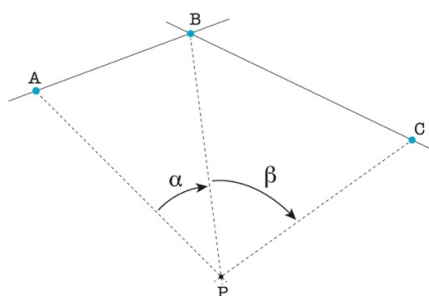




ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES E LOGÍSTICA



POSICIONAMENTO NA NAVEGAÇÃO COSTEIRA E EM ÁGUAS RESTRITAS

RESOLUÇÃO ALGORÍTMICA DOS ÂNGULOS HORIZONTAIS E SUA APLICAÇÃO NAS AJUDAS
ELETRÓNICAS.

DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM PILOTAGEM

JOSÉ LUÍS VIEGAS LOPES

ORIENTADOR: PROFESSOR PEDRO ALEXANDRE MONTEIRO SILVEIRA

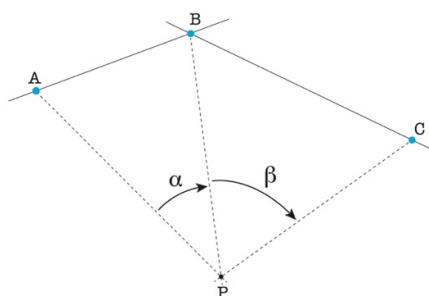
COORIENTADOR: PROFESSOR CARLOS ALBERTO SOUSA COUTINHO

DEZEMBRO / 2017



ESCOLA SUPERIOR NÁUTICA INFANTE D. HENRIQUE

DEPARTAMENTO DE TRANSPORTES E LOGÍSTICA



POSICIONAMENTO NA NAVEGAÇÃO COSTEIRA E EM ÁGUAS RESTRITAS

RESOLUÇÃO ALGORÍTMICA DOS ÂNGULOS HORIZONTAIS E SUA APLICAÇÃO NAS AJUDAS
ELETRÓNICAS.

DISSERTAÇÃO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM PILOTAGEM

JOSÉ LUÍS VIEGAS LOPES

ORIENTADOR: PROFESSOR PEDRO ALEXANDRE MONTEIRO SILVEIRA

COORIENTADOR: PROFESSOR CARLOS ALBERTO SOUSA COUTINHO

DESEMBRO / 2017

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo o estudo do posicionamento na navegação costeira e em águas restritas. Baseia-se na resolução do problema do segmento capaz através do teorema matemático que determina as coordenadas de um ponto P com o auxílio de três pontos conhecidos, verificando a sua aplicabilidade a bordo com as tecnologias existentes.

A resolução algébrica deste teorema matemático foi elaborada inicialmente pelo holandês *Snellius* em 1617, tendo sido mediatizada, anos mais tarde, pelo francês *Pothenot* em 1692. Ficou, assim, conhecido pelo problema *Snellius-Pothenot* em 1966. Com o auxílio deste teorema pretende-se que o navegador adquira mais um método para obter o posicionamento através das ajudas eletrónicas que já existem a bordo como, por exemplo, radar, agulha, carta eletrónica e câmaras.

Será importante referir que o conceito deste estudo de posicionamento do navio, depende do navegador, com o apoio de instrumentos de navegação que o auxiliem na rapidez de executar cálculos matemáticos básicos.

Pretende-se ainda executar quatro experiências e caracteriza-las, nomeadamente:

- 1 – Com a carta eletrónica.
- 2 – Num simulador ou radar fixo.
- 3 – Durante a aproximação a um porto a bordo de um navio.
- 4 - Com uma agulha de marcar.

Na observação dos resultados será efetuada uma comparação com os métodos usados nos dias de hoje, isto é, ao mesmo tempo que se está a executar a marcação com o método descrito vamos fazer uma outra marcação com outro método, *GPS*, radar ou visual.

Na discussão dos resultados, irão ser analisadas as experiências executadas e comparadas com os métodos de despiste, tendo sempre presente as normas *IMO* em vigor que remetem para o posicionamento e o erro admitido, como referido na Resolução IMO A 1046(27) e Resolução IMO A 915 (22) e ainda na *MSC 1 Circ 1473* e A 815.

Palavras Chave: Navegação costeira, navegação em águas restritas, ângulos horizontais, posição geográfica e instrumentos de navegação.

Abstract

This dissertation aims to study the positioning in coastal navigation and in restricted waters. This study is based on the resolution of the mathematical theorem that determines the coordinates of a point "P" with the help of three known points. We conclude with the study of its applicability on board with the existing technologies.

The algebraic resolution of this mathematical theorem was elaborated by the Dutch Snellius in 1617, but only came to be known years later by the French Pothenot in 1692. Nevertheless, it became known as the "Snellius-Pothenot problem." in 1966. We intend to present the resolution of the problem, so that the navigator can acquire another method to obtain the positioning through the navigational aids that already exist on board, such as: radar, compass, electronic chart, camera with infrared sensor.

It may be referred that the concept on which this study of ship positioning is based depends on the navigator, with the support of instruments that will assist him in the promptness of perform basic mathematical calculations.

We intend as well to conduct four experiments and characterize them, namely:

- 1 – With the use of an electronic chart
- 2 – With a simulator or stationary radar.
- 3 – Approximation to a port, being onboard a ship.
- 4 - With a bearing device

In the observation of the results, there will be a comparison with the methods used today, that is, at the same time that the markup is being executed with the described method, we will make another markup with another method, GPS, radar or visual.

In the discussion of the results, it will be analyzed the experiences performed will be analysed and compared with the controlling methods. Keeping in mind the IMO rules that refer to the positioning and the admitted error as mentioned in IMO Resolution A 1046(27) and IMO Resolution A 915 (22) and also MSC 1 Circ 1473, A 815).

Key Words: Coastal navigation, navigation in restricted waters, horizontal angles, geographical position, and navigation devices.

Agradecimentos

Aos colegas e amigos que estiveram sempre presentes.

Às equipas do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo e Pilotagem do Porto de Setúbal pela colaboração nas experiências executadas.

Ao Cmdt. Hugo Bastos pela compreensão, apoio e disponibilidade na organização laboral.

Ao Professor Pedro Alexandre Monteiro Silveira e ao Professor Carlos Alberto Sousa Coutinho, por toda a orientação e motivação que permitiram finalizar a presente dissertação.

À minha família por tudo!

Um sincero obrigado a todos!

Índice

	Pág.
1 - Introdução	1
1.1 - Motivação	2
1.2 - Apresentação do problema	3
1.3 - Processo e estrutura	3
2 – Caracterização dos métodos clássicos e algébrico	5
2.1 - Métodos clássicos, obtenção da posição por ângulos horizontais	5
2.1.1 - Primeiro método	7
2.1.2 - Segundo método	9
2.1.3 - Análise ao método clássico	12
2.2 - Alterações ao método clássico	13
2.3 - Do carteameto ao cálculo algébrico	15
2.3.1 - Explicação algébrica	18
2.3.1.1 - Método algébrico topográfico (<i>Survey, 1921</i>)	19
2.3.2 - Condições particulares	21
2.4 - Introdução de novos componentes ao método algébrico topográfico	23
2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo	23
2.4.2 - Cálculo descrito nas Instruções Gerais para o trabalho de campo dos E. U. para as Inspeções Costeiras e Geodésicas	33
2.4.3 - Tratamento do resultado ou cálculo final	34
2.5 - Análise do método algébrico	36
3 - Experiências	39
3.1 - Descrição das Experiências	39
3.1.1 - Virtual	39
3.1.2 - Navio <i>PAROS</i>	41
3.1.3. - Torre do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal	44
3.1.4 - Agulha magnética de marcar	46

3.2. - Análise das experiências	48
4 - Análise dos erros	53
4.1 - Erros intrínsecos ao cálculo	54
4.1.1 - Somatório dos erros	55
4.2. - Síntese dos Erros	55
5 - Interação com outros equipamentos	59
6 - Conclusão	61
Bibliografia	65

Índice das Tabelas

	Pág.
Tabela nº 1 - Análise do Station Pointer a bordo	6
Tabela nº 2 - Manipulação dos erros	41
Tabela nº 3 - Experiências a bordo do navio PAROS	43
Tabela nº 4 - Cálculo da velocidade	43
Tabela nº 5 - Experiências com a agulha de marcar	48
Tabela nº 6 - Visibilidade em função da altitude	49
Tabela nº 7 - Somatório de erros	55
Tabela nº 8 - Erros obtidos	57

Índice das Figuras

	Pág
Figura nº 1 - Station Pointer.	5
Figura nº 2 - Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, medição dos ângulos.	7
Figura nº 3 - Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, linhas de construção.	8
Figura nº 4 - Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, centros das circunferências.	8
Figura nº 5 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, ângulo Alfa.	10
Figura nº 6 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, triângulo A O ₁ B.	10
Figura nº 7 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, circunferência O ₁ .	11
Figura nº 8 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, Ponto P.	12
Figura nº 9 - Primeira situação do tetraedro.	16
Figura nº 10 - Segunda situação do tetraedro.	17
Figura nº 11 - Terceira situação do tetraedro.	17
Figura nº 12 - Tetraedro com todos os ângulos referenciados.	18
Figura nº 13 - Tetraedro com ângulos Alfa e Beta igual a zero.	21
Figura nº 14 - Tetraedro com quatro pontos circunscritos.	22
Figura nº 15 - Carta com enfiamento. (Open sea charts)	22
Figura nº 16 - Exemplo do primeiro quadro de inserção de dados.	24
Figura nº 17 - Exemplo do segundo quadro de inserção de dados.	24
Figura nº 18 - Triângulo esférico.	25
Figura nº 19 - Tabela de cálculo para distância entre pontos.	26
Figura nº 20 - Demonstração da medição do ângulo arco tangente quadrado, na folha de Excel.	27
Figura nº 21 - Tabela de cálculo dos ângulos.	28

Figura nº 22 - Tetraedro referente à primeira condição.	29
Figura nº 23 - Tetraedro referente à segunda condição.	30
Figura nº 24 - Tetraedro referente à condição exclusiva.	31
Figura nº 25 - Três pontos colineares OPEN CPN.	32
Figura nº 26 - Triângulo esférico.	34
Figura nº 27 - Radar do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal.	45
Figura nº 28 - Agulha de marcar.	46
Figura nº 29 - Aparelho de marca digital.	47

Índice de Abreviaturas:

Alfa - ângulo formado entre os pontos $A\hat{P}B$.

Beta - ângulo formado entre os pontos $B\hat{P}C$.

\hat{B} - ângulo formado entre os pontos $A\hat{B}C$.

\hat{B}_1 - ângulo formado entre os pontos $A\hat{B}P$.

\hat{B}_2 - ângulo formado entre os pontos $P\hat{B}C$.

\hat{X} - ângulo formado entre os pontos $P\hat{A}B$.

\hat{Y} - ângulo formado entre os pontos $P\hat{C}B$.

\hat{Z} - ângulo criado para o calculo do tetraedro e descobrir os ângulos \hat{X} e \hat{Y} .

$\hat{\epsilon}$ - ângulo criado para os cálculos do tetraedro e descobrir os ângulos \hat{X} e \hat{Y} .

\hat{S} - ângulo criado para o calculo da resolução do tetraedro que representa a metade da soma do ângulo ($\hat{X} + \hat{Y}$).

Cos – cosseno do ângulo.

arcCos – inverso do cosseno do ângulo.

Sen – seno do ângulo.

arcSen – inverso do seno do ângulo.

atan2 – Esta função devolve o arco-tangente quatro quadrantes, ou inverso tangente de um específico x e y. O arco-tangente é o ângulo formado entre o eixo dos x e a linha que passa na origem (0,0) e o ponto com as coordenadas (x, y). O ângulo dado é inserido e devolvido em radianos.

arcTg – inverso da tangente do ângulo.

coTg (θ) – representa $\frac{1}{tg(\theta)}$.

Tg - tangente do ângulo.

Lat₁- latitude do ponto 1 ou ponto de partida.

Lat₂ - latitude do ponto 2 ou ponto de chegada.

Long₁ - longitude do ponto 1 ou ponto de partida.

Long₂ - longitude do ponto 2 ou ponto de chegada.

Lat_p - latitude do ponto P.

Long_p - longitude do ponto P.

Δ_{Long} - diferença de Longitude.

$\overrightarrow{\text{XY}}$ - azimute do ponto X para Y.

$\overline{\text{XY}}$ - distância entre o ponto X e Y.

D - distância.

DGPS - acrónimo inglês para *Differential Global Position System*.

ENIDH – Escola Superior Náutica Infante D. Henrique.

GPS - acrónimo inglês para *Global Position System*.

IMO - acrónimo inglês para *International Maritime Organization*.

Km - quilómetro.

O₁ - centro da circunferência nº 1.

O₂ - centro da circunferência nº 2.

1 - Introdução

O presente trabalho pretende relatar uma investigação efetuada sobre a determinação da posição geográfica através da medição dos ângulos horizontais, com auxílio de sistemas eletrónicos (radar e simulador) e analógicos (agulhas, magnéticas e aparelhos de marcar), para a obtenção analítica da posição geográfica.

A obtenção da posição geográfica com auxílio aos ângulos horizontais é um método bem conhecido pelos antigos. Este método é usado pelos marítimos na navegação à vista para obter a sua posição geográfica. Com o auxílio do sextante efetua-se a medição dos ângulos horizontais e com o *Station Pointer* marca-se a posição na carta. É um método muito preciso, mas caiu em desuso com o aparecimento de outras técnicas de mais fácil utilização. Para a obtenção deste tipo de posição é necessária a medição de dois ângulos entre três posições, conhecidas com o sextante. Depois, marcar esses ângulos com a ajuda de um instrumento específico, com o nome de *Station Pointer*, podendo, em alternativa, ser utilizado um compasso e um esquadro. Com o grande desenvolvimento tecnológico nos sistemas e métodos de navegação, este método tornou-se moroso e foi deixando de ser praticado.

O objetivo central deste trabalho foi identificar os principais problemas que os navegadores têm com a obtenção da sua posição, objeto de preocupação já que o marítimo deve ser o protagonista e responsável na obtenção da posição. Cada vez mais os navegadores confiam nos instrumentos de navegação eletrónicos para executar a aquisição de dados para o cálculo da posição. Este problema tem vindo a dominar a ponte dos navios, devido à extensiva lista de tarefas que se vão desenvolvendo com o intuito de prevenir os incidentes.

Esta investigação surgiu no âmbito laboral, resultando de várias questões colocadas sobre o posicionamento do navio durante as entradas em portos sem pilotagem, como na Gronelândia e portos Asiáticos. A diferença entre posições simultâneas a bordo, obtidas com o mesmo método por navegadores diferentes, levantou discussão a bordo e, conseqüentemente, investigação do sucedido.

Com este estudo, pretende-se que seja dada à comunidade marítima uma nova maneira de abordar o problema do posicionamento geográfico e contribuir para a identificação de dificuldades na atividade profissional dos navegadores.

Este estudo é igualmente importante porque procura suscitar a reflexão de questões relevantes, em termos da integração de novos métodos e ajudas à navegação com os sistemas que já existem a bordo e ainda a integração dos métodos “clássicos” com as novas tecnologias.

É necessário entender rapidamente que os facilitismos que certas ajudas eletrónicas trazem à navegação condenam a atenção do navegador e a prática em obter a posição pelos seus próprios meios. Com o enorme desenvolvimento que tem ocorrido na área do geoposicionamento, foram retiradas ao navegador as funções de “navegar” (“saber a sua posição e chegar em segurança ao destino” (BOWDITCH, 2002)) e atribuídas funções de ler informações de geoposicionamento recebidas, de entidades externas ao navio como é o caso do *GPS* (acrónimo inglês para *Global Position System*).

De modo a desenvolver este trabalho, consideramos importante seguir uma metodologia descritiva, no que diz respeito à análise dos dados obtidos das experiências efetuadas, para comparar e interpretar os resultados.

1.1 - Motivação

Foi com o intuito de desenvolver a interação de novas tecnologias com os métodos clássicos de navegação, que se decidiu investigar a possibilidade de relacionar estes dois sistemas: a técnica da obtenção da posição geográfica, utilizando os ângulos horizontais, com as novas tecnologias.

Devido à sua natureza e componente prática, este estudo poderá ser interessante para a criação de novas ajudas à navegação, pelas potencialidades e mais-valias das novas tecnologias, aumentando assim a preparação dos novos oficiais na segurança marítima.

1.2 - Apresentação do problema

O problema central desta Dissertação consiste em verificar a possibilidade de oferecer aos marítimos mais um meio simples e fiável de obter a posição geográfica com a ajuda das novas tecnologias. É possível constatar no Manual de Navegação dos Estados Unidos, que “navegar é uma combinação de arte e ciência, com um processo de planeamento, registo e

controlo do movimento do navio ou embarcação” (BOWDITCH, 2002), para levar a embarcação de um local ao outro em segurança.

Pretende-se apresentar uma solução para a navegação costeira e águas restritas, baseada na medição de ângulos horizontais com radar ou instrumentos de leitura digital, como por exemplo, câmaras com sensores acoplados para o efeito.

Esta Dissertação pretende avaliar o erro obtido usando um destes sistemas - que é o mais comum a bordo - o radar. Pretende-se efetuar diferentes simulações com o intuito de avaliar o erro e de seguida caracterizá-lo.

Com esta evolução, deseja-se entrar num caminho da navegação abandonado já há algum tempo, em que a obtenção da posição geográfica era o resultado da interação do marítimo com os instrumentos, as ajudas à navegação e os seus conhecimentos. Com o aparecimento do *GPS*, o navegador deixou de estar ligado ao processo de obtenção da posição geográfica e passou a ser um mero recetor de informação.

Na obtenção da posição geográfica através dos ângulos horizontais, o navegador é o próprio que retira os dados do meio, sabendo instantaneamente qual o rigor que deu à sua observação.

1.3 - Processo e estrutura

O Processo de investigação teve início com a pesquisa da obtenção da posição geográfica através da medição dos ângulos horizontais entre as estrelas. Este método baseia-se em toda a teoria que se pretende apresentar. Mas, devido às enormes distâncias entre o navegador e a projeção das estrelas na esfera terrestre, desde logo verificou-se que as discrepâncias entre os valores das posições obtidas e os valores das posições reais eram impraticáveis para a navegação. Pensou-se em estudar a interação destes ângulos horizontais com as novas tecnologias para a navegação costeira e águas restritas.

A etapa seguinte debruçou-se sobre a pesquisa e análise dos estudos relevantes, a maior parte de origem inglesa e americana, efetuados sobre a obtenção da posição geográfica algebricamente através dos ângulos horizontais.

A pesquisa na *Internet* revelou uma grande ajuda para ultrapassar as duas primeiras etapas. As deslocações à Biblioteca da ENIDH revelaram-se também muito úteis para obter informação relativamente à construção da tese e de toda a documentação de carácter científico que, por sua vez, é muito dispendiosa.

A terceira etapa foi a verificação matemática dos modelos encontrados para a construção de um algoritmo e uma base de dados que permitisse obter, analiticamente, a posição geográfica na esfera terrestre.

Após a preparação teórica estar completa, a etapa seguinte enquadrou-se no processo de investigação, que teve lugar a bordo de um navio graneleiro *PAROS*, durante uma entrada no porto de Setúbal, utilizando o sistema de cartas eletrónicas *OPEN CPN*, e o de observação, com o radar do Centro Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal. Por fim, analisando todas as experiências, obtiveram-se as devidas conclusões.

2 - Caracterização dos métodos clássicos e algébrico

2.1 - Método clássico, obtenção da posição por ângulos horizontais

Durante muitos anos, os marítimos recorreram à medição de ângulos horizontais para obter a sua posição geográfica. Este método antigo requer alguns instrumentos para poder ser projetado: o sextante, o compasso, o esquadro de navegação, o *Station Pointer* (figura nº1) e a carta de navegação. Estes são os principais instrumentos e materiais que se devem usar para a marcação da posição. Para além dos instrumentos mencionados, temos ainda o tempo necessário para transportar as medições efetuadas do meio, para a carta.

De entre as muitas maneiras para a obtenção da posição geográfica através da medição dos ângulos horizontais, o método mais prático é o que utiliza o *Station Pointer*. Este método consiste em medir os ângulos e fazer o transporte direto desses ângulos para um instrumento desenvolvido para este propósito, o *Station Pointer* (figura nº1).

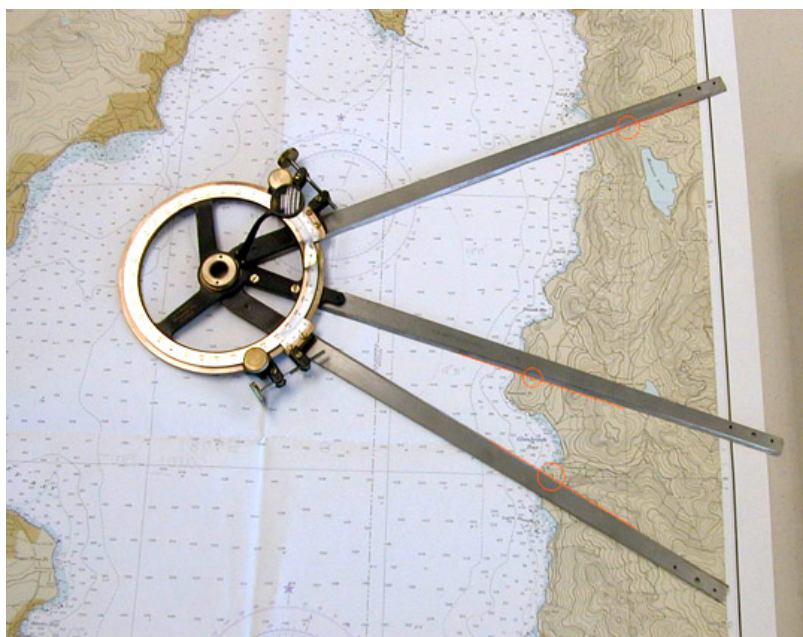


Figura nº1 - Station Pointer

https://www.ion.org/museum/item_view.cfm?cid=2&scid=8&iid=5

Cuidadosamente, marcam-se os dois ângulos obtidos do sextante no *Station Pointer* e, de seguida, fazem-se coincidir as três extensões com os pontos conhecidos na carta de navegação.

Por fim, o navegador vai encontrar a sua posição no centro, onde se encontram os três braços do *Station Pointer*. Este é um método muito simples, mas requer a aquisição de um instrumento específico para este efeito. Com o passar dos tempos, considera-se um instrumento raro e difícil de encontrar a bordo (Tabela nº1).

Navios questionados se tinham o *Station Pointer* a bordo, e as suas respostas:

Nº	Navio	Tipo de Navio	Resposta	Fonte
1	<i>Genmar Defiance</i>	Navio Tanque	Não	José Lopes
2	<i>Genmar George T</i>	Navio Tanque	Não	José Lopes
3	<i>Genmar Strength</i>	Navio Tanque	Não	José Lopes
4	<i>Princess Danae</i>	Navio Passageiros	Não	João Morais
5	<i>Palmela</i>	Batelão	Não	José Lopes
6	<i>Chem Daisy</i>	Navio Tanque	Não	Tiago Carmo
7	<i>Minerva</i>	Navio Passageiros	Não	José Lopes
8	<i>Zenith</i>	Navio Passageiros	Não	João Morais
9	<i>Hamburg</i>	Navio Passageiros	Não	João Morais
10	<i>Auto Sky</i>	Navio Ro-Ro	Não	Paulo Santos
11	<i>Auto Star</i>	Navio Ro-Ro	Não	Paulo Santos
12	<i>Auto Prise</i>	Navio Ro-Ro	Não	Paulo Santos

Tabela nº 1- Análise do Station Pointer a bordo

De seguida irão ser descritos dois métodos diferentes para a obtenção da posição, através da medição dos ângulos horizontais. Estes métodos relacionam uma parte de cálculo muito simples e as marcações que o navegador tem de executar, ao contrário do método do *Station Pointer*, que é um método direto de marcação na carta.

