Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Margarida Sofia Trigo Silvestre

A aprendizagem da multiplicação e divisão através do uso de tarefas paralelas

Relatório da componente de investigação do relatório de estágio sobre a prática de ensino supervisionada do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Dezembro de 2018

IPS Instituto Politécnico de Setúbal
Escola Superior de Educação

Margarida Sofia Trigo Silvestre
n.º 160140013

A aprendizagem da multiplicação e divisão através do uso de tarefas paralelas

Relatório da componente de investigação do relatório de estágio sobre a prática de ensino supervisionada do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora: Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado Mendes

Dezembro de 2018

“Um ensino eficaz da matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e várias estratégias” (NCTM, 2017, p. 17)

Agradecimentos

O presente relatório é o culminar de uma etapa há muito desejada. O meu percurso académico foi repleto de desafios, empenho, perseverança e muita dedicação. Ao longo desta caminhada, tive a oportunidade de conhecer várias pessoas, entre colegas e professores e com todos aprender sempre mais, consolidando o conhecimento e o enriquecimento pessoal.

Chegar ao final deste objetivo: concluir o relatório de investigação e assim finalizar o mestrado, é sem dúvida uma vitória! Os agradecimentos a todos os que me apoiaram são o corolário “natural” de todo este processo.

Aos meus pais, irmão e avós, pelo carinho, paciência e incentivo. Obrigada por acreditarem sempre em mim, pelos ensinamentos para a vida, pelo apoio nos momentos difíceis e a motivação para superar os obstáculos!

À minha orientadora, Professora Doutora Fátima Mendes, pela disponibilidade e apoio prestados desde o início desta investigação, pelas palavras de incentivo que me fizeram superar as dificuldades que foram surgindo e pelas críticas pertinentes, que me fizeram sempre melhorar.

À professora cooperante, por ter permitido a realização deste estudo e aos alunos do 3.º ano de escolaridade, pela vossa participação e entrega durante as minhas intervenções.

Às minhas colegas de curso e amigas, Mónica Condinho, Vilma Roldão, Marta Branco, Andreia Luz e Cristiana Oliveira, pela vossa amizade! Obrigada por caminharem a meu lado, mesmo que seja à distância! Obrigada também por me proporcionarem momentos de descontração. À Andreia Santiago que me acompanhou no percurso académico, mas também pela amizade desde a infância. Obrigada por me fazeres rir em momentos de *stress* e por estarmos juntas nesta caminhada!

Às minhas afilhadas Bianca e Catarina, às “Catarinas” Marques e Farinha pela vossa amizade.

Às minhas professoras Gertrudes Matado, Lurdes Repolho, Helena Sousa e Fernanda António, por todo o ensinamento, apoio, incentivo e amizade.

À D. Margarida Silva pela compreensão, apoio e amizade de há muitos anos.

À Ângela Silva que mais recentemente passou a fazer parte do meu dia-a-dia e que muito me apoiou, ao ser flexível e compreensiva, sempre que necessário.

A todos, muito obrigada!

Resumo

O presente relatório de investigação integra a área da Matemática e tem como principal objetivo compreender o modo como o uso de tarefas com diferentes graus de dificuldade (tarefas paralelas) associadas à multiplicação e divisão numa turma de 3.º ano contribui para a aprendizagem destas operações. Como questões orientadoras foram definidas as seguintes: (i) ‘Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação?’; (ii) ‘Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à divisão, recorrendo ou não, à multiplicação?’ e (iii) ‘Que dificuldades manifestam os alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação e à divisão?”.

A fundamentação teórica inclui, essencialmente, os tópicos: a aprendizagem da multiplicação e da divisão e a sua progressão, as dificuldades sentidas associadas a estas operações, a relação entre as operações multiplicação e divisão, tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação e divisão, cálculo mental associado à multiplicação e à divisão, diferenciar no ensino de Matemática recorrendo a tarefas com diferentes níveis de dificuldades.

Relativamente à metodologia, este estudo segue uma abordagem qualitativa e está associado ao paradigma interpretativo. Na investigação participaram vinte e um alunos de uma turma de 3.º ano de escolaridade, tendo sido escolhidos dois deles para uma análise mais profunda das suas produções nas tarefas propostas. Para além da análise destas, foram analisadas as gravações vídeo das discussões coletivas, que complementam a observação participante realizada.

As conclusões deste estudo evidenciam que: (1) os alunos quando resolvem tanto tarefas de multiplicação como de divisão, recorrem maioritariamente ao uso de estratégias multiplicativas, (2) nas primeiras tarefas de multiplicação, recorrem também a estratégias aditivas, (3) a estratégia multiplicativa mais utilizada pelos alunos é o uso de um produto conhecido, (4) na última tarefa de divisão, há alunos que mostram compreender a relação entre multiplicação e divisão, (5) as principais dificuldades manifestadas pelos alunos relacionam-se com a interpretação dos enunciados e justificação dos raciocínios.

Embora o estudo tenha sido limitado no tempo, o recurso ao uso de tarefas com diferentes graus de dificuldade parece ter contribuído para a maior parte dos alunos da turma terem progredido na aprendizagem da multiplicação e divisão.

Palavras-chave: aprendizagem da multiplicação, aprendizagem da divisão, tarefas paralelas, diferenciação em Matemática

Abstract

This study on the field of Mathematics aims to understand the way parallel tasks of different degrees of difficulty, associated with multiplication and division in a 3rd year class contributes to their learning arithmetic operations.

The main questions of this study are: (i) "Which strategies are used by 3rd year students when they solve tasks with different degrees of difficulty associated with multiplication"?; (ii) "Which strategies are used by 3rd year students when they solve division tasks with different degrees of difficulty, using or not multiplication?" and (iii) "What are the difficulties, 3rd year students face, when they solve tasks with different degrees of difficulty associated to multiplication and division?".

The theoretical framework includes essentially: the learning process of multiplication and division and their progression, the difficulties faced by the students, how multiplication and division calculi are related, strategies that help their learning process, mental calculus associated to these calculation operations, differentiating in the mathematics teaching using tasks of different degrees of difficulty.

Regarding the methodology, this study follows qualitative and interpretative approaches. All 21 students participated in the classroom intervention and two of them were selected for a deepest analysis of their resolutions. I also analysed video recordings of the classes' discussions, which complemented my own observations.

The final results of this project suggest that: (1) when students solve multiplication and division tasks, they use mainly multiplication strategies, (2) in their first multiplication strategies they also used addition strategies, (3) the most used multiplication strategy is the use of a known product, (4) in their last division task, there are students showing their understanding about the relation between multiplication and division, (5) their main difficulties are related to the interpretation of the question and the justification of their thoughts.

Although this study has its duration as a limitation, the use of tasks of different degrees of difficulty seems to have contributed for the learning of multiplication and division and its progression for the most part of the students.

Keywords: multiplication learning, division learning, parallel strategies, differentiation in Mathematics

Índice Geral

Índice de Tabelas

Índice de figuras

Índice de gráficos

Capítulo 1

Introdução

O presente capítulo engloba a apresentação do tema do projeto de investigação, bem como as motivações que conduziram ao estudo do mesmo. Além disso, apresento a pertinência do estudo, os objetivos e as questões de estudo realizado numa turma de 3.º ano de escolaridade. Neste capítulo, também é descrita a estrutura geral do projeto de investigação.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

A escolha do tema do meu projeto de investigação surge por considerar que o ensino da Matemática pode, em certas circunstâncias, constituir uma tarefa complexa para o docente. Como futura educadora e professora do 1.º ciclo do Ensino Básico, considero ser extremamente importante que o docente proponha aos alunos diferentes tipos de tarefas que visem desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas, tendo em conta os seus conhecimentos diversificados.

Quando se propõem tarefas aos alunos é fundamental que, após a sua resolução, lhes seja dada a oportunidade de explicarem o seu pensamento, para que desenvolvam o seu raciocínio e progridam na aprendizagem. Por isso, no final de cada tarefa, no âmbito de discussões coletivas, os alunos devem ser convidados a apresentar o modo como resolveram o problema, justificando os seus raciocínios. Desta forma, estou a contribuir para que os alunos valorizem "do mesmo modo a qualidade da explicação e a solução final" (NCTM, 2017, p. 49), ou seja, mais do que destacar a solução de um problema é essencial explicitar o modo como este foi resolvido e comunicá-lo aos seus colegas e ao professor.

Considerando o ano de escolaridade em que desenvolvi o meu projeto, 3.º ano, foquei-me em problemas associados às operações multiplicação e divisão. Assim, selecionei problemas relacionados com estas operações, em que os alunos pudessem recorrer a várias estratégias e representações para a sua resolução, de forma que chegassem a uma solução e compreendessem o que estavam a resolver, explicando como chegaram ao seu raciocínio.

A opção de trabalhar em simultâneo as operações multiplicação e divisão é suportada pelo NCTM (2007) que refere, numa das suas normas relativas ao Número e Operações para os anos 3-5, a compreensão sobre as operações e o modo como se articulam entre si, realçando como essencial "identificar e usar as relações entre as operações, tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas" (p. 148)

Considerando o conhecimento que já tenho da turma, através de informações da professora titular e da minha intervenção nas primeiras semanas de estágio, optei por recorrer a tarefas paralelas, ou seja, com diferentes graus de dificuldade. De facto, percebi que na turma há alunos com níveis muito diferentes no que respeita aos conhecimentos e à aprendizagem das operações multiplicação e divisão. Assim, serão apresentadas tarefas paralelas, com diferentes graus de dificuldade, para desta forma "ir ao encontro das necessidades de cada aluno, de modo a apoiar a construção do seu conhecimento" (Mendes, Brocardo, Duarte, Boavida, & Delgado, 2017, p. 4). Pretende-se, assim, de acordo com os autores citados, "trabalhar a mesma ideia-chave" (idem), a partir de tarefas diferentes. Assim, com o apoio da professora titular foram formados dois grupos um constituído pelos alunos com mais dificuldades e outro formado pelos alunos com menos dificuldades.

Depois de se identificarem diferentes ritmos e níveis de aprendizagem entre os alunos da turma, será importante delinear estratégias focadas nas necessidades de cada um e "simultaneamente, proporcionar-lhes o apoio adequado para que ultrapassem dificuldades que experienciam enquanto aprendem. A exploração destas tarefas será feita tendo como ponto de partida ideias-chave que são "ideias matemáticas fundamentais que ligam entre si ideias mais específicas. Estas ideias podem ser usadas em muitos níveis de ensino, embora possa haver diferenças de complexidade na sua aplicação" (Mendes et al., 2017, p. 1).

Seguindo esta linha de pensamento, o docente ao partir de ideias-chave em Matemática para planificar o seu ensino e recorrendo a tarefas paralelas, facilitará a diferenciação pedagógica na sala de aula. É fundamental que as tarefas selecionadas incentivem o aluno a resolvê-las, bem como "inventarie várias formas de representar o processo de resolução destas tarefas" (Mendes et al., 2017, p. 2).

As tarefas propostas devem despertar o interesse dos alunos, recorrendo ao conhecimento implícito que estes já detêm. Deste modo, o professor pode criar algum paralelismo com a vida real, pois só ligando "a Matemática à vida real permite realçar a sua importância no desenvolvimento da sociedade atual, quer do ponto de vista científico, quer social." (Boavida et al., 2008, p. 38). Além disso, as tarefas que proponho permitem um alargamento do conhecimento sobre as operações em estudo – multiplicação e divisão

– possibilitando, nomeadamente, o “desenvolvimento de capacidades de visualização de esquemas de disposição retangular em relação à multiplicação de fatores” (Santos et al, 2005, p. 6).

1.2. Objetivos e questões de estudo

Considerando o que foi exposto anteriormente, formulei o seguinte objetivo – *Compreender o modo como o uso de tarefas com diferentes graus de dificuldade (tarefas paralelas) associadas à multiplicação e divisão numa turma de 3.º ano contribui para a aprendizagem destas operações* – e, associadas a este objetivo, formulei três questões que irão orientar a minha investigação:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação?
- Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à divisão, recorrendo ou não, à multiplicação?
- Que dificuldades manifestam os alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação e à divisão?

Estas questões, bem como o objetivo descrito, estão associadas à ideia de que numa sala de aula o professor pode trabalhar a mesma ideia-chave, propondo tarefas diferenciadas de acordo com os diferentes níveis de aprendizagem dos alunos. O entendimento de tarefas paralelas usado neste projeto é o mesmo de Mendes et al. (2017), ou seja, tarefas com diferentes graus de dificuldade (uma vez que nem todos os alunos aprendem do mesmo modo e ao mesmo ritmo), trabalhando a mesma ideia-chave. Os mesmos autores também defendem que, para que os alunos ultrapassem as dificuldades que experienciam, o professor deve proporcionar-lhes apoio adequado.

1.3. Organização do relatório

O presente relatório encontra-se subdividido em seis capítulos. Um primeiro capítulo foca-se na apresentação do tema de estudo, da sua pertinência e das minhas motivações para a sua escolha. Para além destes aspetos, destaco o objetivo principal desta investigação, bem como as questões orientadoras associadas.

O segundo capítulo é referente à revisão da literatura, encontrando-se subdividido em cinco partes. Uma primeira parte referente à aprendizagem da multiplicação, bem como a sua progressão e as dificuldades inerentes. Uma segunda parte referente à aprendizagem da divisão e a sua progressão, a relação entre a multiplicação e a divisão e as dificuldades inerentes a esta última. Seguidamente, a terceira parte foca-se nas tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação e da divisão. Uma quarta parte referente ao cálculo mental associado à multiplicação e à divisão. E por fim, uma quinta parte referente à diferenciação pedagógica, em especial na Matemática.

O terceiro capítulo foca-se na descrição, bem como na justificação da metodologia adotada nesta investigação. Para além destes aspetos, apresento brevemente o contexto onde se realizou a minha investigação, os participantes deste estudo e abordo as técnicas de recolha de dados, bem como o processo de análise dos dados recolhidos.

No quarto capítulo é abordada a proposta pedagógica que suporta a investigação que realizei. Nesta secção apresento a calendarização da exploração de cada tarefa e como foi apresentada a sequência de tarefas propostas. Descrevo os objetivos e conteúdos correspondentes de cada tarefa, tendo como referência o Programa e Metas Curriculares de Matemático para o Ensino Básico (ME, 2013). Para além disto, explico como antecipei a exploração das tarefas, como as introduzi, como as explorei e como decorreram as discussões coletivas.

O quinto capítulo diz respeito à análise dos dados recolhidos ao longo da minha intervenção. Esta análise tem como base as resoluções dos alunos selecionados, bem como as discussões coletivas, gravadas em formato áudio e vídeo. Nesta análise foco-me nas estratégias apresentadas pelos alunos e nas dificuldades manifestadas pelos mesmos.

Por fim, o sexto capítulo refere-se às conclusões do estudo. Inicialmente elaboro uma síntese do estudo realizado, tendo como foco o objetivo do estudo e as questões orientadoras. Seguidamente, apresento as conclusões de forma a responder às questões orientadoras, fazendo 'uma ponte' com o quadro teórico de referência e tendo como base a análise dos dados. Este capítulo termina com uma reflexão final sobre todo o processo relativo ao estudo em si, bem como ao processo e realização deste relatório.

Capítulo 2

Quadro Teórico de Referência

O presente capítulo integra a revisão da literatura com o intuito de aprofundar teoricamente o tema que orienta a presente investigação. Este capítulo está organizado em cinco partes distintas. Numa primeira parte abordo a aprendizagem da multiplicação e a sua progressão, bem como as dificuldades sentidas pelos alunos ao longo da mesma. Na segunda parte, apresento a aprendizagem da divisão e a sua progressão e também a sua relação com a multiplicação e as dificuldades ao longo da mesma. A terceira parte diz respeito às tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação e divisão. Na quarta parte caracterizo o cálculo mental associado à multiplicação e à divisão, mais especificamente, o seu significado e desenvolvimento, estratégias associadas tanto à multiplicação como à divisão e estratégias globais da multiplicação e divisão. Por fim, discuto a diferenciação pedagógica, em geral e, seguidamente, em Matemática.

2.1. A aprendizagem da multiplicação

2.1.1. A aprendizagem da multiplicação e a sua progressão

No que respeita à aprendizagem da multiplicação nos três primeiros anos (K-2), o NCTM (2007) refere que em sala de aula, numa fase inicial é importante trabalhar o sentido aditivo da multiplicação através da repetição de grupos e o sentido combinatório. A partir do 3.º e até ao 5.º ano promove-se “a compreensão aprofundada desta operação utilizando números cada vez maiores e alargando progressivamente o universo numérico que passará a incluir os números racionais não negativos na sua representação decimal” (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013, p. 134).

Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) consideram que para os alunos compreenderem os vários significados associados à multiplicação, devem resolver problemas que desenvolvam o seu raciocínio matemático relacionado com esta operação, ou seja, devem-lhes ser propostas tarefas que incentivem diferentes formas de pensar. Para que isto aconteça deve haver em sala de aula um ambiente propício à aprendizagem e ao “desenvolvimento de ideias e procedimentos associados” (p. 134) a um determinado problema multiplicativo. As mesmas autoras referem ainda o modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992), um modelo considerado de referência para o desenvolvimento do sentido de número e “relevante para perspetivar quais os aspetos fundamentais a considerar na aprendizagem da multiplicação” (p. 134). Este modelo apresenta três áreas distintas:

(a) Conhecimento e destreza com os números – Segundo McIntosh, Reys e Reys (1992) esta área engloba quatro aspetos específicos: (i) sentido de regularidade dos números, (ii) múltiplas representações dos números, (iii) sentido das grandezas dos números, relativas e absolutas dos números e (iv) sistemas de valores de referência.

O primeiro ponto relaciona-se com o sistema hindu-árabe, é importante que se compreenda e se perceba que características estão associadas a este sistema, bem como se encontra organizado (Cebola, 2002). Cebola (2002) dá como exemplo quando um aluno “aprende a contar a partir do 20, começa a identificar, oralmente e por escrito, padrões que são inerentes ao sistema de numeração. Estes padrões, uma vez identificados, proporcionam um suporte importante para que o processo de contagem continue e se generalize” (idem, p. 226).

O segundo ponto relaciona-se com o reconhecimento de que um número pode ser apresentado a partir de diferentes formas, assim consoante a situação pode ser pensado e manipulado de modos diferentes. É pertinente compreender que dado um determinado problema há representações mais úteis, por exemplo “reconhecer que 2+2+2+2 é o mesmo do que 4×2 é uma relação conceptual importante entre a adição e a multiplicação” (idem, p. 226). Neste ponto, inclui-se a decomposição/recomposição do número, ou seja, o modo de representação do número, a partir de diferentes formas, sendo todas elas equivalentes entre si, facilitando assim a “operação com os números recompostos” (idem, p. 226). Por fim, este aspeto engloba também a comparação com um número de referência, ou seja, o uso de uma “marca no sistema de numeração que é normalmente útil para efetuar comparações” (idem, p. 227).

