste caso determinante, muito embora não resolva todos os problemas a enfrentar, nem tão pouco dispense uma preparação cuidada deste tipo de aulas. Por exemplo, como aponta Varandas (2000), as professoras que participaram no seu estudo, ambas com larga experiência de ensino e tendo já no passado feito recurso nas suas aulas a investigações, tiveram uma posição consensual na escolha da tarefa, mas a sua formulação (grau de estruturação das questões a propor) foi objecto de discussão. Foi ponderado que uma tarefa mais estruturada poderia limitar a actividade de investigação dos alunos mas, em contrapartida, permitir-lhes uma maior autonomia, principalmente aos menos habituados a desenvolver trabalho de cunho investigativo.

A própria experiência pessoal vivida do professor em tarefas desta natureza poderá ajudar a desenvolver uma atitude de auto-confiança essencial para o desempenho da sua prática. Da experiência recolhida ao longo do projecto “Matemática para Todos” pode afirmar-se que, numa primeira fase, é natural que os professores comecem por utilizar tarefas produzidas por outros, introduzindo-lhes pequenas alterações para as ajustarem aos seus alunos, se for caso disso, e só posteriormente com a aquisição de alguma experiência neste tipo de trabalho é de esperar que comecem a criar novas tarefas de investigação. O grau de estruturação das tarefas tende também a diminuir sucessivamente à medida que o professor vai tendo mais experiência (Brunheira, 2000).

Diversos factores poderão influenciar a escolha das tarefas. Segundo Varandas (2000), a pressão no que respeita ao cumprimento dos conteúdos a tratar em cada período condicionou algumas das opções das professoras, nomeadamente a escolha de tarefas que tivessem uma relação estreita com os conteúdos a leccionar e a necessidade de reajuste na sua calendarização. Outro factor que condicionou a escolha de uma dada tarefa foi já ter sido anteriormente experimentada por uma das professoras, isto é, haver já um conhecimento prévio sobre a tarefa.

Mas planificar aulas com investigações matemáticas não se limita à selecção ou construção de tarefas possíveis de serem investigadas acompanhada da sua realização. É igualmente necessário preparar o modo como a tarefa vai ser apresentada aos alunos, escolher a metodologia de trabalho, decidir o modo como vão ser confrontados os processos usados, bem como a produção final que é esperada dos alunos e reflectir após as aulas para poder inflectir e reajustar as próximas planificações. Em particular, as indicações a dar aos alunos vão sendo definidas a partir das experiências desenvolvidas (Varandas, 2000). Por exemplo, num primeiro momento, os relatórios podem constituir um foco particular de atenção, dada a escassa experiência dos alunos. Num segundo momento, o foco de atenção passa para os cuidados a ter na distribuição do trabalho durante a

elaboração da tarefa, devido ao facto de em muitos grupos haver apenas um aluno a fazer registos (Varandas, 2000).

O foco de atenção também é variável ao longo da experiência de planificação de aulas com tarefas possíveis de serem investigadas. Segundo Brunheira (2000), os professores estagiários que estudou, começaram, numa primeira fase, sobretudo a atender à resolução da tarefa com vista à previsão de cenários possíveis de desenvolvimento, para, depois, levarem a cabo uma preparação mais cuidada em termos do apoio a dar aos alunos, e para, posteriormente, também se focarem na preparação da apresentação e discussão conjunta da tarefa.

Tipo de interacções

Na sala de aula, o trabalho investigativo envolve em geral três fases: a introdução da tarefa, o desenvolvimento do trabalho e a discussão final (Christiansen e Walter, 1986). Sejam quais forem as particularidades que diferenciam entre si estas fases, em qualquer uma delas pressupõe-se a existência de momentos de interacção entre o professor e os alunos. O papel do professor nesta interacção pode ser de dois tipos: modo afirmativo, quando faz uma afirmação, clarifica o sentido de uma afirmação, explica ou valida, e o modo interrogativo quando pede clarificações, questiona, ou pede justificações (Ponte, Ferreira, Brunheira, Oliveira e Varandas, 1999).

Na introdução da tarefa, o professor poderá tomar diversas decisões, nomeadamente na forma escrita ou oral com que é feita a sua apresentação e na maior ou menor informação que dá nessa fase. Com base na reflexão desenvolvida no seio do projecto “Matemática para Todos”, um dos meios possíveis é o misto, incluindo a distribuição do enunciado escrito da tarefa completado por uma apresentação oral para toda a turma. Esta poderá ser constituída por uma leitura em grande grupo para os níveis mais baixos de escolaridade ou por um ou outro comentário que o professor julgue pertinente ou colocar questões-chave cujas respostas revelem se os alunos estão ou não a entender a proposta (Tudella, Ferreira, Bernardo, Pires, Fonseca, e Varandas, 1999). Estes autores alertam, por um lado, para o risco de demasiada informação ser uma limitação ao desenvolvimento da autonomia dos alunos e, por outro, se a tarefa não estiver suficientemente clara para os alunos poder vir a criar potenciais obstáculos ao trabalho dos alunos.