2.1.1 - Primeiro método

Este método encontra-se descrito de uma forma muito sucinta no manual nº4 de um curso de navegação, (WILLEMSSEN, 2014). Consiste em medir, com o sextante, dois ângulos, Alfa e Beta, entre três pontos conhecidos, A, B e C, para obter a posição do navegador P.

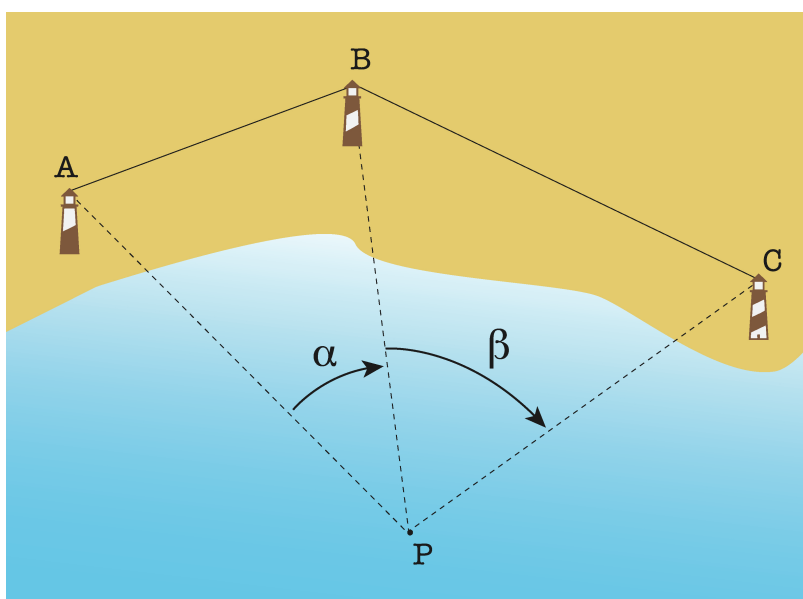


Figura nº 2 – Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, medição dos ângulos.

Após o navegador ter medido o ângulo $\hat{A}PB$, denominado por Alfa e o ângulo $\hat{B}PC$ denominado por Beta, este executa os seguintes passos:

- 1 - Assume-se que o navegador obteve 40° para o ângulo $\hat{A}PB$ e 50° para o ângulo $\hat{B}PC$;
- 2 - Na carta de navegação, desenha-se uma linha entre os pontos conhecidos A e B e entre B e C, como demonstra a figura nº 2;
- 3 - Ainda na carta, desenha-se uma linha perpendicular ao segmento de reta \overline{AB} , equidistante a A e B, e volta a repetir o mesmo processo para o segmento \overline{BC} , como demonstrado na figura nº 3;

4 – Depois, desenha-se uma linha de construção, a partir do ponto A, de maneira que faça um ângulo entre o segmento de reta \overline{AB} , igual ao ângulo medido em $\hat{A}PB$, e repete-se o mesmo passo para o ponto C, como se pode verificar na figura nº 3;

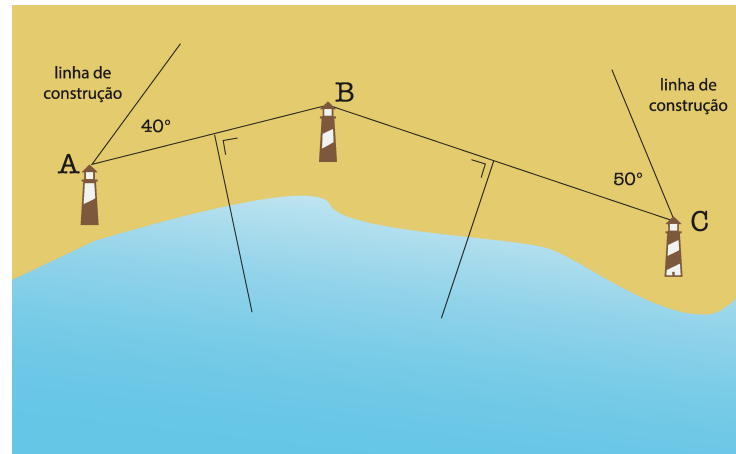


Figura nº 3 - Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, linhas de construção.

5 - De seguida, é desenhada uma linha perpendicular à linha de construção efetuada anteriormente, com início no ponto A, e repete-se o mesmo processo para o ponto C, como mostra a figura nº 4;

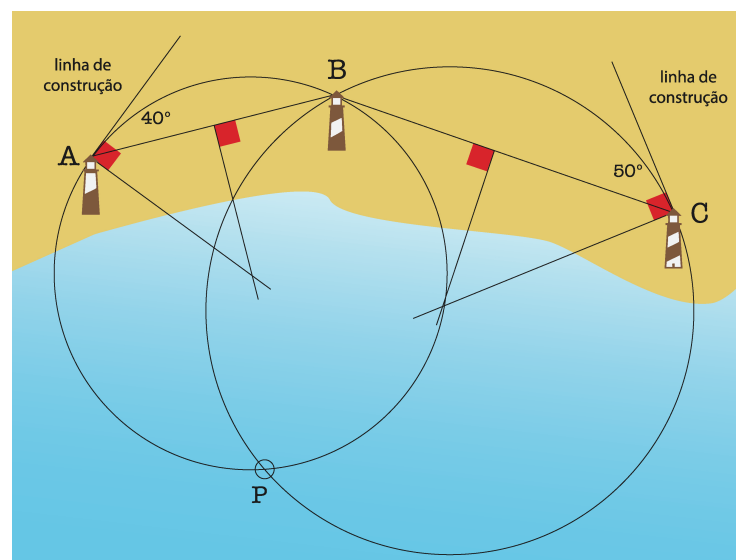


Figura nº 4 - Descrição do primeiro método para marcar a posição na carta, centros das circunferências.

6 - As últimas linhas perpendiculares desenhadas vão cruzar as primeiras linhas perpendiculares desenhadas anteriormente. Esta interseção irá ser o centro da circunferência, tendo como raio a distância à estação A ou B para a primeira circunferência, e B ou C para a segunda circunferência, como mostra a figura nº 4;

7 - Por fim, é possível obter duas interseções das circunferências. Uma, no ponto B e outra, no ponto P. Esta segunda interseção no ponto P irá ser a posição do navegador.

Este é um método que só necessita de um sextante para a medição dos ângulos Alfa e Beta, e de material básico de cartografia, como o esquadro de navegação, lápis e compasso, para efetuar a marcação da posição na carta. Pode-se considerar que este método é um método simples no que diz respeito ao cálculo, mas um pouco moroso para um navegador que se encontra a fazer uma aproximação a um porto ou até mesmo navegação costeira, que poderá ter que dar atenção ao tráfego marítimo. Podem ser encontrados outros métodos mais rápidos de executar a marcação da posição na carta. São exemplo disso, posições obtidas com o radar, na medição de duas distâncias.

2.1.2 - Segundo método

Este é um método em que se efetua um cálculo mais algébrico e onde se usa a lei dos senos (WILCZYNSKI, 1914), relacionando a distância entre os pontos conhecidos, o raio da circunferência que se pretende desenhar e o ângulo horizontal obtido.

Desta maneira, o navegador deve, depois de obter os ângulos horizontais Alfa (ângulo A \hat{P} B) e Beta (ângulo B \hat{P} C), seguir este procedimento:

1 - Efetuar o cálculo para obter o raio, e assim desenhar a circunferência que representa a sua linha de posição (Figura nº 5);

$$Raio = \frac{1}{2} \times \frac{(\overline{AB})}{\text{Sen}(Alfa)}$$

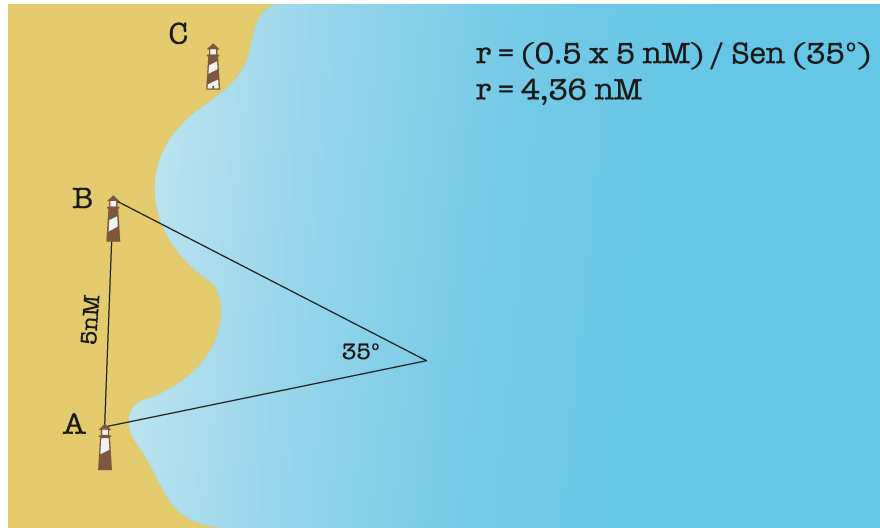


Figura nº 5 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, ângulo Alfa.

2 - Após obtido o raio da circunferência, é feita a intersecção destes dois segmentos com origem no ponto conhecido A e B (Figura nº 6 e 7). Pode ser usado um compasso com origem no ponto A, em que a abertura deste vai ser a distância calculada. De seguida pode ser usado o compasso para intersecar a mesma distância agora a partir de “B” e determinar o centro da linha da circunferência O_1 ;

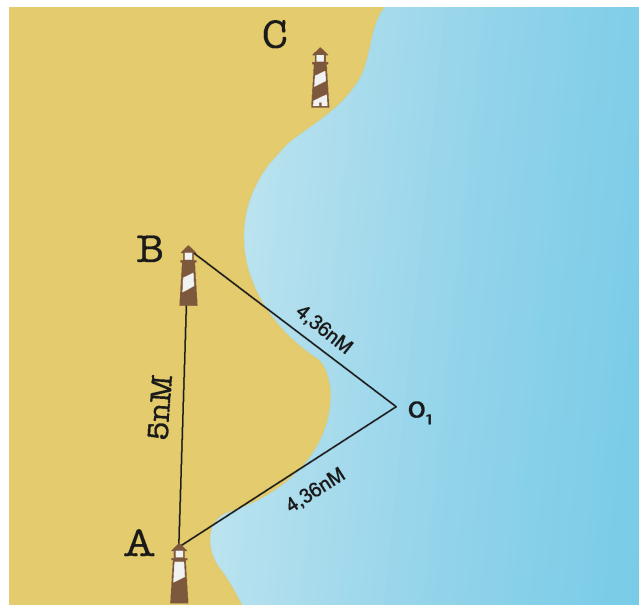


Figura nº 6 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, triângulo $A O_1 B$.

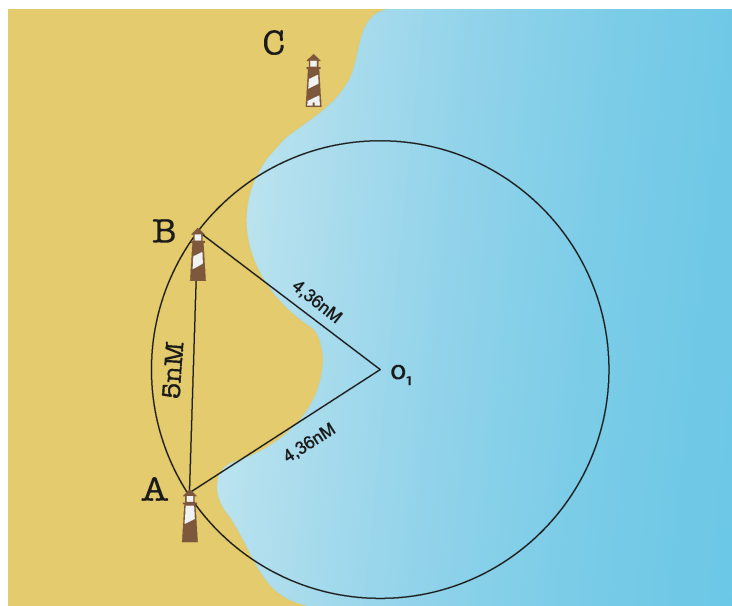


Figura nº 7 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, circunferência O_1 .

3 - Termina-se repetindo o mesmo processo para a estação B e C com o ângulo Beta, como mostra a figura nº 8;

4 - Após a marcação das duas linhas de posição, a posição do navegador pode ser obtida pela interceção destas.

Este método pode ser encontrado, tal como o último, em cursos de navegação como, por exemplo, *Aus Navigation by Greg*, nas suas aulas disponíveis no canal de *youtube*. É também muito fácil, e usa uma das regras básicas da trigonometria, conhecida pela lei dos senos, para a resolução do centro da esfera. De muito simples de compreensão e execução mas, como os outros dois métodos, é também muito moroso para um navegador que pretenda marcar a sua posição na carta de navegação numa aproximação a um porto ou em navegação costeira com tráfego à sua volta.

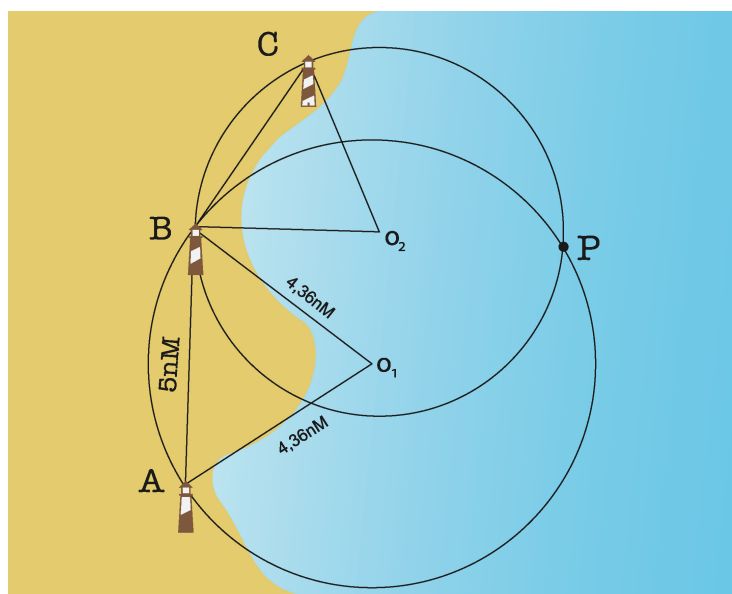


Figura nº 8 - Descrição do segundo método para marcar a posição na carta, Ponto P.

2.1.3 - Análise ao método clássico

Devido à necessidade de obtenção de uma posição geográfica rapidamente quando se navega perto da costa e com tráfego, o navegador opta por métodos mais simples para resolver o problema. Entre outros, os métodos mais usados são a marcação da posição geográfica na carta em papel, ou a marcação automática na carta eletrónica.

Desta maneira, os métodos clássicos foram caindo em desuso. Ao compararmos este método com um outro mais moderno como a obtenção da posição geográfica por *GPS*, a velocidade de obtenção com o *GPS* pode ser assumida como instantânea, enquanto o método clássico da medição de ângulos horizontais demora alguns segundos ou mesmo minutos.

O tempo de obtenção da posição foi o principal inimigo que fez com que os navegadores fossem arrumando os equipamentos usados para a obtenção da posição geográfica. O uso dos equipamentos, como *GPS* com marcação automática numa carta eletrónica, fez com que a navegação se tornasse mais perceptível e facilitada para os novos navegadores.

Mas quando comparamos o tempo que demora a obtenção de uma posição com radar, na medição de distâncias, ou mesmo que não seja o mais adequado na medição de azimutes, o

método clássico de medição de ângulos horizontais pode facilmente competir, quer seja no tempo para a obtenção da posição, quer seja no rigor.

Nos seguintes pontos pretendemos demonstrar como, com algumas alterações com os equipamentos que temos a bordo, podemos facilmente obter uma posição através dos ângulos horizontais, da mesma maneira que, nos dias de hoje, se obtém uma posição com auxílio do radar na medição de ângulos e, principalmente, distâncias.

Pretende-se com este estudo verificar se é possível otimizar o tempo da obtenção dos ângulos horizontais, sem que estes percam o seu rigor e, ainda, a otimização do tempo perdido nos cálculos, executando-os algebricamente. Por fim, verificar se, em casos de certas anomalias técnicas, este método ainda continua a ser viável.

2.2 - Alterações ao método clássico

Para que a utilização do método clássico de obtenção do posicionamento, através da medição de três pontos já conhecidos, seja de fácil utilização e eficaz, é necessário efetuar algumas alterações nas ferramentas que o constituem.

Com o passar dos anos, os navios têm vindo a ficar equipados, cada vez mais, com uma diversidade enorme de equipamentos eletrónicos. Estes equipamentos têm também sofrido uma grande evolução, no que diz respeito ao seu rigor. Pretendemos fornecer ao navegador um novo método para resolver o problema do posicionamento, utilizando os equipamentos que já existem a bordo. Este novo método poderá ser um complemento aos que são atualmente usados.

O método clássico consiste em usar o sextante para a obtenção dos ângulos horizontais e em transportar esses mesmos ângulos para a carta de navegação, permitindo obter a posição geográfica. O sextante é um instrumento de grande rigor e permite ao navegador a medição de ângulos com grande precisão, mas o tempo necessário para o uso deste instrumento é demasiado longo, por muita prática que se tenha. Pretende-se verificar a viabilidade e o rigor do método quando são utilizados o radar, agulhas magnéticas e sensores horizontais para a medição dos mesmos ângulos. Esta alternativa permite ao navegador ganhar tempo que é precioso para a navegação.

Este estudo não é novo. Podemos encontrar algumas referências a alguns que estudam a questão da obtenção da posição geográfica com o auxílio de métodos mais recentes, nomeadamente câmaras audiovisuais, elaborados por *Krzysztof Naus* (NAUS, 2011). Este estudo refere também a importância do erro e da aproximação às posições conhecidas para uma boa posição.

De uma maneira experimental, iremos verificar se com equipamentos como o radar ou a agulha magnética portátil, será possível, de uma maneira rápida, obter uma posição fiável. De seguida, com o auxílio de uma folha de cálculo, iremos verificar a obtenção da posição com coordenadas polares para que, desta maneira, a marcação da posição na carta seja mais fácil, ou até mesmo instantânea, no caso de uma eletrónica. Este tipo de equipamento encontra-se em todas as embarcações, como já referido, visto fazer parte do material de segurança a bordo. Pretende-se verificar se o erro obtido com este tipo de instrumento consegue ser desprezável para o objetivo da navegação.

Estes equipamentos vão ser muito importantes, no que diz respeito à velocidade de como é executada a aquisição dos ângulos. A grande vantagem deste método, em usar os equipamentos como o radar ou a agulha magnética, é nos ângulos de trabalho usados para os cálculos, pois estes são ângulos entre estações. Neste sentido, o norte de referência não tem qualquer importância para este método, desde que se mantenha constante durante a medição das três estações. O objetivo destes instrumentos é a medição do ângulo entre os três objetos. E, como é explicado no cálculo algébrico, é possível determinar o tipo de tetraedro aplicável a cada caso particular, verificando o cumprimento de condições matemáticas sem a necessidade da referência a qualquer norte.

A grande alteração do método clássico é também o cálculo algébrico, que vem fazer com que os estes se tornem instantâneos após a aquisição dos ângulos. Ao inserir este método numa folha de cálculo, o processo torna-se instantâneo. A isto, adicionamos a vantagem de que, no final dos cálculos, o resultado não são ângulos para fazer as marcações, mas sim coordenadas geográficas. Estas coordenadas podem ser facilmente transportadas para cartas, quer sejam de papel, quer sejam eletrónicas.

É de salientar que poderá ser possível a obtenção da posição com o radar e a passagem dessa posição, para uma carta eletrónica, instantaneamente. Todo este processo pode ser

efetuado eletronicamente, com programas informáticos que combinem os dois equipamentos. Desta maneira, o navegador, no seu planeamento, poderá identificar os pontos conhecidos e, durante a execução do planeamento, só terá de voltar a identificá-los no radar.

Esta poderá ser a grande alteração ao método clássico. O operador, em vez de se preocupar em obter os ângulos, efetuar os cálculos ou marcar diretamente na carta com os equipamentos necessários, estará somente preocupado em medir as três marcações e o computador efetuará os cálculos e marcará a posição.

2.3 - Do carteamo ao cálculo algébrico

A necessidade de criar um método algébrico, inicialmente, foi colocada para resolver os problemas topográficos (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921).

Com o aparecimento desta técnica, entendeu-se que era um método muito eficaz, mas moroso, visto que não existiam as ajudas tecnológicas que facilitassem o desenvolvimento do cálculo. No caso dos marítimos, a rapidez para a obtenção da posição é algo essencial, mas o método algébrico nunca poderia ser o método eleito, devido ao tempo que o marítimo tem para monitorizar a posição do navio.

Com o aparecimento das novas tecnologias informáticas, que vieram reduzir em muito o tempo despendido no desenvolvimento de cálculo, pretende-se agora criar um elo de ligação ao método clássico e às novas tecnologias, de modo a poder conceber novos sistemas e abrir novos caminhos para explorar.

Para facilitar o método de marcação da posição obtida, através da medição dos ângulos horizontais entre três posições já conhecidas, o matemático Snellius resolveu este problema e publicou no *Eratosthenes Batavus of 1617*, (WREEDE, 2007). Devido ao facto do matemático Pothonot, anos mais tarde, ter também efetuado um desenvolvimento muito idêntico ao que Snellius fez, nos dias de hoje, a resolução algébrica para este problema ficou conhecida por *Pothonot-Snellius Problem*, (DORRIE, 1966).

Após uma longa pesquisa, foi encontrado um método baseado no desenvolvimento do *Pothonot-Snellius Problem* para a resolução do tetraedro. Este método encontra-se descrito

num manual de instruções para investigação geográfica dos Estados Unidos (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921). Neste manual, é possível encontrar, de uma forma muito sucinta, a descrição algébrica de todos os passos a seguir para a obtenção da posição geográfica, (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921), através da medição dos ângulos entre três posições já conhecidas.

Para que este método pudesse ser transportado e viável, à sua utilização, com os materiais que existem a bordo, foi necessário adicionar alguns componentes. De seguida, explicamos o método com as novas componentes.

Segundo a publicação acima mencionada, a obtenção da posição geográfica é possível se existirem três pontos que formem um triângulo, do qual os lados e os ângulos são conhecidos. Assim, poderá ser calculada a posição de um ponto exterior P, desde que seja possível medir dois ângulos formados entre o ponto P designado e os dois lados.

Esta solução é usada para problemas topográficos, através da qual o operador deverá medir cuidadosamente os ângulos, os lados dos triângulos e efetuar os cálculos.

Na construção deste tetraedro reparamos que são possíveis três situações:

- Situação nº 1

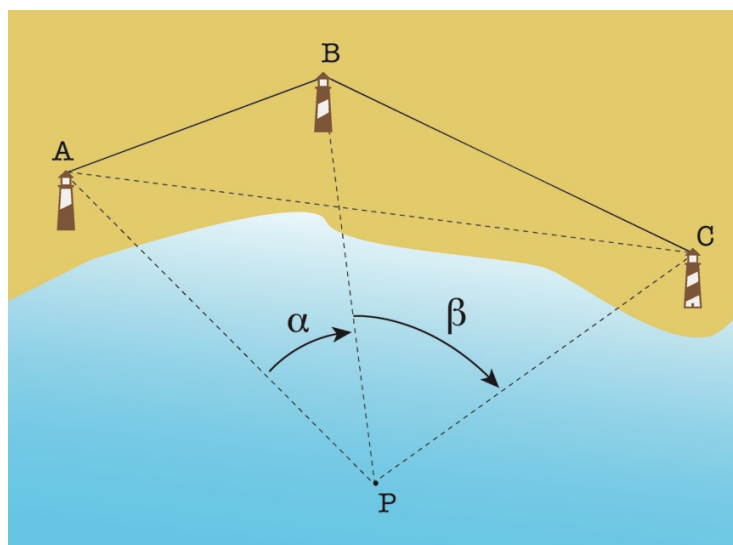


Figura nº 9 – Primeira situação do tetraedro.