O terceiro ponto relaciona-se com o reconhecimento do valor relativo de um número/quantidade relativa a outro número ou quantidade. Um exemplo dado por Cebola (2002) é perguntar a um aluno do “3.º ano do ensino básico, se já viveu mais, ou menos, do que 1000 dias, dá-lhe uma oportunidade de pensar acerca de 1000 num contexto pessoal e ajuda-o a entender melhor o valor de 1000 noutros contextos” (idem, p. 227).

O último e quarto ponto engloba o uso de referências de forma a avaliar-se uma resposta ou arredondar um número, facilitando assim o cálculo mental. Por exemplo, “reconhecer que a soma de dois números com dois dígitos é inferior a 200, que 0,98 está próximo de 1 e que $\frac{4}{9}$ é ligeiramente inferior a um meio” (idem, p. 227).

(b) **Conhecimento e destreza com as operações** – Segundo McIntosh, Reys e Reys esta área engloba três pontos específicos: (i) compreensão do efeito das operações, (ii) compreensão das propriedades matemáticas e (iii) compreensão da relação entre operações.

O primeiro ponto engloba um conhecimento do que acontece a diferentes números, inteiros ou não inteiros, quando estão envolvidos nas diversas operações.

Relativamente à compreensão das propriedades matemáticas, estas estão associadas ao sentido do número, e é usando-as que alunos resolvem as operações aritméticas/cálculos.

Por fim, a compreensão da relação entre as operações permite ao aluno utilizar uma operação que lhe seja mais proveitosa, apesar de uma dada tarefa o induzir a realizar cálculos associados a uma operação específica (por exemplo, numa tarefa associada à multiplicação, o aluno pode utilizar cálculos associados à adição.

(c) **Aplicação do conhecimento e destreza com os números e operações em situações de cálculo** – Segundo os autores mencionados esta área engloba quatro pontos específicos: (i) compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários, (ii) consciencialização da existência de múltiplas estratégias, (iii) apetência para utilizar uma representação ou um métodos eficiente e (iv) sensibilidade para rever os dados e o resultado.

O primeiro ponto envolve a compreensão do contexto do problema, ou seja, evidencia a capacidade de compreender o contexto do problema, por vezes, indica qual a operação mais apropriada para a resolução do mesmo e, também que números poderão estar envolvidos.

O segundo ponto é referente ao reconhecimento de diferentes estratégias de resolução para uma mesma tarefa, de modo que se perceba que se a estratégia inicial “parece improdutiva, o formular e aplicar uma nova estratégia deve ser um caminho a seguir” (idem, p. 229).

O terceiro ponto engloba a consciência de que há estratégias ou ferramentas de cálculo que são mais eficientes do que outras. Cebola (2002) dá um exemplo da resposta de um aluno do 2.º ano de escolaridade perante a pergunta "Quanto é 8+7?". O aluno não utilizará a estratégia de contagem de um a um e, poderá pensar em 7+7+1 ou 8+2+5, "baseado no conhecimento que já possui de 2 vezes 7 ser 14 e de 8+2=10, respetivamente" (Cebola, 2002, p. 229).

O último e quarto ponto relaciona-se que para se ter sentido de número é necessário "examinar a solução obtida à luz do problema original para determinar se a solução 'faz sentido'" (idem, p. 229).

A tabela seguinte resume o quadro de refrência relativo à análise do sentido de número proposto por McIntosh, Reys e Reys (1992).

Tabela 1 – Quadro de referência relativo à análise do sentido do número proposto por McIntosh et al. (1992)

Blocos	**Pontos específicos**
1 – Conhecimento e destreza com os números	– Sentido da regularidade dos números – Múltiplas representações dos números – Sentido das grandezas relativa e absoluta dos números – Sistemas de referência
2 – Conhecimento e destreza com as operações	– Compreensão do efeito das operações – Compreensão das propriedades matemáticas – Compreensão da relação entre operações
3 – Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	– Compreender a relação entre o contexto e o problema e os cálculos necessários – Consciencialização da existência de múltiplas estratégias – Apetência para utilizar uma representação ou um método eficiente – Sensibilidade para rever os dados e o resultado

No que respeita à aprendizagem da multiplicação é referido por Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) que é importante que o alunos passe de um pensamento aditivo para um multiplicativo. É essencial que o aluno aprenda a comparar os números com outros considerados de referência ou aproximados, como forma facilitadora do cálculo. Um exemplo dado pelas mesmas autoras é compreender que $5+5+5+5+5 = 4\times5$ ou 4×5 é o mesmo que 5×4, sendo que a partir de uma certa altura os alunos compreendem que adicionar o 5 quatro vezes corresponde a calcular 4×5.

Fosnot e Dolk (2001) referem a importância dos contextos das tarefas, de forma a proporcionarem o desenvolvimento da sua progressão na multiplicação (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011). Estas mesmos autores identificam grandes ideias ('big ideas') que se focam na evolução do raciocínio multiplicativo. As cinco ideias apresentadas são as seguintes:

(a) **compreensão de um grupo como unidade (unitizing) –** esta ideia relaciona-se com o facto de os alunos contarem grupos para além de objetos, contarem grupos utilizando números. Ao perceberem que podem contar um grupo de números sem utilizarem a contagem de um a um, os alunos estão a desenvolver uma capacidade matemática relacionada com a multiplicação. Por exemplo contar quatros grupos de seis, utilizando 4×6, permite chegar rapidamente ao resultado pretendido (Fosnot & Dolk, 2001).

(b) **propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração** – os alunos devem compreender a estrutura parte/todo e a sua relação. Por exemplo 9×5 pode ser resolvido adicionando 5×5 e 4×5 ou a partir de uma outra combinação de grupos de cinco. Neste caso o 'todo' são os nove grupos e as 'partes' são cinco grupos e quatro grupos (Fosnot & Dolk, 2001).

Assim, quando se realiza uma multiplicação através da decomposição de fatores, efetuando a adição ou subtração de produtos parciais, o produto final não se irá alterar. Esta é uma ideia muito importante na aprendizagem da multiplicação que deverá ser adquirida pelos alunos.

(c) **propriedade comutativa da multiplicação** – esta propriedade relaciona-se com a alteração dos fatores num produto sem que o resultado final se altere. Por exemplo, $3\times5=5\times3=15$ (Fosnot & Dolk, 2001).

(d) **propriedade associativa da multiplicação** – esta propriedade relaciona-se com o agrupamento de fatores na multiplicação, não implicando a alteração do produto final (Fosnot & Dolk, 2001). Por exemplo, $(2\times3) \times 5 = 2 \times (3\times5)$.

(e) **padrões de valor de posição associados à multiplicação por dez** – para além de a esta ideia estar associada à multiplicação por dez, também está associada à propriedade comutativa. Por exemplo, 7×10 corresponde a sete grupos de dez elementos. Porém, na multiplicação por dez é importante que os alunos compreendam que podem utilizar a propriedade comutativa. Assim, percebem que ao calcular 7×10 ou 10×7 obtém-se o mesmo produto. Deste modo, passa a haver dez grupos com 7 elementos (Fosnot & Dolk, 2001).

Segundo Brocardo, Delgado e Mendes (2005) a aprendizagem da multiplicação desenvolve-se seguindo três níveis: (i) cálculo por contagem, (ii) cálculo estruturado e (iii) cálculo formal.

Cálculo por contagem. Neste primeiro nível de cálculo multiplicativo, os alunos resolvem problemas de multiplicação, porém, recorrem a adições sucessivas. Por exemplo, quando os alunos recorrem a contagens de 2 em 2, 3 em 3 ou 8 em 8 ou efetuar adições sucessivas (Silva, 2015).

Cálculo estruturado. Neste segundo nível de cálculo os alunos estabelecem uma relação entre "uma mesma quantidade que se repete um determinado número de vezes" (Silva, 2015, p. 21). Por exemplo, se num problema houver uma imagem com 32 pacotes de sumo segundo uma disposição retangular, os alunos podem calcular 4×8 (4 colunas cada uma com 8 pacotes de sumo) ou 8×4 (8 filas cada uma com 4 pacotes de sumo).

Cálculo formal. No terceiro nível de cálculo, os alunos estabelecem diferenciadas relações numéricas, recorrendo "a fatores por si conhecidos e às propriedades das operações" (Silva, 2015, p. 21). Contudo, neste nível os alunos não recorrem a modelos de apoio ao cálculo. Por exemplo, para calcularem 5×29, os alunos podem recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição: $5\times29 = 5\times20 + 5\times9$ ou à propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração efetuando $5 \times (30-1) = 5\times30 - 5\times1$.

Desta forma, para que os alunos desenvolvam os diferentes níveis e, uma vez que os alunos não os atingem ao mesmo tempo, o professor deve apoiá-los, proporcionando momentos de aprendizagem diferenciados, para que estes desenvolvam o seu raciocínio e estratégias de cálculo associado à multiplicação (Brocardo, Delgado, & Mendes, 2005). Assim, são importantes as discussões coletivas em que os alunos partilham os seus raciocínios e estratégias e, uns com os outros, começam a perceber a vantagem de utilizar estratégias multiplicativas.

Seguindo esta linha de pensamento, Brocardo, Delgado e Mendes (2005) no seu estudo apresentam alguns exemplos de resoluções que evidenciam a progressão das propriedades da multiplicação, tais como o uso da **disposição retangular** – associada à propriedade comutativa, da **decomposição de um dos fatores para realizar um produto** – associada à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (quando um dos fatores é maior do que dez), da **decomposição decimal**, **uso de produtos parciais já calculados** (decompor um número recorrendo a dois números de referência). Por fim, é também realçada uma estratégia associada à disposição retangular – **ajustar e compensar**, relacionada com a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

2.1.2. Dificuldades sentidas na aprendizagem da multiplicação

Mendes (2012) menciona no estudo que realizou, que os alunos quando sentem dificuldades ao resolverem tarefas associadas à multiplicação recorrem "essencialmente à adição" (p. 414), uma vez que a multiplicação pode surgir numa fase inicial como "adição de parcelas iguais através de um modelo de conjuntos" (Palhares, 2004, p. 188).

Ao longo da aprendizagem da multiplicação, os alunos por vezes sentem dificuldades na interpretação dos enunciados, porque desconhecem o significado de algumas palavras ou expressões, o que pode dificultar a perceção do que é necessário para resolver o problema. Outra dificuldade sentida pelos alunos relaciona-se com a interpretação de imagens/figuras que acompanham certas tarefas, ou seja, no decifrar de que forma é que aquela imagem os irá ajudar a chegar a um resultado (Mendes, 2012). Segundo a mesma autora as dificuldades relacionadas com o contexto das tarefas focam-se na "compreensão semântica, [na] visualização espacial, [em] lidar com várias características aos mesmo tempo e [nos] contextos da divisão" (p. 504).

A mesma autora refere ainda uma outra dificuldade sentida pelos alunos, a dificuldade em lidar com a grandeza dos números. Estas surgem relacionadas tanto com a resolução de prolemas como com o cálculo de cadeias numéricas.

Assim, as dificuldades apresentadas pelos alunos ao longo da aprendizagem da multiplicação relacionam-se com "aspetos linguísticos e interpretativos e (…) relacionadas com a própria aprendizagem da Matemática" (Silva, 2015, p. 123).

2.2. A aprendizagem da divisão

2.2.1. A aprendizagem da divisão e a sua progressão

O *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), nas suas normas para os Números e Operações, indica que os alunos, desde o pré-escolar até ao 12.º ano (K-12), "devem compreender o significado das operações e o modo como elas se relacionam entre si, calcular com destreza e fazer estimativas plausíveis" (Mendes, 2013, p. 7). No que concerne à operação divisão, o NCTM identifica que as tarefas a propor na sala de aula devem incluir diferentes contextos de forma que promovam "a compreensão dos alunos das diversas situações associadas à divisão, realçando as que correspondem à partilha" (Mendes, 2013, p. 7).

A operação divisão é associada à multiplicação, uma vez que nesta última "são dados dois fatores em que se pretende conhecer o produto, enquanto que na divisão é conhecido o produto e um dos fatores [pretendendo-se] conhecer o outro fator" (Palhares, 2004, p. 193). Contudo, Ambrose et al. (citado por Mendes, 2013), referem que relativamente aos problemas de divisão os alunos não consideram estes muito diferentes dos problemas de multiplicação.

Autores como Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) aludem que "a aprendizagem da divisão deve ser feita em estreita relação com a aprendizagem da multiplicação" (p. 183). Seguindo esta linha de pensamento, as autoras referem que na resolução de problemas associados à divisão, os alunos utilizam os conhecimentos associados à operação multiplicação.

Mendes (2013) refere que a aprendizagem da divisão é "muitas vezes confundida com a mecanização das regras associadas ao algoritmo, não deixando espaço, na sala de aula, para o desenvolvimento de um trabalho com os alunos em torno da compreensão desta operação" (p. 6). É importante reconhecer a operação divisão e estabelecer uma relação com a multiplicação, desenvolvendo "uma teia de relações numéricas que permitam uma flexibilidade de cálculo, tendo implícitas as propriedades desta operação" (Santana, 2017, p. 11). Assim, é importante realçar que a aprendizagem desta operação ultrapassa a utilização do algoritmo tradicional.

Como já referido anteriormente, Fosnot e Dolk (2002) referem 'grandes ideias' também para a aprendizagem da divisão. De forma que os alunos progridam na aprendizagem da divisão, bem como em estratégias associadas à mesma, o professor deve focar-se na compreensão das relações parte/todo associadas à operação multiplicação (Fosnot & Dolk, 2002).

É de referir que nos problemas associados à divisão destacam-se dois sentidos: partilha e medida. O contexto de medida surge quando se tem uma quantidade de elementos "que vai ser organizada em grupos com um certo cardinal. O que se pretende saber é o número de grupos necessários para organizar a quantidade inicial" (Boavida, Delgado, Mendes, Brocardo, & Duarte, 2016, p. 52). As situações de partilha, segundo Boavida et al. (2016), surgem quando "se trata de repartir um conjunto de elementos por um certo número de conjuntos (a partição). O que se quer saber é o número de elementos que fica em cada conjunto" (p. 54).

Problemas associados a situações de partilha são por norma os que os professores escolhem para se iniciar a aprendizagem da divisão, uma vez que podem ser articulados com situações reais do quotidiano dos alunos. Porém, os alunos nas suas resoluções apresentam distribuições um a um, o que se torna uma estratégia ineficaz quando se trabalham problemas com números maiores (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). Contudo, devem propor-se, desde o início da aprendizagem, problemas de medida, uma vez que fazem surgir estratégias de resolução mais eficazes.

2.2.2. A relação entre as operações multiplicação e divisão

Mendes, Brocardo e Oliveira (2013) referem que os alunos devem experienciar contextos em que são apresentadas tarefas associadas à divisão que possam resolver "usando o conhecimento que já possuem sobre outras operações e, em particular, a multiplicação" (p. 142). É referido pelo NCTM, numa das suas normas relativas aos Números e Operações do 3.º ao 5.º ano, a importância da compreensão do sentido das operações aritméticas, como se relacionam entre si, indicando que é pertinente "identificar e usar as relações entre as operações tais como a divisão como inversa da multiplicação, para resolver problemas" (NCTM, 2007, p. 148).

Autores como Treffers e Buys (citados por Mendes, 2013) referem que a abordagem à divisão a partir da multiplicação fomenta o conhecimento já detido pelos alunos sobre a mesma, bem como o seu uso para "verificar resultados obtidos" (p. 8). Assim, é importante reconhecer a multiplicação como operação inversa da divisão. Os mesmos autores referem que, por vezes, no início da aprendizagem da divisão, a mesma pode ser explorada a partir de subtrações sucessivas. Contudo, a divisão deve ser explorada a partir do uso da multiplicação como a sua operação inversa.

Greer (citado por Mendes, 2013) refere que esta relação entre a divisão e a multiplicação, como operações inversas, está associado a uma “ideia mais geral de inversão que é fundamental, tanto a nível das estruturas matemáticas como das experiências físicas e sociais das pessoas” (p. 8). Na perspetiva de Verschaffel, Greer e Torbeyns (citado por Mendes, 2013) é importante

> “investir em sala de aula, ao nível da multiplicação e da divisão, em propostas que promovam o uso de procedimentos holísticos, de decomposição não apenas decimal, e de tentativa e erro. Para que isto seja possível, deve haver uma menor ênfase no trabalho com algoritmos e um maior realce para o trabalho associado às propriedades das operações e o uso de procedimentos de cálculo flexíveis”. (p. 12)

É de referir o modelo retangular como um impulsionador da aprendizagem da multiplicação e divisão, uma vez que, segundo Jacob e Mulligan (citados por Santana, 2017) este permite a percepção em simultâneo das três quantidades envolvidadas em contexto de multiplicação e divisão com números inteiros: “o todo, o número de grupos iguais e a quantidade de cada grupo” (p. 16). Para além disto, este modelo é um auxílio para a comprensão e coordenação das quantidades envolvidas no contexto, bem como “da relação entre a multiplicação e a divisão e na compreensão destas operações numa variedade de situações e representações” (p. 16).

2.2.3. Dificuldades na aprendizagem da divisão

Como refere Mendes (2012) os alunos quando resolvem problemas associados à divisão, por norma, não relacionam a mesma com a multiplicação, utilizando estratégias aditivas e subtrativas, “manifestando compreender os seus efeitos” (p. 414). No início da aprendizagem desta operação os alunos mostram mais dificuldades em tarefas que apresentam contextos de partilha do que nas que se focam em contextos de medida. Mendes (2013) refere que este aspeto se relaciona com estratégias “informais que os alunos começam por contruir na resolução de tarefas de divisão” (p. 7).

Como refere a mesma autora, em tarefas de medida os alunos começam a criar estratégias de contagem, aditivas ou subtrativas, dando ‘saltos’ correspondentes ao resultado que se pretende chegar, adicionando ou subtraindo o mesmo número. Contudo, em tarefas de partilha é necessário que o aluno descubra o total sabendo apenas um dos fatores – por exemplo, calcular quantos ovos se pode colocar numa caixa, sabendo que se tem 24 ovos, colocando-os em 4 caixas. Neste problema sabe-se o número de caixas, mas não quantos ovos cada caixa pode levar. Deste modo os alunos começam por contruir estratégias de tentativa e erro, uma vez que tendem a construir estratégias focadas no "número em cada grupo, mais do que os grupos em si e na sua relação com o todo" (Mendes, 2013, p. 7).