Ao longo do desenvolvimento da actividade de investigação, parece fundamental que o confronto de ideias se processe por meio da argumentação (Wood, 1999). A criação de tal ambiente de aprendizagem exige que o professor seja capaz de orientar o aluno sem contudo lhe dar respostas. Uma das maiores dificuldades sentidas pelo professor, apontadas por Rocha (2000), diz respeito ao apoio a dar aos alunos deixando-lhes no entanto a margem de liberdade

indispensável neste tipo de tarefas. Ponte *et al.* (1998), referem as dificuldades dos professores em dosearem o apoio a prestar aos alunos. Os professores tendem a ficar embaraçados quando a discussão toma caminhos imprevistos” (p. 122), bem como em colocar boas questões que orientem os alunos sem lhes dizerem como se faz. Também em Varandas (2000) se encontra o reconhecimento do cuidado a ter por parte do professor de forma a que a sua intervenção junto dos alunos não ponha em risco a actividade investigativa destes. Encontrar o ponto certo de intervenção do professor não pondo em risco o desenvolvimento da autonomia dos alunos parece constituir um aspecto delicado, que tem a sua expressão mais forte nas primeiras experiências vividas pelos professores e pelos alunos.

Oliveira (1998) refere igualmente a importância da familiaridade com as actividades de investigação do próprio professor na forma como apoia os alunos. Embora as duas professoras que estudou tivessem a preocupação de promover a autonomia dos alunos era diferente o modo como cada uma apoiava os alunos. A que tinha menor experiência tinha uma maior tendência para conduzir o discurso dos alunos e para os orientar de modo a ultrapassarem os seus bloqueios. A professora que tinha mais experiência, fomentava a condução do discurso por parte dos alunos e atribuía-lhes em geral a responsabilidade de ultrapassar os obstáculos.

Também, no que respeita ao desenvolvimento do processo investigativo, o papel do professor pode ser distinto implicando diversas formas de contributo. Oliveira (1998) refere no seu estudo que a professora que controla mais o trabalho dos alunos, permite que sejam formuladas novas questões em torno da questão proposta e valoriza bastante a formulação e teste de conjecturas. A outra professora, que dá mais autonomia aos alunos, aceita a formulação de questões que se afastem da situação proposta, encara a formulação e teste de conjecturas e dá um grande destaque ao processo de justificação.

Por último, a realização de um momento de discussão final parece essencial em aulas deste tipo, dado que realizar uma investigação e não reflectir sobre ela é perder uma das suas grandes potencialidades. O confronto de resultados e processos constituirá um enriquecimento da própria actividade e ajudará os alunos a compreenderem melhor o significado de uma investigação matemática. Ainda da experiência e reflexão realizadas no âmbito do projecto “Matemática para Todos” se alerta para a necessidade deste terceiro momento da aula se pautar por uma cultura de argumentação. Contudo, este momento pode tornar-se mais difícil para o professor controlar o seu protagonismo e continuar a dar maior um papel mais activo aos alunos (Brunheira, 2000).

Estratégias de ensino

Uma aula de Matemática bem sucedida baseia-se em tarefas matemáticas válidas e envolventes. Embora sendo uma condição necessária ela não é suficiente. Há igualmente que garantir um ambiente de trabalho estimulante e criar múltiplas situações onde os alunos possam ser matematicamente desafiados. Assim, o papel do professor é central tanto na proposta de situações que possibilitem um trabalho matemático rico, como na criação de tal ambiente de aprendizagem. Em particular, há um conjunto variado de opções a tomar que se relacionam com as questões ligadas à organização e gestão da aula, tão mais importantes quanto menor é a experiência do professor neste tipo de actividades.

Uma das opções que o professor tem de tomar é o modo como os alunos vão trabalhar, isto é, se vão trabalhar individualmente ou em pequenos grupos, como se irão constituir os grupos, e quando haverá momentos de trabalho em grande grupo. Nas diversas investigações realizadas em Portugal o mais comum é encontrarem-se os alunos a trabalhar em pequenos grupos enquanto desenvolvem a tarefa (por exemplo, Brocardo, 2001; Brunheira, 2000; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998) reconhecendo-se também vantagens em trabalhar colectivamente com toda a turma (Ponte *et al.*, 1998), nomeadamente nos momentos finais de discussão. Em particular, Fonseca (2000) salienta que a discussão/apresentação das explorações feitas em grupo permitiu a apresentação e explicação de ideias matemáticas, a formulação de novas conjecturas, a justificação de conjecturas e a discussão de aspectos pouco *pesados* nos grupos.

Brocardo (2001), embora defendendo como adequada a opção de que a exploração de tarefas de investigação assenta principalmente numa organização de trabalho em pequenos grupos, considera importante complementá-la com a exploração de tarefas conduzidas no grupo-turma. Esta autora, referindo-se à experiência curricular que estudou, salienta que a exploração de uma tarefa no grupo-turma facilitou que os alunos precisassem ideias relativamente ao *processo* de investigar, permitindo, nomeadamente, clarificar o estatuto de uma conjectura e a necessidade de provar as conjecturas que resistiam a sucessivos testes.