- Situação nº 2

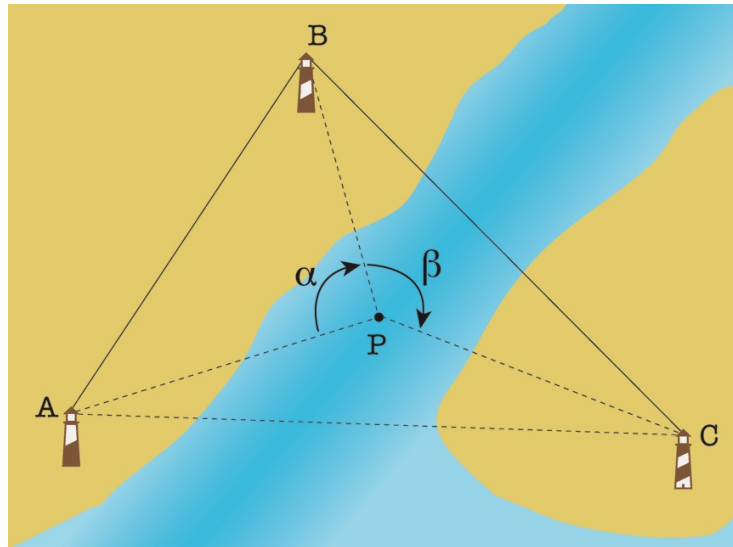


Figura nº 10 – Segunda situação do tetraedro.

- Situação nº 3

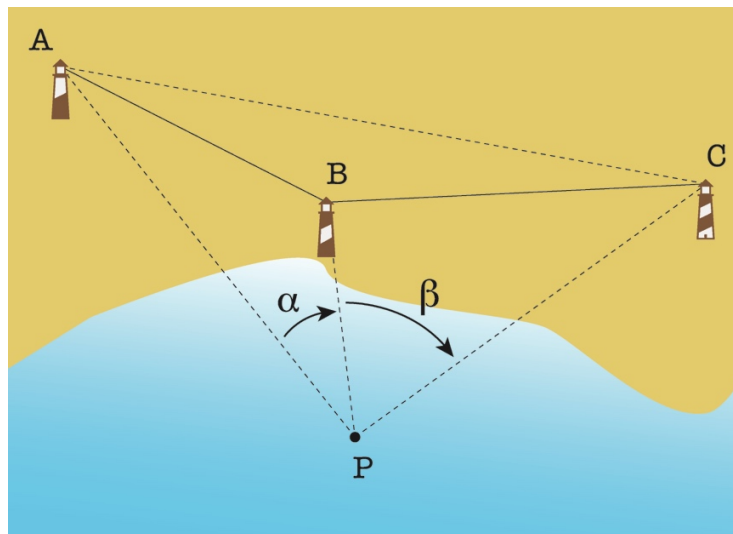


Figura nº 11 – Terceira situação do tetraedro.

A distinção destas três situações é muito importante porque, como se poderá verificar na explicação algébrica, vai existir uma diferença no tratamento dos dados, dependendo de se estamos perante um tetraedro do tipo 1, como nos mostra a figura nº 9, do tipo 2, que pode ser encontrada a sua ilustração na figura nº 10, ou do tipo 3, espelhada na figura nº 11. Tudo vai depender da capacidade do navegador em saber se o ponto B se encontra dentro de um triângulo formado pelos pontos APC ou fora. Devido a esta questão, foi criada uma condição,

explicada mais adiante, na análise do tipo de tetraedro, na introdução dos novos componentes.

Esta explicação algébrica baseia-se na resolução do problema dos ângulos horizontais para o plano. Com o desenvolver dos cálculos, foi criado um modelo matemático que usa a trigonometria esférica para que, em simultâneo, no decorrer das experiências, fosse possível comparar as diferenças e verificar a viabilidade do problema. Desta maneira, é possível determinar o erro do cálculo no plano e no espaço.

2.3.1 - Explicação algébrica

Antes de o operador obter os ângulos Alfa e Beta, é necessário nomenclar os pontos, ângulos e distâncias que podemos encontrar num tipo de tetraedro, como nos mostra a figura nº12.

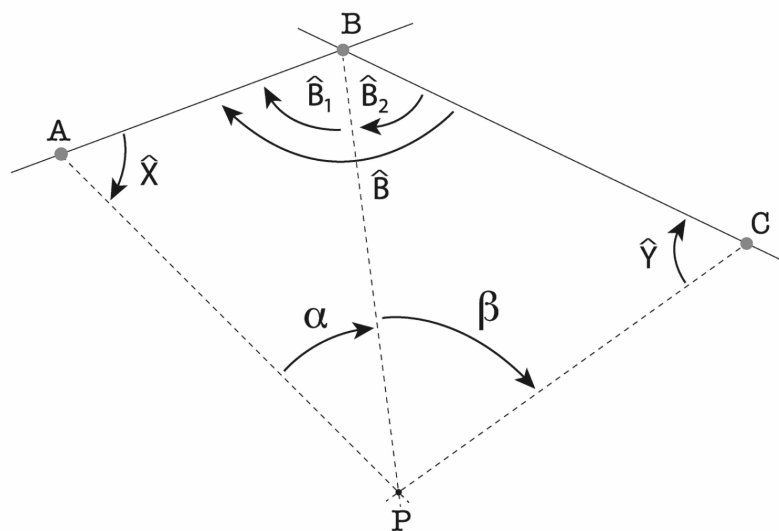


Figura nº 12 – Tetraedro com todos os ângulos referenciados.

Com o intuito de facilitar a compreensão, seguem-se as seguintes regras:

- O nome dos pontos conhecidos é sempre dado no sentido horário ou direto, a partir do navegador que se encontra no ponto P. Sendo o primeiro ponto designado como ponto A, o segundo ponto como B e, por fim, o terceiro ponto como C.

- Distância entre o ponto A e o ponto B (\overline{AB}).
- Distância entre o ponto B e o ponto C (\overline{BC}).
- Distância entre o ponto A e o ponto C (\overline{AC}).
- Distância entre o ponto A e o ponto P (\overline{AP}).
- Distância entre o ponto B e o ponto P (\overline{BP}).
- Distância entre o ponto C e o ponto P (\overline{CP}).
- \hat{X} , ângulo formado entre os pontos P \hat{A} B.
- \hat{Y} , ângulo formado entre os pontos P \hat{C} B.
- Alfa, ângulo formado entre os pontos A \hat{P} B.
- Beta, ângulo formado entre os pontos B \hat{P} C.
- \hat{B} , ângulo formado entre os pontos A \hat{B} C.
- \hat{B}_1 , ângulo formado entre os pontos A \hat{B} P.
- \hat{B}_2 - ângulo formado entre os pontos P \hat{B} C.

Depois de nomeclar todos os objetos do tetraedro, inicia-se o cálculo das distâncias entre os pontos conhecidos \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} e o ângulo \hat{B} , que vai servir como cálculo auxiliar para o seguinte método.

2.3.1.1 - Método algébrico topográfico (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921)

Este método, como referido anteriormente, é um método analítico usado na topografia. Entre os diversos métodos que podem ser encontrados para a resolução deste tipo de problemas, este foi o mais simples de tratar e projetar numa folha de cálculo. Trata-se de uma solução publicada em 1921, nas Instruções Gerais para o trabalho de campo dos Estados Unidos para as Inspeções Costeiras e Geodésicas (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921). Este manual relata o método abaixo descrito.

A resolução deste problema reside em encontrar os ângulos \hat{X} e \hat{Y} , e, posteriormente, determinar os outros elementos do tetraedro.

Encontrar o ângulo \hat{X} e o ângulo \hat{Y} :

1 - No caso de nos encontrarmos na presença de um tetraedro do tipo 1 ou 2:

$$\hat{S} = 180 - \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{B} + Alfa + Beta) = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{X} + \hat{Y})$$

No caso de nos encontrarmos na presença de um triângulo do tipo 3:

$$\hat{S} = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{B} - Alfa - Beta) = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{X} + \hat{Y})$$

2 - Cálculo de \hat{Z} :

$$Tg(\hat{Z}) = \frac{\overline{AB} \times Sen(Beta)}{\overline{BC} \times Sen(Alfa)}$$

3 - Assumindo que,

$$Tg(\hat{Z}) = \frac{\overline{AB} \times Sen(Beta)}{\overline{BC} \times Sen(Alfa)}$$

e,

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} \times (\hat{X} - \hat{Y})$$

Logo,

$$Tg(\hat{\epsilon}) = coTg(\hat{Z} + 45^\circ) \times tg(\hat{S})$$

4 - Em que se:

$$Tg(\hat{\epsilon}) > 0, \quad \hat{X} = \hat{S} + \hat{\epsilon}, \quad \hat{Y} = \hat{S} - \hat{\epsilon}$$

$$Tg(\hat{\epsilon}) < 0, \quad \hat{X} = \hat{S} - \hat{\epsilon}, \quad \hat{Y} = \hat{S} + \hat{\epsilon}$$

Desta maneira, é possível descobrir os ângulos \hat{Y} e \hat{X} , sendo também possível determinar os dois outros ângulos que formam o tetraedro (o terceiro e o quarto ângulo), que, por sua vez, é formado por dois triângulos. Ora, o primeiro triângulo é formado pelos pontos PAB e os ângulos Alfa, \hat{X} e \hat{B}_1 , o segundo triângulo é formado pelos pontos PBC e os ângulos Beta, \hat{Y} e \hat{B}_2 . Este cálculo usa a trigonometria plana para a resolução dos problemas. Para poder verificar as diferenças entre esta resolução no plano e saber se a divergência no resultado seria admissível, foi criada uma base de dados para resolver o problema com a trigonometria esférica.

2.3.2 - Condições particulares

Durante o estudo foi possível verificar, nas publicações consultadas e nos cálculos elaborados, que existem duas condições em que o método descrito anteriormente não pode ser usado para o cálculo da posição geográfica. (De extrema importância a interpretação que o professor de *Washington & Jefferson coolege*, *Michael Woltermann* faz sobre a publicação já mencionada “*100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*” sobre o problema “*40 Annex to a Survey*”), (WOLTERMANN, n.d.).

Exclusão nº1 (WOLTERMANN, n.d.): quando os três pontos conhecidos são colineares (figura nº 13) – o que, por um lado, simplifica a solução, visto que nos encontramos na mesma linha de posição. Desta maneira, o navegador só consegue obter uma linha de posição e não a interseção de duas linhas de posições para extrair a sua posição.

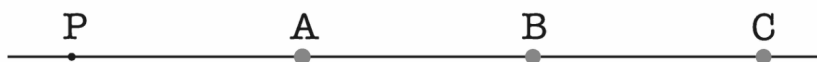


Figura nº 13 – Tetraedro com ângulos Alfa e Beta igual a zero.

Exclusão nº 2 (WOLTERMANN, n.d.): quando o ponto P se encontra sobre a circunferência formada pelos pontos A, B e C, como se pode verificar na figura nº 14. Este é

conhecido como o “círculo perigoso” (tradução da publicação mencionada), visto que não há uma solução única conhecida, pois todos os ângulos inscritos são iguais.

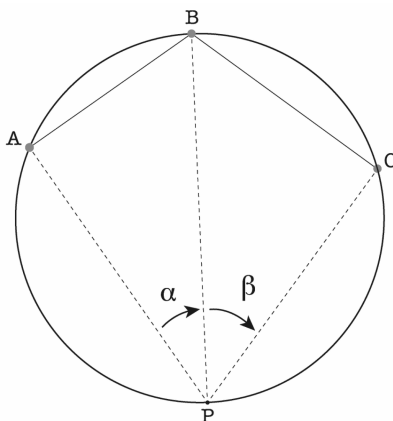


Figura nº 14 – Tetraedro com quatro pontos circunscritos.

Na prática, estas soluções podem-se considerar quase como desprezáveis. No caso da primeira exclusão, o navegador nunca vai conseguir obter os ângulos Alfa e Beta, visto que os ângulos são zero e encontram-se em cima de um enfiamento, como podemos verificar na figura nº 15. Logo, o navegador aproveita esta situação em seu benefício e obtém uma boa linha de posição.

No segundo caso, todos os pontos se encontram circunscritos numa mesma circunferência. Ainda assim, o navegador consegue saber se se encontra nessa situação com uma simples verificação trigonométrica.

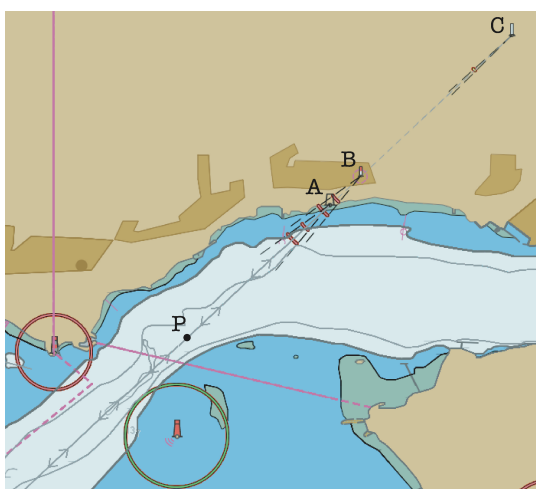


Figura nº 15 – Carta com enfiamento. (Open sea charts)

Visto que, para estarmos nesta situação, as duas linhas de posição, que são duas circunferências, estão sobrepostas, o seu raio vai ser o mesmo. Desta maneira, os dois raios das circunferências seriam iguais juntamente com a circunferência que intercepta os pontos “A”, “B” e “C” com o ângulo alfa e beta. Estes raios podem ser obtidos pelas seguintes equações:

$$Raio_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\text{Sen}(\text{Beta})}$$

$$Raio_2 = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{AB}}{\text{Sen}(\text{Alfa})}$$

$$Raio_3 = \frac{1}{2} \times \frac{\overline{BC}}{\text{Sen}(\text{B}\hat{\text{A}}\text{C})}$$

Se $Raio_1 = Raio_2 = Raio_3$ e o navegador encontra-se na presença de um tetraedro do tipo 1, esta situação é a única sem resolução, porque todas as linhas de posição estão sobrepostas. Caso o navegador se encontre num tetraedro do tipo 2 ou 3, em que os raios 1, 2 e 3 são iguais, a resolução deste ainda é possível porque as linhas de posição não são colineares.

2.4 - Introdução de novos componentes ao método algébrico topográfico

Ao otimizar o método apresentado anteriormente, para que se tornasse de fácil utilização, foram-lhe adicionados alguns componentes. Desta maneira, o navegador só necessita de inserir numa folha de cálculo as posições geográficas dos três pontos conhecidos e os dois ângulos formados entre os pontos A, B e C. De um modo esquemático, é apresentada uma folha de cálculo para a resolução deste problema.

2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo

Com o intuito de preparar a folha de cálculo, é necessário determinar as distâncias entre os pontos \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} . Esta operação é efetuada com base nas fórmulas da trigonometria esférica. Foi usada uma folha de cálculo do tipo *Excel* para computadorizar o método e torná-lo dinâmico:

Passo nº 1.1 - Posições geográficas

No seguinte quadro, que é apresentado na figura nº 16, são apresentadas as posições geográficas conhecidas de A, B e C com as respetivas marcações.

		Graus	Minutos	Nome	Marcação
Posição A	Latitude				
	Longitude				
Posição B	Latitude				
	Longitude				
Posição C	Latitude				
	Longitude				

Figura nº 16 – Exemplo do primeiro quadro de inserção de dados

Passo nº 1.2 - Cálculo dos ângulos Alfa e Beta

Alfa	
Beta	

Figura nº 17 – Exemplo do segundo quadro de inserção de dados

Neste quadro, como é mostrado na figura nº 17, são colocados os ângulos Alfa e Beta com a seguinte condição:

O cálculo do ângulo Alfa é a diferença absoluta $< 180^\circ$ entre a marcação A e B.

O cálculo do ângulo Beta é a diferença absoluta $< 180^\circ$ entre a marcação B e C.

Passo nº 1.3 - Cálculo das distâncias \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} .

No decorrer da pesquisa, foi possível encontrar, no artigo da empresa *Movable Type LTD* (VENESS, 2009), o uso das fórmulas de cálculo de distância e azimutes com um erro médio de 0,3%. Este erro deve-se ao facto de as fórmulas trigonométricas considerarem a Terra como uma esfera e desprezarem o elipsoide. Na Terra podemos

obter a medição de raios entre os valores 6378 km, quando medidos no equador, e de 6357 km, quando medidos nos polos. Geralmente, para este tipo de cálculos, são aceitáveis valores de 6371 km de raio da terra. Isto significa que podemos obter erros na ordem dos 0,55% nas zonas cerca do equador e abaixo dos 0,3% quando subimos na latitude. Em termos práticos, estamos a falar, em média, de um erro intrínseco ao cálculo de 3 a 5 metros por cada 1 km. Para o cálculo das distâncias, foi usado a seguinte fórmula com aplicação direta numa folha de cálculo do tipo *Excel*:

Da trigonometria esférica, a lei dos cossenos (NAH, 2001), considera-se o triângulo esférico com a denominação dos lados e ângulos que pode se encontrado na figura nº 18;

$$\text{Cos } c = \text{Cos } a \times \text{Cos } b + \text{Sen } a \times \text{Sen } b \times \text{Cos } C$$

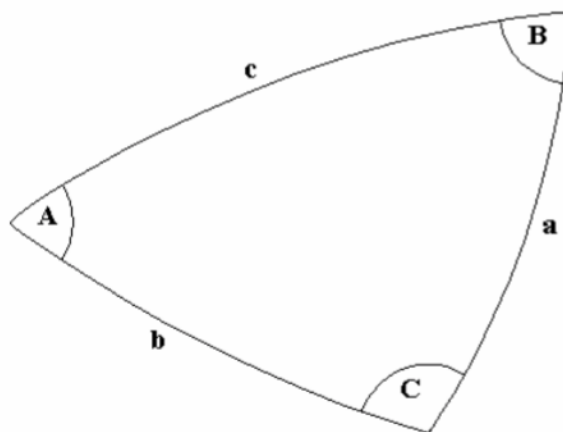


Figura nº 18 – Triângulo esférico

Desenvolvendo (VENESS, 2009) :

$$D = \text{arcCos}((\text{Sen} (Lat_1) \text{Sen} (Lat_2) + \text{Cos} (Lat_1) \text{Cos} (Lat_2) \text{Cos} (Long_2 - Long_1)))$$

Onde:

D – Distância.

Lat_1 - Latitude do ponto 1.

$Long_1$ – Longitude do ponto 1.

Lat_2 - Latitude do ponto 2.

$Long_2$ – Longitude do ponto 2.

$arcCos$ – inverso do cosseno do ângulo.

Cos – cosseno do ângulo.

Sen – seno do ângulo.

Distâncias	Minutos/ Milhas
\overline{AB}	
\overline{BC}	
\overline{AC}	

Figura nº 19 – Tabela de cálculo para distância entre pontos

Cada distância deve ser colocada num quadro como mostra a figura nº 19, que adiante vão ser utilizadas para o cálculo dos restantes ângulos do tetraedro.

Passo nº 1.4 - Cálculo dos azimutes entre os pontos A, B e C.

Para o cálculo dos ângulos, foi usado o mesmo artigo *Movable Type LTD* (VENESS, 2009) que nos ajudou imenso na concretização do cálculo dos azimutes iniciais entre dois pontos, para que, depois, fosse possível subtrair um azimute inicial ao outro e obter o ângulo interno. Para isso, foi usada uma função da folha de cálculo que é o $aTan2$. Como explicado no artigo, visto que esta função $aTan2$ na folha de cálculo *Excel* devolve dois valores entre o intervalo aberto $-\pi$ e fechado $+\pi$, isto é, entre o intervalo aberto -180° e o intervalo fechado $+180^\circ$, para normalizar o resultado e converter o resultado para azimutes de 000° a 360° , é necessário converter os valores negativos para valores positivos (figura nº 20).

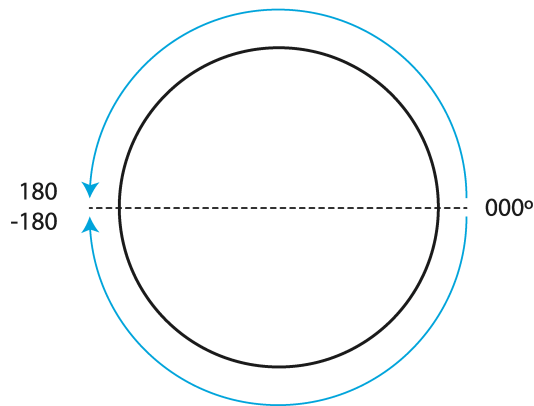


Figura nº 20 – Demonstração da medição do ângulo arco-tangente 4-quadrantes, na folha de Excel.

Desta maneira, é possível calcular os ângulos iniciais segundo a seguinte fórmula da trigonometria esférica (VENESS, 2009), que pode ser registado num quadro como é mostrada na figura nº 21:

$$\theta = aTan2 \left(Sen(\Delta_{Long}) \times Cos(Lat_2), \right. \\ \left. Cos(Lat_1) \times Sen(Lat_2) - Sen(Lat_1) \times Cos(Lat_2) \times Cos(\Delta_{Long}) \right)$$

Onde:

Δ_{Long} – Diferença de Longitude.

Sen – Seno do ângulo.

Cos – Cosseno do ângulo.

Lat_1 – Latitude do ponto de partida.

Lat_2 – Latitude do ponto de chegada.

$aTan2$ – Devolve o arco-tangente quatro quadrantes, ou inverso tangente de um específico x e y . O arco-tangente é o ângulo formado entre o eixo dos x e a linha que passa na origem $(0,0)$ e o ponto com as coordenadas (x, y) . O ângulo dado é inserido e devolvido em radianos.

Nota: um resultado positivo representa um ângulo contado no sentido inverso, a partir do ângulo eixo dos xx ; um ângulo negativo no resultado representa num ângulo direto contado a partir do eixo do xx .

Existe também a possibilidade de calcular o ângulo de uma maneira mais clássica, como descrito num artigo de *R. Bullock* (BULLOCK, 2007). A seguir temos um exemplo das fórmulas explicadas nesse artigo:

$$S \rightarrow \text{Sen}(\Delta_{Long}) \times \text{Cos}(Lat_2)$$

$$C \rightarrow \text{Cos}(Lat_1) \times \text{Sen}(Lat_2) - \text{Sen}(Lat_1) \times \text{Cos}(Lat_2) \times \text{Cos}(\Delta_{Long})$$

O ângulo θ vai ser obtido em quadrantal pela seguinte fórmula:

$$\theta = \text{arcTg}\left(\frac{S}{C}\right)$$

No entanto, é preciso ter muita atenção quando se usa esta fórmula, pois, caso o valor de C seja 0, temos uma equação impossível. Deste modo, é aconselhável o uso da fórmula que podemos encontrar em quase todas as linguagens de programação, *atan2(..., ...)*. Por esta razão, Bullock desencoraja o uso do método tradicional.

Azimute	Graus
\overrightarrow{AB}	
\overrightarrow{AC}	
\overrightarrow{BA}	
\overrightarrow{BC}	
\overrightarrow{CA}	
\overrightarrow{CB}	

Figura nº 21 – Tabela de cálculo dos ângulos

Passo nº 1.5 - Análise do tipo de tetraedro que está presente.