Mendes (2013) refere ainda que nas tarefas de partilha a maior dificuldade sentida pelos alunos encontra-se na "compreensão da correspondência um a um que lhe está associada" (p. 8). Neste tipo de situações, segundo Fosnot e Dolk (citados por Mendes, 2013), os alunos sentem uma maior dificuldade na compreensão da relação parte/todo, uma vez que têm de "considerar, em simultâneo, o número de grupos, o número em cada grupo e o todo" (p. 8). Assim para desenvolverem uma maior compreensão desta operação é importante que desenvolvam a relação entre contextos de divisão associados a tarefas de medida e partilha (Mendes, 2013).

2.3. Tarefas que promovem a aprendizagem da multiplicação e divisão

Ensinar Matemática pode, por vezes, constituir uma tarefa complexa para o docente. É deveras importante que este tenha a consciência que "a Educação Matemática em especial não se destina a formar [pessoas] matemáticas, mas sim pessoas que possuam uma cultura matemática que lhes permita aplicar a matemática nas suas atividades e na sua vida diária" (Matos & Serrazina, 1996, p. 23). Como tal, cabe ao professor proporcionar aos alunos experiências sensoriais que lhes permitam aplicar a matemática em contextos reais.

Deste modo, os alunos devem compreender a utilização dos números, em especial, perceberem que existem diferentes formas de estes serem utilizados e representados. No seguimento desta linha de pensamento, os alunos devem compreender e aprender que os números podem ser usados para

> "quantificar, para identificar locais, para identificar um objeto específico dentro de uma coleção, para mencionar objetos e medir. Além disso, a compreensão do valor de posição é crucial para o trabalho posterior com os números e cálculos" (NCTM, 1991, p. 48).

Assim, é pertinente proporcionar aos alunos experiências a partir da exploração de "números grandes", contudo não "lhes deve ser dado grande relevo antes de os numerais terem sido cuidadosamente associados a materiais concretos e de as crianças terem compreendido os conceitos principais" (NCTM, 1991, p. 49).

As tarefas propostas devem direcionar os alunos para aprendizagens ativas baseadas na descoberta. Bruner (citado por Ponte & Serrazina, 2000) refere que "(…) a aquisição do conhecimento faz-se a partir de problemas que se levantam, expectativas que se criam, hipóteses que se formulam e verificam, descobertas que se fazem" (p. 93).

O mesmo autor alude ainda para a necessidade da realização de investigações que impliquem observar, explorar e analisar novos dados, interligando-os com os conhecimentos anteriormente adquiridos. É fundamental também que o docente encontre propostas didáticas capazes de despertar a curiosidade e interesse dos seus alunos.

É pertinente referir que se devem apresentar problemas que possam ser resolvidos recorrendo a diferentes estratégias e justificações. Quando se propõem tarefas aos alunos é fundamental que, após a sua resolução, lhes seja dada a oportunidade de explicarem o seu pensamento, para que desenvolvam o seu raciocínio. Por isso, no final de cada tarefa, no âmbito de discussões coletivas, os alunos devem ser convidados a apresentar o modo como resolveram o problema, justificando os seus raciocínios. Desta forma, estaremos a contribuir para que os alunos valorizem "do mesmo modo a qualidade da explicação e a solução final" (NCTM, 2017, p. 49), ou seja, mais do que destacar a solução de um problema é essencial explicitar o modo como este foi resolvido e é comunicado pelo aluno aos seus colegas e ao professor.

Seguindo esta linha de pensamento, é importante referir a pertinência das discussões coletivas, uma forma de as estratégias da resolução serem partilhadas e discutidas (sistematizadas) (Ponte, 2005).

Segundo Stein et al. (citado por Mendes, Oliveira, & Brocardo, 2011) as tarefas propostas em sala de aula têm exigências cognitivas diferentes, "de acordo com o tipo de nível de pensamento que suscitam: memorização, procedimentos sem e com conexões, e fazer matemática" (p. 238). Assim, as tarefas com conexões promovem a aprendizagem dos processos e das representações, bem como a compreensão das ideias e conceitos matemáticos (Mendes, Oliveira, & Brocardo, 2011).

Reys (citado por Mendes, Oliveira, & Brocardo, 2011) indica que as tarefas centradas no processo de aprendizagem da multiplicação, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, podem caracterizar-se através de cinco aspetos, tais como:

> "(i) encorajar os alunos a pensar sobre o que vão fazer e partilhá-lo com os colegas;
> (ii) promover a criatividade, a investigação e o uso de estratégias diversificadas;
> (iii) auxiliá-los a decidir o tipo de cálculo apropriado a cada situação;
> (iv) ajudá-los a compreender as regularidades da Matemática e as relações entre esta e o mundo real;

> (v) contribuir para uma visão dinâmica e desafiante da Matemática através da descoberta de relações.” (p. 239)

Autores como Fraivillig (2001) e Reys (1994) (citado por Mendes, Oliveira, & Brocardo, 2011) referem a importância da exploração das tarefas associadas à multiplicação em contextos adequados, uma vez que a exploração, em particular da multiplicação, em contexto propícios à aprendizagem faz “emergir aspetos cruciais desta operação e do cálculo multiplicativo” (p. 239).

Deste modo, segundo Fosnost e Dolk (citado por Mendes, Oliveira, & Brocardo, 2011) referem que a seleção dos contexto devem conter três componentes muito importantes: “(i) permitir o uso de modelos, (ii) fazer ‘sentido’ para os alunos e (iii) criar surpresa e suscitar questões” (p. 239).

O primeiro aspeto foca-se no sentido em que as tarefas devem incluir imagem e/ou situações que suscitem o uso de um modelo. O segundo aspeto incorpora o facto de as tarefas estarem associadas a situações do quotidiano ou imaginárias de forma a que os alunos “consigam lidar, analisar a razoabilididade do que fazem e dos resultados” (p. 239). Para além disto este segundo aspeto foca-se em dar ‘sentido’ à construção de estruras e relações, ou seja, de forma a ajudar os alunos a chegarem a uma determinada estratégia de resolução (na operação multiplicação, o uso do modelo retangular é muito frequente). Por fim, o último aspeto foca-se em tornar as tarefas desafiantes e estimulantes para os alunos, de forma a que sintam “vontade de explicar e de encontrar respostas a questões como ‘*Porque é assim?’, ‘Será que é?’, ‘O que acontece se?’*” (p. 240). É de referir que outro aspeto referente ao contexto das tarefas está associado a dois aspetos “(i) progressão em termos de grandeza e (ii) as relações numéricas que poderiam ser estabelecidas entre elas” (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013, p. 142).

Outro aspeto pertinente na escolha das tarefas propostas recai na escolha dos números envolvidos. Segundo Mendes (2012) os números envolvidos devem ser números de referência, que ajudem os alunos a chegar a um resultado, manipulando-os de forma a escolherem a melhor estratégia para resolverem a tarefa.

2.4. Cálculo mental associado à multiplicação e à divisão

2.4.1. Significado e desenvolvimento

Na aprendizagem da Matemática o cálculo surge como uma necessidade de “fazer ou saber algo, e não por si mesmo” (NCTM, 1991, p. 114), uma vez que os alunos devem compreender o significado das operações. É importante que desenvolvam os seus próprios algoritmos, discutindo-os, comparando-os e avaliando-os com os colegas e o professor (idem). Deste modo, o docente deve proporcionar experiências em sala de aula, em que se estimule o cálculo mental, de forma a que os alunos alarguem a sua compreensão dos números.

Segundo Buys (citado por Bocardo et al., 2008) o cálculo mental possui três características distintas:

(i) “opera-se sobre os números e não sobre os dígitos

(ii) são utilizadas relações numéricas e propriedades das operações

(iii) apesar de existir um cálculo de cabeça, o registo por ser efetuado com recurso a registos em papel” (p. 106).

Porém, alguns autores, nos primórdios desta caracterização de cálculo mental, como por exemplo Sowder (1988) define cálculo mental como “o processo de efetuar cálculos aritméticos sem ajuda de meios externos” (p. 182), ou seja, o cálculo mental estava associado ao uso de registos.

O cálculo mental mobiliza estratégias, as quais permitem resolver rápida e eficazmente um determinado cálculo que se relacionam com as propriedades das operações aritméticas, bem como com as relações entre os números, uma vez que segundo Mendes (2012) o cálculo mental é considerado ‘algo’ que é pensado e não algo memorizado ou mecanizado. No mesmo sentido, Thompson (1999) refere que este tipo de estratégias mentais são “aplicações de factos numéricos conhecidos ou rapidamente calculados em combinação com propriedades específicas do sistema numérico para um cálculo seja resposta não é conhecida” (p. 2).

Anghileri (citado por Mendes, 2012) refere que o cálculo mental, por vezes, requer o uso de papel, como auxílio do que se está a pensar, um auxílio à memória de curto prazo, não sendo, no entanto, confundido com o cálculo escrito. Estas estratégias de cálculo mental devem “ser interpretadas como sendo [cálculos] ‘com a cabeça’ e não apenas ‘na cabeça’” (p. 186).

Segundo Buys (citado por Mendes, 2012), a aritmética mental pode assumir três formas elementares de cálculo mental distintas: (i) cálculo em linha, (ii) cálculo suportado pela decomposição decimal e (iii) cálculo baseado em estratégias variadas. No primeiro tipo de cálculo, os números são encarados como se se encontrassem numa linha numérica, e operando com estes efetuam-se movimentos em linha. Seguidamente, no cálculo suportado pela decomposição decimal, os números estão relacionados com uma estrutura decimal, tirando partido das decomposições decimais. Por último, o cálculo baseado em estratégias variadas, está relacionado com a seleção das propriedades aritméticas apropriadas. É de referir, que o uso do cálculo mental relaciona-se com os conhecimentos sobre os números (relações numéricas e operações aritméticas) que os alunos detêm (Mendes, 2012).

No Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013), é mencionado o cálculo mental, referindo que é

> "fundamental que os alunos adquiram durante [os primeiros anos de escolaridade] fluência de cálculo e destreza na aplicação dos quatro algoritmos, próprios do sistema decimal, associados a estas operações. Note-se que esta fluência não pode ser conseguida sem uma sólida proficiência no cálculo mental. Os professores são, pois, fortemente encorajados a trabalhar com os seus alunos essa capacidade, propondo as atividades que consideram convenientes e apropriadas a esse efeito". (p. 6)

Em sala de aula devem ser proporcionados momentos de realização de tarefas relacionadas com o cálculo mental, em que os alunos se encontrem perante situações de exploração de diferentes modos de raciocinar para chegar a um resultado. Assim, uma discussão coletiva produtiva inclui a partilha de raciocínios, para isso devem propor-se tarefas aos alunos que lhes permitam a construção de estratégias que possibilitem o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, tanto durante a sua resolução como nos momentos de discussão coletiva em que estas resoluções são partilhadas. Segundo Hartnett (2007), em situações de discussões coletivas, os alunos têm a oportunidade de partilhar com os restantes colegas e com o professor o seu raciocínio matemático perante um determinado enunciado de uma tarefa.

2.4.2. Estratégias de multiplicação

As estratégias "incorporam importantes estruturas mentais e ações matemáticas" entre elas o uso de desenho de diagramas ou de palavras para mostrar e explicar, por exemplo, o significado da multiplicação (NCTM, 2017). Relativamente a esta operação aritmética, estão associadas diferentes estratégias, definidas por Baek (2006), entre elas:

- **modelação direta** – estratégia utilizada quando os alunos modelam grupos a partir de material manipulável ou de desenhos (Baek, 2006);
- **adição repetida** – estratégia associada à adição sucessiva de um mesmo número (5+5+5+5). Este tipo de cálculo é apresentado horizontalmente (Baek, 2006);

- **uso de dobros** – estratégia associada à composição do multiplicador através de dobros sucessivos do multiplicando. Nesta estratégia podem ser utilizadas as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição (Ambrose, Baek, & Carpenter, 2003);
- **estratégias de partição de números** – estratégia facilitadora do cálculo, ou seja, os alunos podem utilizar esta estratégia efetuando a partição no multiplicador, no multiplicando ou em ambos. Os alunos podem utilizar esta estratégia a partir de números não múltiplos ou de múltiplos de dez (Baek, 2006);
- **estratégias de compensação** – estratégias que se relacionam com o ajustar dos números a partir das suas características. Esta estratégia pode ser utilizada no multiplicador, no multiplicando ou em ambos (Baek, 2006).

Segundo Preston e Garner (2003) as representações apresentadas pelos alunos são ferramentas vitais “para registar, analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, problemas e ideias” (p. 39), ou seja, são consideradas ‘veículos’ para a aprendizagem e comunicação, apoiando os alunos de diferentes maneiras. Além disso poderão ser utilizadas de diferentes formas, segundo Friedlander e Tavach (citado por Preston & Garner, 2003) é importante “permitir aos alunos usar combinações de representações de forma a adquirir mais informação do que com apenas uma representação” (p. 39).

No que concerne a esta operação aritmética, a sua compreensão evolui na medida em que os alunos compreendem as conexões exequíveis que podem ser estabelecidas, por exemplo no caso da adição e subtração (Silva, 2015). Assim, os alunos quando usam estratégias matemáticas tendem em usar diversas formas de representação dando sentido aos números e à compreensão da matemática. Para além disto, cada aluno escolhe de que forma se sente mais seguro, utilizando a estratégia como uma ferramenta na resolução de um problema. O docente deve apresentar formas diferentes de representação que podem ser úteis para aprendizagem e compreensão matemática dos alunos, pedindo que desta forma, quando resolvem um problema utilizem desenhos ou utilizem outro suporte visual de forma a que expliquem e justifiquem o seu raciocínio (NCTM, 2017).

Seguindo Beishuizen (1997) os alunos utilizam estratégias como “uma escolha das opções relacionadas com a estrutura do problema”, uma vez que os procedimentos relacionam-se com a “execução de passos de cálculo” (p. 127). Perante um determinado problema, as estratégias de cálculo correspondem ao modo como os alunos pensaram, como ‘olharam’ para o enunciado, mostrando o seu entender, podendo recorrer a estratégias de contagem, aditivas, subtrativas e multiplicativas (Silva, 2015).

Existem diferentes estratégias associadas à resolução de problemas de multiplicação. Apresento uma análise comparativa das principais caracterizações dos procedimentos associados à multiplicação (adaptado de Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013).

Tabela 2 – Análise comparativa das categorizações dos procedimentos associados à multiplicação (adaptado de Mendes, Brocardo, & Oliveira 2013)

<table>
<tr><th rowspan="2">Autores</th><th colspan="2">Baek</th><th colspan="2" rowspan="2">Ambrose, Baek e Carpenter (2003)</th><th rowspan="2">Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)</th><th rowspan="2">Hartnett (2007)</th><th colspan="2" rowspan="2">Foxman e Beishuizen (2002)</th></tr>
<tr><th>(1998)</th><th>(2006)</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Categorias</td><td colspan="2">Modelação direta</td><td colspan="2">Modelação direta</td><td>Estratégias de contagem</td><td>Contar para a frente e para trás</td><td rowspan="3">Número complexo</td><td rowspan="6">Arredondar, multiplicar e compensar</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td>Uso de factos básicos</td><td></td></tr>
<tr><td>Número completo</td><td>Adição repetida
Uso de dobros</td><td>Uso de adições e de dobros</td><td>Adição de dobros
Uso complexo de dobros
Construção a partir de outros factores</td><td rowspan="2">Estratégias holísticas</td><td>Usar dobros e/ ou metades</td></tr>
<tr><td colspan="2">Compensação</td><td></td><td></td><td>Ajustar e compensar</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Partição de números</td><td rowspan="2">Algoritmos inventados usando o dez</td><td>Partição do multiplicador em dezenas e unidades</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para esquerda</td><td>Usar partições de números</td><td rowspan="2">Decomposição</td></tr>
<tr><td>Partição do multiplicador e do multiplicando</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita</td><td>Usar o valor de posição</td></tr>
</table>

Também Verschaffel et al. (2007) organizam por categorias, como apresentadas na tabela, as estratégias associadas à multiplicação. As categorias dividem-se em: modelação direta, número completo, partição de números e compensação.

De uma forma geral, a partir de uma breve análise da tabela distinguem-se dois grupos distintos de estratégias, um primeiro relacionado com as estratégias que necessitam do uso de cálculos em que os números são considerados como um todo, “tirando partido das suas características e das relações numéricas que podem ser estabelecidas” (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013, p. 136); e um segundo grupo associado a decomposições, tanto decimais como não decimais, “de um dos fatores envolvidos” (idem, p. 136).

2.4.3. Estratégias de divisão

O professor deve proporcionar um ambiente propício à resolução de tarefas, de forma que os alunos se sintam confortáveis, encorajando-os na construção das suas próprias estratégias. Ambrose et al. (citado por Mendes, 2013) referem quatro categorias de procedimentos associados à divisão: trabalhar com um grupo de cada vez, não decompor o dividendo, decompor o divindendo e procedimentos de construção. Os dois primeiros procedimentos são utilizados, principalmente, em problemas que envolvem a operação divisão por medida, uma vez que, na divisão por partilha, não se conhece o número que se adiciona ou subtrai sucessivamente (Mendes, 2013).

Trabalhar com um grupo de cada vez. Esta estratégia está associada a subtrações sucessivas do divisor, ou seja, do número mais pequeno, a partir do número maior, ou recorrendo à adição sucessiva do número mais pequeno até se obter ou se aproximar do número maior. Também se relaciona com o procedimento distributivo. Um exemplo, dado por Mendes (2013), é o cálculo 228÷12 (partilha de 228 *smarties* por 12 crianças), em que a aluna, distribui 10, a seguir cinco, depois dois (duas vezes) até se esgotarem os *smarties*. (Ambrose et al., 2003, citado por Mendes, 2013).

Não decompor o dividendo. As estratégias envolvidas nesta categoria são mais abstratas e mais avançadas do que as anteriores. Porém, não envolvem diretamente a decomposição do dividendo, relacionando-se com a operação subtração ligada à estrutura decimal e ao uso de múltiplos (Mendes, 2013).

Decompor o dividendo. A esta categoria está associada a decomposição do dividendo, por exemplo, decompor o número em centenas, dezenas e unidades e, para além disso, está associada a divisões parciais. Este tipo de procedimento é utilizado pelos alunos em problemas que envolvem divisão por medida e partilha (idem). Para além disso, segundo Ambrose et al. (citado por Mendes, 2013), o uso deste tipo de procedimento “evidencia compreensão, por parte dos alunos, da divisão e das suas propriedades” (p. 10).

Procedimentos de construção. Tal como a categoria anterior, os procedimentos utilizados pelos alunos são usados em problemas em contexto de divisão por partilha. Um exemplo mencionado por Mendes (2013) é a resolução de um aluno que teria de realizar a divisão 544÷17, este parte de 170 (10×7), adicionando sucessivamente 170 até ser exequível, ou seja, até perfazer o número mais próximo de 544 (chegando ao 510). Seguidamente adiciona 34 – (2×17) chegando ao total de 544. O aluno chega ao quociente 32, adicionando 10+10+10+2 (idem).