Segundo Varandas (2000), havia a convicção à partida por parte das professoras que o trabalho individual era incompatível com a natureza do trabalho investigativo. Contudo, na sua fase de implementação, esta perspectiva alterou-se passando as professoras a reconhecer aspectos positivos na sua realização. Fica, assim a questão de saber se o trabalho individual não tem também o seu lugar, em particular fora da sala de aula, para o aprofundamento ou desenvolvimento da tarefa?

Diversos problemas de gestão da sala de aula podem colocar-se, exigindo uma forte sensibilidade pedagógica por parte do professor. É, por exemplo, o caso da necessidade de decidir qual a altura adequada para dar por terminada uma dada investigação para se passar a uma seguinte (Goldenberg, 1999). O risco de se parar cedo demais, não permitindo que o aluno viva a descoberta ou prolongando-a demais criando uma desmotivação e cansaço desnecessários. Parece, contudo, ser consensual que uma aula de 50 minutos é muito escassa para iniciar e terminar uma investigação matemática (por exemplo, Oliveira, 1998). Também a insistência em aspectos pontuais e pouco significativos por parte do professor pode vir a revelar-se pouco produtivo e redutor para uma maior criatividade por parte do aluno. Conduzir uma discussão quando todos os alunos querem falar ao mesmo tempo e mostram pouco interesse em ouvir os outros é outra dificuldade que pode surgir na gestão da aula.

Produtos

O reconhecimento da importância da reflexão sobre o trabalho desenvolvido numa investigação leva a que, na generalidade, os professores recorram ao pedido de um relatório sobre toda a actividade como produto final escrito. Esta situação é favorável a que o aluno desenvolva um processo de metacognição, isto é, que reflecta de forma consciente sobre o que fez e porque o fez e, simultaneamente, seja chamado mais uma vez a pôr em uso a sua capacidade de comunicação e de argumentação. Este tipo de produto foi usado em diversos estudos portugueses (por exemplo, Brunheira, 2000; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998). Menos frequentemente, faz-se recurso a outro tipo de produtos. É o caso de apresentações orais à turma (Varandas, 2000) ou ainda de uma sessão pública de apresentação do trabalho desenvolvido e da realização de uma sessão prática a professores do grupo da escola (Brocardo, 2001). A proposta de uma sessão pública de apresentação dos trabalhos surge como resposta ao sentimento que se foi gerando na turma de, o trabalho que estavam a desenvolver, ser mais exigente do que o pedido noutras turmas que estavam a viver outro tipo de experiências de ensino. Assim, esta apresentação teve como propósito que os alunos sentissem que o trabalho realizado era valorizado pela professora e por outras pessoas interessadas no ensino da Matemática para além de criar uma nova oportunidade de os alunos voltarem a pensar nas tarefas realizadas (Brocardo, 2001). Dado o sucesso desta medida, nomeadamente pelo entusiasmo com que os alunos se envolveram, e pela vontade expressa pelos professores do grupo em conhecerem um *software* que os alunos já dominavam, surgiu a proposta de uma sessão prática da responsabilidade dos alunos.

Ajustar os processos avaliativos a este novo tipo de actividade tem constituído um desafio para os professores. Pouca investigação em Portugal tem sido desenvolvida neste âmbito. Até à data, existe um único estudo que procurou experimentar novas formas de avaliação que fossem coerentes com a natureza e propósitos do trabalho de cunho investigativo (Varandas, 2000). Neste trabalho fez-se recurso a relatórios individuais e em grupo e à apresentação oral em grupo. Usou-se, como suporte, uma tabela de descritores que auxiliou as professoras a comentar os trabalhos dos alunos e a dar sugestões de aperfeiçoamento. Os processos de avaliação desenvolvidos privilegiaram a função reguladora da avaliação dada a necessidade que sentiram em desenvolver nos alunos o seu poder matemático. Contudo, as imposições do sistema (obrigatoriedade de atribuir uma classificação no final do período lectivo), influenciaram o seu próprio sistema de avaliação. Além de uma visão global sobre a forma como os alunos realizaram a investigação, os processos usados permitiram uma avaliação sobre aspectos específicos tais como o conhecimento matemático, o conhecimento de estratégias e as competências de comunicação. Para além disso, ajudou também a classificar os trabalhos.

A diversidade das formas de avaliação foi o aspecto mais marcante para as professoras, pois, na sua perspectiva, todas elas se revelaram úteis para obter informações bastante consistentes sobre a aprendizagem e o progresso dos alunos. Em particular, o relatório individual em tempo limitado foi o processo que ambas as professoras destacaram como o mais favorável para obter uma classificação para cada aluno, isto é, aquele que permitiu aceder melhor ao processo investigativo de cada aluno. Quando se pretendia uma avaliação global do trabalho da turma, uma das professoras optou pela apresentação oral dado envolver a participação obrigatória de todos os alunos do grupo.