Para isso, foi necessário criar uma condição que funcionasse nas três situações possíveis. Neste caso, utilizam-se os azimutes verdadeiros calculados anteriormente

entre os pontos \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{AC} . Com estes dois azimutes e os ângulos Alfa e Beta, é possível distinguir os três tetraedros. Para isso, é necessário respeitar a seguinte condição:

Para que esta condição se verifique, é necessário tomar em atenção a seguinte nomenclatura:

- O ponto A é o que se encontra mais à esquerda do navegador;
- De seguida, no sentido direto, encontramos o ponto B;
- Por fim, no sentido direto, encontramos o ponto C.

A condição apresentada não precisa de qualquer norte de referência.

Elemento nº 1

$$\text{Se, } \text{Alfa} + \text{Beta} > 180,$$

Logo, estamos na presença dum tetraedro do tipo 2, como demonstra a figura nº 22.

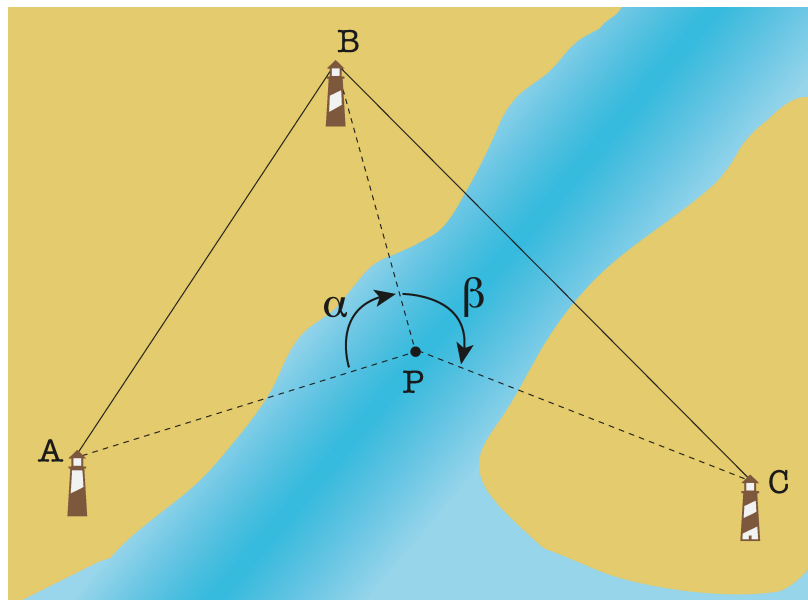


Figura nº 22 – Tetraedro referente à primeira condição.

Elemento nº2

$$\text{Se, } \text{Alfa} + \text{Beta} < 180;$$

Elemento nº 2.1

$$\text{Se, } (\text{Azimute } \overrightarrow{AB}) - (\text{Azimute } \overrightarrow{AC}) < 0;$$

Elemento nº 2.2

$$\text{Logo: } 360 + ((\text{Azimute } \overrightarrow{AB}) - (\text{Azimute } \overrightarrow{AC}))$$

Elemento nº 2.3

Se os elementos 2.1 ou 2.2 ≥ 180 , então estamos na presença do tetraedro do tipo 1, como demonstra a figura nº 23.

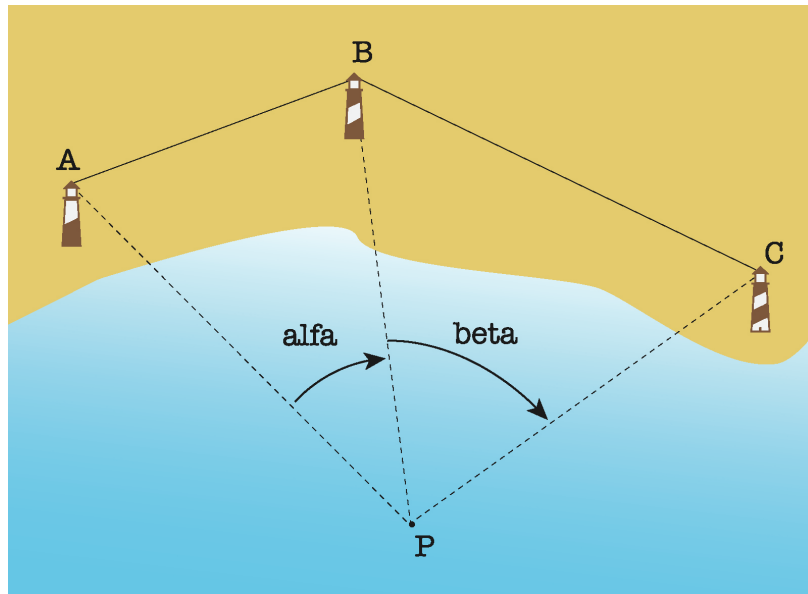


Figura nº 23 – Tetraedro referente à segunda condição

Elemento nº 3

Caso o elemento nº 1 junto com o 2.3 não se verifiquem, estamos na presença do tetraedro do tipo 3, como demonstra a figura nº 24.

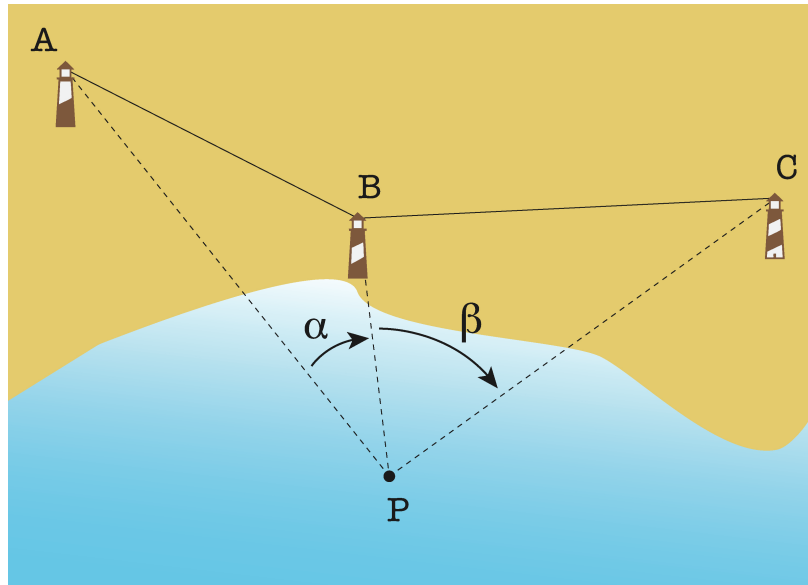


Figura n° 24 – Tetraedro referente à condição exclusiva.

Nota:

Caso,

$$(\text{Azimute } \overrightarrow{AB}) - (\text{Azimute } \overrightarrow{AC}) = 0;$$

Ou,

$$(\text{Azimute } \overrightarrow{AC}) - (\text{Azimute } \overrightarrow{AB}) = 0;$$

Então, estamos na presença de um caso particular, que significa que os três pontos são colineares. Logo, podemos afirmar que estamos na presença de um tetraedro como demonstra a figura n° 25.

Dependendo do elemento n° 2 ou 2.3, seja uma das duas verdadeira, se o resultado for maior que 180°, estamos na presença do tetraedro do tipo 1. Caso contrário, isto é, nenhum dos elementos, 2.2 ou 2.4 se verificar, estamos então na presença do tetraedro do tipo 3.

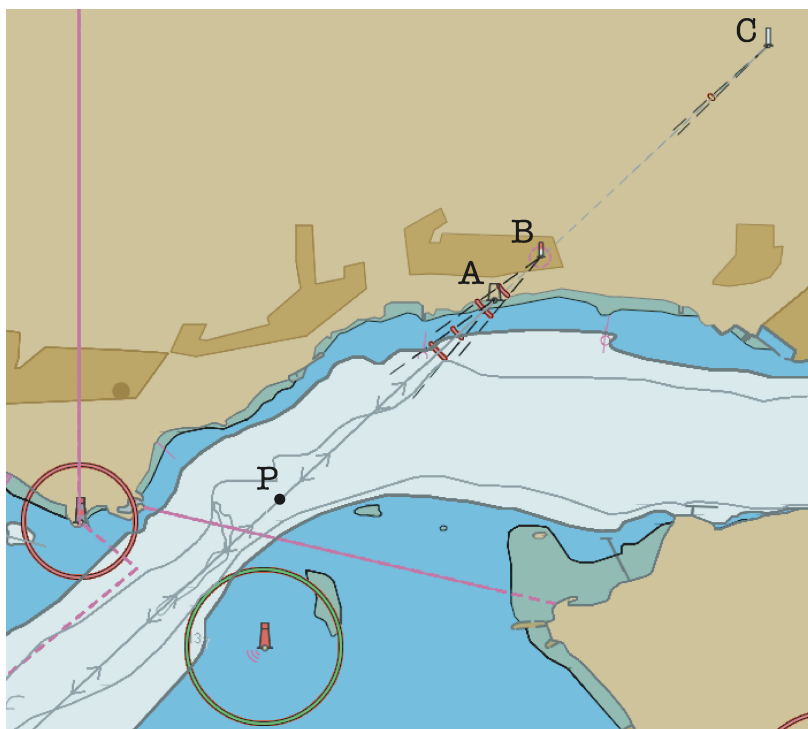


Figura nº 25 – Três pontos colineares OPEN CPN

Desta maneira, o navegador não necessita de projetar o tetraedro para saber qual dos três tipos de tetraedro pode estar presente. Este foi um grande passo para poder tornar o método, na sua totalidade, numa questão algébrica, graças a esta simples condição.

Passo nº 1.6 - Cálculo do ângulo interno \hat{B} .

Para o cálculo deste ângulo é necessária a análise cuidadosa da seguinte condição entre os dois azimutes \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} .

Se;

$$(\text{o maior dos dois azimutes}) - (\text{o menor dos dois azimutes}) > 180;$$

Então;

$$360 - (\text{o maior dos dois azimutes}) - (\text{o menor dos dois azimutes}) = \hat{\text{Ângulo}} \hat{B}$$

Se não;

$$(\text{o maior dos dois azimutes}) - (\text{o menor dos dois azimutes}) = \hat{\text{Ângulo}} \hat{B}$$

Desta maneira, sabemos sempre que o ângulo calculado é maior que 180°, o que vai ser muito útil para cálculos futuros, visto que, anteriormente, já foi determinado o tipo de tetraedro em que estamos presentes. Até agora, foram efetuados, simplesmente, cálculos auxiliares para poderem ser utilizados no método para o cálculo da posição.

2.4.2 - Cálculo descrito nas Instruções Gerais para o trabalho de campo dos Estados Unidos para as Inspeções Costeiras e Geodésicas (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921)

Agora, com estes dados, é possível utilizar o método descrito nas Instruções Gerais para o trabalho de campo dos Estados Unidos para a Inspeções Costeiras e Geodésicas:

Passo nº 2.1 - Cálculo de \hat{S} .

No caso de nos encontrarmos na presença de um triângulo do tipo 1 ou 2, então:

$$\hat{S} = 180 - \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{B} + Alfa + Beta) = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{X} + \hat{Y})$$

No caso de nos encontrarmos na presença de um triângulo do tipo 3, então:

$$\hat{S} = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{B} - Alfa - Beta) = \left(\frac{1}{2}\right) \times (\hat{X} + \hat{Y})$$

Passo nº 2.2 - Cálculo de Z

$$Tg(Z) = \frac{\overline{AB} \times Sen(Beta)}{\overline{BC} \times Sen(Alfa)}$$

Passo nº 2.3 - Cálculo de $\hat{\epsilon}$,

$$Tg(\hat{\epsilon}) = coTg(\hat{Z} + 45^\circ) \times Tg(\hat{S})$$

Passo nº 2.4 - Cálculo do ângulo \hat{X} e \hat{Y}

$$Se \hat{\epsilon} > 0; \hat{X} = \hat{S} + \hat{\epsilon}, \hat{Y} = \hat{S} - \hat{\epsilon}$$

$$Se \hat{\epsilon} < 0; \hat{X} = \hat{S} - \hat{\epsilon}, \hat{Y} = \hat{S} + \hat{\epsilon}$$

2.4.3 - Tratamento do resultado ou cálculo final

Com a ajuda do cálculo anterior, é agora possível determinar as coordenadas do ponto P. Para isso, primeiro é necessário calcular a distância entre o ponto B e ponto P e, posteriormente, calcular o azimute verdadeiro de \overrightarrow{BP} , através da trigonometria esférica.

Passo nº 3.1 - Cálculo do ângulo \widehat{B}_2

Da trigonometria plana sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , sendo assim, é possível obter o ângulo B_2 através da seguinte equação:

$$\widehat{B}_2 = 180 - (\hat{Y} + \text{Beta})$$

Com este cálculo, sabemos agora todos os ângulos do triângulo PBC, constituído pelos ângulos \widehat{B}_2 (calculado neste ponto), \hat{Y} (calculado no ponto 2.4) e Beta (obtido pelo navegador). É possível utilizar esta equação da trigonometria plana devido às distâncias serem muito curtas, logo, não existe distorção angular para estes casos e, a que possa existir, pode-se considerar desprezável.

Passo nº 3.2 - Cálculo das distâncias.

Para o cálculo da distância sabemos que, da trigonometria esférica, comiserando o triângulo esférico que é mostrado na figura nº 26, a lei dos senos (NAH, 2001);

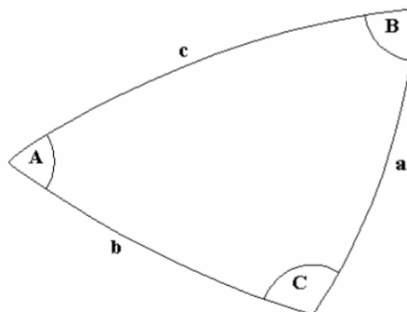


Figura nº 26 – Triângulo esférico

$$\frac{\text{Sen}(A)}{\text{Sen}(a)} = \frac{\text{Sen}(B)}{\text{Sen}(b)} = \frac{\text{Sen}(C)}{\text{Sen}(c)}$$

$$\frac{\text{Sen}(A)}{\text{Sen}(a)} = \frac{\text{Sen}(C)}{\text{Sen}(c)}$$

$$\text{Sen}(a) = \text{Sen}(A) \frac{\text{Sen}(c)}{\text{Sen}(C)}$$

$$a = \text{arcSen} \left(\text{Sen}(A) \frac{\text{Sen}(c)}{\text{Sen}(C)} \right)$$

Substituindo;

$$\overline{PB} = \text{arcSen} \left(\text{Sen}(\hat{X}) \frac{\text{Sen}(\overline{AB})}{\text{Sen}(\text{Alfa})} \right)$$

Passo nº 3.3 - Cálculo do azimute \overline{BP} .

Para o cálculo do azimute \overline{BP} é necessário recorrer a mais uma condição:

$$\text{Se } (\widehat{B}_2 + \text{azimute } \overline{BC}) > 360;$$

$$\text{Se sim; } (\widehat{B}_2 + \text{azimute } \overline{BC}) - 360 = \text{azimute de } \overline{BP}$$

$$\text{Se não; } (\widehat{B}_2 + \text{azimute } \overline{BC}) = \text{azimute de } \overline{BP}$$

Descoberta a distância e o azimute de \overline{BP} , é finalmente possível calcular as coordenadas geográficas do ponto P.

Passo nº 3.4 - Cálculo das coordenadas P.

Com o auxílio de o artigo publicado pela *Movable Type LTD*, (VENESS, 2009), é possível colocar, numa folha de cálculo, os elementos e obter a posição diretamente com o auxílio das duas equações:

- Para o cálculo da Latitude do ponto P;

$$Lat_P = \text{arcSen} \left(\text{Sen} (Lat_B) \times \text{Cos} (D) + \text{Cos} (Lat_B) \times \text{Sen} (D) \times \text{Cos} (\overline{BP}) \right)$$

- Para o cálculo da Longitude do ponto P;

$$Long_P = Long_B + a \text{Tan}^2 \left(\text{Sen} (\overline{BP}) \times \text{Sen} (D) \times \text{Cos} (Lat_B), \right. \\ \left. \text{Cos}(D) - \text{Sen} (Lat_B) \times \text{Sen} (Lat_P) \right)$$

Após uma análise, é possível verificar que este modelo contém um erro intrínseco. Trata-se do facto de que as fórmulas usadas para a resolução do tetraedro remetam para a resolução do mesmo no plano e não na esfera. Desta maneira, é necessário ter atenção ao uso deste método. Essa análise encontra-se descrita, de forma mais exhaustiva, adiante.

Por outro lado, todos os cálculos dos ângulos e distâncias são efetuados tendo em conta o triângulo esférico, para minimizar o erro deste processo, exceto no ponto 3.2, em que se considera que a soma dos ângulos internos do triângulo em que o navegador se encontra é de 180°.

No final deste procedimento, é possível obter a posição geográfica sem que o navegador faça nenhum tipo de marcação na carta de navegação. Este processo torna-se especialmente muito útil para usar em navios que estejam equipados somente com cartas eletrónicas, visto que a posição pode ser obtida com as coordenadas geográficas de referência aos pontos que estão a ser observados.

2.5 - Análise do método algébrico

Com a introdução das coordenadas polares, do cálculo das distâncias e azimutes, da análise por condições do tipo de tetraedro e, por fim, do cálculo da posição final, obtêm-se as coordenadas polares do navegador (ponto P). Este método torna-se, assim, mais prático para o navegador, pois este pode obter a sua posição de uma maneira expedita, com o auxílio de uma simples folha de cálculo. No Anexo I, é possível consultar um exemplo deste tipo de folha de cálculo, onde são somente inseridos as fórmulas e condições referenciados no ponto

“2.4.1 Cálculo auxiliar ou pré cálculo”, “2.4.2 - Cálculo descrito nas Instruções Gerais para o trabalho de campo dos Estados Unidos para as Inspeções Costeiras e Geodésicas (U.S. Coast and Geodetic Survey, 1921),” e “2.4.3 - Tratamento do resultado ou cálculo final”:

- Coordenadas geográficas das posições conhecidas A, B e C.

- Diferença angular entre A e B, ângulo Alfa e diferença angular entre B e C ângulo Beta.

Após a introdução destes dados, é possível obter as coordenadas do navegador, sem que seja necessário um cálculo auxiliar na carta e/ou papel. Desta maneira, é possível colocar de parte todas as ferramentas necessárias para o carteamo deste método, quando é executado pelo método clássico. São exemplo desses materiais, as cartas de papel, compasso, esquadro de navegação e *Station Pointer*.

Tal como no método clássico, quanto maior for o rigor dos cálculos, mais fiável será a posição obtida. Desta maneira, com a introdução analítica dos cálculos a executar após a obtenção dos ângulos Alfa e Beta, reduzimos a probabilidade de erro na obtenção da posição. O que se torna mais fácil para o navegador para detetar o erro, visto que este só pode existir ou na introdução de valores na folha de cálculo (coordenadas dos pontos conhecidos e ângulos Alfa e Beta), ou na leitura dos ângulos Alfa e Beta.

Após todas estas mais-valias já identificadas, é possível afirmar que a introdução destas componentes ao método clássico faz com que este método se torne mais viável, devido ao facto de poupar tempo e combater os erros de cálculo.

3 - Experiências

Para verificar a aplicabilidade do método analítico, foram criados 4 tipos diferentes de experiências. As experiências foram executadas em cenários controlados, para comparar os resultados nos diferentes cenários possíveis. Foram efetuadas as seguintes experiências: virtual, a bordo do navio *PAROS*, torre do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal e, por fim, com uma agulha magnética de marcar.

Pretendia-se, com estas experiências, analisar a facilidade de obtenção da posição com este método por parte do navegador. Estudar o erro na obtenção da posição e caracterizá-lo, de modo a entender que tipo de erro estaríamos a cometer e criar técnicas para evitá-lo. Foi possível ainda compreender a facilidade de utilizar este método com os diferentes equipamentos para a medição de ângulos horizontais, mesmos que não se tratassem dos mais adequados ou caracterizados para o efeito.

3.1 - Descrição das Experiências

Para cada experiência foi elaborado um pequeno relatório que descreve, de uma maneira muito sucinta, a descrição do contexto, dos respetivos objetivos, materiais utilizados e os resultados. Cada experiência utiliza diferentes materiais para a medição dos ângulos horizontais. Os seguintes estudos tentam comparar sempre a posição obtida com o *GPS* ou posições fixas em terra, de modo a saber sempre onde é que o navegador se encontra. Desta maneira, é possível para o navegador medir o erro que este novo método pode ter.

3.1.1 - Virtual

A realização de todo este projeto teve como objetivo enquadrar um modelo matemático já conhecido com as novas tecnologias. Deste modo, a passagem do modelo para uma folha de cálculo foi uma etapa essencial. A sua verificação teórica foi uma fase importante para compreender o comportamento que o navegador teria de ter nas seguintes experiências práticas. O teste e verificação do modelo foram o fecho do processo.

Foi usado o modelo matemático passado para uma folha de cálculo que pode ser consultado no Anexo I. Nesta folha foram criados dois campos comparativos:

- No primeiro campo é colocada a posição final do navegador. Este campo tinha o objetivo de controlar o erro. Deste modo, era possível determinar a distância da posição obtida pela medição dos ângulos horizontais e a posição em que, na realidade, o navegador se encontrava.

- No segundo campo, foi criado um modelo matemático que se encontra descrito no Anexo II, em que só entra em linha de conta com fórmulas matemáticas que se aplicam à esfera terrestre, (BARRERO RIPOLL, CASADO FUENTE, CASTEJÓN SOLANAS, & LORENTE, 2008). É, assim, possível comparar o erro entre os dois modelos.

Foi ainda usada uma carta de navegação eletrónica, para verificar a possibilidade de marcar as posições na carta e ter uma melhor perceção dos ângulos que estavam a ser usados.

Como pode ser observado no Anexo III, nas folhas de cálculo com o título “EXP Virtual xxx”, foram escolhidas três estações ao acaso de modo a que a posição obtida se encontrasse a uma distância variável da estação B.

Foram colocados os valores na folha de cálculo, de uma forma manipulada, com erros entre os 0° e os 3°, durante a medição dos dois ângulos horizontais.

Pretendia-se com este estudo particular, verificar a possibilidade de existir um erro intrínseco ao cálculo, visto que estamos a trabalhar com fórmulas que se destinam ao cálculo no plano e nos encontramos a trabalhar na esfera terrestre.

Em paralelo, a seguinte tabela faz uma comparação entre os erros possíveis que o navegador pode obter durante uma observação, em metros.

	Erro 0,0°	Erro 0,1°	Erro 0,5°	Erro 1,0°	Erro 1,3°	Erro 2,0°	Erro 3,0°
Exp Virt. 3nm	0,00	25,77	128,94	258,02	335,52	516,45	774,99
Exp Virt. 6nm	0,00	27,08	135,19	269,86	350,42	537,68	803,52
Exp Virt. 10nm	0,00	139,50	695,03	1383,04	1791,88	2732,41	4038,03
Exp Virt. 20nm	0,72	145,55	725,65	1445,44	1874,46	2867,14	4264,91
Exp Virt. 60nm	8,84	411,60	2052,47	4104,27	5335,60	8209,08	12313,92
Exp Virt.60nm Triângulo Esférico	0,00	410,42	2052,26	4104,05	5336,09	8210,79	12315,97

*Distância em metros

Tabela nº 2 – Manipulação dos erros.

Observou-se neste estudo particular, que à medida que a distância entre a estação B e o ponto onde o navegador se encontrava aumenta, o erro aumenta. Este erro manipulado é possível constatar na tabela nº 2, com as diferentes experiências efetuadas. Podemos, com isto, afirmar que o erro aumenta devido ao facto de os cálculos usarem fórmulas que resolvem o problema no plano e não no espaço.