Uma vez que existem diferentes estratégias associadas à resolução de problemas de divisão, apresento uma análise comparativa das principais caracterizações dos procedimentos associados à divisão (adaptado de Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013).

Tabela 3 – Análise comparativa das categorizações dos procedimentos associados à divisão (adaptado de Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2013)

<table>
<tr><td>Autores</td><td>Ambrose, Baek e Carpenter (2003)</td><td>Heirdsfield, Cooper, Mulligan e Irons (1999)</td><td>Hartnett (2007)</td><td colspan="2">Foxman e Beishuizen (2002)</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Categorias</td><td>Trabalhar com um grupo de cada vez</td><td>Estratégias de contagem</td><td>Contar para a frente e para trás</td><td rowspan="4">Número complexo</td><td rowspan="7">Arredondar, multiplicar e compensar</td></tr>
<tr><td></td><td>Uso de factos básicos</td><td></td></tr>
<tr><td>Não decompor o dividendo</td><td rowspan="3">Estratégias holísticas</td><td>Usar dobros e/ou metades</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Estratégias de construção</td><td>Usar o valor de posição</td></tr>
<tr><td>Ajusta e compensar</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decompor o dividendo</td><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da direita para esquerda</td><td rowspan="2">Usar partições de números</td><td rowspan="2">Decomposição</td></tr>
<tr><td>Decompor os números segundo o valor de posição e calcular da esquerda para a direita</td></tr>
</table>

2.4.4. Estratégias globais de multiplicação e divisão

Heirdsfield et al. (citados por Mendes et al., 2008) sugerem cinco categorias utilizadas em estratégias dos alunos associadas a problemas de multiplicação e divisão: “procedimento de contagem, uso de fatores básicos, decomposição dos números segundo o valor de posição e cálculo da direita para a esquerda, decomposição dos números segundo o valor de posição e de cálculo da esquerda para a direita e procedimentos holísticos” (Mendes, 2013, p. 12).

Mendes (2012) no estudo que desenvolveu categoriza as resoluções dos alunos de tarefas de multiplicação e de divisão, por procedimentos de contagem, aditivos, subtrativos, multiplicativos, delineando estratégias específicas para cada um. Na tabela seguinte, a autora indica ainda uma estratégia de resolução associada especificamente à divisão: procedimentos subtrativos.

Tabela 4 – Procedimentos usados pelos alunos na resolução de tarefas de multiplicação e divisão (adaptado de Mendes, 2012)

Categorias de procedimentos	Procedimentos específicos
Procedimentos de contagem	Contar por saltos
Procedimentos aditivos	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
Procedimentos subtrativos	Subtrair sucessivamente
Procedimentos multiplicativos	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e de dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar a decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

Estratégia por contagem. Esta estratégia está associada apenas a uma estratégia específica: *contar por saltos.* Encontra-se associada a uma contagem sucessiva, ou seja, partindo de um determinado número, 'salta' "invariavelmente um mesmo valor que corresponde a adicionar sucessivamente esse valor, nomeando ou registando apenas o resultado da adição" (Mendes, 2012, p. 242) – por exemplo, 27 objetos organizados em grupos de três elementos – 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Estratégia subtrativa. Tal como a anterior, está associada apenas a uma estratégia específica: *subtrair sucessivamente*, ou seja, à realização de subtrações sucessivas, "partindo do aditivo e subtraindo repetidamente um mesmo número, o subtrativo" (idem, p. 246)

Estratégias aditivas. Estas estratégias encontram-se associadas a três estratégias específicas. *Adicionar sucessivamente*, por exemplo quando um aluno adiciona repetidamente um mesmo número, apresentando os cálculos horizontalmente – adicionar o preço de 6 cadernos em que cada um custa 5 euros: 5+5+5+5+5+5=30.

Para além desta estratégia específica, estão associadas mais duas *adicionar dois a dois* – adição de parcelas iguais, agrupadas duas a duas e *adicionar em coluna*.

Estratégias multiplicativas. Incluídas neste tipo de estratégias, Mendes (2012) refere as seguintes estratégias específicas de cálculo multiplicativo:

- *Uso de produtos conhecidos* – uso de produtos conhecidos dos alunos, ou seja, esta estratégia está associada ao conhecimento prévio das tabuadas anteriormente trabalhadas pelos alunos. Os alunos tendem em escrever a igualdade multiplicativa sem efetuarem cálculos por terem automatizado alguns produtos, uma vez que este trabalho é realizado em sala de aula (foco na aprendizagem das tabuadas e na sua compreensão).

Os alunos ao compreenderem as tabuadas, usam-nas nas suas resoluções, calculando mentalmente, sem recorrer a cálculo auxiliares, nem à decomposição decimal de um dos fatores (Mendes, 2012).

- *Uso das relações dobro* – Uso do dobro de um número "na realização de um cálculo multiplicativo" (idem, p. 248). Este tipo de estratégias é evidente quando o problema proposto sugere o uso de relações de dobro.
- *Uso de múltiplos de cinco e de dez* – Uso de múltiplos de cinco e /ou de dez no cálculo de produtos (idem).
- *Uso da decomposição não decimal de um dos fatores* – Uso de decomposição não decimal de um dos fatores, transformando-o em produtos parciais. Esta estratégia envolve a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Para além disto, esta estratégia corresponde "à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais ou de parcelas que, de alguma forma, facilitam o cálculo que é necessário realizar" (idem, 2012, p. 249).
- *Uso da decomposição decimal de um dos fatores* – Uso de produtos parciais, a partir da decomposição decimal, para calcular um produto (separação em centenas, dezenas e unidades – números naturais. E separação por décimas e centésimas – representação decimal). Este tipo de estratégias é frequente quando um dos fatores envolvidos no problema é um número superior a vinte (idem).
- *Ajustar e compensar* – Substituição de um produto por outro, envolvendo um fator 'próximo' de um dos números dos produtos a calcular, tornando o cálculo mais facilitado. A compensação necessária ao cálculo realizado realiza-se a partir da operação subtração. Associada a esta estratégia está a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Por exemplo, no cálculo 29×5, substitui-se o 29 por um número de referência, 30: 30×5=150, subtraindo por cinco, 150–5=145 (idem).
- *Uso das relações de dobro e de metade* – Uso da relação dobro/metade, ou seja, reconhecimento das relações de dobro e de metade entre fatores do mesmo produto. Por exemplo, para resolver 25×8, poderemos pensar numa expressão equivalente, usando o dobro, 50×4. Assim, 50 é dobro de 25 e 4 metade de 8. Associada a este produto está a propriedade associativa da multiplicação, tendo em conta a relação dobro/metade. (idem).

- *Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência* – Nesta estratégia o aluno tem um ponto de partida, um produto de referência e, posteriormente, multiplica sucessivamente a partir do mesmo, mantendo um dos fatores igual e ao outro fator acresce mais uma unidade. Este tipo de procedimento, pode ser usado, por alguns alunos, em problemas com um contexto de divisão (idem).
- *Multiplicar em coluna* – Os cálculos são realizados verticalmente, apesar de parecer corresponder ao cálculo algorítmico. Contrariamente ao cálculo algorítmico trabalha-se com números e não com dígitos e os cálculos parciais são realizados da esquerda para a direita (idem).

Segundo Mendes (2012), o cálculo mental é essencial para a resolução de problemas que envolvem esta operação aritmética (multiplicação). Assim é importante que o professor dê oportunidade aos alunos de utilizarem os seus próprios métodos e procedimentos/estratégias durante a resolução de problemas (NCTM, 2017). Deste modo, os alunos evoluem gradualmente de procedimentos relacionados com contagem e aditivos para procedimentos multiplicativos (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011).

2.5. Diferenciar no ensino da Matemática recorrendo a tarefas com diferentes níveis de dificuldade

2.5.1. Diferenciação pedagógica

A diferenciação pedagógica consiste num conjunto de estratégias que permitem ir ao "encontro das necessidades de cada aluno, de modo a apoiar a construção do seu conhecimento" (Mendes, Brocardo, Duarte, Boavida, & Delgado, 2017, p. 4). De acordo com Brocardo, Duarte, Boavida, Delgado e Mendes (2018), é importante "ensinar tendo por referência os saberes e necessidades dos alunos, valorizando a partilha de ideias e a comunicação matemática" (p. 1), uma vez que é essencial que o docente procure "ir ao encontro das necessidades de cada aluno, de modo a apoiar a construção do seu conhecimento" (Brocardo, et al., 2018, p. 1). O professor poderá fazer "uma seleção apropriada de métodos de ensino adequados às estratégias de aprendizagem de cada um" (Correia & Serra, 2005, p. 13). Assim, o docente terá de criar instrumentos relativos às diversas situações presentes na sua sala (por exemplo, desmotivação, indisciplina ou falta de interesse) e com as quais se depara ao longo do ano.

Tomlinson e Allan (2002), referem cinco princípios subjacentes à diferenciação pedagógica:

> "a) uma sala de aula onde se diferenciam as situações de ensino e aprendizagem caracteriza-se pela flexibilidade do processo de intervenção pedagógica que aí ocorre (o tempo, materiais, metodologias de ensino, etc…); b) a diferenciação do processo de intervenção pedagógica decorre da avaliação eficaz e contínua das necessidades dos alunos; c) uma organização flexível dos tipos de argumentos dos alunos necessários para realizas as suas atividades académicas permite que estes acedam a uma ampla variedade de oportunidades de aprendizagem e propostas de trabalho; d) todos os alunos trabalham consistentemente com propostas de trabalho e atividades adequadas e desafiantes; e) os alunos e os professores são colaboradores no âmbito do processo de aprendizagem". (pp. 18-21).

Cada aluno tem o seu próprio ritmo de aprendizagem e, por isso, o docente deve promover a diferenciação pedagógica, dando igualdade de oportunidades de aprendizagem a todos os alunos, "através de adaptações de práticas educativas que visem as diferenças e as necessidades dos alunos" (Henriques, 2016, p. 41).

Tomlinson e Allan, (2002) remetem-nos para a seguinte definição de diferenciação pedagógica:

> "No contexto de uma abordagem realizada com a educação escolar, definimos diferenciação como uma resposta proactiva do professor face às necessidades de cada aluno. Um professor que diferencia compreende a necessidade de os alunos (…) beneficiarem de ensino [complementar] (…) aprofundarem mais um dado [conteúdo] (…) sendo que o professor responde ativa e positivamente a essa necessidade. A diferenciação pedagógica resume-se simplesmente à prestação de necessidades de aprendizagem de um aluno em particular, ou de um pequeno grupo de [alunos], em vez (…) de ensinar uma turma como se todos os indivíduos nela integrados tivessem características semelhantes" (p. 14).

Segundo Patrícia Almeida (2011), a diferenciação pedagógica tem como principal componente a identificação e valorização de competências mais evidenciadas nos alunos. Os professores recorrem a estratégias diferenciadas, materiais e recursos de diferente natureza, para uma melhor aprendizagem por parte dos alunos, uma vez que os docentes pretendem ter sucesso educativo por parte de todos os alunos. Assim, é importante que o docente adapte "o processo de ensino às necessidades de todos os alunos, tendo à sua disposição uma variedade de práticas, estratégias e instrumentos que proporcionam vencer o desafio da heterogeneidade (…)" (Henriques, 2016, p. 49).

É de referir que segundo Tomlinson (2008) a diferenciação pedagógica não prossupõe níveis específicos individualizados para cada aluno, mas sim apresenta diversos ‘caminhos’ na aprendizagem. Assim, o ensino diferenciado “centra-se numa aprendizagem relevante ou ideias poderosas para todos os alunos” (p. 14).

De forma conclusiva, é importante que o professor perante os diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos presentes na turma delineie estratégias que se foquem nas necessidades de cada aluno, proporcionando-lhes “apoio adequado para que ultrapassem dificuldades, [experienciando] enquanto aprendem, é uma das responsabilidades do professor” (Mendes, Brocardo, Duarte, Boavida, & Delgado, 2017, p. 1).

2.5.2. Diferenciação pedagógica em Matemática

De acordo com o NCTM, a educação matemática requer equidade, ou seja, é importante haver igualdade na educação, uma vez que esta “constitui um elemento central desta perspetiva” (NCTM, 2000, p. 12). Assim, é importante dar apoio a todos os alunos, por exemplo alunos com mais dificuldade em matemática poderão “necessitar de recursos adicionais, tais como (…) apoio dos colegas da turma” (NCTM, 2000, p. 14).

Para ir ao encontro das necessidades e diferentes ritmos de aprendizagem dos alunos, o professor deve compreender o raciocínio de cada um. Assim, a “diferenciação é um veículo para tornar isso possível” (Bofferding, Kemmerle, & Murata, 2017, p. 164). Segundo Tomlinson (2001) (citado por Bofferding et al., 2017), o uso de diferenciação deve centrar-se no aluno “enraizada na avaliação (…) e permitindo várias abordagens para a resolução de um problema” (Bofferding et al., 2017, p. 164).

Assim, devem ser proporcionadas aos alunos variadas experiências. É importante que o professor interprete as estratégias usadas pelos alunos nas tarefas matemáticas, de forma a “decidir sobre os aspetos que importa ainda que cada um trabalhe mais” (Delgado, Mendes, Brocardo, Duarte, & Boavida, 2017, p. 103).

Segundo Delgado et al. (2017), diferenciar no ensino da Matemática “passa, também, por possibilitar que, na sala de aula, os alunos contactem com diferentes representações de ideias matemáticas de modo a que todos possam compreender estas ideias e ajudá-los, progressivamente, a aprender formas de representação mais convencionais” (p. 3). Assim, é importante que os alunos discutam e partilhem as suas ideias com os restantes colegas, mostrando outro tipo de resoluções, de forma a que alunos que apresentem maiores dificuldades numa operação aritmética melhorem a nível do pensamento e raciocínio matemático.

Mendes, Brocardo, Duarte, Boavida e Delgado (2017) referem que, diferenciar em Matemática requer que o professor:

> “(a) organize o trabalho em torno de ideias-chave, (b) conheça as necessidades dos alunos, o que passa pela avaliação dos seus saberes, (c) proponha tarefas com graus de dificuldade diferentes mas que permitam trabalhar a mesma ideia-chave e (d) proporcione aos alunos algum grau de autonomia que lhes permita escolher que tarefas resolverão em determinados momentos (…)” (p.1)

Brocardo, Duarte, Boavida, Delgado e Mendes (2018) consideram quatro estratégias essenciais para diferenciar em matemática: Tarefas com questões de escolha múltipla (TQEM), Tarefas com respostas a tarefas abertas (TRTA), Tarefas paralelas (TP) e Tarefas em ficheiros (TF).

- As TQEM permitem ao professor ter uma rápida percepção do que os alunos “compreendem ou recordam sobre um determinado tema” (idem, p.1). A partir destas tarefas há uma escolha de opções “entre várias formuladas no contexto de uma tarefa fechada” (idem, p.1).
- As TRTA envolvem, tal como as tarefas anteriores, uma “análise de várias respostas a uma questão e a escolha de uma opção” (idem, p.1). Contudo, estas tarefas estão associadas a tarefas abertas. Este tipo de tarefas por serem difíceis de serem exploradas, são “habitualmente pouco trabalhadas nas aulas” (idem, p.1). É de referir que estas tarefas permitem “propor a análise de tarefas abertas a todos [os alunos], de os entusiasmar, sejam bons ou maus alunos e de perspectivar diferentes caminhos de trabalho de acordo com as respostas que dão” (idem, p.1).
- As TP focam-se na mesma ideia-chave, propondo aos alunos da mesma turma tarefas com diferentes níveis de dificuldades (idem).
- As TF relacionam-se com a acessibilidade de grupos de tarefas que permitem aos alunos trabalhar “autonomamente, de acordo com o que pensam ser capazes de fazer com sucesso” (idem, p.1).

Seguindo esta linha de pensamento é pertinente recorrer a tarefas paralelas, ou seja, com diferentes graus de dificuldade, pois numa turma há alunos com diferentes níveis de conhecimentos, no que respeita à aprendizagem das operações multiplicação e divisão. Assim, ao longo do meu percurso de intervenção apresentei tarefas paralelas, com diferentes graus de dificuldade, para desta forma “ir ao encontro das necessidades de cada aluno, de modo a apoiar a construção do seu conhecimento” (Mendes et al., 2017, p. 4). Segundo Mendes et al. (2017), ao se apresentar este tipo de tarefas “simultaneamente, proporciona [-se aos alunos] o apoio adequado para que ultrapassem dificuldades que experienciam enquanto aprendem, é uma das responsabilidades do professor" (p. 1).

Os alunos aprendem não só a partir do que é explicado pelo professor, mas também a partir do que os outros alunos "fazem e dizem. A partilha de dúvidas e estratégias é enriquecedora para todos, pelo que importa articular o que cada aluno (…) fez e aprendeu, envolvendo toda a classe" (Brocardo, Duarte, Boavida, Delgado, & Mendes, 2018, p. 1). É importante que o professor promova discussões coletivas, de modo a que estas sejam matematicamente produtivas. Assim, o docente deve encorajar e valorizar

> "as contribuições dos alunos, mesmo que não estejam corretas, e que estes se sintam livres para assumir o risco de errar. Deste modo, diferentes alunos podem contribuir com os seus saberes, dúvidas e questões que podem favorecer a aprendizagem de outros colegas e fornecer indicações ao professor sobre o que sabem e o que tem de fazer para ajudar cada a um a progredir". (Mendes et al, 2017, p.5)

Capítulo 3

Metodologia de Investigação

O presente capítulo destina-se à apresentação e fundamentação das opções metodológicas adotadas ao longo da investigação. Seguidamente é contextualizado o estudo, caracterizada a escola, a turma e apresentados os dois participantes cujas resoluções analiso mais aprofundadamente. Além disso, é explicitado o processo de recolha e análise dos dados da investigação em questão.

3.1. Opções metodológicas

3.1.1. Investigação sobre a prática

Ao longo da minha investigação tive momentos de reflexão, que contribuíram "(…) não só para a resolução de problemas como também (e principalmente) para a planificação e introdução de alterações dessa e nessa mesma prática" (Coutinho, et al., 2009, p. 360). Neste sentido, é importante procurar melhorar a minha prática, questionando-me de forma a encontrar uma maneira ou estratégia que permitirá promover oportunidades potenciadoras de aprendizagem dos alunos. Os docentes "tornam-se realmente profissionais à medida que ensinam e refletem o seu ensino" (Serrazina, 2002, p. 11).

Durante a minha prática, tive em consideração os aspetos acima indicados (melhorando-a) bem como me questionei sobre a pertinência das questões colocadas aos longo dos momentos de discussão coletiva, onde os alunos partilharam as suas maneiras de pensar. Estes aspetos contribuíram também para um melhor entendimento, compreensão e interpretação do que era pretendido no enunciado das tarefas.