É ainda de chamar a atenção para o duplo papel que os relatórios podem desempenhar. Por um lado, como foi referido, podem ajudar o aluno a estruturar e organizar ideias e aprendizagens que realizou, por outro, podem constituir um meio de o professor recolher informação sobre o nível de consecução dos objectivos definidos, isto é, dirigir-se a um momento de avaliação sumativa. Este segundo aspecto, olhado pelos alunos como uma imposição do professor, pode perder significado enquanto documento pessoal de trabalho (Mason, 1991). Segundo Oliveira (1998), este risco pode ter ocorrido, dado as professoras do seu estudo terem insistido com frequência na necessidade dos alunos fazerem registos e no final da aula recolherem essas folhas.

As investigações e os alunos

Tipo de actividade

Enquanto os alunos exploram uma tarefa de investigação é essencial que tenham uma certa noção do *processo* que estão a levar a cabo. É importante começar por conseguir conduzir uma exploração inicial que permita explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação. Depois, torna-se necessário percorrer, de um modo tanto quanto possível autónomo, as principais etapas de uma actividade de investigação: formular questões, recolher e organizar dados, formular e testar conjecturas, reformular conjecturas e, finalmente, provar as que resistiram a sucessivos testes.

Os estudos analisados, que a seguir se apresentam, permitem identificar os processos matemáticos usados pelos alunos na exploração de uma tarefa de investigação, discutir o modo como os alunos os entendem e reflectir sobre as dificuldades que revelam em os usar.

Fonseca (2000) identificou a tendência dos alunos recorrerem aos seguintes processos: especialização, procura de regularidades, formulação de conjecturas, generalização, verificação, justificação e prova. Enquanto os primeiros foram utilizados de forma semelhante pelos alunos estudados, os de justificação e prova tiveram algumas características distintas. A formulação de conjecturas foi o processo mais frequentemente utilizado e o único que foi usado em todas as tarefas. Contudo, este processo teve uma maior presença nas tarefas em que os alunos recorreram a exemplos particulares, depreendendo-se uma forte relação entre a especialização e a formulação de conjecturas. Esta autora observou que a verificação esteve presente principalmente nas tarefas em que foi usada a especialização concluindo da relação entre os processos de especialização e o de verificação de conjecturas. A justificação, na maior parte das situações, não surgiu espontaneamente. No entanto, comparando a justificação com a prova, esta última teve uma presença mais fraca no trabalho dos alunos comparativamente com a primeira.

Brocardo (2001) resume da forma indicada na figura 3 as características da actividade de investigação e o modo como elas foram *entendidas* pelos alunos.

Analisando os resultados obtidos por estas duas autoras podemos identificar:

- Uma confluência relativamente às características da actividade desenvolvida pelos alunos mas diferentes nomenclaturas/níveis de generalidade para a caracterizar. De facto, Brocardo (2001) opta por considerar genericamente uma exploração inicial (que permite explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da

investigação) e Fonseca (2000) especifica processos que tendem a estar presentes nesta fase: especialização e procura de regularidades. Também, Brocardo adopta o termo *prova* num sentido amplo – “um raciocínio que justifica determinado processo ou conclusão que pode ser considerado como convincente e suficientemente rigoroso no contexto de ensino em que é desenvolvido” (p. 118) – ao passo que Fonseca distingue *justificação* (processo de convencimento de outro) de *prova* (como argumento deduzido e independente da experiência);

- Uma certa facilidade na formulação e teste de conjecturas e uma maior dificuldade na compreensão da importância e significado de provar as conjecturas que resistem a sucessivos testes.

<i>Características da actividade de investigação</i>	<i>Modo como se revelam inicialmente</i>	<i>Modo como se revelam no final do ano</i>
Exploração inicial que permite explicitar a questão ou situação proposta e clarificar o foco da investigação.	Tendência em transformar num fim em si as experiências iniciais que lhes iriam permitir recolher dados; Dificuldade em entender a investigação como um <i>todo</i> .	Preocupação em relacionar as observações iniciais procurando clarificar o foco da investigação.
Após um certo trabalho de explicitação da situação proposta é importante formular questões produtivas e interessantes.	Depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o <i>modo interrogativo</i> mas sim, o <i>modo afirmativo</i> avançando não explicitamente várias conjecturas.	Depois de realizarem várias explorações iniciais, os alunos não usaram o <i>modo interrogativo</i> mas sim, o <i>modo afirmativo</i> avançando explicitamente várias conjecturas.
É importante formular e testar conjecturas.	. Tendência para considerar uma conjectura que resistiu a um ou dois testes como uma <i>conclusão</i> ; . Facilidade em testar conjecturas.	Compreensão do estatuto de uma conjectura.
A actividade de investigação é um processo <i>não linear</i> .	A actividade de investigação é um processo linear composta por três etapas: (1) recolha de um conjunto de dados; (2) organização dos dados e (3) análise dos dados de modo a tirar <i>conclusões</i>	A actividade de investigação é um processo <i>não linear</i> .
É importante provar as conjecturas que parecem ser verdadeiras.	A prova de conjecturas é uma <i>complicação</i> desnecessária introduzida pela professora.	Os alunos entendem o significado de provar uma conjectura e consideram a prova como parte integrante da actividade de investigação.