3.1.2 - Navio *PAROS*

Após a verificação teórica do método, foi elaborada uma experiência a bordo do navio *PAROS*, durante a entrada no porto de Setúbal. Durante a entrada, foi solicitado ao comandante do navio o uso do radar com o intuito de efetuar uma pesquisa. Enquanto o Piloto da barra do porto de Setúbal controlava a navegação do navio até ao porto, iam sendo medidos os ângulos em diferentes pontos, previamente planeados. Ao mesmo tempo que se efetuava as observações dos ângulos, eram registadas as posições *GPS*, com o intuito de as comparar mais tarde.

Para este estudo, foi usado o radar para a medição dos ângulos horizontais e o *GPS* com o intuito de comparar as posições, como já referido. Toda a informação foi registrada, mas apenas foi processada já em terra.

Sabendo que o radar é um instrumento de precisão para a medição de distâncias retilíneas, ainda assim, pretendia-se verificar se o rigor da medição de distâncias angulares do radar seria suficiente para obter uma boa posição, através da medição dos ângulos horizontais.

Para comparar estas medições, foi observada a posição *GPS* no momento em que se liam os ângulos. Todas as leituras foram gravadas com o auxílio de um gravador digital, de modo a poderem ser inseridas mais tarde na folha de cálculo, como pode ser observado no Anexo III, nas folhas de cálculo com o título “EXP Navio 1(x)”. Foi adotado este processo, de modo a evitar erros durante a leitura e otimizar o tempo em si da leitura.

Este estudo em particular tinha um grande objetivo, que era a análise do uso dos radares para a medição dos ângulos horizontais. Visto que os radares são um instrumento de segurança para a navegação e estão presentes em todos os navios, a utilização desta era muito importante.

Numa escala de igual importância, pretendia-se verificar a operacionalidade a bordo, isto é, que tipo de informação seria necessária existir no plano de viagem para o navegador poder usar este método em contexto real.

Após a conclusão da experiência, foram analisadas e comparadas as posições obtidas pelo *GPS* e as posições obtidas através da medição de ângulos horizontais. Como pode ser observado na tabela seguinte, foram registadas as diferenças em metros das 10 experiências na tabela nº 3.

	Erro em metros	Erro Mínimo	Erro Máximo
Exp Navio (1)	285,51		
Exp Navio (2)	579,05		579,05
Exp Navio (3)	142,00		
Exp Navio (4)	84,61		
Exp Navio (5)	459,19		
Exp Navio (6)	234,11		
Exp Navio (7)	358,68		
Exp Navio (8)	71,07	71,07	
Exp Navio (9)	277,46		
Exp Navio (10)	144,04		
Media	263,572		

* Os cálculos podem ser consultados no *Anexo III*

Tabela nº 3 – Experiências a bordo do navio PAROS

Ao analisar a seguinte tabela, verifica-se que, em 70% das observações, o erro foi inferior a 300 metros. Visto que o navio se encontrava a navegar durante as observações, a uma velocidade entre os 10 e os 13 nós, e o navegador demora entre 30 a 45 segundos a efetuar a leitura dos ângulos horizontais e das posições geográficas do *DGPS* (acrónimo inglês para *diferencial GPS*), verificou-se a existência de um erro intrínseco à experiência. Este erro pode variar entre os 300,9 metros e os 154,3 metros com é demonstrado na tabela de cálculo nº 4.

13	Velocidade em nós.
45	Tempo que demorou a tirar a posição em segundos.
300,9	Erro em metros devido ao deslocamento do navio.

10	Velocidade em nós.
30	Tempo que demorou a tirar a posição em segundos
154,3	Erro em metros devido ao deslocamento do navio

Tabela nº 4 – Cálculo da velocidade

Desta maneira, foi difícil concluir se o radar seria um equipamento adequado para a obtenção da posição através da medição de ângulos horizontais. Para analisar esta questão, foi elaborada a experiência na Torre do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do porto de Setúbal, em que o radar iria estar estático numa posição conhecida.

No que diz respeito à operacionalidade do método, verificou-se ainda que é necessário um planeamento dos pontos dos quais se vai obter a leitura dos ângulos.

Por outro lado, para otimizar o tempo despendido pelo navegador na leitura e na passagem para a folha de cálculo dos valores obtidos, esta deveria ser inserida no software do aparelho que está a ser usado para a medição dos ângulos, neste caso em particular, o radar. Desta maneira, a operação iria ficar mais agilizada.

3.1.3 - Torre do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal

No Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal, foi efetuada uma experiência com o intuito de usar um radar que estivesse estático, e também com a possibilidade de efetuar boas observações devido aos ótimos equipamentos que esta torre possui. Deste modo, seria possível obter a posição com um radar que este sem velocidade e comparar os resultados à experiência efetuada a bordo do navio *PAROS*. Para isso, foi usado o radar do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal que pode ser encontrado na figura nº 27, com o intuito de medir os ângulos horizontais e a folha de cálculo para efetuar o cálculo da posição.



Figura nº 27 – Radar do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal.

Na experiência a bordo do navio *PAROS*, verificou-se que devido à diferença de tempo entre a primeira leitura e a última, poderíamos estar na presença de um erro, o qual seria variável consoante a velocidade do navio. Desta maneira, para que fosse possível simular a leitura das três observações em simultâneo, a experiência teria de decorrer num radar estático. Para isso, existiam duas possibilidades: ou se efetuava a experiência no simulador da ENIDH, em que se parava o exercício para tirar as leituras, ou se usava o radar do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal. Com o intuito de efetuar a experiência num contexto real, optamos pelo uso do radar do Centro de Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal.

Primeiro foram observados três pontos conspícuos na carta e identificados no radar. Mediram-se os ângulos internos e colocaram-se os valores das leituras das coordenadas e dos ângulos internos na folha de cálculo.

Nesta experiência, conseguiu-se obter um erro de 21,57 metros entre a posição calculada e a posição do “navegador”. Esta experiência pode ser encontrada no Anexo III, pelo nome Experiencia efetuada no “VTS Setúbal”. Após esta redução do erro, verificou-se e pode-se

afirmar que a experiência foi um sucesso na verificação que, se as leituras fossem efetuadas simultaneamente o erro da velocidade não se verifica.

3.1.4 - Agulha magnética de marcar

Após a realização das experiências anteriores com diferentes tipos de radares, foi utilizado outro instrumento. Desta vez foi usado uma simples agulha de marcar, obrigatória a bordo. (figura nº 28) Com o intuito de alterar o “mediador” entre o navegador e o meio, foi utilizado uma agulha magnética portátil de marcar. Foram obtidos azimutes a três pontos já conhecidos e, com esses azimutes, foram calculados os ângulos Alfa e Beta entre as estações A, B e C.

Para esta experiência foram usados *GPS* portáteis, a agulha de marcar e a folha de cálculo para executar os cálculos.

Pretendia-se verificar o erro máximo que poderia ser obtido com uma agulha de marcar, que facilmente pode ser obtida no mercado pelo preço medio de 60 €. Com esta agulha, conseguimos um grau de rigor que pode ir até ao meio grau. A utilização do *GPS* foi fundamental para comparar a posição.



Figura nº 28 - Agulha de marcar

Após a obtenção dos azimutes com a agulha de marcar, com arredondamento ao meio grau, calcularam-se os ângulos entre as estações A, B e C. Depois de colocar estes valores na folha de cálculo, que já estava preenchida com as coordenadas geográficas das posições conhecidas, foram obtidas as diferentes posições. Com o *GPS*, para comparar as posições obtidas com as posições calculadas, foi ainda possível calcular a diferença entre as posições. (Figura nº 29)

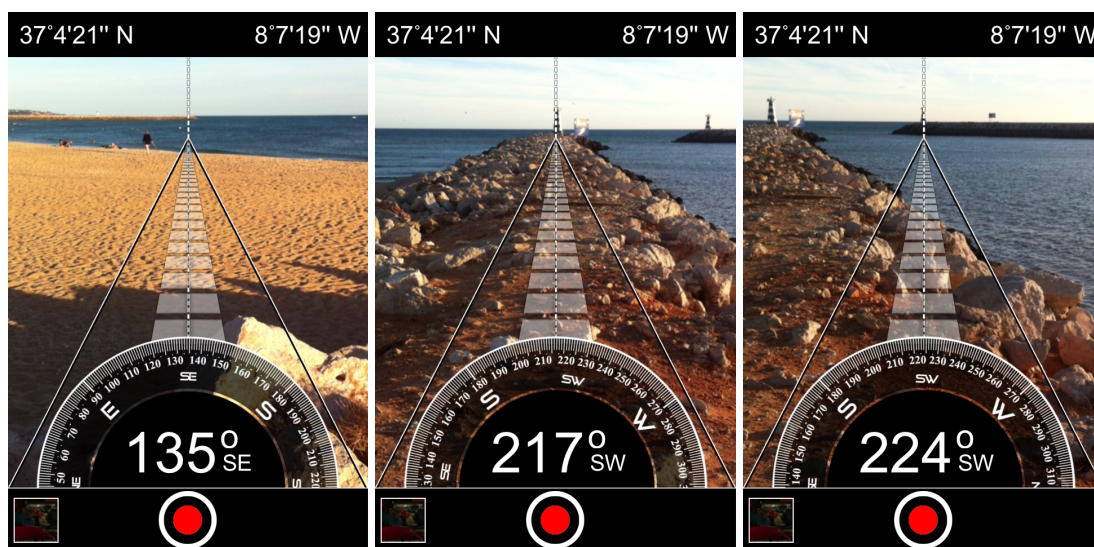


Figura nº 29 – Aparelho de marca digital

Com esta experiência foi possível verificar vários objetivos: a aproximação de meio grau na medição dos ângulos internos, a utilização de um objeto obrigatório em todas as embarcações e a verificação da diferença média entre a posição calculada e a obtida por *GPS*. Com os resultados obtidos em diferentes posições desde Vilamoura, Lisboa e Porto, foi possível verificar que o erro médio foi de 56,97 metros, conseguindo obter um erro mínimo de 3,63 metros. Por outro lado, foi obtido um erro de 176,85 metros para o qual não foi possível determinar a razão. (Tabela nº 5)

	Erro em metros	Erro Mínimo	Erro Máximo
AGULHA Vila (1)	78,43		
AGULHA Vila (2)	19,20		
AGULHA Vila (3)	15,50		
AGULHA Vila (4)	126,71		
AGULHA Lx (5)	176,85		176,85
AGULHA Lx (6)	21,29		
AGULHA Lx (7)	13,46		
AGULHA Lx (8)	3,63	3,63	
AGULHA Lx (9)	85,75		
AGULHA Porto (10)	28,90		
Media	56,97		

Tabela nº 5 – Experiências com a agulha de marcar

Esta experiência foi importantíssima para fundamentar o objetivo deste trabalho. Com a verificação da possibilidade de ser viável obter uma posição com um aparelho tão simples como uma agulha de marcar e utilizá-la para a medição de ângulos horizontais com um erro médio de 56,97 metros, permitiu-nos pensar em relacionar as novas tecnologias com as do conhecimento clássico.

3.2. Análise das experiências

Ao longo do desenvolvimento destas experiências, a verificação do estudo em causa em contexto operacional foi uma das partes do trabalho mais importante.

Estas verificações, começaram por ser testadas em contexto de “laboratório”, com as experiências virtuais, onde foi possível concluir:

- Quanto mais afastado dos objetos conhecidos, maior é a probabilidade de aumentar o erro, como se pode constatar na tabela nº 2. Sendo assim, devemos sempre escolher os objetos mais próximos do navegador.

- A curvatura da terra não interfere no método de cálculo, com fórmulas de resolução do problema no plano. Visto que a curvatura da terra não nos deixa observar objetos a uma distância maior do que a distância calculada através da fórmula, $D = 2,080 \times \sqrt{h}$, “em que D é a distância ao Horizonte visível em milhas, h a elevação do olho do observador expressa em metros e 2,080 é a constante que resulta da consideração do valor da refração atmosférica para condições medias (P = 760 mm Hg, T = 10°C)”, referência obtida na Tábuas Náuticas *online* (<http://www.hidrografico.pt/tabuas-nauticas-online.php>, (HIDROGRÁFICO, 1973)) , do Instituto Hidrográfico Português. Desta maneira, é possível construir a tabela nº 6:

		Altitude do navegador em metros					
		1	2	5	10	20	30
Altitude do Objeto em metros	1,0	4,2	5,0	6,7	8,7	11,4	13,5
	10,0	8,7	9,5	11,2	13,2	15,9	18,0
	20,0	11,4	12,2	14,0	15,9	18,6	20,7
	30,0	13,5	14,3	16,0	18,0	20,7	22,8
	40,0	15,2	16,1	17,8	19,7	22,5	24,5
	50,0	16,8	17,6	19,4	21,3	24,0	26,1
	100,0	22,9	23,7	25,5	27,4	30,1	32,2
	200,0	31,5	32,4	34,1	36,0	38,7	40,8
	300,0	38,1	39,0	40,7	42,6	45,3	47,4
	400,0	43,7	44,5	46,3	48,2	50,9	53,0
	500,0	48,6	49,5	51,2	53,1	55,8	57,9
	600,0	53,0	53,9	55,6	57,5	60,3	62,3
	700,0	57,1	58,0	59,7	61,6	64,3	66,4
	800,0	60,9	61,8	63,5	65,4	68,1	70,2
	900,0	64,5	65,3	67,1	69,0	71,7	73,8
	1000,0	67,9	68,7	70,4	72,4	75,1	77,2

* Distâncias de avistamento em milhas

Tabela nº 6 – Visibilidade em função da altitude,

Temos, portanto, um máximo observável, em que este pode encontrar-se numa situação de uma altitude de 30 metros e consegue avistar um objeto de com uma altitude de 600 mts a

uma distância de 62 milhas, se as condições atmosféricas o permitirem. Caso o navegador consiga identificar 3 posições conhecidas a esta distância, as fórmulas usadas apresentadas para resolver o problema da posição no plano não represam um erro que possa ser determinante para o cálculo da posição.

A tabela nº 2, como referido, representa a um erro forçado na medição dos ângulos Alfa e Beta, a diferentes distâncias e o erro medido em metros com a posição que o navegador deveria estar.

Podemos verificar, com estes cálculos, que para a obtenção da posição considerado o plano ou esfera o erro não se altera consideravelmente, visto que a sua grande variação no ato da leitura dos ângulos entre as posições conhecidas.

Após esta verificação em contexto de laboratório, constatou-se que é possível trabalhar com o as fórmulas de trigonometria para o plano e decidiu-se experimentar em contexto controlado.

A bordo do navio *PAROS*, durante a entrada no porto de Setúbal, foi possível retirar diversas posições. Durante esta experiência, foi verificado um erro constante, o que levou a pensar que esta experiência iria ter um erro na obtenção da posição em comparação com a posição obtida pelo *GPS*. Ao analisar os vídeos efetuados, verificou-se que o navegador demorava cerca de 30 a 40 segundos a obter as 3 leituras. Este tempo, faz com que o navegador se afaste em media, 150 metros desde o início da primeira leitura até à última.

Deste modo, para verificar se seria possível eliminar este erro e com a autorização do Controlo de Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal foi usado o Radar para calcular a posição. Após a experiência, verificaram-se erros de 21 metros. O que, ainda assim, seria muito grande dada a qualidade do equipamento, o que nos levou a pensar que este erro devia-se ao facto dos arredondamentos efetuados nas coordenadas inseridas com duas casas decimais.

Após estas verificações com os diferentes radares, que foram muito importantes, visto que conseguimos obter erros na posição, desprezáveis se a leitura dos dois ângulos formados entre as três posições conhecidas e o navegador for obtida em simultâneo. Com isto restou-

nos testar a folha de cálculo com um equipamento obrigatório na palamenta de segurança em todas as embarcações e navios, a agulha de marcar. Com esta agulha foi possível verificar excelentes resultados com diferenças na posição obtida pelos cálculos e o *GPS* em media de 60 metros.

Com isto foi possível verificar que, mesmo usando a agulha giroscópica ou agulha magnética, não foi necessário determinar qualquer tipo de erro. Estas podem ser usadas para obter uma posição, desde que o erro seja constante ele não interfere nos cálculos.

Durante todos os testes, verificou-se também que a utilização do radar é possível porque, pese embora não seja um instrumento de precisão para a medição de ângulos, mas sim de distâncias, os erros obtidos na leitura das imagens foram admissíveis. Durante os testes, verificou-se que, quando o radar esteve estático, isto é, a leitura dos dois ângulos foi efetuada instantaneamente, foi possível obter uma posição com um erro mínimo de 21 metros.

Com isto, verificou-se também que seria possível efetuar um tipo de navegação dinâmica, usada nos dias de hoje, com o radar ou à vista. Com o radar podemos usar as já conhecidas e muito úteis Linhas Paralelas e os anéis. Na navegação à vista, podemos usar os enfiamentos e alinhamentos. A navegação dinâmica é um método muito importante para a segurança da navegação, porque o marítimo consegue, através de uma leitura muito rápida, verificar se está a navegar no local pretendido. Contudo, este método de navegação dinâmica não é completo, porque não nos coloca numa posição, mas sim, entre linhas de posições. Visto que o navegador já identificou um conjunto de pontos conspícuos no seu planeamento, estes podem ser usados para projetar a posição na carta de navegação. E com o desenvolver da tecnologia, podemos estar a distância de um *click* para efetuar uma marcação na carta de navegação digital.

No entanto, é necessário ter em atenção alguns aspetos com a utilização deste método de obtenção da posição geográfica através dos ângulos horizontais, nomeadamente:

- Este método pode completar a navegação dinâmica, com a marcação da posição geográfica, mas o navegador não consegue navegar sobre linhas de posição.

- O erro na obtenção dos valores pode existir, visto que se trata de um método em que existe a intervenção humana.

- No tempo que o navegador leva a obter a posição, este afasta-se da posição na qual inicialmente começou a obter a posição.

Contudo, o método comprovou ser fiável e de fácil utilização com qualquer dos instrumentos utilizados nas experiências. É de realçar o facto da utilização de instrumentos de navios no contexto profissional da navegação, como o radar, e ainda a utilização de agulhas de marcar que podemos encontrar em qualquer embarcação de recreio.

4 - Análise dos erros

Durante toda a descrição e elaboração dos modelos, foram sempre analisados três tipos de erros: os sistemáticos, os acidentais e os lapsos, como descritos no “Manual de Navegação (Cálculos Náuticos) 4ª edição, do Instituto Hidrográfico” (HIDROGRÁFICO, 1989).

Os erros sistemáticos surgem normalmente com as imperfeições dos instrumentos. Estes caracterizam-se por ser pequenos erros que surgem durante a operação e manuseamento normal de instrumentos. Podem tornar-se perigosos quando não são comparados com outros aparelhos de medida.

Os erros acidentais são, por norma, indetetáveis, as suas causas estão relacionadas com a variação de temperatura, pressão ou outros fenómenos que possam decorrer no momento em que se esta a analisar um determinado dado. Estes erros conseguem ser controlados reduzindo a probabilidade de ocorrência. Desta maneira, “efetuando várias medições nas mesmas condições”, como citado no manual de navegação referido, esse erro pode ser constatado e minimizado.

Os erros por lapso estão diretamente ligados ao erro humano. Existem inúmeras causas humanas que podem ocasionar este tipo de erros, como o cansaço, execução de várias tarefas ao mesmo tempo, a velocidade com que se pretende obter um determinado resultado. São facilmente identificados por uma troca de unidades, sinais ou outros.

Com este estudo, pretende-se reduzir o erro nestes três campos. Ao computadorizar os cálculos, o navegador não vai sentir a necessidade de elaborar os cálculos, diminuindo a probabilidade de cometer erros por lapso. Visto que o número de instrumentos a utilizar pelo navegador vai ser inferior, a probabilidade de cometer erros sistemáticos também vai reduzir. Por fim, devido a rapidez que este método oferece, o navegador vai conseguir comparar a sua posição com outros instrumentos, aumentando o número de observações e reduzindo a probabilidade de erros acidentais.

4.1 - Erros intrínsecos ao cálculo

Contudo, este método contém erros que não foram possíveis de contornar. Estes erros foram sendo identificados ao longo deste trabalho. O primeiro erro que pode ser constatado encontra-se no cálculo das distâncias e das coordenadas polares.

Como já referido, para estes cálculos são usadas as fórmulas da trigonometria esférica, que tratam o problema como se a esfera terrestre fosse uma esfera de raio 1, e não um elipsoide como é na realidade. Mas devido às suas aproximações, é possível referir que obtemos erros na ordem dos 0,3 % (VENESS, 2009), . Este erro de 0,3 % deve ser analisado no sentido em que, por cada 1 milha, podemos estar na presença de um erro de 0,003 milhas (o equivalente a 5,556 metros).

Outro erro que pode ser constatado é o facto de este método depender da aquisição de dados por parte do navegador. Esses dados são os ângulos Alfa e Beta, e o navegador pode cometer ligeiros erros de leitura. Durante as experiências apresentadas, foi possível verificar um erro médio de $1,3^\circ$ com os diferentes aparelhos de medida (radar e agulha magnética de marcar). Com este erro, foram simuladas situações em que o navegador se afastava da estação A, B e C de igual modo. Verificou-se que com um erro médio de $1,3^\circ$ na medição dos ângulos Alfa e Beta, o navegador poderia obter um erro de posicionamento de 350,42 metros, considerando ainda que o navegador se encontraria a uma distância das estações de 6 milhas. Este erro nem sempre pode ser considerado porque depende do rigor e da experiência que o navegador tem para executar as suas medições. Se consultarmos a mesma tabela nº 2, podemos verificar que, com um erro de $0,5^\circ$, o que é normal acontecer durante uma observação por um navegador com aparelhos de marcar, o erro baixa para 135,19 metros à mesma distância das estações.

Por fim, foi também feita a comparação entre o facto de se utilizar a resolução do tetraedro para o plano e a possibilidade de executar os cálculos na esfera terrestre. A descrição dos cálculos usados para a resolução do tetraedro no espaço encontra-se descrita no Anexo II. Neste sentido, foi possível comparar a diferença entre o uso de um método e o outro. Como se pode verificar na tabela nº 2, até as 60 milhas de distância entre o navegador e os pontos conhecidos podemos encontrar um erro máximo de 8,84 metros de diferença para a posição do navegador.

4.1.1 - Somatório dos erros

Ao somarmos todos os erros, é possível verificar que, se consideramos a probabilidade de erro máxima, o navegador pode encontrar-se deslocado da sua posição cerca de 149,56 metros. Usando o termo de comparação em percentagem, descrito no artigo publicado pela *Movable Type LTD*, (VENESS, 2009), consideramos que, se o cálculo da posição obtida for coincidente com a posição do navegador, o erro deve ser considerado 0%. Se estas duas posições distassem uma da outra em 1852 metros (uma milha marítima), está a cometer um erro de 100%.

Erros	Intrínsecos ao método (considerando uma milha de distância)	Valor em percentagem
Distâncias e coordenadas polares	5,56 metros	0,30 %
Aquisição do ângulos horizontais	135,19 metros	7,30 %
Resolução do tetraedro no plano	8,84 metros	0,48 %
Total	149,56 metros	8,08 %

Tabela nº 7 – Somatório de erros.

Desta maneira, podemos verificar, como é demonstrado na tabela nº 7, que estamos na presença de um erro abaixo dos 10%, no caso de o navegador cometer um erro médio a obter os ângulos horizontais de 1,3°. Caso este não se verifique, este método tem um erro de 0,30% + 0,48 % = 0,78 % ou 14,4 metros.