A investigação sobre a prática é "um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente" (Ponte, 2002, p. 3). Deste modo, é importante que, como futura professora, investigue sobre a minha prática, gerando questões e uma reflexão sobre as mesmas, "adotando uma atitude de aprendizagem relativamente à sua prática" (Ponte, 2002, p. 5). Além disso, um professor-investigador, para além de investigar a sua prática, por vezes, investiga outros assuntos, que considera pertinentes para melhorar a sua prática e adquirir novos conhecimentos. Desta forma, cabe ao professor-investigador procurar soluções para as questões que surgem ao longo da sua prática, concretizando em "sala-de-aula determinados aspetos do currículo (…)" (Serrazina & Oliveira, 2001, p. 4)

De uma forma geral, o professor deve ampliar e melhorar o 'autoconhecimento', tendo uma atitude reflexiva. Segundo Oliveira e Serrazina (2002), "o conceito de prática reflexiva surge como um modo possível dos professores interrogarem as suas práticas de ensino. (…) A expressão 'prática reflexiva' aparece muitas vezes associada à investigação sobre as práticas" (p. 29).

Na realização de uma investigação é importante ter em atenção os seguintes aspetos: "(i) formulação do problema ou das questões do estudo, (ii) recolha de elementos que permitam responder a esse problema, (iii) interpretação da informação recolhida com vista a tirar conclusões, e (iv) divulgação dos resultados e conclusões obtidas" (Ponte, 2002, p. 12). É de igual modo importante a recolha de dados, a observação participante (complementada com gravações áudio e vídeo das aulas, transcrições/entrevistas) e recolha documental (materiais, preparação das aulas e as produções dos alunos). Relativamente à observação participante, as notas de campo são deveras importantes, uma vez que o "investigador regista os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo" (Ponte, 2002, p. 14).

Na exploração das tarefas propostas, foram realizadas discussões coletivas de modo a que as estratégias da resolução fossem partilhadas e discutidas (sistematizadas) (Ponte, 2005), para uma posterior reflexão da minha parte, questionando-me como devo melhorar na seguinte tarefa – por exemplo, quais os alunos que deverão apresentar as suas resoluções, ou seja, quais as estratégias mais pertinentes que servirão de debate durante a discussão coletiva. Por isso, devem propor-se tarefas aos alunos que lhes permitam a construção de estratégias que possibilitem o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, tanto durante a sua resolução como nos momentos de discussão coletiva em que estas resoluções são partilhadas.

3.1.2. Investigação qualitativa

A investigação que realizei tem características qualitativas porque, segundo Afonso (2005) esta investigação é descritiva, uma vez que os dados recolhidos ao longo de uma investigação com características qualitativas são "ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16).

Esta investigação parte de um objetivo geral, embora no decorrer desta possam surgir questões, ao longo da recolha de dados, de teor mais específico. Assim, a "abordagem à investigação não é feita com o objetivo de responder a questões prévias ou testar hipóteses" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 16), mas sim recolher dados a partir de um contacto próximo com os participantes do estudo, num ambiente 'natural' (Bogdan & Biklen, 1994).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), esta abordagem qualitativa torna-se interessante devido ao seu processo, uma vez que ao longo deste analiso a aprendizagem dos alunos relativamente à multiplicação, no qual este foca-se numa análise e não apenas no produto final. Contudo, segundo estes mesmos autores o investigador deverá refletir sobre o modo como os participantes irão experienciar e interpretar essas experiências, neste caso, refleti como deveriam ser realizadas/apresentadas as tarefas paralelas associadas à multiplicação, bem como a sua partilha e discussão coletiva das suas resoluções.

É de referir que segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa tem cinco características:

> "1. Na investigação qualitativa a fonte principal de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
>
> 2. A investigação qualitativa é descritiva [ou seja], os dados [são] recolhidos em forma de palavras ou imagens e não de números.
>
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.
>
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
>
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa [ou seja], (…) os investigadores qualitativos fazem questão em se certificarem de que estão a apreender diferentes perspetivas adequadamente" (p. 51).

Seguindo esta linha de pensamento, a minha investigação envolve estas cinco características, uma vez que os dados foram recolhidos e posteriormente analisados a partir da implementação das tarefas paralelas em sala de aula. Esta recolha de dados incluiu as produções dos alunos e das discussões coletivas e a gravação áudio e vídeo das discussões coletivas.

3.2. Contexto e participantes

3.2.1. Caracterização do contexto

A minha investigação realizou-se numa escola da rede pública. No que respeita às instalações, esta instituição é constituída por um único edifício, que engloba o pré-escolar e o 1.º ciclo. As instalações complementares são: biblioteca, ginásio, polivalente, jardim-de-infância, sala de ATL, cozinha e refeitório. A nível de acessibilidades, uma vez que se encontra inserida num meio habitacional, a maioria das crianças desloca-se a pé para a mesma. A escola disponibiliza aos alunos algumas atividades extracurriculares, tais como: dança, inglês, atividade física e desportiva.

3.2.2. Caracterização da turma

Este projeto de investigação decorreu numa turma de 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, composta por um total de 21 alunos (10 rapazes e 11 raparigas), com idades compreendidas entre os 8 e os 9 anos. Neste grupo existem 3 alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE) – Dislexia, Síndrome de Asperger e atraso do desenvolvimento cognitivo. Não há alunos de Português Língua Não Materna (PLNM) e crianças com características étnico-culturais ou religiosas notoriamente distintas.

De uma forma geral, é um grupo um pouco agitado, principalmente em trabalhos de grupo e discussões coletivas. São alunos curiosos, interessados, participativos e autónomos. Segundo informação da professora cooperante, trata-se de uma turma heterogénea em relação aos ritmos de trabalho e capacidades de aprendizagem. Segundo Arends (1995), "as turmas podem parecer semelhantes à distância ou no papel, mas na realidade, cada uma é tão única com uma impressão digital" (p. 109).

3.2.3. Caracterização dos participantes

Na realização do presente estudo, participaram todos alunos da turma (21 alunos), resolvendo todas as tarefas propostas e envolvendo-se nos momentos de discussão coletiva. Para uma análise mais aprofundada foram escolhidas as produções de uma rapariga, Isabel (grupo 1) e de um rapaz, Isaac (grupo 2).

A seleção destes participantes partiu de uma análise feita previamente de cada tarefa e da maneira como os alunos interagiram durantes as discussões coletivas, principalmente, no que se refere à sua maneira de se expressar (como explicavam o seu raciocínio). É de referir que a escolha esteve também associada à sua aparente evolução e diversidade de estratégias utilizadas ao longo das cinco tarefas propostas. De acordo com estes aspetos, foram selecionados a Isabel e o Isaac, que caracterizo brevemente em seguida.

Isabel

Isabel é uma aluna meiga, calma, bastante interessada e muito expressiva, no que diz respeito aos seus sentimentos. É uma aluna que se mostra interessada em aprender e ultrapassar as suas dificuldades. De uma forma geral, era sempre uma das primeiras a acabar as tarefas propostas, pedindo-me sempre se me podia mostrar, parecendo que necessitava de aprovação do que tinha realizado. Quando errava algum cálculo, mostrava-se sempre empenhada em saber onde errara, questionando-me ou à professora titular para que lhe fosse dado apoio nesse aspeto.

De acordo com as informações disponibilizadas pela professora titular e a partir das minhas observações, Isabel é uma aluna que não revela muitas dificuldades na aprendizagem e parece estudar em casa. Quando lhe é pedido, é bastante participativa e gosta de ajudar os colegas que mostram alguma dificuldade na resolução de uma tarefa. É de referir, que, quando terminava rapidamente uma tarefa, pedia-me ou à professora titular se podia ajudar os seus colegas, uma vez que não gostava de estar parada.

Isaac

O Isaac é um aluno bem-disposto e sempre disponível para ajudar o próximo. Em momentos como as discussões coletivas, mostrou ser curioso e interessado no que os colegas partilhavam. De uma forma geral, é um aluno que quando participa em momentos de grande grupo, faz intervenções pertinentes e dentro do contexto em que se está a trabalhar. Este aluno é bastante introvertido e participa sempre que a professora titular ou uma das estagiárias o questiona.

De acordo com as informações disponibilizadas pela professora titular e a partir das minhas observações, é um aluno seguro do que está a explicar ou a partilhar. Quando realiza as tarefas autonomamente, por vezes é um pouco distraído na sua resolução. Durante as apresentações orais da sua estratégia de resolução, é um aluno que se expressa bem. Contudo, é um aluno que algumas vezes apresenta dificuldades na escrita, possivelmente devido às suas pequenas distrações. De uma forma geral, é um aluno que gosta de partilhar e defender a sua maneira de pensar.

3.3. Recolha e análise de dados

3.3.1. Observação participante

Ao longo deste estudo, a principal técnica de recolha de dados foi a observação participante, uma vez que os dados são recolhidos por mim, durante a minha prática. Considerando que sou ao mesmo tempo investigadora e professora, complemento a observação participante com gravações áudio e vídeo. Assim, é durante a observação participante que "o investigador (…) mantém um bom registo dos acontecimentos para providenciar uma descrição relativamente incontestável para análise posterior e para o relatório final" (Stake, 2012, p. 78).

Durante a minha investigação adoto uma postura de observação participante. Esta será uma observação direta dos acontecimentos e uma técnica "de recolha de dados particularmente útil e fidedigna, na medida em que a informação obtida não se encontra condicionada pelas opiniões e pontos de vista dos sujeitos, com acontece nas entrevistas e nos questionários" (Afonso, 2005, p. 91). Na observação direta, como investigadora analiso os comportamentos e os acontecimentos no momento em que se produzem. Por outro lado, este tipo de observação tem alguns limites tal como o registo das observações que, por norma é realizado após as mesmas (Quivy & Campenhoudt, 1992).

Segundo Cozy (1989) (citado por Afonso, 2005), a observação participante é utilizada quando o investigador pretende

> "descrever e compreender o modo como as pessoas vivem, trabalham e se relacionam num determinado contexto social [implicando] que o investigador se insira na situação (…) e observe o próprio contexto, os padrões das relações entre pessoas, o modo como reagem aos eventos que ocorrem". (p. 92)

Ao longo da minha investigação, assumo o papel de 'investigador de campo', pois um investigador interioriza "o objetivo da investigação, à medida que se recolhem dados no contexto" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 128). Assim, a observação que realizo é participante, uma vez que esta recolha de informação é feita a partir de uma fonte direta – através de diálogos com os alunos e das discussões coletivas.

Um instrumento que utilizo ao longo desta observação são as notas de campo, cingindo-se estas ao "relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha, refletindo sobre os dados" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 150). Assim, a recolha de dados é mais precisa e detalhada, o que fornece uma melhor análise, durante a investigação, e no final da recolha. A observação é complementada por vídeo-gravações, gravações e fotografias, o que permite uma análise e uma reflexão mais pormenorizadas e aprofundadas sobre os dados recolhidos durante a realização da sequência de tarefas.

É de referir que ao longo dos momentos de exploração das tarefas foram surgindo conversas informais, de modo a perceber o raciocínio dos alunos e complementar a minha análise dos dados.

3.3.2. Recolha documental

A recolha documental é uma das técnicas de recolha de dados essencial neste processo de investigação, incidindo sobre as produções dos alunos associadas às tarefas realizadas. Este tipo de técnica de recolha de dados permite contribuições pertinentes para a análise do tema em estudo, à medida que a sequência de tarefas é explorada, bem como no final da recolha de dados. Deste modo, ao longo da recolha de dados vou compreendendo como os alunos resolvem as diferentes tarefas, o que ajuda a perceber quais as que faz sentido propor a seguir.

As produções dos alunos são um instrumento de análise fundamental, uma vez que são dados 'reais' sobre a aprendizagem e conhecimento que os alunos manifestam ao longo da resolução das tarefas. Deste modo, "recolher dados através do estudo de documentos segue a mesma linha de pensamento que observar e entrevistar" (Stake, 2012, p. 84).

Por ser de extrema importância para a minha investigação, as produções que os alunos utilizam e lhes são próprias, embora não se tratando de representações convencionais (NCTM, 2007), são realizadas numa folha de papel, e tratadas como as ferramentas vitais:

> "para registar, analisar, resolver e comunicar dados matemáticos, problemas e ideias", ou seja, são consideradas 'veículos' para a aprendizagem e comunicação, apoiando os alunos de diferentes maneiras, bem como, poderão ser utilizadas de diferentes formas" (Preston & Garner, 2003, p. 39).

3.3.3. Processo de recolha de dados

A recolha de dados decorreu ao longo das seis semanas de intervenção, durante o período do último estágio curricular. As tarefas propostas e as discussões coletivas foram realizadas durante este período de intervenção, não tendo sido necessário regressar ao local de estágio.

Durante a primeira semana, por ser uma semana de observação, tive a oportunidade de compreender que tipo de relação os alunos tinham com a Matemática, como expunham as suas ideias, que tipo de estratégias utilizavam e que dificuldades manifestavam. Para uma melhor compreensão da minha parte relativamente a estes aspetos, após conversar com a professora titular, propus duas tarefas diagnóstico na segunda semana de estágio. A partir da análise da resolução das mesmas, pude compreender como os alunos reagiam às mesmas autonomamente e como as resolviam.

Após esta análise inicial e, apesar de os alunos apresentarem algumas dificuldades na resolução das tarefas, usaram uma diversidade de estratégias. Em algumas conversas informais com os alunos, compreendi que dificuldades foram manifestadas pelos mesmos ao longo da resolução das mesmas. Desta forma, delineei e/ou adaptei, juntamente com a minha orientadora, cinco tarefas, as quais foram previamente discutidas com a professora cooperante. Para além destes aspetos, foi acordado com a mesma a apresentação de cada tarefa semanalmente, bem como a realização de discussões coletivas após a resolução de cada uma.

Seguindo esta linha de pensamento, foram propostas cinco tarefas com diferentes estratégias associadas, tendo em consideração as dificuldades evidenciadas pelos alunos. Relativamente às conversas informais, durante as mesmas foram construídas notas de campo, para posteriormente completar as gravações (áudio e vídeo) das discussões coletivas. É de referir que algumas destas conversas informais também foram gravadas, apenas em áudio.

A alguns alunos, individualmente, foi pedido que me explicassem a forma como resolveram a tarefa. Para além disto, nas cinco discussões coletivas foram gravadas a explicação oral de cada aluno, bem como foram registadas no quadro as suas estratégias.

3.3.4. Processo de análise de dados

A análise das produções dos alunos nas cinco tarefas realizadas ao longo do meu percurso de intervenção, foca-se na procura de resposta às minhas questões-problema. Inicialmente, analiso as tarefas diagnóstico, para com a ajuda da professora cooperante identificar os alunos de um e de outro grupo – pelos quais as tarefas com diferentes graus de dificuldade seriam distribuídas. A turma foi divida em dois grupos, um com mais dificuldades e outro com menos dificuldades, relativamente às tarefas associadas à multiplicação. A tabela seguinte mostra os alunos pertencentes a cada grupo:

Tabela 5 – Nomes dos alunos de cada grupo

Grupo 1	**Grupo 2**
Catarina	André
Diogo	Isaac
Gabriel	Margarida L.
Gustavo	Margarida V.
Isabel	Melissa
Karina	Nuno
Leonor	Rui
Luiza	Ricardo D.
Mariana	Sofia
Ricardo C.	Vanessa
Ricardo G.	

Ao longo de toda a intervenção fiz uma primeira análise das resoluções dos alunos. Esta análise prévia das tarefas foi realizada individualmente, analisando as resoluções de cada aluno resolveu a tarefa, que operações utilizou, se recorreu a esquemas ou a imagens para resolver a mesma.

É de referir que, durante a resolução das tarefas, tomei notas de eventuais dificuldades, bem como que alunos deveriam apresentar a sua resolução aos restantes colegas nas discussões coletivas. Desta forma, as discussões coletivas foram gravadas (áudio e vídeo), para posteriormente analisar, detalhadamente, a intervenção dos alunos. Para a análise das produções escritas dos alunos e das suas intervenções orais nas discussões coletivas e nas entrevistas recorri à análise de conteúdo (Bardin, 1995).

Segundo Coutinho (2011) a análise de conteúdo é numa "técnica que consiste em avaliar de forma sistemática um corpo de texto" (p. 193), tendo como base encontrar "elementos-chave" para serem interpretados. Autores como Bardin (1994) (citado por Santana, 2017) referem que a análise de conteúdo é uma técnica de análise de dados qualitativos, definida "como um conjunto de técnicas de análise de comunicação entre indivíduos, que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição de conteúdo das mensagens, indicadores que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de receção/produção" (Santana, 2017, p. 62).

No decurso da sequência de tarefas fiz uma análise preliminar durante a minha intervenção, por um lado para compreender o tipo de dados que tinha, por outro lado para perceber se fazia sentido a tarefa que iria propor a seguir, a nível da intervenção pedagógica.

Inicialmente propus a toda a turma uma tarefa que teve a finalidade de diagnóstico. A partir da análise das resoluções dos alunos e das dificuldades por eles manifestadas, e do conhecimento que a professora titular detinha sobre eles, organizei dois grupos, um que incluía os alunos com mais dificuldades e outro que integrava os que revelaram menos dificuldades. A partir daí propus tarefas diferenciadas a estes dois grupos de alunos, com diferentes graus de dificuldade, embora trabalhassem a mesma ideia-chave. Deste modo tentei proporcionar-lhes condições para que todos pudessem progredir, tendo em conta o que já sabiam e o que precisavam de aprender.

Relativamente ao processo de análise dos dados, verifiquei que tinha uma grande quantidade dos mesmos decorrentes da minha proposta pedagógica. Uma vez que esta tinha cinco tarefas, em que três delas, por serem diferenciadas, 'desdobravam' em duas. Assim, fiz uma redução de dados, optei por analisar apenas os dados associados à tarefa 1, à tarefa 3 e à parte 2 da tarefa 5. A tarefa 1, por ser a primeira tarefa diferenciada, a tarefa 3 por ser a última tarefa diferenciada e a parte 2 da tarefa 5 que foi igual para todos, com o intuito de compreender se haveriam diferenças entre os alunos dos dois grupos. Este momento relacionou-se com uma primeira fase da análise dos dados relativo às produções dos alunos de toda a turma.

Numa segunda fase analisei as produções de todas as tarefas de uma aluna, Isabel, do grupo 1 e um aluno, Isaac do grupo 2. Inicialmente, analisei as resoluções de Isabel, em todas as tarefas, bem como as dificuldades manifestadas ao longo das mesmas e finalizei com uma síntese global tanto das estratégias como das dificuldades. O mesmo sucedeu para o Isaac.