Figura 3. Características da actividade de investigação e o modo como elas foram entendidas pelos os alunos da turma (Brocardo, 2001, p. 536)

A estreita relação entre a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem e o modo como se envolvem na exploração de tarefas de natureza investigativa é um aspecto realçado por vários dos trabalhos analisados (Brocardo, 2001; Matos, 1991; Segurado, 1997). A predominância de uma visão em que a Matemática consiste essencialmente num conjunto de conteúdos e técnicas e em que a aprendizagem deve decorrer das explicações do professor e da *prática das regras* que ele ensina, influencia uma falta de autonomia dos alunos e a existência de muitas dificuldades em prosseguir um trabalho investigativo.

Os trabalhos de Brocardo (2001) e Matos (1991) permitem especificar um pouco mais esta ideia geral:

- A tendência inicial dos alunos em desenvolver uma actividade *linear* composta por três etapas – recolha de um conjunto de dados, organização dos dados e análise dos dados de modo a tirar *conclusões* – embora muito relacionada com a pouca experiência dos alunos na exploração de tarefas de investigação, não pode ser dissociada de uma visão em que é predominante a vertente prática ou automatizada da Matemática¹ (Brocardo, 2001);
- A conceptualização da actividade matemática, como a resolução de tarefas com vista a ter sucesso escolar, influencia uma relação com a Matemática que é caracterizada por um grande pragmatismo, dificultando o gosto por um trabalho independente e propiciando uma aceitação acrítica de métodos e resultados (Matos, 1991).

Tipo de interacções

Durante a exploração de uma tarefa de investigação, as interacções aluno-professor e aluno-aluno assumem extrema importância. O confronto de opiniões que pode ocorrer quando os alunos trabalham em pequenos grupos pode conduzir à resolução de conflitos, levando-os a explicitar e procurar perceber diferentes pontos de vista, facilitando, deste modo, o desenvolvimento de explicações e argumentações (Laborde, 1994).

Esta ideia, pelo menos implicitamente, está presente nos estudos analisados. De facto, o trabalho em pequenos grupos é a opção-base adoptada para a exploração de tarefas de investigação com os alunos uma vez que se tratam de situações em que é importante explorar diferentes caminhos sendo particularmente relevante a discussão de pontos de vista diferentes e a cooperação. Segundo Varandas (2000), os alunos consideraram o trabalho de grupo como forma privilegiada para desenvolver uma actividade investigativa.

No entanto, os resultados de vários estudos indicam que a importância de partilhar e discutir ideias durante o trabalho investigativo é um aspecto que nem sempre está presente nos alunos e que muitos deles tendem a trabalhar individualmente e a procurar obter do professor as respostas para as suas dificuldades (Brocardo, 2001; Rocha, 2000; Segurado, 1997). A realização continuada de investigações e de exploração de tarefas abertas leva a que muitos alunos considerem fundamental colocar as suas questões e ideias no grupo e aproveitar as sugestões dos seus colegas para avançar no trabalho:

Os casos destes dois alunos [Rita e Lino] (...) sugerem que embora se possa revestir de alguma complexidade, é possível trabalhar no sentido de os alunos viverem e reconhecerem as potencialidades deste tipo de trabalho. A Rita constitui um caso *exemplar* deste aspecto: de uma atitude altamente individualista passou a valorizar as sugestões das colegas reconhecendo que a discussão de ideias era fundamental para realizar um trabalho de maior qualidade. Também o Lino, embora tendo tido uma evolução diferente da Rita, reconhecia, no final do ano, a importância de poder discutir ideias e de colaborar com outros na exploração das tarefas propostas. (Brocardo, 2001, p. 552)

Durante o desenvolvimento de investigações, são também muito importantes as interacções professor-aluno. Por exemplo, Fonseca (2000) refere que o papel da professora – consistindo essencialmente em orientar os alunos no trabalho mas sem lhes reduzir a atitude investigativa – teve uma influência incisiva sobre os processos matemáticos utilizados pelos alunos. Algumas das orientações que deu, através do fornecimento de algumas indicações, da sugestão de selecção de informação e da colocação de questões, contribuíram para a análise de mais casos, para a formulação de conjecturas ou para a sua verificação. Em particular, o incentivo e apoio dada pela professora no sentido de justificar a validade geral das conjecturas formuladas foi determinante para que os alunos usassem o processo de justificação.