4.2. Síntese dos Erros

Ao medir a probabilidade do erro que este método pode ter na obtenção da posição geográfica, constatou-se que grande parte desse erro irá depender do navegador e da interpretação que este faz no momento da medição dos ângulos Alfa e Beta. Por outro lado, o erro intrínseco ao método, tem um valor mínimo, na ordem dos 0,78%. Ao compararmos este método com as instruções da IMO (acrónimo inglês para *International Maritime*

Organization) referentes aos requisitos mínimos para sistemas de posicionamento por rádio, descrito na Resolução 1046, de 20 Dezembro 2011, (IMO Resolution A1046(27), 2011). Os requisitos referidos nesta resolução, dividem-se em duas partes:

Navegação em águas oceânicas, em que o rigor da posição geográfica obtida não deve ser inferior a 95% e o erro não deve ser maior que 100 metros.

Navegação em águas costeiras e restritas, deve, esta também, obedecer a um rigor na posição geográfica de pelo menos 95% e o erro não deve ser maior que 10 metros.

Ao compararmos os resultados obtidos nas experiências efetuadas nesta Dissertação, verificamos que os requisitos referidos nas Resoluções da IMO para sistemas de posicionamento por rádio conseguem se aproximar em muito na probabilidade em obter a posição e no erro. A tabela nº 8 representa os resultados obtidos no meio, com o auxílio de radar no navio *PAROS* e com uma agulha de marcar. Ao subtrairmos o erro da velocidade ao descrito anteriormente, verificamos que 80% dos valores são inferiores a um erro de 100 metros, como é possível verificar na última coluna.

É de notar que, apesar da agulha de marcar e o radar não ter um rigor muito definido para a marcação dos ângulos, estes conseguiram aproximar o navegador da posição geográfica quando comparada com o *GPS*.

Erro	Total	<10	<100	Descarte da velocidade a 10 nós	Descarte da velocidade a 13 nós	Valores inferiores a 100 mts
Nav. 1 (1)	285,51			131,21	15,39	15,39
Nav. 1 (2)	579,05			424,75	278,15	#
Nav. 1 (3)	142			12,3		12,3
Nav. 1 (4)	84,61		84,61	69,69		69,69
Nav. 1 (5)	459,19			304,89		#
Nav. 1 (6)	234,11			79,81	66,79	66,79
Nav. 1 (7)	358,68			204,38	57,78	57,78
Nav. 1 (8)	71,07		71,07	83,23		83,23
Nav. 1 (9)	277,46			123,16	23,44	23,44
Nav. 1 (10)	144,04			10,26		10,26
Agul. (1)	78,43		78,43			78,43
Agul. (2)	19,2		19,2			19,2
Agul. (3)	15,5		15,5			15,5
Agul (4)	126,71					#
Agul (5)	176,85					#
Agul (6)	21,29		21,29			21,29
Agul (7)	13,46		13,46			13,46
Agul (8)	3,63	3,63	3,63			3,63
Agul (9)	85,75		85,75			85,75
Agul (10)	28,9		28,9			28,9

* Erro em metros

- A observação situa-se fora do conjunto.

Tabela nº 8 – Erros obtidos

5. Interação com outros equipamentos

A interação deste método com outros equipamentos é fundamental para a sua utilização. São exemplo destes equipamentos, como já pudemos ver, o radar, agulhas de marcar, e outros equipamentos de marcar ângulos com precisão.

O grande objetivo para este método funcionar em pleno, seria poder conectá-lo e integrá-lo num sistema de navegação eletrônica, em que o navegador obtinha os ângulos com um equipamento para o efeito, como por exemplo o radar, e esta posição seria automaticamente transportada para uma carta eletrônica. Desta maneira, o que seria um processo moroso de obtenção e tratamento dos dados, ficaria resumido à aquisição de três objetos numa tela de radar.

Com o desenvolvimento tecnológico nos dias de hoje, é também possível adquirir os ângulos com equipamentos digitais criados para o efeito. Este método tem uma mais-valia enorme, porque mede os ângulos Alfa e Beta, sem ter a necessidade de uma grande precisão em relação ao norte de referência, como uma agulha magnética ou a agulha giroscópica. Esses equipamentos podem ser programados para executar os cálculos, obtendo a posição com as coordenadas polares, enviando-as por um sistema de comunicação sem fios para uma carta eletrônica, onde seria projetada a posição do navegador.

Projetando os resultados desta Dissertação, seria interessante a possibilidade de conectar este sistema a câmaras de filmar que já existem a bordo. Devido à grande evolução que houve nos últimos anos neste campo ótico, é possível obter imagens, ainda que com visibilidade reduzida, o que seria um grande passo para a navegação “à vista”.

As encadeamentos que este método poderia trazer são amplas como, por exemplo, a velocidade de aquisição de dados para a obtenção da posição quando comparada ao método clássico.

6. Conclusão

O objetivo da Dissertação foi o estudo de um método conhecido para o posicionamento na navegação costeira e em águas restritas, com o auxílio da medição dos ângulos horizontais. Este estudo baseia-se na resolução do teorema matemático que determina as coordenadas de um ponto P com o auxílio de três pontos conhecidos.

Ao finalizarmos o nosso estudo, é fundamental uma reflexão crítica sobre os métodos e técnicas usadas, fundamentação teórica e análise dos resultados.

Foi referido várias vezes ao longo desta Dissertação que o desenvolvimento tecnológico tem colocado na “gaveta” os instrumentos clássicos para a obtenção da posição geográfica. É de notar que, em muitos casos, o navegador encontra-se sozinho na ponte, a obter a sua posição, analisar o tráfego marítimo à sua volta, a tratar de assuntos relacionados com a carga ou passageiros, a efetuar os cálculos de velocidade para chegar ao seu destino e algumas vezes com visibilidade reduzida. Com toda esta polivalência para uma pessoa só, o navegador teve de procurar auxílio na tecnologia para o ajudar. O *GPS* veio dar uma grande ajuda aos navegadores, mas desta maneira o navegador deixa que um aparelho execute as observações e os cálculos por ele. Contudo, a *IMO* colocou normas muito restritas aos erros obtidos por meios de posicionamento obtidos pelo *GNSS* (acrónimo para *Global Navigation Satellite System*) (*IMO Resolution A. 915 (22), 2002*), na ordem dos 10 metros de distância horizontal.

Neste sentido, baseando-nos nestas restrições apresentadas pela *IMO* na Resolução A.915 de 22 de janeiro de 2002 e a A1046 de 20 de dezembro de 2011, referentes ao posicionamento por satélite e por radionavegação, para colocar um número de comparação na obtenção do rigor para o posicionamento, e pese embora o posicionamento pela medição de ângulos horizontais não obedecer a este rigor, os resultados obtidos foram muito promissores para o desenvolvimento com outros equipamentos. Muito embora o radar seja um instrumento de excelência para a aquisição de distâncias, muitas vezes este é usado para obter posições com azimutes. Neste sentido, com este método, estamos a usar um equipamento que já mede os ângulos pelos navegadores, mas agora o erro da posição reduzido, ao retirarmos o norte de referência e usarmos o equipamento para a medição dos ângulos entre os pontos conhecidos.

Para verificar o modelo descrito, foram efetuadas várias experiências. Durante estas experiências foram encontradas várias adversidades. Como pudemos verificar, na primeira experiência a bordo do navio *PAROS*, a velocidade a que este se deslocava afetou em muito os cálculos. Para que este problema pudesse ser contornado, seria necessário obter os ângulos Alfa e Beta de uma forma mais rápida e a posição *GPS* ao mesmo tempo, para que se pudesse considerar “o momento da observação” como instantânea. Quando usámos o radar do Centro de Controlo do Tráfego Marítimo do Porto de Setúbal, considerou-se o momento da observação instantâneo porque a estação é fixa. No que diz respeito às observações com a agulha de marcar, verificámos que um aparelho de marcar simples, como a agulha utilizada (*Plastimo Iris 50 yellow*), pode ser usado para efetuar as medições dos ângulos horizontais e obter ótimos resultados.

Todas as experiências foram positivas, no sentido em que os erros obtidos foram identificados com o intuito de adotar técnicas para os isolar e ultrapassar. É possível o uso deste método a bordo desde que se consiga efetuar a medição do ângulo Alfa e Beta num só instante. Mas, para que este método possa ser usado na sua perfeição a bordo, deve-se estudar uma técnica para tornar o momento de aquisição dos ângulos Alfa e Beta o menor possível, com o intuito de evitar os erros já referidos. Num modo geral, pode dizer-se que é o caminho certo para misturar o método clássico com o digital.

As exigências neste campo são muito elevadas, visto que se trata da resolução do problema mais antigo da navegação: conhecer a posição geográfica num determinado momento. É possível constatar vários estudos de sucesso, analisando o rigor das câmaras na obtenção de ângulos horizontais (NAUS, 2010). É provável que se esteja a caminhar para a integração de novos métodos a bordo, onde o contributo da pesquisa é inegável. Em dezembro de 2008 a IMO (SEAGOING CORRESPONDENCE, 2009), adotou o conceito de “e-navigation”, que consiste na harmonização, integração, troca e análise da informação a bordo. Estão, assim, abertas as portas para a integração de novos sistemas, preferencialmente usando aqueles que no passado tiveram muito sucesso, adaptando-os a esta nova realidade.

Para além de todos os fatores descritos, é importante também realçar que este método não necessita da criação de novas infraestruturas no meio, como torres, faróis, boias, marcas e satélites. Sem a criação de novas infraestruturas, este método vai depender apenas das

ajudas que já existem abordo, sem a criação de novos instrumentos. Eventualmente, este método vai depender do *software* que possa vir a ser criado para conectar os equipamentos. Contudo, isto não invalida a criação de um instrumento de aquisição dos ângulos horizontais para fazer a interface entre a observação e a carta eletrónica.

Com o passar dos tempos temos vindo a abandonar a carta de papel e a confiar em novos sistemas de navegação; está na hora dos métodos clássicos acompanharem esta evolução.

Bibliografía

- BARRERO RIPOLL, M., CASADO FUENTE, M. L., CASTEJÓN SOLANAS, M. Á., & LORENTE, L. S. (2008). *Trigonometría Esférica Fundamentos*. E.T.S.I. Topografía, Geodesia y Cartografía, Madrid. Retrieved from <http://www2.topografia.upm.es/asignaturas/maticas/primero/Apuntes/Trigonometria/Trigonometria Esferica.pdf>
- BOWDITCH, N. (2002). *The American Practical Navigator, An Epitome Of Navigation*. The National Imagery And Mapping Agency, United States Of America.
- BULLOCK, R. (2007). *Great Circle Distances and Bearings Between Two Locations*. DTC. Retrieved from http://www.dtcenter.org/met/users/docs/write_ups/gc_simple.pdf
- DORRIE, H. (1966). *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution* (Vol. 50). Dover Publications. Inc. <http://doi.org/10.2307/3612003>
- HIDROGRÁFICO, I. (1973). *Tábua Náutica.pdf* (1ª edição). Lisboa.
- HIDROGRÁFICO, I. (1989). *Manual de Navegação (Cálculos Náuticos)* (4ª edição). Lisboa.
- IMO Resolution A. 915 (22). (2002). IMO Resolution A. 915 (22).
- IMO Resolution A1046(27). (2011). IMO Resolution A. 1046(27). IMO.
- NAH, W. L. (2001). *The Mathematics of the Longitude*.
- NAUS, K. (2010). Evaluation of accuracy the position of the vessel designated stereoscopic cameras system, *12*, 6321.
- NAUS, K. (2011). Accuracy in Fixing Ship 's Positions by CCD Camera Survey of Horizontal Angles. *GEOMATICS AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING*, 5(4), 47–61.
- SEAGOING CORRESPONDENCE, G. (2009). IMO adopts e-navigation. *Seaways*, 14–22.
- U.S. Coast and Geodetic Survey, D. of C. (1921). General Instructions for the Field work of the U.S. Coast and Geodetic Survey (Vol. 142).
- VENESS, C. (2009). *Calculate distance, bearing and more between Latitude/Longitude points*. *Calculate distance, bearing and more between Latitude/Longitude points* (Vol. 2).
- WILCZYNSKI, E. J. (1914). *Plane Trigonometry and Applications*. Norwood, Mass., U.S.A.
- WILLEMSEN, D. (2014). *Plotting and piloting*. Retrieved from <http://www.sailingissues.com/navcourse4.html>
- WOLTERMANN, M. (n.d.). *40 . Two Survey Problems .*

WREEDE, L. C. (2007). *Willebrord Snellius (1580-1626): a humanist reshaping the mathematical sciences*. Retrieved from <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/22992>

ANEXO I

Exemplo de folha de calculo do método descrito.

Experiência executada com agulha de marcar - n°8

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	40,72	N	116,5 °
<i>Cristo</i>	Longitude	9	10,28	W	

Posição da estação b	Latitude	38	40,40	N	230,0 °
<i>Silos</i>	Longitude	9	14,29	W	

Posição da estação C	Latitude	38	39,63	N	248,0 °
<i>Bugio</i>	Longitude	9	17,93	w	

Calculado

Alfa	113,5 °	<i>113,5 °</i>
Beta	018,0 °	<i>018,0 °</i>

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,54	N
<i>Molhe red T. Incog</i>	9	12,73	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,54	N
	9	12,73	W

Diferença	0,00	milhas
	3,63	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,6786	0,675069
	Longitude	-9,17131	-0,16007
Posição da estação B	Latitude	38,67329	0,674976
	Longitude	-9,23815	-0,16124
Posição da estação C	Latitude	38,66047	0,674752
	Longitude	-9,29887	-0,1623

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus radia	graus	minutos
distância A B	0,000915	0,052447	3,146815
distância B C	0,000857	0,049112	2,946746
distância A C	0,001767	0,101226	6,073565

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC
Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,671717	264,2177
Azimute AC	-1,750126	259,7252

Azimute BA	1,469147	84,17592
Azimute BC	-1,8346	254,8851
Azimute CA	1,390075	79,64546
Azimute CB	1,30633	74,84721

Passo nº4 Condição Tetraedro

3

Passo nº5 Cálculo do Angulo B

B=

170,7092	2,979438
----------	----------

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

	Rad	Grau
S =	0,342165	19,60461

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta

alfa	1,980949
beta	0,314159

Passo nº8 Cálculo de Z

rad
Z

0,345417

Passo nº9 Cálculo de €

Tan € =

0,167672

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y

	rad	graus
x (Ângulo A)	0,508292	29,1
y (Ângulo C)	0,176038	10,1

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A

180- (y + beta) = B2

151,9	2,651395
-------	----------

Passo nº 12Z Cálculo da distância

	radiano	milhas
	0,000486	1,670021

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP

46,80 0,816795

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude
radianos grau

0,675309	38,69234
----------	----------

Cálculo da Longitude

-0,160782	-9,21215
-----------	----------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,54058
Longitude Final	
9	12,72924

Passo nº 15

Conversão

38,69232	0,675308
-9,212127	-0,16078

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,675309
-0,160782

ANEXO II

Anexo II

Resolução esférica do tetraedro.

Com o intuito de verificar a diferença da resolução do tetraedro no plano e na esfera, foi construído um modelo para determinar o valor da distância do ponto conhecido “B” ao ponto “P”. Este modelo consiste em determinar o valor do ângulo interno do tetraedro formado entre os pontos ABC, ângulo \hat{B} . Após se obter este ângulo, com o auxílio de uma folha de cálculo, programamos a mesma com uma função que se pode encontrar com o nome de “*what if...*” para que este nos devolva o resultado da distância entre a estação “B” e o ponto “P” em função da alteração do ângulo \hat{B} do tetraedro.

Este modelo é muito simples e pode ser explicado em seis passos.

1 – Com as coordenadas geográficas dos pontos A, B e C, calculámos as distâncias entre os pontos: (O cálculo pode ser efetuado como demonstrado na Dissertação no ponto 2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo)

$$\begin{aligned} & - \overline{AB} \\ & - \overline{BC} \\ & - \overline{AC} \end{aligned}$$

2 – Com as coordenadas geográficas dos pontos A, B e C calculámos os azimutes entre os pontos referidos adiante, considerando o triângulo esférico: (O cálculo pode ser efetuado como demonstrado na Dissertação no ponto 2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo)

$$\begin{aligned} & - \overrightarrow{AB} \\ & - \overrightarrow{AC} \\ & - \overrightarrow{BA} \\ & - \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

3 – Com os azimutes, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , os ângulos Alfa e Beta, calcula-se o tipo de tetraedro que estamos presentes. Verificando se nos encontramos na presença de um tetraedro do tipo 1, 2 ou 3. (O cálculo pode ser efetuado como demonstrado na Dissertação no ponto 2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo)

4 – Com os azimutes \overrightarrow{BA} e \overrightarrow{BC} sabendo qual é o tipo de tetraedro que nos encontramos é agora possível calcular o valor do ângulo \hat{B} . (O cálculo pode ser efetuado como demonstrado na Dissertação no ponto 2.4.1 - Cálculo auxiliar ou pré cálculo)

5 – Construção da tabela “*what if...*”.

Distância \overline{BP}	Cálculo do ângulo \hat{A}	Cálculo do ângulo \hat{B}_1	Cálculo do ângulo \hat{C}	Cálculo do ângulo \hat{B}_2	Somatório dos ângulos $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}$
x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5

“x” – Este é o valor que se pretende descobrir, visto que se obtivermos este valor conseguimos calcular o azimute \overrightarrow{AP} através da regra dos senos e com estes dois valores a posição geográfica do ponto “P”.

5.1- Desenvolvendo a conhecida regra dos senos temos (BARRERO RIPOLL, CASADO FUENTE, CASTEJÓN SOLANAS, & LORENTE, 2008):

$$\hat{A} = \text{arcSen} \left(\frac{\text{Sen}(\overline{BP}) \text{Sen}(\text{Alfa})}{\text{Sen}(\overline{AB})} \right)$$

5.2 – Desenvolvendo a conhecida analogia de Neper temos (BARRERO RIPOLL et al., 2008):

$$\hat{B}_1 = 2 \text{arcTg} \left(\frac{\text{Cos} \left(\frac{\overline{AB} - \overline{BP}}{2} \right)}{\text{Tg} \left(\frac{\hat{A} + \text{Alfa}}{2} \right) \text{Cos} \left(\frac{\overline{BP} + \overline{AB}}{2} \right)} \right)$$

5.3 – Desenvolvendo a conhecida regra dos senos temos (BARRERO RIPOLL et al., 2008):

$$\hat{C} = \text{arcSen} \left(\frac{\text{Sen}(\overline{BP}) \text{Sen}(Beta)}{\text{Sen}(\overline{BC})} \right)$$

5.4 - Desenvolvendo a conhecida analogia de Neper temos (BARRERO RIPOLL et al., 2008):

$$\hat{B}2 = 2 \cdot \text{arcTg} \left(\frac{\text{Cos} \left(\frac{\overline{BP} - \overline{BC}}{2} \right)}{\text{Tg} \left(\frac{\hat{C} + Beta}{2} \right) \text{Cos} \left(\frac{\overline{BP} + \overline{BC}}{2} \right)} \right)$$

5.5 - Somando os dois ângulos obtidos $\hat{B}1$ e $\hat{B}2$ obtemos desta forma o ângulo $\hat{B}x$.

6 – Visto que o ângulo \hat{B} já tinha sido calculado, é agora possível em função da distância \overline{BP} obter o ângulo $\hat{B}x$ igual ao anteriormente calculado no ponto 4.

Devido à grande evolução tecnológica, com uma simples folha de cálculo é possível utilizar a função “*what if*”, como é apresentada numa folha de *Excel* para determinar infinitas soluções até que o valor do ângulo $\hat{B}x$ seja igual ao ângulo \hat{B} calculado anteriormente.

Após a obtenção desta distância é possível o cálculo da posição final como descrito na Dissertação no ponto “2.4.3 - Tratamento do resultado ou cálculo final.”

ANEXO III

Experiência executada com agulha de marcar - n°1

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	37	4,22	N	195,0 °
	Longitude	8	7,40	W	

Posição da estação B	Latitude	37	4,16	N	204,5 °
	Longitude	8	7,47	W	

Posição da estação C	Latitude	37	4,46	N	321,5 °
	Longitude	8	7,39	W	

Calculado

Alfa	009,5 °	009,5 °
Beta	117,0 °	117,0 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	37	4,40	N
	8	7,31	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	37	4,43	N
	8	7,35	W

Diferença	0,04	milhas
	78,43	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0703	0,647
	Longitude	-8,1233	-0,1418
Posição da estação B	Latitude	37,0694	0,647
	Longitude	-8,1245	-0,1418
Posição da estação C	Latitude	37,0743	0,6471
	Longitude	-8,1231	-0,1418

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	2,3442E-05	0,00134	0,0806
distância B C	8,8014E-05	0,00504	0,3026
distância A C	6,9416E-05	0,00398	0,2386

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-2,3564502	224,985
Azimute AC	0,03377469	1,93515

Azimute BA	0,78512991	44,9846
Azimute BC	0,2165988	12,4102
Azimute CA	-3,1078162	181,935
Azimute CB	-2,9249796	192,411

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 0,56853

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
Rad Grau
S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa
beta

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)
y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
19,15 0,33428

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,64706041	37,0738
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1417652	-8,1225
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
37	4,4298464
Longitude Final	
8	7,3528843

Passo nº 15

Conversão

37,073369	0,64705
-8,121879	-0,1418

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64706041
-0,1417652

Experiência executada com agulha de marcar - n°2

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	37	3,94	N	119,5 °
	Longitude	8	6,68	W	

Posição da estação B	Latitude	37	4,16	N	231,5 °
	Longitude	8	7,47	W	

Posição da estação C	Latitude	37	4,46	N	002,5 °
	Longitude	8	7,39	W	

Calculado

Alfa	112,0 °	112,0 °
Beta	131,0 °	131,0 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	37	4,22	N
	8	7,40	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	37	4,22	N
	8	7,38	W

Diferença	0,01	milhas
	19,20	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0657	0,6469
	Longitude	-8,1113	-0,1416
Posição da estação B	Latitude	37,0694	0,647
	Longitude	-8,1245	-0,1418
Posição da estação C	Latitude	37,0743	0,6471
	Longitude	-8,1231	-0,1418

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00019462	0,01115	0,6691
distância B C	8,8014E-05	0,00504	0,3026
distância A C	0,00022311	0,01278	0,767

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,2325084	289,382
Azimute AC	-0,8301651	312,435

Azimute BA	1,90894555	109,375
Azimute BC	0,2165988	12,4102
Azimute CA	2,31130318	132,428
Azimute CB	-2,9249796	192,411

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,69235

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 48,50 0,84654

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,64700008	37,0704
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1417745	-8,1231
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
37	4,2224338
Longitude Final	
8	7,3849379

Passo nº 15

Conversão

37,070335	0,647
-8,1232933	-0,1418

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64700008
-0,1417745

Experiência executada com agulha de marcar - n°3

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	37	3,94	N	116,0 °
	Longitude	8	6,68	W	

Posição da estação B	Latitude	37	4,16	N	230,0 °
	Longitude	8	7,47	W	

Posição da estação C	Latitude	37	4,46	N	000,0 °
	Longitude	8	7,39	w	

Calculado

Alfa	114,0 °	<i>114,0 °</i>
Beta	130,0 °	<i>130,0 °</i>

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	37	4,22	N
	8	7,40	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	37	4,22	N
	8	7,39	W

Diferença	0,01	milhas
	15,50	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0657	0,6469
	Longitude	-8,1113	-0,1416
Posição da estação B	Latitude	37,0694	0,647
	Longitude	-8,1245	-0,1418
Posição da estação C	Latitude	37,0743	0,6471
	Longitude	-8,1231	-0,1418

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00019462	0,01115	0,6691
distância B C	8,8014E-05	0,00504	0,3026
distância A C	0,00022311	0,01278	0,767

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,2325084	289,382
Azimute AC	-0,8301651	312,435

Azimute BA	1,90894555	109,375
Azimute BC	0,2165988	12,4102
Azimute CA	2,31130318	132,428
Azimute CB	-2,9249796	192,411

Passo n°4 Condição Tetraedro

Passo n°5 Cálculo do Angulo B
B= 1,69235

Passo n°6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo n°7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo n°8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo n°9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo n°10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo n° 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo n° 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo n° 13Z Cálculo do Azimute BP
 50,02 0,87301