Capítulo 4

Proposta pedagógica

O presente capítulo integra a sequência de tarefas propostas ao longo da minha intervenção pedagógica e a sua calendarização. Seguidamente, apresento o modo como foram trabalhadas em sala de aula, como foram introduzidas, exploradas e como foram realizadas as discussões coletivas.

4.1. A sequência de tarefas propostas

As tarefas propostas ao longo da minha intervenção pedagógica foram selecionadas e criadas com o apoio da professora orientadora, tendo como base Mendes et al. (2017). Tal como referido anteriormente, propus tarefas diferenciadas aos dois grupos de alunos – um constituído pelos alunos com mais dificuldades e outro formado pelos alunos com menos dificuldades, no que respeita à aprendizagem da multiplicação e divisão. Todas as tarefas propostas aos alunos partem da ideia-chave: "Resolver problemas ajuda a 'dar sentido' às operações com números naturais" (Mendes et al., 2017).

As tarefas elaboradas com o intuito de apoiar os alunos com mais dificuldades têm, no seu enunciado, imagens que sugerem estratégias de resolução, para que estes sejam capazes de as resolver e vão progredindo na sua aprendizagem. De modo a perceber as diferenças entre as tarefas paralelas, a figura 1 mostra os enunciados das tarefas 1A e 1B.

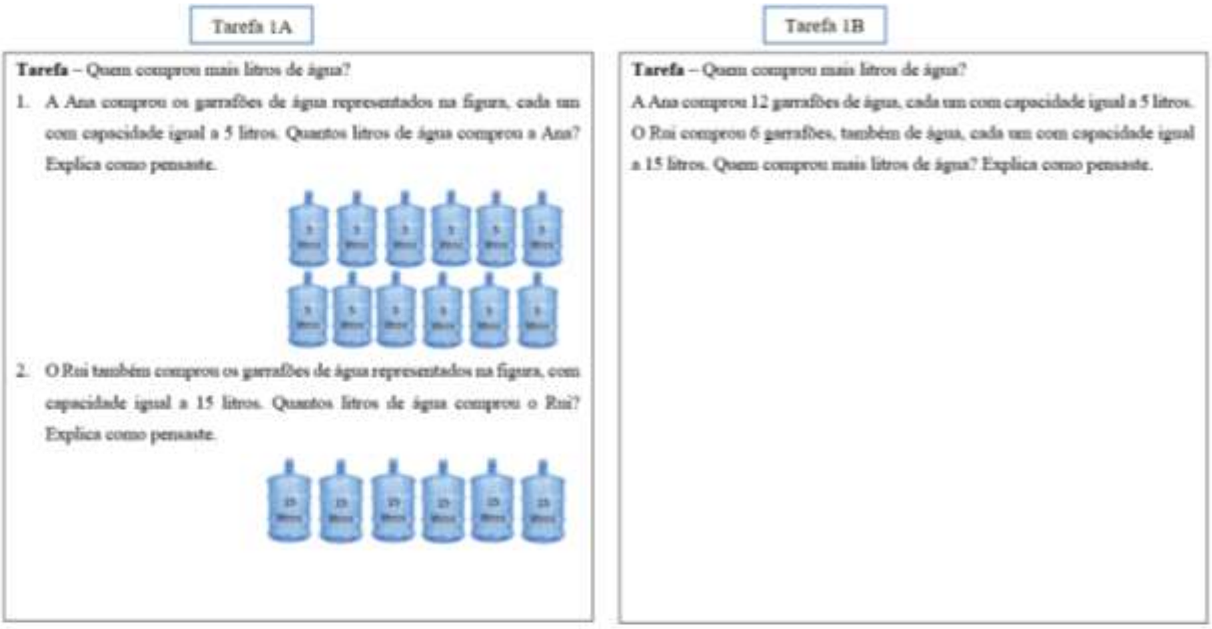


Figura 1 – Enunciados das tarefas 1A e 1B

Na tarefa 1A é apresentada uma imagem que tem como finalidade auxiliar os alunos com mais dificuldades a construir uma estratégia de resolução e, além disso, são colocadas questões intermédias que pretendem orientar os alunos. Na tarefa 1B não há imagens e o problema é apresentado apenas por intermédio de um texto. Ambas as tarefas têm o mesmo contexto, de modo a permitir uma discussão comum. As tarefas propostas aos alunos com menos dificuldades são mais abertas e não contêm imagens, deixando ao critério dos alunos a construção de estratégias de resolução.

A sequência de tarefas incluiu cinco tarefas diferenciadas para os dois grupos (num total de 6 tarefas), em que as duas últimas tarefas foram indiferenciadas, ou seja, foram iguais para todos os alunos (uma com e outra sem o apoio de imagens). É de referir que as tarefas envolveram números naturais e focaram-se na operação multiplicação e divisão procurando estabelecer relações entre ambas as operações. Nas tarefas de divisão o que era pretendido era que os alunos as resolvessem utilizando, sobretudo, a multiplicação nas suas estratégias, pois, segundo Geer (citado por Mendes, 2013) “a relação inversa entre a multiplicação e a divisão tem implicações importantes no cálculo eficiente e flexível e na avaliação da compreensão conceptual dos alunos” (p. 9).

Salienta-se ainda que os números escolhidos para as tarefas tiveram em consideração a aprendizagem dos alunos da turma. Assim, nas tarefas apresentadas aos alunos, a grandeza dos números aí incluídos foi aumentando. Além disso, o grau de dificuldade das tarefas foi também aumentando, uma vez que uma das finalidades deste trabalho era contribuir para a progressão das aprendizagens dos alunos no que respeita às operações multiplicação e divisão.

Os enunciados das tarefas diagnóstico e das cinco tarefas apresentadas encontram-se no anexo 1. Os enunciados são apresentados em formato reduzido e sem o espaço dedicado à resolução dos mesmos, por uma questão de economia de espaço neste relatório. As tarefas foram propostas separadamente, tendo sido pedido aos alunos que resolvessem as questões associadas às mesmas individualmente e que justificassem, por escrito, o modo como pensaram.

A tabela seguinte sintetiza a ordem de exploração das tarefas propostas em sala de aula e a respetiva data:

Tabela 6 – Identificação das tarefas e respetivas datas de realização

Nome da tarefa	**Tipo da tarefa**	**Número da tarefa**	**Grupo de alunos que a resolveu**	**Data de realização**
TD – Colocar azulejos	Tarefa diagnóstico	D1 D2	Toda a turma	19 de março de 2018
T1 – Quem comprou mais litros de água?	Tarefas paralelas	1A	Grupo 1	9 de abril de 2018
		1B	Grupo 2	
T2 – Quantos litros de água tem cada garrafão?	Tarefas paralelas	2A	Grupo 1	18 de abril de 2018
		2B	Grupo 2	
T3 – Quem comprou mais litros de água?	Tarefas paralelas	3A	Grupo 1	24 de abril de 2018
		3B	Grupo 2	
T4 – A caderneta de cromos	Tarefa final com imagem	4	Toda a turma	30 de abril de 2018
T5 – Os livros…	Tarefa final sem imagem	5	Toda a turma	22 de maio de 2018

4.1.1. Tarefa diagnóstico – Colocar azulejos

Como referido anteriormente, esta tarefa diagnóstico (anexo 1) teve a finalidade de diagnosticar o que cada aluno era capaz de fazer e quais as dificuldades que evidenciava. A análise posterior das resoluções dos alunos e das suas dificuldades manifestadas ao longo da mesma, e o conhecimento que a professora titular detinha sobre eles permitiu-me organizá-los em dois grupos, um que incluiria os alunos com mais dificuldades e outro que integraria os que revelaram menos dificuldades.

Com a realização desta tarefa observei que todos os alunos tinham uma dificuldade em comum: explicar oralmente o seu pensamento, em especial aos colegas, de forma a que estes percebessem o seu raciocínio. Tendo em conta esta dificuldade, considero que as discussões coletivas foram uma mais-valia para desenvolver esta competência, de partilha de ideias e de pensamentos.

A tarefa diagnóstico, cuja realização decorreu a 19 de março de 2018, tinha como objetivos usar a multiplicação a partir da disposição retangular, recorrendo a "estratégias de cálculo mental e escrito" (Mendes, Brocardo, Delgado, & Gonçalves, 2010, p. 2).

4.1.2. Tarefas 1 – Quem comprou mais litros de água?

As primeiras tarefas propostas (1A e 1B) (anexo 1) foram construídas em conjunto com a professora orientadora, tal como as restantes tarefas. Como referi anteriormente, estas tarefas permitiram-me ter uma perceção do tipo de resoluções que os alunos poderiam apresentar, bem como da sua reação durante a discussão coletiva. A tarefa 1A tem associadas imagens como auxílio ao cálculo e, com questões intermédias, destinada aos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades) e a tarefa 1B não tem quaisquer imagens associadas, sendo o enunciado apresentado a partir de um texto.

Os objetivos subjacentes a estas tarefas são: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando as propriedades das operações utilizadas e utilizar as tabuadas do 5, 6 e 10.

Segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013), os objetivos associados a esta tarefa são os seguintes:

→ Reconhecer que o produto de um número por 10, 100, 1000, etc. se obtém acrescentando à representação decimal desse número o correspondente número de zeros [NO3 – 7.3];

→ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4];

→ Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5].

Relativamente aos conteúdos, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) são os seguintes:

→ Múltiplo de um número;

→ Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;

→ Algoritmo da multiplicação envolvendo números até 100;

→ Critério de reconhecimento dos múltiplos de 5 e 6.

Os alunos poderiam apresentar estratégias diferentes através de desenhos ou símbolos, experimentando, fazendo tentativas, de forma a chegarem a uma solução ou utilizar uma operação aritmética. Os alunos ao resolverem estas tarefas poderiam utilizar a adição, por exemplo, adicionar o número de litros de água dos 6 garrafões: 15+15+15+15+15+15. Além disso, poderiam também usar a multiplicação efetuando 6×15.

Nesta tarefa os números apresentados comparativamente aos das outras tarefas seguintes apresentam uma grandeza menor, o que facilitou, nesta fase, inicial o raciocínio dos alunos. Além disso têm números de referência como o 5 e o 15, permitindo aos alunos chegar ao resultado mais facilmente.

4.1.3. Tarefas 2 – Quantos litros de água tem cada garrafão?

As segundas tarefas propostas (2A e 2B) (anexo 1) foram construídas em conjunto com a professora orientadora. Os objetivos subjacentes a estas tarefas são: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, utilizar a tabuada do 8, recorrer a outras operações para resolver problemas associados à divisão (especialmente a multiplicação) e relacionar a multiplicação com a divisão por partilha. A tarefa 2A tem associadas imagens como auxílio ao cálculo e, com questões intermédias. A tarefa 2B não tem quaisquer imagens associadas, sendo o enunciado apresentado a partir de um texto.

Segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013), os objetivos associados a esta tarefa são os seguintes:

- → Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4];
- → Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5];
- → Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o diviso e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas [NO3 – 9.1];
- → Efetuar divisões inteiras com divisor e quociente inferiores a 10 utilizando a tabuada do divisor e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo [NO3 – 9.3];
- → Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por» e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4];
- → Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero [NO3 – 9.5];
- → Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento [NO3 – 10.1].

Relativamente aos conteúdos, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) são os seguintes:

- → Divisão inteira por métodos informais;
- → Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto;
- → Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10;
- → Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

Os alunos poderiam resolver as tarefas a partir da multiplicação indo à tabuada do 8, encontrando qual o número que multiplicado por este fosse igual a 40 – 8×5. Alguns alunos apresentaram na sua resolução a divisão inteira, relacionando esta operação com o enunciado. Apesar desta estratégia, também poderiam surgir contagens progressivas de cinco em cinco (através do uso de tentativas).

4.1.4. Tarefas 3 – Quem comprou mais litros de água?

As terceiras tarefas propostas (3A e 3B) (anexo 1) foram construídas em conjunto com a professora orientadora, tendo como objetivos: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, utilizar a tabuada do 9. A tarefa 3A tem associada imagens como auxílio ao cálculo e, com questões intermédias, destinada aos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades) e a tarefa 3B não tem quaisquer imagens associadas, sendo o enunciado apresentado a partir de um texto.

Segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013), os objetivos associados a esta tarefa são os seguintes:

- → Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4];
- → Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5];

Relativamente aos conteúdos, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) são os seguintes:

- → Múltiplo de um número;
- → Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- → Algoritmo da multiplicação envolvendo números até 100;
- → Critério de reconhecimento dos múltiplos de 5 e 6.

Na resolução destas tarefas os alunos poderiam relacionar o 15 com o 30, uma vez que entre estes dois números há uma relação de metade e dobro, o que poderia facilitar o cálculo, uma vez que poderiam associar as quantidades entre si: 18 garrafões com 15 litros e 9 garrafões com 30 litros.

4.1.5. Tarefas 4 – (A caderneta de cromos)

A quarta tarefa proposta (anexo 1) foi construída em conjunto com a professora orientadora. Os objetivos subjacentes a esta tarefa são: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, utilizar a tabuada do 8, recorrer a outras operações para resolver problemas associados à divisão (especialmente a multiplicação) e relacionar a multiplicação com a divisão por medida.

Segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013), os objetivos associados a esta tarefa são os seguintes:

- → Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4];
- → Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5];
- → Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o diviso e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas [NO3 – 9.1];
- → Efetuar divisões inteiras com divisor e quociente inferiores a 10 utilizando a tabuada do divisor e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo [NO3 – 9.3];
- → Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por» e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4];
- → Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero [NO3 – 9.5];
- → Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento [NO3 – 10.1].

Relativamente aos conteúdos, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) são os seguintes:

- → Múltiplo de um número;
- → Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- → Algoritmo da multiplicação envolvendo números até 100;
- → Critério de reconhecimento dos múltiplos de 5 e 6;

→ Divisão inteira por métodos informais;

→ Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto;

→ Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10;

→ Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

Na resolução desta tarefa pretendia-se que os alunos se relembrassem de estratégias utilizadas em tarefas anteriores, de modo a perceber se haveria uma evolução, ou não, no seu raciocínio matemático ou se teriam dificuldades que permaneciam.

4.1.6. Tarefa 5 (Os livros...)

A quinta tarefa proposta (anexo 1) foi construída em conjunto com a professora orientadora, tendo como objetivos: resolver problemas que envolvem o sentido aditivo da multiplicação, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, desenvolver estratégias de cálculo mental, usando a propriedade das operações utilizadas, recorrer a outras operações para resolver problemas associados à divisão (especialmente a multiplicação) e relacionar a multiplicação com a divisão por medida.

Segundo as Metas Curriculares do Ensino Básico de Matemática (ME, 2013), os objetivos associados a esta tarefa são os seguintes:

→ Efetuar mentalmente multiplicações de números com um algarismo por múltiplos de dez inferiores a cem, tirando partido das tabuadas [NO3 – 7.4];

→ Efetuar a multiplicação de um número de um algarismo por um número de dois algarismos, decompondo o segundo em dezenas e unidades e utilizando a propriedade distributiva [NO3 – 7.5];

→ Efetuar divisões inteiras identificando o quociente e o resto quando o diviso e o quociente são números naturais inferiores a 10, por manipulação de objetos ou recorrendo a desenhos e esquemas [NO3 – 9.1];

→ Efetuar divisões inteiras com divisor e quociente inferiores a 10 utilizando a tabuada do divisor e apresentar o resultado com a disposição usual do algoritmo [NO3 – 9.3];

- → Utilizar corretamente as expressões «divisor de» e «divisível por» e reconhecer que um número natural é divisor de outro se o segundo for múltiplo do primeiro (e vice-versa) [NO3 – 9.4];
- → Reconhecer que um número natural é divisor de outro se o resto da divisão do segundo pelo primeiro for igual a zero [NO3 – 9.5];
- → Resolver problemas de até três passos envolvendo situações de partilha equitativa e de agrupamento [NO3 – 10.1].

Relativamente aos conteúdos, tendo como base o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2013) são os seguintes:

- → Múltiplo de um número;
- → Cálculo mental: produto de um número de um algarismo por um número de dois algarismos;
- → Algoritmo da multiplicação envolvendo números até 100;
- → Critério de reconhecimento dos múltiplos de 5 e 6;
- → Divisão inteira por métodos informais;
- → Relação entre dividendo, divisor, quociente e resto;
- → Cálculo mental: divisões inteiras com divisores e quocientes inferiores a 10;
- → Divisor de um número, número divisível por outro; relação entre múltiplo e divisor.

A resolução desta tarefa teve a finalidade de perceber se haveria uma evolução no raciocínio matemático tanto no grupo 1 como no grupo 2 ou se haviam dificuldades que continuavam a persistir.

4.2. A exploração das tarefas em sala de aula

A exploração das cinco tarefas decorreu ao longo de seis semanas durante o meu percurso de intervenção, a qual preencheu o horário letivo dedicado à Matemática, uma vez por semana. Ao longo desta exploração seguiram-se três etapas: (i) introdução da tarefa, (ii) exploração da tarefa pelos alunos e (iii) discussão coletiva sobre a resolução da tarefa. É importante que o docente antecipe "como poderá organizar a aula e colocar em ação essa previsão, ao explorar a tarefa na aula" (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2011, p. 13).

Seguindo esta linha de pensamento, antes de implementar qualquer uma das tarefas propostas, antecipei possíveis estratégias que poderiam ser construídas pelos alunos durante a realização das mesmas. Esta antecipação ajudou-me a escolher que alunos deveriam apresentar/partilhar as suas resoluções durantes as discussões coletivas de acordo com as mais pertinentes.

4.2.1. A introdução das tarefas

No início foi explicado aos alunos que iriam resolver uma tarefa, individualmente. Referiu-se que podiam resolver como preferissem ou através de esquemas, desenhos e apenas se sentissem necessidade podiam utilizar o algoritmo. Expliquei também que se seguiria outro momento após a resolução da tarefa: apresentação e discussão da tarefa, em que alguns alunos iriam partilhar a sua resolução.

Após esta breve explicação distribuí por cada aluno a folha relativa à tarefa, pedindo que colocassem o nome e a data, e começassem por ler o enunciado. Caso não percebessem alguma palavra ou frase, pedi-lhes que assinalassem, que a clarificaria em seguida. Depois era pedido a um aluno que lesse o enunciado, sendo perguntado por mim se existia alguma dúvida. Nesta altura surgiram questões tais como: "O que se pretende?" ou "O que é já temos?".

Todas as respostas dadas a perguntas deste género foram escritas no quadro por mim, para ser uma forma facilitadora de resolução da tarefa. Por exemplo, quantos cromos o Francisco tem? – 96, em cada página cabem quantos? – 8. A partir deste diálogo em conjunto, os alunos, individualmente, resolveriam a tarefa da maneira que se sentiam confortáveis, ou a partir de desenhos, esquemas ou a partir de uma operação aritmética.