Estratégias de ensino

A estreita relação entre a visão dos alunos sobre a Matemática e sua aprendizagem e o modo como é conduzido o ensino é estabelecida por vários autores (Borasi, 1990; Schoenfeld, 1989). Nos estudos analisados neste texto é saliente a ideia que a introdução de tarefas de investigação na aula constituiu uma certa *novidade* para os alunos. Assim, é naturalmente interessante perceber de que modo esta *nova* experiência alterou ou não o seu modo de ver a Matemática e a sua aprendizagem e, também, o que pensam de uma organização de ensino em que investigações são feitas com alguma frequência.

Segurado (1997) e Brocardo (2001) salientam que a realização de actividades de exploração e investigação contribui para a valorização de aspectos relativos à Matemática e ao seu ensino e aprendizagem que os alunos tendiam a não considerar anteriormente. Nomeadamente, estas investigadoras identificam (1) a evolução de uma visão da Matemática centrada na utilização de técnicas, para uma visão em que salientam o raciocínio e a realização de investigações reconhecendo que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento e onde os aspectos experimentais e indutivos têm um papel importante; (2) a consciencialização, por parte do professor, de que o seu papel não consiste essencialmente em a *dar a matéria*; (3) uma preferência, por parte dos alunos, por um processo de aprendizagem em que têm um papel activo, podendo ser eles a descobrir e experimentar relações e ideias; (4) uma visão positiva dos alunos relativamente ao trabalho em grupo valorizando a interacção com os colegas e a importância de partilhar ideias no desenvolvimento do trabalho investigativo.

Também Varandas (2000) concluiu que os alunos passaram a considerar que na Matemática o mais importante não é encontrar a *resposta certa* e que nas investigações podem chegar a conclusões diversas. Assim, diversos estudos apontam para que a visão dos alunos sobre a Matemática parece evoluir com a sua própria experiência em actividades de investigação. Contudo, não é claro até que ponto a concepção que os alunos têm à partida sobre a Matemática se relaciona com o grau de adesão que ao longo do tempo vão apresentando com este tipo de experiências matemáticas (Varandas, 2000).

É de salientar que vários estudos identificaram algumas reacções dos alunos menos favoráveis relativamente a uma experiência de aprendizagem que incluía a exploração de tarefas de investigação. Os alunos estudados individualmente por Rocha (2000), embora reconhecendo que a actividade investigativa favorece uma aprendizagem significativa, continuaram a manifestar a sua preferência pelas aulas em que o professor *explica*. Embora considerando que se deram bem com o novo *método* de trabalho e que ele facilita a aprendizagem, salientam que ele envolve um tipo de investimento que é difícil para os alunos.

Uma certa reacção de desalento dos alunos perante a *exigência* do trabalho investigativo foi também identificada (Brocardo, 2001). De facto, após a exploração das primeiras três tarefas, as dificuldades que os alunos sentiam em desenvolver uma actividade, de facto, investigativa vincaram a ideia de que na aula de Matemática lhes estava a ser proposto um trabalho bastante difícil e que nunca conseguiam desenvolver de forma adequada. No entanto, no final do ano, esta ideia foi completamente abandonada: a maioria dos alunos manifestava uma clara preferência pela realização de investigações e por um processo de ensino/aprendizagem em que os alunos tinham um papel activo e a oportunidade de tomar decisões e discutir ideias em pequenos grupos. De um modo geral,

reconheciam que o método usado nas aulas de Matemática não era tão cansativo e que ajudava a aprendizagem uma vez que eram os próprios alunos a descobrir as coisas. A Eva, uma das alunas estudadas individualmente, explicitou ainda um outro motivo em defesa do *método* usado:

O que eu acho é que quando se chega à aula e nos explicam as coisas parece que as coisas aparecem assim. Pronto, Matemática é isto. Depois aprende-se a resolver exercícios e já está. Mas não é assim. Há maneiras de pensar, há conjecturas, há muitas maneiras de chegar a uma conclusão. E isso também faz parte da Matemática. (Brocardo, 2001, p. 526)

Embora este tipo de argumento apenas tenha sido explicitado por uma aluna, ele não deixa de ser significativo. De facto, salientar que um ensino centrado na exposição do professor e na resolução de exercícios por parte dos alunos veicula uma imagem incompleta do que é a Matemática uma vez que ela não é só caracterizada por *conteúdos*, mas, também, por *processos*, parece-nos requerer um nível de reflexão pouco usual em muitos alunos.

Produtos

Como foi referido anteriormente, a ideia de que a reflexão sobre as investigações que os alunos fazem é essencial para que possam tomar consciência dos processos seguidos parece ser determinante na opção de pedir aos alunos relatórios escritos descrevendo a investigação realizada. Relativamente aos relatórios produzidos pelos alunos Varandas (2000) e Brocardo (2001) consideram que a sua qualidade vai melhorando com o decorrer do trabalho em torno das tarefas possíveis de investigar. De facto, de uma tendência inicial em elaborar respostas curtas que incluíam sobretudo a referência aos produtos, os alunos evoluíram para a elaboração de textos que explicavam com mais detalhe o trabalho desenvolvido. Os seguintes extractos de dois relatórios, retirados de Brocardo (2001), correspondendo respectivamente à 3^a e à 9^a tarefas propostas aos alunos, ilustram esta conclusão:

Na pergunta 3 eu consegui obter um quadrilátero losango.
Nunca se conseguiria obter um quadrado.
É impossível fazer um quadrado.