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,64699866	37,0703
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1417753	-8,1231
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
37	4,2175544
Longitude Final	
8	7,3876083

Passo nº 15

Conversão

37,070335	0,647
-8,1232933	-0,1418

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64699866
-0,1417753

Experiência executada com agulha de marcar - n°4

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	37	3,94	N	130,5 °
	Longitude	8	6,68	W	

Posição da estação B	Latitude	37	4,22	N	202,3 °
	Longitude	8	7,40	W	

Posição da estação C	Latitude	37	4,46	N	341,8 °
	Longitude	8	7,39	w	

Calculado

Alfa	071,8 °	071,8 °
Beta	139,5 °	139,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	37	4,29	N
	8	7,36	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	37	4,35	N
	8	7,34	W

Diferença	0,07	milhas
	126,71	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0657	0,6469
	Longitude	-8,1113	-0,1416
Posição da estação B	Latitude	37,0703	0,647
	Longitude	-8,1233	-0,1418
Posição da estação C	Latitude	37,0743	0,6471
	Longitude	-8,1231	-0,1418

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,0001857	0,01064	0,6384
distância B C	6,9416E-05	0,00398	0,2386
distância A C	0,00022311	0,01278	0,767

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,1184233	295,919
Azimute AC	-0,8301651	312,435

Azimute BA	2,02304322	115,912
Azimute BC	0,03377469	1,93515
Azimute CA	2,31130318	132,428
Azimute CB	-3,1078162	181,935

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,98927

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 19,80 0,34565

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,6470381	37,0726
-----------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1417607	-8,1223
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
37	4,3531275
Longitude Final	
8	7,3375603

Passo nº 15

Conversão

37,07144	0,64702
-8,1226083	-0,1418

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,6470381
-0,1417607

Experiência executada com agulha de marcar - nº5

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	41,64	N	091,5 °
<i>Pilar norte</i>	Longitude	9	10,68	W	

Posição da estação B	Latitude	38	40,72	N	117,5 °
<i>Cristo</i>	Longitude	9	10,28	W	

Posição da estação C	Latitude	38	40,40	N	229,0 °
<i>Silos</i>	Longitude	9	14,29	w	

Calculado

Alfa	026,0 °	026,0 °
Beta	111,5 °	111,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,51	N
<i>miradouro T. Belém</i>	9	12,88	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,57	N
	9	12,79	W

Diferença	0,10	milhas
	176,85	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,694	0,6753
	Longitude	-9,178	-0,1602
Posição da estação B	Latitude	38,6786	0,6751
	Longitude	-9,1713	-0,1601
Posição da estação C	Latitude	38,6733	0,675
	Longitude	-9,2381	-0,1612

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00028366	0,01625	0,9751
distância B C	0,00091537	0,05245	3,1468
distância A C	0,00089619	0,05135	3,0809

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	2,81689269	161,396
Azimute AC	-1,9855386	246,237

Azimute BA	-0,3246275	341,4
Azimute BC	-1,6717167	264,218
Azimute CA	1,1553974	66,1994
Azimute CB	1,46914701	84,1759

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,34709

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 293,53 5,12314

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,6753169	38,6928

Cálculo da Longitude

-0,1607998	-9,2131
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,568498
Longitude Final	
9	12,788846

Passo nº 15

Conversão

38,691792	0,6753
-9,2147167	-0,1608

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,6753169
-0,1607998

Experiência executada com agulha de marcar - nº6

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	41,64	N	089,5 °
<i>Pilar norte</i>	Longitude	9	10,68	W	

Posição da estação B	Latitude	38	40,72	N	116,5 °
<i>Cristo</i>	Longitude	9	10,28	W	

Posição da estação C	Latitude	38	40,40	N	230,0 °
<i>Silos</i>	Longitude	9	14,29	w	

Calculado

Alfa	027,0 °	027,0 °
Beta	113,5 °	113,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,54	N
<i>Molhe red DK T.Inc.</i>	9	12,73	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,54	N
	9	12,71	W

Diferença	0,01	milhas
	21,29	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,694	0,6753
	Longitude	-9,178	-0,1602
Posição da estação B	Latitude	38,6786	0,6751
	Longitude	-9,1713	-0,1601
Posição da estação C	Latitude	38,6733	0,675
	Longitude	-9,2381	-0,1612

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00028366	0,01625	0,9751
distância B C	0,00091537	0,05245	3,1468
distância A C	0,00089619	0,05135	3,0809

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	2,81689269	161,396
Azimute AC	-1,9855386	246,237

Azimute BA	-0,3246275	341,4
Azimute BC	-1,6717167	264,218
Azimute CA	1,1553974	66,1994
Azimute CB	1,46914701	84,1759

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,34709

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
Rad Grau
S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa
beta

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)
y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
293,54 5,12332

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,67530963	38,6924
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,160778	-9,2119
-----------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,543507
Longitude Final	
9	12,714031

Passo n° 15

Conversão

38,692318	0,67531
-9,212127	-0,1608

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67530963
-0,160778

Experiência executada com agulha de marcar - n°7

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	41,64	N	089,5 °
<i>Pilar norte</i>	Longitude	9	10,68	W	

Posição da estação B	Latitude	38	40,72	N	116,5 °
<i>Cristo</i>	Longitude	9	10,28	W	

Posição da estação C	Latitude	38	39,63	N	248,0 °
<i>Bugio</i>	Longitude	9	17,93	w	

Calculado

Alfa	027,0 °	027,0 °
Beta	131,5 °	131,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,54	N
<i>Ponto de comparação</i>	9	12,73	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,54	N
	9	12,72	W

Diferença	0,01	milhas
	13,46	metros

Passo n° 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,694	0,6753
	Longitude	-9,178	-0,1602
Posição da estação B	Latitude	38,6786	0,6751
	Longitude	-9,1713	-0,1601
Posição da estação C	Latitude	38,6605	0,6748
	Longitude	-9,2989	-0,1623

Passo n°2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00028366	0,01625	0,9751
distância B C	0,00176673	0,10123	6,0736
distância A C	0,00174833	0,10017	6,0103

Passo n°3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	2,81689269	161,396
Azimute AC	-1,9114311	250,483

Azimute BA	-0,3246275	341,4
Azimute BC	-1,7501262	259,725
Azimute CA	1,22884273	70,4075
Azimute CB	1,39007543	79,6455

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,4255

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
Rad Grau
S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa
beta

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)
y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
293,40 5,12082

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67530841	38,6923

Cálculo da Longitude

-0,1607792	-9,212
------------	--------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,539306
Longitude Final	
9	12,718315

Passo nº 15

Conversão

38,692318	0,67531
-9,212127	-0,1608

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67530841
-0,1607792

Experiência executada com agulha de marcar - nº8

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	40,72	N	116,5 °
<i>Cristo</i>	Longitude	9	10,28	W	

Posição da estação b	Latitude	38	40,40	N	230,0 °
<i>Silos</i>	Longitude	9	14,29	W	

Posição da estação C	Latitude	38	39,63	N	248,0 °
<i>Bugio</i>	Longitude	9	17,93	w	

Calculado

Alfa	113,5 °	<i>113,5 °</i>
Beta	018,0 °	<i>018,0 °</i>

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,54	N
<i>Molhe red T. Incog</i>	9	12,73	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,54	N
	9	12,73	W

Diferença	0,00	milhas
	3,63	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,6786	0,6751
	Longitude	-9,1713	-0,1601
Posição da estação B	Latitude	38,6733	0,675
	Longitude	-9,2381	-0,1612
Posição da estação C	Latitude	38,6605	0,6748
	Longitude	-9,2989	-0,1623

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00091537	0,05245	3,1468
distância B C	0,00085717	0,04911	2,9467
distância A C	0,00176673	0,10123	6,0736

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,6717167	264,218
Azimute AC	-1,7501262	259,725

Azimute BA	1,46914701	84,1759
Azimute BC	-1,8346003	254,885
Azimute CA	1,39007543	79,6455
Azimute CB	1,30633024	74,8472

Passo nº4 Condição Tetraedro

3

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B=

170,709223	2,97944
------------	---------

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

Rad	Grau
S = 0,34216502	19,6046

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta

alfa	1,9809487
beta	0,31415927

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

0,34541658

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

0,16767209

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)

0,50829179	29,1
0,17603826	10,1

y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

151,9	2,6514
-------	--------

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

0,00048579	1,67002
------------	---------

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
46,80 0,81679

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67530878	38,6923

Cálculo da Longitude

-0,1607824	-9,2122
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,540579
Longitude Final	
9	12,729236

Passo nº 15

Conversão

38,692318	0,67531
-9,212127	-0,1608

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67530878
-0,1607824

Experiência executada com agulha de marcar - nº9

		Graus	minutos	Nome	Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	42,07	N	076,0 °
<i>Mama</i>	Longitude	9	16,07	W	

Posição da estação B	Latitude	38	41,64	N	099,0 °
<i>VTS</i>	Longitude	9	14,06	W	

Posição da estação C	Latitude	38	39,63	N	203,0 °
<i>Bugio</i>	Longitude	9	17,93	w	

Calculado

Alfa	023,0 °	023,0 °
Beta	104,0 °	104,0 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	41,85	N
<i>Forte nossa senhora</i>	9	16,96	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	41,87	N
	9	16,90	W

Diferença	0,05	milhas
	85,75	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,7012	0,6755
	Longitude	-9,2678	-0,1618
Posição da estação B	Latitude	38,694	0,6753
	Longitude	-9,2343	-0,1612
Posição da estação C	Latitude	38,6605	0,6748
	Longitude	-9,2989	-0,1623

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00047278	0,02709	1,6253
distância B C	0,00105724	0,06058	3,6345
distância A C	0,00082688	0,04738	2,8426

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,83645508	105,221
Azimute AC	-2,6033293	210,84

Azimute BA	-1,3047721	285,242
Azimute BC	-2,1577291	236,371
Azimute CA	0,53792407	30,8208
Azimute CB	0,983159	56,3309

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 0,85296

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 275,75 4,81282

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,6754033	38,6978

Cálculo da Longitude

-0,1619971	-9,2817
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	41,865524
Longitude Final	
9	16,904871

Passo nº 15

Conversão

38,697527	0,6754
-9,282691	-0,162

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,6754033
-0,1619971

Experiência executada com agulha de marcar - nº10

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	41	8,27	N	142,5 °
<i>Pontão asseguir ao Ferixo</i>	Longitude	8	34,33	W	

41.137853, -8.572197

Posição da estação b	Latitude	41	8,33	N	203,0 °
<i>Pilar Sul grande P. Freixo</i>	Longitude	8	34,85	W	

41.138864, -8.580777

Posição da estação C	Latitude	41	8,67	N	292,0 °
<i>Pilar Norte P. Feixo 1°</i>	Longitude	8	34,86	w	

41.144484, -8.581062 **41.143825, -8.581062** *Calculado*

Alfa	060,5 °	<i>060,5 °</i>
Beta	089,0 °	<i>089,0 °</i>

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	41	8,61	N
<i>Forte nossa senhora</i>	8	34,70	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	41	8,62	N
	8	34,69	W

Diferença	0,02	milhas
	28,90	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	41,1379	0,718
	Longitude	-8,5722	-0,1496
Posição da estação B	Latitude	41,1389	0,718
	Longitude	-8,5808	-0,1498
Posição da estação C	Latitude	41,1445	0,7181
	Longitude	-8,5811	-0,1498

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00011415	0,00654	0,3924
distância B C	9,8159E-05	0,00562	0,3374
distância A C	0,00016423	0,00941	0,5646

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-1,4155473	278,895
Azimute AC	-0,7887402	314,809

Azimute BA	1,72594689	98,8895
Azimute BC	-0,0381701	357,813
Azimute CA	2,35275066	134,803
Azimute CB	3,10341931	177,813

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,76412

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 22,61 0,3947

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,71809154	41,1436
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1497169	-8,5781
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
41	8,6168879
Longitude Final	
8	34,688943

Passo nº 15

Conversão

41,143427	0,71809
-8,578388	-0,1497

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,71809154
-0,1497169

Experiência nº1 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	31,08	n	011,3 °
	Longitude	8	54,03	w	

Posição da estação B	Latitude	38	31,23	n	050,5 °
	Longitude	8	53,14	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,68	n	176,7 °
	Longitude	8	54,06	w	

Calculado

Alfa	039,2 °	039,2 °
Beta	126,2 °	126,2 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	30,70	n
	8	54,12	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	30,55	N
	8	54,15	W

Diferença	0,15	milhas
	285,51	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,518	0,6723
	Longitude	-8,9005	-0,1553
Posição da estação B	Latitude	38,5205	0,6723
	Longitude	-8,8857	-0,1551
Posição da estação C	Latitude	38,4947	0,6719
	Longitude	-8,901	-0,1554

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,0002072	0,01187	0,7123
distância B C	0,00049714	0,02848	1,709
distância A C	0,0004073	0,02334	1,4002

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,35854432	77,8389
Azimute AC	-3,1248228	180,961

Azimute BA	-1,7828871	257,848
Azimute BC	-2,7066901	204,918
Azimute CA	0,01676441	0,96053
Azimute CB	0,43473595	24,9085

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 0,9238

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 229,19 4,00004

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67211105	38,5091

Cálculo da Longitude

-0,1553778	-8,9025
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	30,547596
Longitude Final	
8	54,149677

Passo n° 15

Conversão

38,5116667	0,67216
-8,902	-0,1554

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67211105
-0,1553778

Experiência nº2 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,42	n	280,3 °
	Longitude	8	58,95	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,30	n	038,7 °
	Longitude	8	56,03	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	052,4 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	118,4 °	118,4 °
Beta	013,7 °	013,7 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	28,22	n
	8	57,02	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	28,12	N
	8	57,39	W

Diferença	0,31	milhas
	579,05	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4737	0,6715
	Longitude	-8,9825	-0,1568
Posição da estação B	Latitude	38,4883	0,6717
	Longitude	-8,9338	-0,1559
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00071249	0,04082	2,4494
distância B C	0,0001553	0,0089	0,5339
distância A C	0,0008484	0,04861	2,9166

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,20303852	68,929
Azimute AC	1,29973903	74,4696

Azimute BA	-1,9380256	248,959
Azimute BC	1,75915399	100,792
Azimute CA	-1,8412038	254,507
Azimute CB	-1,3823174	280,799

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,58601

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 222,20 3,87818

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,6714053	38,4687

Cálculo da Longitude

-0,1563219	-8,9566
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	28,12139
Longitude Final	
8	57,394965

Passo nº 15

Conversão

38,4703333	0,67143
-8,9502667	-0,1562

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,6714053
-0,1563219

Experiência nº3 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	30,64	n	019,9 °
	Longitude	8	54,80	w	

Posição da estação B	Latitude	38	31,08	n	038,8 °
	Longitude	8	54,03	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,68	n	114,6 °
	Longitude	8	54,06	w	

Calculado

Alfa	018,9 °	018,9 °
Beta	075,8 °	075,8 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	30,09	n
	8	55,08	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	30,01	N
	8	55,06	W

Diferença	0,08	milhas
	142,00	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,5107	0,6721
	Longitude	-8,9133	-0,1556
Posição da estação B	Latitude	38,518	0,6723
	Longitude	-8,9005	-0,1553
Posição da estação C	Latitude	38,4947	0,6719
	Longitude	-8,901	-0,1554

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00021702	0,01243	0,7461
distância B C	0,0004073	0,02334	1,4002
distância A C	0,00032613	0,01869	1,1211

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	0,93995017	53,8552
Azimute AC	2,59872858	148,896

Azimute BA	-2,201503	233,863
Azimute BC	-3,1248228	180,961
Azimute CA	-0,5427301	328,904
Azimute CB	0,01676441	0,96053

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 0,92332

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 217,23 3,79143

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67195591	38,5002

Cálculo da Longitude

-0,155644	-8,9177
-----------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	30,014251
Longitude Final	
8	55,064815

Passo nº 15

Conversão

38,5015	0,67198
-8,918	-0,1556

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67195591
-0,155644

Experiência nº4 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,83	n	294,1 °
	Longitude	8	58,17	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,02	n	017,6 °
	Longitude	8	56,54	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	053,0 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	083,5 °	083,5 °
Beta	035,4 °	035,4 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	28,38	n
	8	56,86	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	28,35	N
	8	56,82	W

Diferença	0,05	milhas
	84,61	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4805	0,6716
	Longitude	-8,9695	-0,1565
Posição da estação B	Latitude	38,4837	0,6717
	Longitude	-8,9423	-0,1561
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00037526	0,0215	1,29
distância B C	0,00027374	0,01568	0,941
distância A C	0,00064884	0,03718	2,2305

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,42282847	81,5221
Azimute AC	1,40389198	80,4371

Azimute BA	-1,7184691	261,539
Azimute BC	1,37822642	78,9666
Azimute CA	-1,737192	260,466
Azimute CB	-1,7631526	258,979

Passo nº4 Condição Tetraedro

3

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B=

177,427585	3,0967
------------	--------

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

Rad	Grau
S = 0,51074953	29,2638

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa

1,45734993

beta

0,61784656

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

0,67428364

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

0,06251978

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)

0,57318804	32,8
------------	------

y (Ângulo C)

0,44831103	25,7
------------	------

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

118,9	2,07544
-------	---------

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

0,00020482	0,70413
------------	---------

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
197,88 3,45366

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,67147176	38,4725
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1561535	-8,9469
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	28,349873
Longitude Final	
8	56,816135

Passo nº 15

Conversão

38,473	0,67148
-8,9476667	-0,1562

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67147176
-0,1561535

Experiência nº5 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,83	n	310,4 °
	Longitude	8	58,18	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,30	n	037,2 °
	Longitude	8	56,03	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	050,7 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	086,8 °	086,8 °
Beta	013,5 °	013,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	28,13	n
	8	57,11	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	28,18	N
	8	57,42	W

Diferença	0,25	milhas
	459,19	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4805	0,6716
	Longitude	-8,9697	-0,1566
Posição da estação B	Latitude	38,4883	0,6717
	Longitude	-8,9338	-0,1559
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00050829	0,02912	1,7474
distância B C	0,0001553	0,0089	0,5339
distância A C	0,00065108	0,0373	2,2383

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,29827199	74,3855
Azimute AC	1,40447121	80,4703

Azimute BA	-1,8429315	254,408
Azimute BC	1,75915399	100,792
Azimute CA	-1,736611	260,5
Azimute CB	-1,3823174	280,799

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,6811

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 224,27 3,91431

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,67142313	38,4697
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1563295	-8,957
------------	--------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	28,182696
Longitude Final	
8	57,421168

Passo nº 15

Conversão

38,4688167	0,67141
-8,9518667	-0,1562

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67142313
-0,1563295

Experiência nº6 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,83	n	287,3 °
	Longitude	8	58,18	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,30	n	037,7 °
	Longitude	8	56,03	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	057,7 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	110,4 °	110,4 °
Beta	020,0 °	020,0 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	28,52	n
	8	56,71	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	28,49	N
	8	56,87	W

Diferença	0,13	milhas
	234,11	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4805	0,6716
	Longitude	-8,9697	-0,1566
Posição da estação B	Latitude	38,4883	0,6717
	Longitude	-8,9338	-0,1559
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00050829	0,02912	1,7474
distância B C	0,0001553	0,0089	0,5339
distância A C	0,00065108	0,0373	2,2383

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,29827199	74,3855
Azimute AC	1,40447121	80,4703

Azimute BA	-1,8429315	254,408
Azimute BC	1,75915399	100,792
Azimute CA	-1,736611	260,5
Azimute CB	-1,3823174	280,799

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,6811

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A) 34,0
 y (Ângulo C) 41,9

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 218,84 3,81954

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67151172	38,4748

Cálculo da Longitude

-0,156168	-8,9478
-----------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	28,487238
Longitude Final	
8	56,865954

Passo n° 15

Conversão

38,4753333	0,67152
-8,9451667	-0,1561

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67151172
-0,156168

Experiência nº7 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos	Nome	Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,42	n	277,0 °
	Longitude	8	58,96	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,02	n	353,7 °
	Longitude	8	56,54	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	062,1 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	076,7 °	076,7 °
Beta	068,4 °	068,4 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	28,72	n
	8	56,51	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	28,57	N
	8	56,36	W

Diferença	0,19	milhas
	358,68	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4737	0,6715
	Longitude	-8,9827	-0,1568
Posição da estação B	Latitude	38,4837	0,6717
	Longitude	-8,9423	-0,1561
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00057806	0,03312	1,9872
distância B C	0,00027374	0,01568	0,941
distância A C	0,00085059	0,04874	2,9241

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,26386086	72,4139
Azimute AC	1,30045409	74,5105

Azimute BA	-1,8772938	252,439
Azimute BC	1,37822642	78,9666
Azimute CA	-1,840487	254,548
Azimute CB	-1,7631526	258,979

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 3,02767

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 162,59 2,83766

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude
radianos grau

0,67153489	38,4761
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1560204	-8,9393
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	28,566905
Longitude Final	
8	56,358473

Passo nº 15

Conversão

38,4786667	0,67158
-8,9418333	-0,1561

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67153489
-0,1560204

Experiência nº8 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	29,02	n	270,0 °
	Longitude	8	56,54	w	

Posição da estação B	Latitude	38	29,30	n	021,2 °
	Longitude	8	56,03	w	

Posição da estação C	Latitude	38	29,20	n	078,2 °
	Longitude	8	55,36	w	

Calculado

Alfa	111,2 °	111,2 °
Beta	057,0 °	057,0 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	29,06	n
	8	56,10	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	29,04	N
	8	56,14	W

Diferença	0,04	milhas
	71,07	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4837	0,6717
	Longitude	-8,9423	-0,1561
Posição da estação B	Latitude	38,4883	0,6717
	Longitude	-8,9338	-0,1559
Posição da estação C	Latitude	38,4867	0,6717
	Longitude	-8,9227	-0,1557

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00014184	0,00813	0,4876
distância B C	0,0001553	0,0089	0,5339
distância A C	0,00027374	0,01568	0,941

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	0,95909244	54,9519
Azimute AC	1,37822642	78,9666

Azimute BA	-2,1824079	234,957
Azimute BC	1,75915399	100,792
Azimute CA	-1,7631526	258,979
Azimute CB	-1,3823174	280,799

Passo n°4 Condição Tetraedro

Passo n°5 Cálculo do Angulo B
B= 2,34162

Passo n°6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo n°7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo n°8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo n°9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo n°10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo n° 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo n° 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo n° 13Z Cálculo do Azimute BP
 198,06 3,45678

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,6716717	38,484
-----------	--------

Cálculo da Longitude

-0,1559566	-8,9357
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	29,037223
Longitude Final	
8	56,139457

Passo nº 15

Conversão

38,4843333	0,67168
-8,935	-0,1559

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,6716717
-0,1559566

Experiência nº9 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	29,30	N	257,3 °
	Longitude	8	56,03	W	

Posição da estação B	Latitude	38	30,64	N	027,3 °
	Longitude	8	54,80	W	

Posição da estação C	Latitude	38	29,68	N	080,2 °
	Longitude	8	54,24	W	

Calculado

Alfa	130,0 °	130,0 °
Beta	052,9 °	052,9 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	29,54	N
	8	55,59	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	29,44	N
	8	55,45	W

Diferença	0,15	milhas
	277,46	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4883	0,6717
	Longitude	-8,9338	-0,1559
Posição da estação B	Latitude	38,5107	0,6721
	Longitude	-8,9133	-0,1556
Posição da estação C	Latitude	38,4947	0,6719
	Longitude	-8,904	-0,1554

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00047994	0,0275	1,6499
distância B C	0,00030697	0,01759	1,0553
distância A C	0,00042227	0,02419	1,4517

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	0,62283683	35,6859
Azimute AC	1,305778	74,8156