Seguidamente, após esta introdução à tarefa foi solicitado aos alunos que quando estivessem a resolver a tarefa, registassem os seus cálculos/procedimentos utilizados para chegarem ao resultado, principalmente se resolvessem alguma operação mentalmente, era importante registá-la. Assim, quando apresentassem a sua resolução aos colegas, seria mais fácil se registassem o seu raciocínio, para mais tarde se recordarem. Além disso, o registo do modo como raciocinaram iria auxiliar-me na análise dos dados.

O tempo deste momento de introdução foi decrescendo, uma vez que os alunos, com a realização das tarefas, começaram a sentir-se mais confortáveis e confiantes na perceção do que era pretendido. Inicialmente, havia muitas dúvidas, mas com o decorrer das tarefas propostas tornaram-se mais autónomos no que concerne a este aspeto.

4.2.2. A exploração das tarefas

A exploração das tarefas, como já referido anteriormente, foi realizada de forma autónoma, apesar de haver momentos em que os alunos me chamavam, por vezes por necessidade de aprovação, para terem alguém que lhes confirmasse que estavam a pensar corretamente ou apenas porque tinham ficado com alguma dúvida. Este aspeto relaciona-se como facto de haver alunos inseguros das suas capacidades de resolução e da sua forma de pensar, daí a sua necessidade da aprovação de um adulto.

No caso dos alunos que pouco solicitavam o meu auxílio incentivava-os a pensarem sobre a tarefa, de forma a que não influenciasse o seu pensamento/raciocínio. Assim, era uma forma de ter a certeza que tinham percebido o enunciado e onde queriam chegar.

É durante a exploração de cada tarefa que surgem as conversas informais, onde faço perguntas de modo a perceber como é que os alunos estão a pensar, o porquê de estarem a utilizar uma determinada estratégia. Para além disso, tento perceber se estão a sentir alguma dificuldade e como é que a esperam ultrapassar. É neste momento que escolho quais os alunos que apresentam resolução pertinentes para as discussões coletivas, e tento perceber se se mostram confiantes no que estão a fazer e se conseguem explicar de modo percetível aos colegas.

Esta escolha tem em consideração o que já conheço dos alunos, uma vez que durante a minha semana de intervenção pude observar alguns momentos de partilha de ideias, o que me ajudou nesta fase. Também tive em atenção na escolha dos alunos, aqueles que pudessem apresentar uma resolução incorreta ou que durante as conversas informais, se mostravam apenas confusos nos seus pensamentos e que necessitavam, de em conjunto com os seus colegas perceber onde estavam a mostrar alguma confusão (esta escolha aconteceu uma vez).

Por outro lado, tanto a minha colega de estágio como a professora cooperante circulavam pela sala, de forma a ajudar a supervisionar o trabalho realizado pelos alunos, bem como na partilha de opinião de quais as estratégias que poderia utilizar para as discussões coletivas. Este aspeto foi, sem dúvida, importante durante esta fase, poder ter outras opiniões, principalmente por parte da professora cooperante, uma vez que conhece melhor os seus alunos.

A duração desta fase dependeu bastante de cada tarefa, sendo que houve tarefas com graus de complexidade mais elevado. Por norma, a resolução das tarefas despendia cerca de 30 a 40 minutos da aula, o que teve de ser bem gerido, para que houvesse tempo para as discussões coletivas se realizarem no mesmo dia.

4.2.3. As discussões coletivas

As discussões coletivas, de modo a serem produtivas para a aprendizagem dos alunos deverão ser acompanhadas pelas seguintes práticas do professor: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008).

Smith e Stein (2011) referem no seu modelo cinco práticas relativas ao trabalho do professor que o apoiem antes e durante a aula:

- Antecipar – consiste na previsão de possíveis estratégias que poderão ser adotadas pelos alunos quando resolvem as tarefas (idem);
- Monitorizar – consiste em 'supervisionar' a atividade dos alunos durante a exploração das tarefas (idem);
- Selecionar – consiste em selecionar as estratégias que irão ser apresentadas e analisadas (idem);
- Sequenciar – o professor deve organizar previamente a ordem da apresentação das tarefas, havendo assim uma sequência de apresentação das mesmas (idem);
- Estabelecer conexões – o professor deve estabelecer conexões entre as estratégias apresentadas pelos alunos (idem).

Devem propor-se tarefas aos alunos que lhes permitam a construção de estratégias, que possibilitem o aprofundamento de ideias e conceitos matemáticos, tanto durante a sua resolução como nos momentos de discussão coletiva em que estas resoluções são partilhadas. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), "é fundamental que o aluno se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para colocar questões, pensar, explorar as suas ideias e exprimi-las, tanto ao professor como aos seus colegas" (p. 28).

Seguindo esta linha de pensamento, quando todos os alunos terminavam a resolução das tarefas, dava-se início à discussão coletiva. Este momento não tinha um tempo de duração estipulado, podendo variar conforme o número de estratégias apresentadas e as questões colocadas pelos alunos. Inicialmente, como os enunciados não eram recolhidos, de forma que os alunos tivessem a oportunidade de comparar a sua resolução com a do colega, muitos alunos riscavam ou apagavam o que tinham feito, ou por se encontrarem incorreto ou por acharem que a que estava a ser apresentada era a que estava correta. Assim, pedi-lhes que não corrigissem nem apagassem o que tinham feito, para que se pudesse comparar as diferentes estratégias existentes na turma, solicitando que guardassem canetas ou lápis e borrachas. A maioria dos alunos respeitou este pedido.

Para que a discussão coletiva fosse mais produtiva, ainda durante a realização da tarefa, escolhia os alunos que iriam apresentar as suas estratégias de resolução. O aluno dirigia-se ao quadro explicando o que tinha escrito na folha e, registava no quadro o seu raciocínio. Não havia quaisquer intervenção da minha parte ou da professora titular, uma vez que teria de ser o aluno a explicar por palavras suas aos restantes colegas: o que pensou primeiro e porque decidiu utilizar aquela operação. Apenas intervinha se o aluno demonstrasse alguma dificuldade em se expressar, se a sua explicação se mostrava incompleta ou de forma a complementar o seu raciocínio. É de referir que durante este momento se trabalha a comunicação matemática, daí a importância de dar oportunidade aos alunos de explicarem por palavras suas as suas estratégias.

No final de cada problema, em turma, eram analisadas globalmente as estratégias apresentadas e registadas no quadro, refletindo sobre quais as mais e menos eficazes.

Os alunos da turma sempre se mostraram participativos, ajudando-se uns aos outros. Por vezes, quando alguns colegas apresentavam, os restantes complementavam o que era dito ou auxiliavam algum colega que não percebesse, por exemplo, onde errara. Ao longo das discussões coletivas, cada vez mais alunos pediam para participar. Por isso, para que se sentissem motivados e, uma vez que iria escolher dois alunos tanto do grupo 1 como do grupo 2, se houvesse oportunidade, tentava variar na escolha dos alunos. É de referir que tive sempre o cuidado de selecionar alunos do grupo 1 (tarefas que tinham associadas imagens) e do grupo 2 (tarefas sem qualquer imagem associada). Quando alunos do grupo 1 apresentavam uma estratégia aditiva e os alunos do grupo 2 apresentavam uma estratégia multiplicativa, tentei que os alunos relacionassem as tarefas e as estratégias usadas, tentando que percebessem qual a mais potente. Por exemplo, se havia 18 garrafões com uma capacidade de 15 litros, o que seria mais "rápido" recorrer a uma estratégia aditiva, onde se adicionava 18 parcelas iguais a 15 ou a uma estratégia multiplicativa, utilizando um produto conhecido.

Capítulo 5

Análise dos dados

O presente capítulo inclui a análise dos dados recolhidos ao longo da minha intervenção. Este inclui a análise da tarefa diagnóstico e a análise das resoluções dos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades) e do grupo 2 (com menos dificuldades), bem como das dificuldades manifestadas na tarefa 1 (1A e 1B), na tarefa 3 (3A e 3B) e na segunda parte da tarefa 5.

Por fim, analiso em profundidade as estratégias de resolução de dois alunos, um do grupo 1 e outro do grupo 2, bem como as dificuldades que manifestaram nas tarefas 1 (1A e 1B), 2 (2A e 2B), 3 (3A e 3B), 4 e 5.

5.1. Tarefa diagnóstico (D1 e D2)

Nesta primeira secção analiso as estratégias usadas pelos alunos na resolução das duas tarefas diagnóstico (D1 e D2), iguais para toda a turma.

A tabela 7 sintetiza as resoluções dos alunos do grupo 1, explicitando se recorreram ou não às imagens que acompanharam as tarefas.

Tabela 7 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 1 nas tarefas diagnóstico (D1 e D2)

Nomes	D1 (1.1)	D1 (1.2)	D1 (1.3)	D2 (2)
Catarina	Uso de produtos conhecidos e parciais – 8×4 e 8×4 e adiciona-os - **64**	Indica apenas o resultado (possivelmente por analogia com o anterior) - **32**	Parece ter contado 1 e 1 (a partir da imagem) e engana-se - 94	Representa corretamente – 8×15, mas calcula incorretamente o produto – 8×15=400
Diogo	Faltou	Faltou	Faltou	Faltou
Gabriel	Fornece contagem 1 a 1 (a partir da imagem) (Correta) - **64**	Fornece contagem 1 a 1 (incorreta) - 28	Não responde	Representa corretamente - 8×15, mas calcula incorretamente o produto – 8×15=49
Gustavo	Fornece contagem 1 a 1 (a partir da imagem) (incorreta) - 63	Fornece contagem 1 a 1 (incorreta) - 28	Fornece contagem 1 a 1 (incorreta) - 94	Representa corretamente – 8×15, mas calcula incorretamente o produto – 8×15=400
Isabel	Calcula incorretamente – 64:8=8	Calcula incorretamente – 32:2=16	Uso de adição repetida – 32+32+32 - **96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Karina	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) – **64** (contagem a partir da imagem e explica que contou pelos dedos)	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) – **32** (contagem a partir da imagem e explica que contou pelos dedos)	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) – **96** (contagem a partir da imagem e explica que	Representa corretamente – 8×15, e calcula a partir do algoritmo corretamente o produto – 8×15=**120**

			contou pelos dedos)	
Leonor	Fornece contagem 1 a 1 (Incorreta) – 63 (contagem a partir da imagem)	Fornece contagem 1 a 1 (Incorreta) – 28 (contagem a partir da imagem)	Fornece contagem 1 a 1 (Incorreta) – 94 (contagem a partir da imagem)	Fornece contagem 1 a 1 (Incorreta) – 98 (contagem a partir da imagem)
Luiza	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) e adiciona parcialmente – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Uso de produtos conhecidos– 8×4=**32**	Uso de produtos conhecidos e parciais – 8×4 e 32 e adiciona-os – 64+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Mariana	Uso de adição – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Identifica a regularidade – **32** (contagem a partir da imagem)	Identifica corretamente o resultado – **96** – contagem a partir da imagem	Representa corretamente – 8×15, e calcula a partir do algoritmo corretamente o produto – 8×15=**120**
Ricardo C.	Faltou	Faltou	Faltou	Faltou
Ricardo G.	Faltou	Faltou	Faltou	Faltou

É de referir que apesar de três alunos deste grupo terem faltado na semana em que foi realizada esta tarefa, em conversa com a professora cooperante, e do conhecimento que esta já detém sobre a turma, esses alunos foram colocados no grupo 1.

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 11 alunos do grupo 1 apenas dois alunos, Gustavo e Leonor, não conseguem resolver as duas tarefas diagnóstico. Contudo há um aluno, Gabriel, que na tarefa D1 não responde à última pergunta e responde incorretamente à pergunta 1.2. O aluno também não responde corretamente à tarefa D2.

De entre este grupo de 11 alunos, apenas dois deles não respondem corretamente à tarefa 1: Catarina responde incorretamente à última pergunta e Isabel, calcula incorretamente a operação divisão nas duas primeiras perguntas.

De uma forma geral, os alunos deste grupo apresentam dificuldades na tarefa D2, em especial três deles apresentam incorretamente o produto: 8×15, igualando a 400 e a 49. Há também quatro alunos que resolvem a partir da contagem 1 a 1 incorretamente, na tarefa D1.

A tabela 8 resume as resoluções dos 8 alunos do grupo 1 nas duas tarefas diagnóstico. É de referir que há alunos que resolvem a partir da imagem.

Tabela 8 – Síntese das estratégias usadas pelo grupo 1 nas tarefas diagnóstico (D1 e D2)

			D1			D2
			1.1	**1.2**	**1.3**	
Estratégias usadas	Aditivas		1	0	1	0
	Multiplicativas		1	1	0	7
	Ambas (Aditiva e Multiplicativa)		0	0	1	0
	Contagem de 1 em 1 (a partir da imagem)		4	4	4	1
	Divisão		1	1	0	0
	Contagem de 1 em 1 e aditiva		1	0	0	0
	Não responde		0	0	1	0
	Não apresenta cálculos		0	1	0	0
Uso da imagem	**Identifica a regularidade**	A partir da imagem	0	1	0	0
		Sem o apoio da imagem	0	0	0	0
	Recorre à imagem		0	0	0	0

A partir da análise da tabela pode-se concluir que os alunos do grupo 1, maioritariamente, na D2 recorrem ao uso de estratégias multiplicativas – 7 alunos.

Porém, na tarefa D1, os alunos, de uma forma geral, recorrem nas três perguntas a uma estratégia de contagem de 1 em 1. Há dois alunos que utilizam uma estratégia aditiva na primeira e última pergunta. Também há um aluno que não responde à última pergunta e outro que não apresenta cálculos à segunda pergunta da tarefa D1.

A tabela 9 sintetiza as resoluções dos alunos do grupo 2, explicitando se recorreram às imagens que acompanharam as tarefas.

Tabela 9 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 2 nas tarefas diagnóstico

Nomes	D1 (1.1)	D1 (1.2)	D1 (1.3)	D2 (2)
André	Uso de produtos conhecidos – 8×8 - **64**	Identifica a regularidade - **32**	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, mas calcula incorretamente o produto – 8×15=400
Isaac	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) – **64** (contagem a partir da imagem e explica que contou pelos dedos)	Fornece contagem 1 a 1 (Correta) – **32** (contagem a partir da imagem e explica que contou pelos dedos)	Fornece contagem 1 a 1 (Incorreta) – 95 (contagem a partir da imagem e explica que contou pelos dedos)	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Margarida V.	Uso de produtos conhecidos e parciais – 4×8 e adiciona-os (incorretamente) – 32+28=60	Identifica a regularidade - **32**	Apenas refere incorretamente que faltam colocar 94 azulejos (possivelmente tentou perceber a regularidade, uma vez que apenas coloca 32, antes de responder)	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Margarida L.	Uso de produtos conhecidos – 8×8 – **64** (uso do algoritmo)	Uso de produtos conhecidos – 4×8=**32** (uso do algoritmo)	Uso de produtos conhecidos – 12×8 – **96** (uso do algoritmo)	Representa corretamente – 8×15, e calcula a partir do algoritmo corretamente o produto – 8×15=**120**
Melissa	Uso de produtos conhecidos e parciais – 8×4 e 4×8 e adiciona-os - **64**	Identifica a regularidade – **32** (contagem a partir da imagem – agrupa cada um por 32)	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96**	Contagem 1 a 1 - **120**
Nuno	Uso de adição – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Uso de produtos conhecidos – 8×4=**32**	Uso de produtos conhecidos e parciais – 8×4 e 32 e adiciona-os – 64+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula a partir do algoritmo corretamente o produto – 8×15=**120**
Rui	Uso de produtos conhecidos e parciais – 4×8 e 4×8 e adiciona-os – **64** (uso do algoritmo)	Uso de produtos conhecidos – 4×8=**32**	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96** (uso do algoritmo)	Representa corretamente – 8×15, e calcula a partir do algoritmo corretamente o produto – 8×15=**120**
Ricardo D.	Uso de adição – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Uso de produtos conhecidos – 8×4=**32**	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Sofia	Uso de adição – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Uso de produtos conhecidos – 4×8=**32**	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**
Vanessa	Uso de adição – 32+32=**64** (contagem a partir da imagem)	Uso de produtos conhecidos – 4×8=**32**	Uso de adição repetida – 32+32+32=**96**	Representa corretamente – 8×15, e calcula corretamente o produto – 8×15=**120**

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 10 alunos do grupo 2 apenas dois alunos, Isaac e Margarida V., resolvem incorretamente à última pergunta da tarefa D1. Os restantes alunos respondem corretamente à tarefa D1.

Relativamente à tarefa D2 apenas um aluno, André, resolve incorretamente a tarefa, igualando o produto 8×15 a 400. Os restantes alunos deste grupo resolvem corretamente a tarefa D2.

A tabela 10 resume as resoluções dos alunos do grupo 2 nas duas tarefas diagnóstico.

Tabela 10 – Síntese das estratégias usadas pelo grupo 2 nas tarefas diagnóstico (D1 e D2)

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2"></th><th colspan="3">D1</th><th rowspan="2">D2</th></tr>
<tr><th>1.1</th><th>1.2</th><th>1.3</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Estratégias usadas</td><td rowspan="2">Aditivas</td><td>Sem apoio da imagem</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Com apoio da imagem</td><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Multiplicativas</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ambas (Aditiva e Multiplicativa)</td><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Contagem de 1 em 1 (a partir da imagem)</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Uso da imagem</td><td rowspan="2">Identifica a regularidade</td><td>A partir da imagem</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Sem o apoio da imagem</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recorre à imagem</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table>

A partir da análise da tabela pode-se concluir que os alunos do grupo 2, maioritariamente, na tarefa D2 recorrem ao uso de estratégias multiplicativas, tal como acontece com o grupo anterior – 9 alunos.

Na tarefa D1, os alunos, de uma forma geral, recorrem nas três perguntas a uma estratégia multiplicativa. Na primeira pergunta há 4 alunos que recorrem ao uso de uma estratégia aditiva a partir da imagem. É de referir que há dois alunos que recorrem ao apoio da imagem para resolver a tarefa.

5.2. As estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos nas tarefas 1 (1A e 1B)

Nesta segunda secção analiso as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução da tarefa 1 (1A e 1B).

A tabela 11 resume as estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades), explicitando se recorreram, ou não, às imagens que acompanham a tarefa e caracterizo as estratégias e dificuldades manifestadas.