Agora era-nos pedido para analisarmos funções do tipo $y = ax + 2$, dando a a valores diferentes. Passado algum tempo de observação concluímos que quanto maior era o número multiplicado por x , maior era a inclinação. (...) voltámos atrás e completámos as outras questões (...) chegando à conclusão que ao multiplicarmos qualquer número por x e somarmos 2, esta função passa pelo ponto 2 do eixo dos y .

Varandas (2000) concluiu também que os relatórios podem constituir oportunidades para desencadear a utilização de certos processos, aprofundar a investigação ou melhorar a organização das ideias. Assim, muito embora seja reconhecido por diversos autores as vantagens das investigações matemáticas serem acompanhadas da elaboração de relatórios, é, no entanto, de chamar a atenção para que o pedido sistemático de relatórios poder, aos olhos dos alunos, tornar-se uma tarefa demasiado exigente e como tal causar uma reacção menos favorável da sua parte.

O trabalho de Brocardo (2001) documenta com algum detalhe a reacção dos alunos a dois tipos de produtos menos frequentes: uma sessão oral (em que os alunos apresentaram publicamente as investigações que tinham realizado) e uma sessão prática destinada aos professores de Matemática da escola. Ao longo do ano, estes dois tipos de iniciativas foram referidas com alguma frequência pelos alunos como exemplos do que mais tinham gostado de fazer. De facto, elas constituíram experiências marcantes e positivas que permitiram reflectir sobre o *processo de investigar*, que ajudaram a criar uma certa unidade ao nível da turma e um certo orgulho em participar num projecto que era valorizado por pessoas exteriores à aula de Matemática.

Considerações finais

Os estudos analisados neste texto permitem identificar confluências de resultados que passamos a destacar. Uma primeira ideia que se salienta relaciona-se com as potencialidades educativas deste tipo de actividade. De facto, a actividade de investigação permite proporcionar aos alunos uma experiência matemática significativa envolvendo a realização de experiências iniciais com o objectivo de clarificar o foco da investigação, a formulação, o teste e a reformulação de conjecturas, e a procura de argumentos que possam validar as conjecturas que resistiram a sucessivos testes. É de salientar que é possível encontrar nos estudos portugueses uma forte coerência entre as expectativas e razões apontadas pelos professores no que respeita às investigações matemáticas e o que foi observado nos alunos ao longo do desenvolvimento das tarefas. Contudo, há ainda diversas questões que carecem de resposta, como seja: O valor das investigações é o mesmo nos diferentes anos de escolaridade? Como trabalhar com os alunos, sobretudo os mais novos, a prova das conjecturas? As investigações têm valor em si mesmo ou devem sobretudo apoiar a aprendizagem de conteúdos? Como conciliar um currículo organizado por temas com o carácter divergente das investigações?

O modo como os alunos se envolvem na exploração de uma tarefa de investigação parece estar intimamente relacionado com a sua visão sobre a

Matemática e sua aprendizagem. Nos alunos, em que predomina uma visão *automatizada* da Matemática e de uma aprendizagem que decorre das explicações do professor e da prática de regras, verifica-se uma falta de autonomia que acaba por trazer muitas dificuldades no prosseguimento de um trabalho investigativo. No entanto, vários dos estudos analisados concluem que este tipo de trabalho pode influenciar uma evolução das concepções dos alunos no que respeita à Matemática – reconhecendo a importância do raciocínio e que a Matemática é uma ciência em desenvolvimento e onde são fundamentais os aspectos experimentais e indutivos – e uma mudança significativa do que consideram ser o seu papel e o do professor no processo de ensino-aprendizagem. No entanto, não parecem consensuais as diferentes inferências que os diversos estudos apontam no que respeita à forma como se estabelece a relação entre as concepções e sua evolução e a atitude dos alunos face às investigações. Até que ponto certas concepções constituem um obstáculo? Até que ponto são possíveis de evoluir ao longo da experiência matemática com investigações?

A importância das interacções aluno-aluno e professor-aluno é outro dos aspectos que é salientado pelos estudos analisados. Relativamente às primeiras identifica-se uma evolução significativa de muitos alunos que passam a considerar fundamental colocar questões e discutir ideias com os seus colegas. As interacções professor-aluno revelam-se também fundamentais, tanto no sentido de ajudar os alunos a usar determinados processos matemáticos, como a incentivar o prosseguimento e discussão da investigação. Mas, dada a natureza específica das investigações, é requerido para o professor um novo papel, nomeadamente na forma e momentos de intervenção. Neste domínio, há ainda um largo campo a estudar: Como decidir qual o ponto certo de intervenção do professor? Como pode o professor apoiar os alunos a formularem questões? Como fazer quando um grupo de alunos não avança? Como fazer quando a exploração dos alunos parece pouco promissora? Será o professor capaz de fazer um juízo acertado sobre a potencialidade de uma estratégia por si não prevista?