Azimute BA	-2,5185331	215,699
Azimute BC	2,71329204	155,46
Azimute CA	-1,8354906	254,834
Azimute CB	-0,4281992	335,466

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 1,05136

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 202,88 3,54097

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos grau

0,67178907	38,4907
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1557551	-8,9241
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	29,440701
Longitude Final	
8	55,446673

Passo nº 15

Conversão

38,4923333	0,67182
-8,9265	-0,1558

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67178907
-0,1557551

Experiência nº10 executada no navio "PAROS"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	30,64	N	025,2 °
	Longitude	8	54,80	W	

Posição da estação B	Latitude	38	31,08	N	038,0 °
	Longitude	8	54,03	W	

Posição da estação C	Latitude	38	29,68	N	093,6 °
	Longitude	8	54,06	W	

Calculado

Alfa	012,8 °	012,8 °
Beta	055,6 °	055,6 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	29,78	n
	8	55,37	w

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	29,71	N
	8	55,32	W

Diferença	0,08	milhas
	144,04	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,5107	0,6721
	Longitude	-8,9133	-0,1556
Posição da estação B	Latitude	38,518	0,6723
	Longitude	-8,9005	-0,1553
Posição da estação C	Latitude	38,4947	0,6719
	Longitude	-8,901	-0,1554

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00021702	0,01243	0,7461
distância B C	0,0004073	0,02334	1,4002
distância A C	0,00032613	0,01869	1,1211

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	0,93995017	53,8552
Azimute AC	2,59872858	148,896

Azimute BA	-2,201503	233,863
Azimute BC	-3,1248228	180,961
Azimute CA	-0,5427301	328,904
Azimute CB	0,01676441	0,96053

Passo n°4 Condição Tetraedro

Passo n°5 Cálculo do Angulo B
B= 0,92332

Passo n°6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

	Rad	Grau
S =	<input type="text" value="2,08303015"/>	<input type="text" value="119,349"/>

Passo n°7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa
beta

Passo n°8 Cálculo de Z
rad
Z

Passo n°9 Cálculo de €
Tan € =

Passo n°10 Cálculo do angulo x e y

	rad	graus
x (Ângulo A)	<input type="text" value="2,61354007"/>	<input type="text" value="149,7"/>
y (Ângulo C)	<input type="text" value="1,55252023"/>	<input type="text" value="89,0"/>

Passo n° 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

Passo n° 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

Passo n° 13Z Cálculo do Azimute BP
216,41 3,77703

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,67186867	38,4952

Cálculo da Longitude

-0,1557173	-8,9219
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	29,714367
Longitude Final	
8	55,316688

Passo nº 15

Conversão

38,4963333	0,67189
-8,9228333	-0,1557

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67186867
-0,1557173

Experiência nº1 executada no "VTS Setubal"

		Graus	minutos		Azimute
Posição da estação A	Latitude	38	28,51	N	158,7 °
	Longitude	8	52,21	W	

Posição da estação B	Latitude	38	29,68	N	198,6 °
	Longitude	8	54,24	W	

Posição da estação C	Latitude	38	29,35	N	224,4 °
	Longitude	8	55,99	w	

Calculado

Alfa	039,9 °	039,9 °
Beta	025,8 °	025,8 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	31,26	N
	8	53,54	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	31,27	N
	8	53,53	W

Diferença	0,01	milhas
	21,57	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4752	0,6715
	Longitude	-8,8702	-0,1548
Posição da estação B	Latitude	38,4947	0,6719
	Longitude	-8,904	-0,1554
Posição da estação C	Latitude	38,4892	0,6718
	Longitude	-8,9332	-0,1559

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00057401	0,03289	1,9733
distância B C	0,00040984	0,02348	1,4089
distância A C	0,00089475	0,05127	3,0759

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-0,9359376	306,375
Azimute AC	-1,2938508	285,868

Azimute BA	2,20528758	126,354
Azimute BC	-1,8070578	256,463
Azimute CA	1,84705768	105,829
Azimute CB	1,33421801	76,4451

Passo nº4 Condição Tetraedro

3

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B=

130,109543	2,27084
------------	---------

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

Rad	Grau
S = 0,5620793	32,2048

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta

alfa	0,69638637
beta	0,45029495

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

0,75992754

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

0,01604614

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)

0,57812406	33,1
0,54603454	31,3

y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

122,9	2,14526
-------	---------

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

0,000489	1,68106
----------	---------

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
19,38 0,33821

Passo nº 14Z

Cálculo da Latitude
radianos grau

0,67231997	38,5211
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1551967	-8,8921
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	31,265797
Longitude Final	
8	53,527088

Passo nº 15

Conversão

38,521	0,67232
-8,8923333	-0,1552

Passo nº 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67231997
-0,1551967

Experiência Virtual nº1, com ponto P a 3 milhas da estação

		Graus	minutos		Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	37	4,28	N	317,8 °	317,8 °	000,0 °
	Longitude	8	43,81	W			

Posição da estação B	Latitude	37	4,79	N	011,5 °	008,5 °	003,0 °
	Longitude	8	40,05	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	37	3,58	N	056,0 °	056,0 °	000,0 °
	Longitude	8	36,83	w			

Calculado

Alfa	053,7 °	053,7 °
Beta	044,5 °	044,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	37	1,52	N
	8	40,66	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	37	1,60	N
	8	41,18	W

Diferença	0,42	milhas
	774,99	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0714	0,647
	Longitude	-8,7302	-0,1524
Posição da estação B	Latitude	37,0799	0,6472
	Longitude	-8,6675	-0,1513
Posição da estação C	Latitude	37,0596	0,6468
	Longitude	-8,6138	-0,1503

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,00088558	0,05074	3,0444
distância B C	0,00082709	0,04739	2,8433
distância A C	0,00163379	0,09361	5,6166

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,40215312	80,3375
Azimute AC	1,69627088	97,1892

Azimute BA	-1,7387798	260,375
Azimute BC	2,01254212	115,31
Azimute CA	-1,4440975	277,259
Azimute CB	-1,1284858	295,343

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,53186

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 195,75 3,41641

Passo n° 14ZCálculo da Latitude
radianos grau

0,64623605	37,0266
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1516043	-8,6863
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
37	1,5958925
Longitude Final	
8	41,177122

Passo n° 15

Conversão

37,0252883	0,64621
-8,677705	-0,1515

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64623605
-0,1516043

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	37,0714	0,647
	Lon	-8,7302	-0,1524
Posição B	Lat	37,0799	0,6472
	Lon	-8,6675	-0,1513
Posição C	Lat	37,0596	0,6468
	Lon	-8,6138	-0,1503

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,00088558	0,05074	3,0444
distância B C	0,00082709	0,04739	2,8433
distância A C	0,00163379	0,09361	5,6166

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	1,40215312	80,3375	0,0009	A	57,413755	80,337456	137,75121
BA	-1,7387798	260,375		B	145,06509	260,37525	115,31017
BC	2,01254212	115,31	0,0008	C	59,266829	295,34253	236,0757
CB	-1,1284858	295,343		Alfa	50,728304	317,78281	8,5111169
AP	2,40421218	137,751	0,0011	Beta	47,526072	8,5111169	56,037189
PA	-0,7368289	317,783					
BP	-2,9929379	188,517	0,001				
PB	0,14854701	8,51112					
CP	-2,1628871	236,076	0,0011				
PC	0,97803345	56,0372					

Ponto P	37,025288	0,6462132
	-8,677705	-0,1514545

Experiência Virtual nº2, com ponto P a 6 milhas da estação

		Graus	minutos	Nome	Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	37	4,28	N	307,0 °	307,0 °	000,0 °
	Longitude	8	46,51	W			

Posição da estação B	Latitude	37	4,79	N	355,7 °	352,7 °	003,0 °
	Longitude	8	40,05	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	37	6,54	N	042,4 °	042,4 °	000,0 °
	Longitude	8	31,69	w			

Calculado

Alfa	048,7 °	048,7 °
Beta	046,7 °	046,7 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	36	59,93	N
	8	39,26	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	36	59,94	N
	8	39,80	W

Diferença	0,43	milhas
	803,52	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	37,0714	0,647
	Longitude	-8,7752	-0,1532
Posição da estação B	Latitude	37,0799	0,6472
	Longitude	-8,6675	-0,1513
Posição da estação C	Latitude	37,109	0,6477
	Longitude	-8,5281	-0,1488

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos
distância A B	0,0015081	0,08641	5,1845
distância B C	0,00200503	0,11488	6,8928
distância A C	0,00350229	0,20067	12,04

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,47169907	84,3221
Azimute AC	1,38104856	79,1283

Azimute BA	-1,6687596	264,387
Azimute BC	1,31404016	75,289
Azimute CA	-1,7579431	259,277
Azimute CB	-1,8260858	255,373

Passo nº4 Condição Tetraedro

3

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B=

170,901835	2,9828
------------	--------

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3

Rad	Grau
S = 0,65897749	37,7566

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa

0,84914346

beta

0,81570127

Passo nº8 Cálculo de Z
rad
Z

0,63031923

Passo nº9 Cálculo de €
Tan € =

0,12107581

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)

0,77946682	44,7
------------	------

y (Ângulo C)

0,53848816	30,9
------------	------

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

102,4	1,7874
-------	--------

Passo nº 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

0,00141204	4,85425
------------	---------

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
177,70 3,10144

Passo n° 14ZCálculo da Latitude
radianos grau

0,64575552	36,9991
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1512047	-8,6634
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
36	59,943958
Longitude Final	
8	39,803634

Passo n° 15

Conversão

36,9987833	0,64575
-8,6543467	-0,151

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64575552
-0,1512047

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	37,0714	0,647
	Lon	-8,7752	-0,1532
Posição B	Lat	37,0799	0,6472
	Lon	-8,6675	-0,1513
Posição C	Lat	37,109	0,6477
	Lon	-8,5281	-0,1488

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,0015081	0,08641	5,1845
distância B C	0,00200503	0,11488	6,8928
distância A C	0,00350229	0,20067	12,04

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	1,47169907	84,3221	0,0015	A	42,604247	84,322145	126,92639
BA	-1,6687596	264,387		B	170,90184	264,38712	75,288956
BC	1,31404016	75,289	0,002	C	32,909154	255,37299	222,46384
CB	-1,8260858	255,373		Alfa	45,652337	306,9992	352,65154
AP	2,21528345	126,926	0,0021	Beta	49,73624	352,65154	42,387782
PA	-0,9250384	306,999					
BP	3,0132	172,644	0,0014				
PB	-0,1282548	352,652					
CP	-2,4004589	222,464	0,0026				
PC	0,73980635	42,3878					

Ponto P	36,998783	0,6457506
	-8,6543467	-0,1510468

Experiência Virtual nº3, com ponto P a 10 milhas da estação

		Graus	minutos	Nome	Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	38	24,88	N	342,8 °	342,8 °	000,0 °
	Longitude	9	12,87	W			

Posição da estação B	Latitude	38	26,08	N	345,8 °	345,8 °	000,0 °
	Longitude	9	7,02	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	38	27,16	N	350,2 °	350,2 °	000,0 °
	Longitude	8	58,46	w			

Obtidos

Alfa	003,1 °	003,1 °
Beta	004,4 °	004,4 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	36	59,93	N
	8	39,26	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	36	59,94	N
	8	39,27	W

Diferença	0,01	milhas
	19,57	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,4147	0,6705
	Longitude	-9,2145	-0,1608
Posição da estação B	Latitude	38,4346	0,6708
	Longitude	-9,1169	-0,1591
Posição da estação C	Latitude	38,4526	0,6711
	Longitude	-8,9743	-0,1566

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos/ milhas
distância A B	0,00137807	0,07896	4,7375
distância B C	0,0019745	0,11313	6,7878
distância A C	0,00334899	0,19188	11,513

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,31542082	75,3681
Azimute AC	1,37078559	78,5402

Azimute BA	-1,8251139	255,429
Azimute BC	1,41047421	80,8142
Azimute CA	-1,7682018	258,69
Azimute CB	-1,7295709	260,903

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 3,0476

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 165,56 2,88962

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,64575305	36,9989

Cálculo da Longitude

-0,1510491	-8,6545
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
36	59,935467
Longitude Final	
8	39,268712

Passo n° 15

Conversão

36,9987833	0,64575
-8,6543467	-0,151

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,64575305
-0,1510491

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	38,4147	0,6705
	Lon	-9,2145	-0,1608
Posição B	Lat	38,4346	0,6708
	Lon	-9,1169	-0,1591
Posição C	Lat	38,4526	0,6711
	Lon	-8,9743	-0,1566

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,00137807	0,07896	4,7375
distância B C	0,0019745	0,11313	6,7878
distância A C	0,00334899	0,19188	11,513

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	1,31542082	75,3681	0,0014	A	87,082028	75,368061	162,45009
BA	-1,8251139	255,429		B	174,61446	255,42867	80,814219
BC	1,41047421	80,8142	0,002	C	90,876221	260,90289	170,02666
CB	-1,7295709	260,903		Alfa	3,0509774	342,79269	345,84367
AP	2,83528893	162,45	0,0259	Beta	4,3787959	345,84367	350,22247
PA	-0,3003242	342,793					
BP	2,88957862	165,561	0,0259				
PB	-0,2470746	345,844					
CP	2,96752511	170,027	0,0258				
PC	-0,1706502	350,222					

Ponto P	36,998783	0,6457506
	-8,6543467	-0,1510468

Experiência Virtual nº4, com ponto P a 20 milhas da estação

		Graus	minutos	Nome	Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	38	57,85	N	063,0 °	063,0 °	000,0 °
	Longitude	9	25,06	W			

Posição da estação B	Latitude	38	42,56	N	099,3 °	099,3 °	000,0 °
	Longitude	9	29,14	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	38	24,93	N	122,2 °	122,2 °	000,0 °
	Longitude	9	12,97	w			

Obtidos

Alfa	036,3 °	036,3 °
Beta	022,9 °	022,9 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	38	45,95	N
	9	55,28	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	38	45,95	N
	9	55,28	W

Diferença	0,00	milhas
	0,72	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	38,9642	0,6801
	Longitude	-9,4176	-0,1644
Posição da estação B	Latitude	38,7093	0,6756
	Longitude	-9,4857	-0,1656
Posição da estação C	Latitude	38,4156	0,6705
	Longitude	-9,2162	-0,1609

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos/ milhas
distância A B	0,00454397	0,26035	15,621
distância B C	0,0063089	0,36147	21,688
distância A C	0,00996027	0,57068	34,241

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	-2,9361436	191,771
Azimute AC	2,8614014	163,946

Azimute BA	0,20470411	11,7287
Azimute BC	2,51779331	144,259
Azimute CA	-0,2779938	344,072
Azimute CB	-0,6208674	324,427

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,31309

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 279,59 4,87979

Passo n° 14ZCálculo da Latitude
radianos grau

0,67659207	38,7659
------------	---------

Cálculo da Longitude

-0,1731611	-9,9214
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
38	45,95222
Longitude Final	
9	55,284152

Passo n° 15

Conversão

38,7658733	0,67659
-9,92141	-0,1732

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,67659207
-0,1731611

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	38,9642	0,6801
	Lon	-9,4176	-0,1644
Posição B	Lat	38,7093	0,6756
	Lon	-9,4857	-0,1656
Posição C	Lat	38,4156	0,6705
	Lon	-9,2162	-0,1609

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,00454397	0,26035	15,621
distância B C	0,0063089	0,36147	21,688
distância A C	0,00996027	0,57068	34,241

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	-2,9361436	191,771	0,0045	A	51,570166	191,77137	243,34153
BA	0,20470411	11,7287		B	132,53025	11,728682	144,25893
BC	2,51779331	144,259	0,0063	C	21,770133	324,42692	302,65678
CB	-0,6208674	324,427		Alfa	36,293518	63,025406	99,318924
AP	-2,0360744	243,342	0,0077	Beta	22,897979	99,318924	122,2169
PA	1,10000084	63,0254					
BP	-1,4033916	279,592	0,006				
PB	1,73344223	99,3189					
CP	-1,0008279	302,657	0,0114				
PC	2,13308735	122,217					

Ponto P	38,765873	0,6765921
	-9,92141	-0,1731613

Experiência Virtual nº5, com ponto P a 30 milhas da estação

		Graus	minutos		Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	36	33,86	N	302,3 °	302,3 °	000,0 °
	Longitude	8	59,55	W			

Posição da estação B	Latitude	37	1,15	N	000,1 °	000,1 °	000,0 °
	Longitude	7	52,37	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	36	29,44	N	059,6 °	059,6 °	000,0 °
	Longitude	6	50,02	w			

Obtidos

Alfa	057,9 °	057,9 °
Beta	059,5 °	059,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	36	0,21	N
	7	52,57	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	36	0,21	N
	7	52,57	W

Diferença	0,00	milhas
	8,84	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	36,5644	0,6382
	Longitude	-8,9924	-0,1569
Posição da estação B	Latitude	37,0192	0,6461
	Longitude	-7,8729	-0,1374
Posição da estação C	Latitude	36,4906	0,6369
	Longitude	-6,8336	-0,1193

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos/ milhas
distância A B	0,01754623	1,00533	60,32
distância B C	0,01721318	0,98624	59,175
distância A C	0,03030383	1,73628	104,18

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,09548959	62,7669
Azimute AC	1,60207265	91,792

Azimute BA	-2,0344	243,437
Azimute BC	2,13099718	122,097
Azimute CA	-1,5170919	273,077
Azimute CB	-0,9997414	302,719

Passo n°4 Condição Tetraedro

Passo n°5 Cálculo do Angulo B
B= 2,11779

Passo n°6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
Rad Grau
S =

Passo n°7 Conversão dos ângulos alfa e beta
alfa
beta

Passo n°8 Cálculo de Z
rad
Z

Passo n°9 Cálculo de €
Tan € =

Passo n°10 Cálculo do angulo x e y
rad graus
x (Ângulo A)
y (Ângulo C)

Passo n° 11Z Cálculo do angulo P B1 A
180- (y + beta) = B2

Passo n° 12Z Cálculo da distância
radiano milhas

Passo n° 13Z Cálculo do Azimute BP
180,15 3,14422

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,62838052	36,0036

Cálculo da Longitude

-0,1374649	-7,8762
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
36	0,213107
Longitude Final	
7	52,569468

Passo n° 15

Conversão

36,0034733	0,62838
-7,8761417	-0,1375

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,62838052
-0,1374649

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	36,5644	0,6382
	Lon	-8,9924	-0,1569
Posição B	Lat	37,0192	0,6461
	Lon	-7,8729	-0,1374
Posição C	Lat	36,4906	0,6369
	Lon	-6,8336	-0,1193

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,01754623	1,00533	60,32
distância B C	0,01721318	0,98624	59,175
distância A C	0,03030383	1,73628	104,18

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	1,09548959	62,7669	0,0175	A	58,839629	62,76693	121,60656
BA	-2,0344	243,437		B	121,34032	243,43747	122,09714
BC	2,13099718	122,097	0,0172	C	62,499034	302,71903	240,22
CB	-0,9997414	302,719		Alfa	57,880471	302,26718	0,1476559
AP	2,12243485	121,607	0,0185	Beta	59,455922	0,1476559	59,603578
PA	-1,0076277	302,267					
BP	-3,1389815	180,15	0,0177				
PB	0,00257708	0,14766					
CP	-2,0905554	240,22	0,017				
PC	1,04027869	59,6036					

Ponto P	36,003473	0,6283792
	-7,8761417	-0,1374646

Experiência Virtual nº6, com ponto P a 60 milhas da estação

		Graus	minutos	Nome	Azimute	Az Calc.	Dif. Ângulo
Posição da estação A	Latitude	36	33,86	N	302,3 °	302,3 °	000,0 °
	Longitude	8	59,55	W			

Posição da estação B	Latitude	37	1,15	N	000,1 °	000,1 °	000,0 °
	Longitude	7	52,37	W	*Alteração do azimute com o erro pretendido		

Posição da estação C	Latitude	36	29,44	N	059,6 °	059,6 °	000,0 °
	Longitude	6	50,02	w			

Obtidos

Alfa	057,9 °	057,9 °
Beta	059,5 °	059,5 °

	Graus	minutos	Nome
Ponto P	36	0,21	N
	7	52,57	W

	Graus	minutos	Nome
P OBTIDO	36	0,21	N
	7	52,57	W

Diferença	0,00	milhas
	8,84	metros

Passo nº 1 Conversão das unidades para decimais e radianos

Posição da estação A	Latitude	36,5644	0,6382
	Longitude	-8,9924	-0,1569
Posição da estação B	Latitude	37,0192	0,6461
	Longitude	-7,8729	-0,1374
Posição da estação C	Latitude	36,4906	0,6369
	Longitude	-6,8336	-0,1193

Passo nº2 Cálculo das distâncias dos pontos A,B e C em graus

	graus rad.	graus	minutos/ milhas
distância A B	0,01754623	1,00533	60,32
distância B C	0,01721318	0,98624	59,175
distância A C	0,03030383	1,73628	104,18

Passo nº3 Cálculo dos Azimutes de AB, AC

Z radianos Z graus

Azimute AB	1,09548959	62,7669
Azimute AC	1,60207265	91,792

Azimute BA	-2,0344	243,437
Azimute BC	2,13099718	122,097
Azimute CA	-1,5170919	273,077
Azimute CB	-0,9997414	302,719

Passo nº4 Condição Tetraedro

Passo nº5 Cálculo do Angulo B
B= 2,11779

Passo nº6 Calcular "S" em função da condição 1,2 ou 3
 Rad Grau
 S =

Passo nº7 Conversão dos ângulos alfa e beta
 alfa
 beta

Passo nº8 Cálculo de Z
 rad
 Z

Passo nº9 Cálculo de €
 Tan € =

Passo nº10 Cálculo do angulo x e y
 rad graus
 x (Ângulo A)
 y (Ângulo C)

Passo nº 11Z Cálculo do angulo P B1 A
 180- (y + beta) = B2

Passo nº 12Z Cálculo da distância
 radiano milhas

Passo nº 13Z Cálculo do Azimute BP
 180,15 3,14422

Passo n° 14Z

Cálculo da Latitude

radianos	grau
0,62838052	36,0036

Cálculo da Longitude

-0,1374649	-7,8762
------------	---------

Ponto P obtido

Latitude Final	
36	0,213107
Longitude Final	
7	52,569468

Passo n° 15

Conversão

36,0034733	0,62838
-7,8761417	-0,1375

Passo n° 15.1

Cálculo controle da distância entre ponto obtido e esperado

rad
0,62838052
-0,1374649

Cálculo auxiliar para determinar os azimutes Verdadeiros

1 Passagem das coordenadas para radianos

		graus	radianos
Posição A	Lat	36,5644	0,6382
	Lon	-8,9924	-0,1569
Posição B	Lat	37,0192	0,6461
	Lon	-7,8729	-0,1374
Posição C	Lat	36,4906	0,6369
	Lon	-6,8336	-0,1193

2 Cálculo da distância AB e BC

	radianos	graus	minutos
distância A B	0,01754623	1,00533	60,32
distância B C	0,01721318	0,98624	59,175
distância A C	0,03030383	1,73628	104,18

	Z		Dis		Angulos	Z1	Z2
AB	1,09548959	62,7669	0,0175	A	58,839629	62,76693	121,60656
BA	-2,0344	243,437		B	121,34032	243,43747	122,09714
BC	2,13099718	122,097	0,0172	C	62,499034	302,71903	240,22
CB	-0,9997414	302,719		Alfa	57,880471	302,26718	0,1476559
AP	2,12243485	121,607	0,0185	Beta	59,455922	0,1476559	59,603578
PA	-1,0076277	302,267					
BP	-3,1389815	180,15	0,0177				
PB	0,00257708	0,14766					
CP	-2,0905554	240,22	0,017				
PC	1,04027869	59,6036					

Ponto P	36,003473	0,6283792
	-7,8761417	-0,1374646