Muito embora a maioria dos estudos portugueses tenham sido feitos em aulas onde as investigações foram trabalhadas em pequenos grupos, pode questionar-se até que ponto é de facto esta a metodologia mais adequada. Mais uma vez parece ter-se encontrado sintonia entre a perspectiva do professor e dos alunos quanto à valorização do trabalho em pequenos grupos. Mas será que existe uma metodologia preferencialmente adequada para trabalhar investigações matemáticas? Qual o papel do trabalho individual? Qual o peso a atribuir ao grupo turma?

Os produtos pedidos, que maioritariamente consistem na organização de relatórios, revelam-se como oportunidades para reflectir sobre o trabalho realizado, utilizar certos processos, aprofundar a investigação ou melhorar a

organização das ideias. Contudo, apesar destas potencialidades reconhecidas por professores e alunos, identificam-se também alguns constrangimentos. É o caso do pedido sistemático de relatórios correr o risco de criar nos alunos a ideia de que investigar em Matemática é uma actividade muito exigente e como tal levá-los a desenvolver uma atitude menos positiva face às investigações matemáticas. Haverá produtos alternativos com potencialidades da mesma ordem? Que características deverão ter os produtos a pedir aos alunos de modo que estes adiram com entusiasmo à proposta de trabalho que lhes é apresentada? Que estratégias poderão ajudar os alunos a produzir relatórios bem elaborados?

Por último, é ainda de referir que apenas um dos estudos apresentados trata de questões referentes à avaliação. Sem dúvida que esta é uma área pouco estudada em Portugal e, em particular, quando diz respeito às investigações matemáticas. Como se regula o desenvolvimento de investigações matemáticas por parte dos alunos? Existem formas e instrumentos de avaliação particularmente adequados?

Em síntese, poder-se-á afirmar que existe em Portugal um corpo de saberes que se tem vindo a construir nos últimos anos à volta do papel das investigações matemáticas na aprendizagem da Matemática no ensino básico e secundário. Um número de estudos bastante significativo, tendo em conta a dimensão da comunidade de educação matemática portuguesa, discute diversas temáticas que se colocam na prática lectiva do professor e na aprendizagem dos alunos. Fica, contudo, a certeza de que muito há ainda que estudar e compreender para que se possa falar de uma teoria das investigações matemáticas na sala de aula de Matemática.

Notas

¹ Matos (1991) sugere a existência de duas concepções que coexistem nos diversos alunos mas que surgem com importâncias relativas diferentes: por um lado, os alunos consideram uma Matemática prática ou automatizada e, por outro, uma Matemática do raciocínio.

Referências

- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.
- Borasi, R. (1990). The invisible hand operating in mathematics instruction: student's conceptions and expectations. In T. J. Cooney (Org.), *Teaching and learning mathematics education in the 1990s*. Reston, VA: NCTM.
- Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: Um projecto curricular no 8º ano* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

- Brunheira, L. (2000). *O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Christiansen, B. & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. Howson, & M. Otte (Orgs.), *Perspective on mathematics education*. Dordrecht: Reidel.
- Cunha, M. H. (1998). *Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos seleccionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In A. Orton & G. Wains (Orgs.), *Issues in teaching mathematics* (pp. 150-173). London: Cassel.
- Goldenberg, E. (1999). Quatro funções da investigação na aula de matemática. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 35-49). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Jaworski, B. (1994). *Investigating mathematics teaching: a constructivist enquiry*. London: Falmer.
- Laborde, C. (1994). Working in small groups: a learning situation? In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straber, & B. Winkelmann (Orgs.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer.
- Matos, J. F. (1991). *Logo na educação matemática: Um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: Open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, 1, 14-19.
- Mendes, E. J. (1997). *A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de matemática: Aspectos da prática dos professores* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Oliveira, H., Ponte, J., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110), Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom*. London: The Open University.
- Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D. Fernandes (Orgs.),

Mathematical problem solving and new information technologies: research in contexts of practice (pp. 239-254). Berlin: Springer-Verlag.

- Ponte, J. P., Ferreira, C., Brunheira, L., Oliveira, H. & Varandas, J. (1998). Investigating mathematical investigations. *Proceedings of CIEAEM 49* (pp. 3-14), Setúbal: ESE de Setúbal.
- Ponte; J. P.; Ferreira, C.; Brunheira, L.; Oliveira, H. & Varandas, J. (1999). *A relação professor aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. (tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355.
- Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Org.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-3709). New York, NY: Macmillan.
- Segurado, M. I. (1997). *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Tudella, A., Ferreira, C., Bernardo, C., Pires, F., Fonseca, H., & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca, & L Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.