Tabela 11 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 1 na tarefa 1A

Nomes	**Estratégias**				**Dificuldades manifestadas**
	Recurso à imagem		**Parte 1**	**Parte 2**	
	Parte 1	**Parte 2**			
Catarina	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (6 grupos de 10 litros).	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (2 grupos de 30 litros).	Usa um produto conhecido: 6×10=60	Usa adição para representar a quantidade de água de dois garrafões (15+15=30) Uso de produtos conhecidos da tabuada: 2×30=60 e 3×30=90	Não manifesta.
Diogo	Não recorre à imagem.	Usa a imagem como auxílio do cálculo.	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 Agrupa as parcelas 2 a 2, para auxiliar o cálculo mental, adicionando repetidamente 10.	Adiciona repetidamente 15, recorrendo à imagem. Coloca um traço conforme vai adicionando mais 15, de modo a controlar o cálculo.	Não manifesta.
Gabriel	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2.	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2.	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 (apesar de faltar uma parcela, coloca o total correto)	Embora na imagem tenha adicionado 2 a 2 para usar o número 30 nos cálculos, abandona essa estratégia e representa a adição repetida: 15+15+15+15+15+15=90 Não explica como calculou.	Não manifesta dificuldades, apesar de lhe faltar adicionar 5 na parte 1. Parece que o aluno se distraiu a registar o número de cincos, embora tenha pensado bem.
Gustavo	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (6 grupos de 10 litros).	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (3 grupos de 30 litros).	Usa um produto conhecido: 10×6=60	Explica por escrito que fez grupos de 2 garrafões, adicionando e, depois 30 litros repetidamente (embora não tenha registado o cálculo).	Não manifesta.
Isabel	Recorre à imagem para usar a adição repetida (utiliza os números	Recorre à imagem para usar a adição repetida (utiliza os	Usa a adição repetida a partir da imagem: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60	Usa a adição repetida a partir da imagem: 15+15+15+15+15+15=90 Não explica como calculou.	Não manifesta dificuldades. Não responde à pergunta final, apenas mostra

Nomes	Estratégias				Dificuldades manifestadas
	Recurso à imagem		Parte 1	Parte 2	
	Parte 1	Parte 2			
	inscritos na imagem de cada garrafão).	números inscritos na imagem de cada garrafão).			como chegou ao resultado final para cada parte.
Karina	Não recorre às imagens da tarefa.	Não recorre às imagens da tarefa.	Usa um produto conhecido: 5×12=60	Usa um produto conhecido: 10×6=60 e intuitivamente, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (60+5+5+5+5+5+5).	Não manifesta dificuldades, apesar de na segunda parte não apresentar o resultado final, responde corretamente.
Leonor	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (6 grupos de 10 litros).	Recorre à imagem para usar a adição repetida (utiliza os números inscritos na imagem de cada garrafão).	Não apresenta qualquer tipo de cálculos. Agrupa a quantidades de águas dos garrafões 2 a 2, escrevendo em cada grupo '10'. Indica que pensou de 10 em 10.	Usa a adição repetida a partir da imagem: 30+30+30=90. Coloca um traço conforme vai adicionando mais 30, de modo a controlar o cálculo.	Demonstra algumas dificuldades em expressar o seu pensamento por escrito.
Luiza	Usa a imagem para agrupar a quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (6 grupos de 10 litros).	Usa a imagem para adicionar repetidamente a quantidade de água de cada garrafão.	A partir da imagem, calcula: 10+10+10=30 10+10+10=30 Usa adição repetida e regista: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5 +5+5=60 Como auxílio ao cálculo, regista por cima das parcelas os cálculos parciais que vai efetuando: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60	Usa a adição repetida, a partir da imagem, registando por baixo 30, 45, 60, 75, 90 (coloca um traço conforme vai adicionando mais 15, de modo a controlar o cálculo) Regista também a igualdade: 15+15+15+15+15+15=90	Não manifesta.
Mariana	Não recorre à imagem.	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Não apresenta qualquer tipo de cálculos. Apenas explica por escrito que contou mentalmente de 5 em 5	Usa a adição repetida, a partir da imagem, registando por baixo 30, 45, 60, 75, 90	Não manifesta.
Ricardo C.	Não recorre às imagens.	Não recorre às imagens.	Adiciona incorretamente: 12+5=5	Adiciona incorretamente: 6+15=15	Evidencia dificuldades na interpretação do enunciado e não consegue resolver os problemas. Responde corretamente à última questão, embora deva ter copiado a resposta.

<table>
<tr><th rowspan="3">Nomes</th><th colspan="4">Estratégias</th><th rowspan="3">Dificuldades manifestadas</th></tr>
<tr><th colspan="2">Recurso à imagem</th><th rowspan="2">Parte 1</th><th rowspan="2">Parte 2</th></tr>
<tr><th>Parte 1</th><th>Parte 2</th></tr>
<tr><td>Ricardo G.</td><td>Usa a imagem como apoio ao cálculo.</td><td>Usa a imagem como apoio ao cálculo.</td><td>Usa a adição repetida, a partir da imagem os cálculos parciais que vai efetuando:10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60.</td><td>Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore.
Calcula 15+15 registando um cálculo por decomposição em dezenas e unidades: 10+10=20+10=20</td><td>Uso incorreto do sinal de igual.</td></tr>
</table>

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 11 alunos do grupo 1 apenas um aluno, Ricardo C., não consegue resolver os dois problemas da tarefa 1. Contudo há uma outra aluna, Isabel, que, embora tenha resolvido corretamente, não consegue dar a resposta adequada à questão final sobre quem tinha comprado mais litros de água.

De entre este grupo de 11 alunos, apenas dois deles não recorrem a qualquer das imagens que acompanham a tarefa: Karina porque usa um raciocínio multiplicativo e as imagens apelam ao uso de estratégias aditivas e Ricardo C. que parece não ter compreendido os problemas. Dos outros nove há dois, Diogo e Mariana, que recorrem à imagem para apoiar o cálculo apenas no segundo problema. Provavelmente, este facto está relacionado com as características dos números envolvidos nos problemas: no primeiro o número 5, com o qual os alunos calculam facilmente, e no segundo, o número 15, com o qual é mais difícil calcular. Por isso, neste caso, alguns recorreram-se das imagens de modo a facilitar os cálculos necessários.

Relativamente ao tipo de estratégias construídas, apenas duas alunas Catarina e Karina usam estratégias multiplicativas em ambos os problemas. Além destas alunas também Gustavo recorre a uma estratégia multiplicativa, usando um produto conhecido, para resolver o primeiro problema. Os restantes alunos constroem estratégias aditivas, recorrendo, maioritariamente, ao uso das imagens que acompanham os problemas.

A análise dos dados organizados na tabela 11 e das produções dos alunos não me permite concluir se a preferência por estratégias aditivas está associada ao uso das imagens uma vez que estas sugerem, sobretudo, o recurso a este tipo de estratégias, ou se está associada ao nível de conhecimento sobre a multiplicação dos alunos.

A tabela 12 resume as estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 2 na mesma tarefa. É de referir que os enunciados desta tarefa não contêm qualquer imagem, ao contrário da anterior.

Tabela 12 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 2 na tarefa 1B

Nomes	**Estratégias**		**Dificuldades manifestadas**
	Construção de representações icónicas		
André	Não recorre a representações icónicas.	Usa produtos conhecidos: 12×5=60 6×15=90	Não manifesta.
Isaac	Não recorre a representações icónicas.	Usa produtos conhecidos: 5×12=60 6×15=90	Não manifesta.
Margarida L.	Recurso a imagens (representações icónicas). Representa os doze garrafões de 5 litros e os seis garrafões de 15 litros, com a quantidade de água inscrita em cada um.	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 15+15+15+15+15+15=90	Não manifesta.
Margarida V.	Recurso a imagens (representações icónicas). Representa os doze garrafões de 5 litros e os seis garrafões de 15 litros.	Não apresenta qualquer tipo de cálculos, embora responda corretamente.	Não manifesta.
Melissa	Não recorre a representações icónicas.	Usa produtos conhecidos: 12×5=60 6×15=90	Não manifesta.
Nuno	Recurso a imagens (representações icónicas), representando os doze garrafões de 5 litros e os seis garrafões de 15 litros.	Não coloca o símbolo '+' entre os retângulos (representação de cada garrafão). Apesar de os colocar horizontalmente, igual corretamente (60 litros e 90 litros).	Não manifesta.
Rui	Não recorre a representações icónicas.	Usa produtos conhecidos: 12×5=60 15×6=90	Não manifesta.
Ricardo D.	Não recorre a representações icónicas.	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 15+15+15+15+15+15=90	Não manifesta.
Sofia	Recorre a representações icónicas, apenas para representar os dados: representa 1 garrafão para os doze garrafões de 5 litros cada um (Ana) e outro garrafão que representa os seis garrafões de 15 litros (Rui).	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 Usa a decomposição decimal para resolver, a partir de um esquema em árvore: 15+15+15+15+15+15=90 Adiciona as dezenas (20+20+20=60) e de seguida as unidades (10+10+10=30). Por fim, adiciona os resultados finais: 30+60=90	Não manifesta.
Vanessa	Não recorre a representações icónicas.	Usa adição repetida: 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5=60 Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore: 6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+6+ 6+6 Usa produtos conhecidos: 5×12=60 6×15=90	Não manifesta.

A análise dos dados da tabela mostra que, dos 10 alunos do grupo 2, nenhum aluno manifesta dificuldades na resolução da tarefa. Assim, todos os alunos apresentam uma resposta correta à questão formulada sobre quem tinha comprado mais litros de água: a Ana ou o Rui.

De entre o grupo de 10 alunos, apenas três deles recorrem a representações icónicas: Margarida L. representa os 12 garrafões de cinco litros e os seis garrafões de 15 litros, usando adição repetida, a Margarida V., tal como a colega, representa a quantidade de água dos garrafões, mas não apresenta qualquer tipo de cálculo que mostre como chegou à resposta final e o Nuno, tal como a Margarida V., representa a quantidade de água dos garrafões, porém não coloca o sinal de '+' entre cada um, apenas igual o resultado no fim. Além disso, há uma aluna, Sofia, apenas regista os dados usando representações icónicas (figura 2), mas usa apenas registos simbólicos na resolução da tarefa.

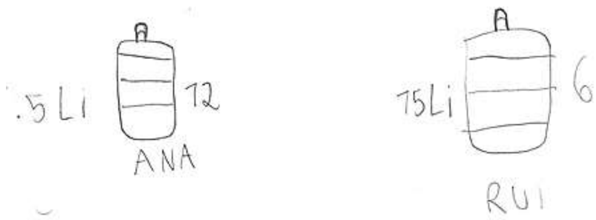


Figura 2 – Apresentação de Sofia dos dados da tarefa 1B

Relativamente às estratégias construídas, apenas dois alunos, Margarida L. e Ricardo D., utilizam estratégias aditivas, sendo que a primeira aluna sente a necessidade de efetuar os cálculos a partir de representações icónicas. Além destes alunos, uma aluna, Vanessa, começa por utilizar uma estratégia aditiva e seguidamente uma multiplicativa, tal como mostra a figura 3. A aluna, provavelmente, para efetuar 6×15, recorre também a um procedimento aditivo, adicionando o 6, 15 vezes. Depois adiciona repetidamente o 12 até perfazer 90.

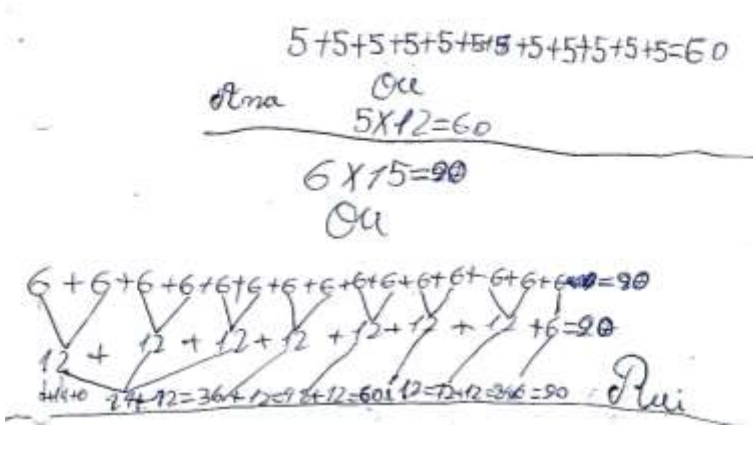


Figura 3 – Resolução de Vanessa da tarefa 1B

Apenas dois alunos deste grupo, Margarida V. e Nuno, não apresentam quaisquer tipos de cálculos. Os restantes constroem estratégias multiplicativas, maioritariamente a partir de produtos conhecidos.

A análise dos dados organizados na tabela e das produções dos alunos permite evidenciar que os alunos deste grupo que usam estratégias multiplicativas não necessitam de recorrer a representações icónicas. No que respeita à preferência por estratégias aditivas, a organização dos dados apresentados na tabela evidencia que há ainda alunos que sentem a necessidade de recorrer a representações icónicas.

5.3. Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos nas tarefas 1 (1A e 1B)

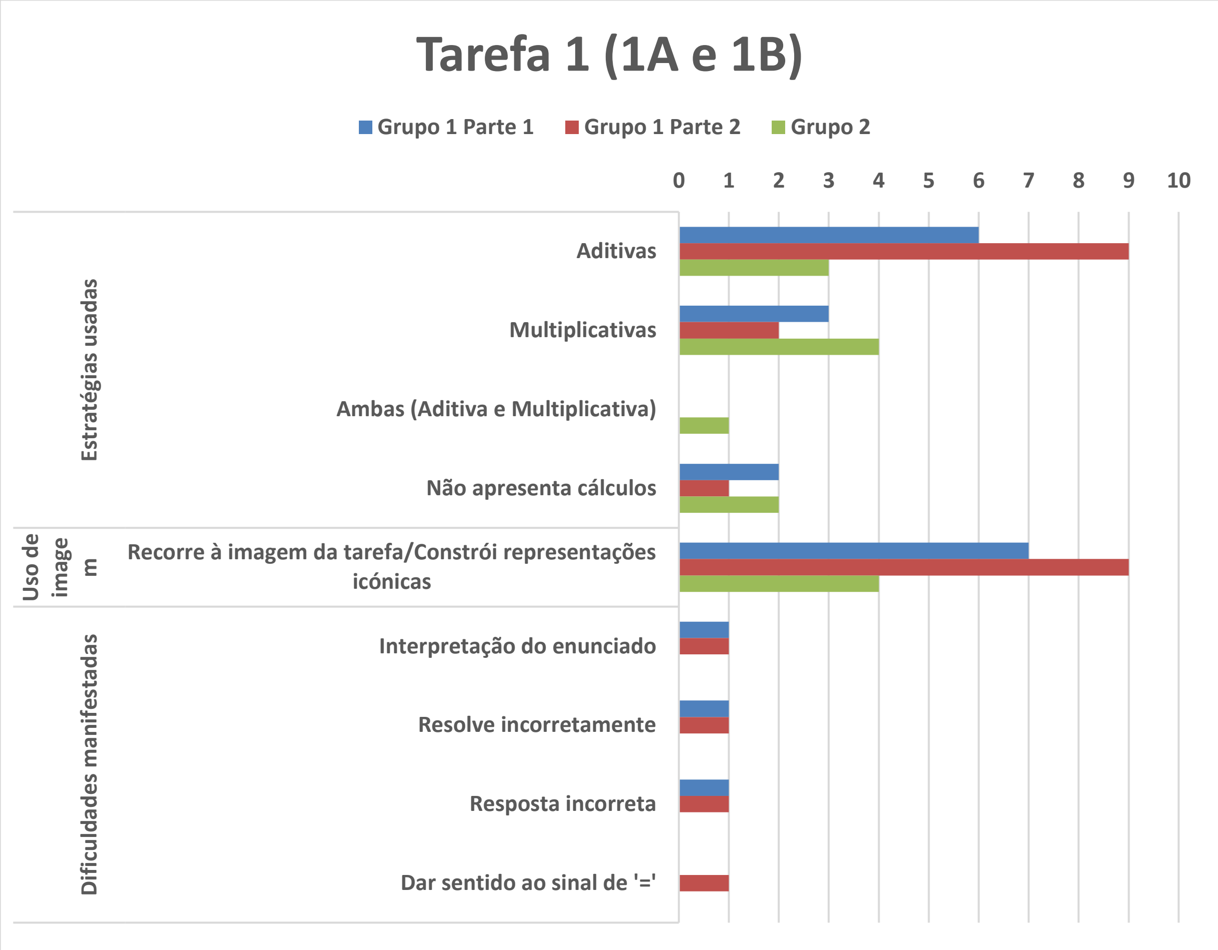
A tabela seguinte sintetiza as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na tarefa 1 (1A e 1B) do grupo 1 e 2.

Tabela 13 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 1 (1A e 1B)

		Grupo 1		Grupo 2
		Parte 1	Parte 2	
Estratégias usadas	Aditivas	6	9	3
	Multiplicativas	3	2	4
	Ambas (Aditiva e Multiplicativa)	0	0	1
	Não apresenta cálculos	2	1	2
Uso de imagem	Recorre à imagem da tarefa/Constrói representações icónicas	7	9	4
Dificuldades manifestadas	Interpretação do enunciado	1	1	0
	Resolve incorretamente	1	1	0
	Resposta incorreta	1	1	0
	Dar sentido ao sinal de '='	0	1	0

O gráfico seguinte apresenta também de uma forma sucinta as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 1A e 1B:

Gráfico 1 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 1 (1A e 1B)



A partir da análise da tabela e do gráfico verifica-se que os alunos do grupo 1, maioritariamente, utilizam estratégias aditivas, possivelmente pelas imagens presentes na tarefa apelarem ao seu uso. Contudo, verifica-se o contrário nos alunos do grupo 2, maioritariamente utilizam estratégias multiplicativas (quatro alunos) e apenas três utilizam estratégias aditivas. Além destes aspetos, em cada grupo há dois alunos que não apresentam quaisquer tipos de cálculos, embora resolvam corretamente as tarefas.

A figura seguinte mostra a resolução de Leonor da 1.ª parte da tarefa. Embora não apresente quaisquer cálculos parece ter recorrido à quantidade de água de dois garrafões, 10 litros, para contar de 10 em 10 até perfazer o total – 60 litros.

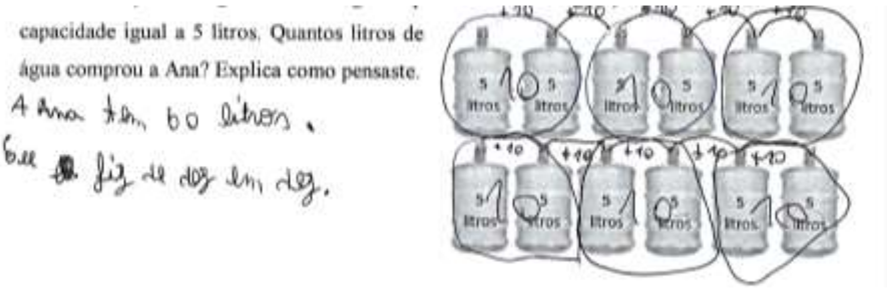


Figura 4 – Resolução da Leonor da primeira parte da tarefa 1A

A figura 5 mostra a resolução de Gustavo que, embora não tenha apresentado cálculos parece ter recorrido ao algoritmo da adição "na cabeça", como o próprio explica.

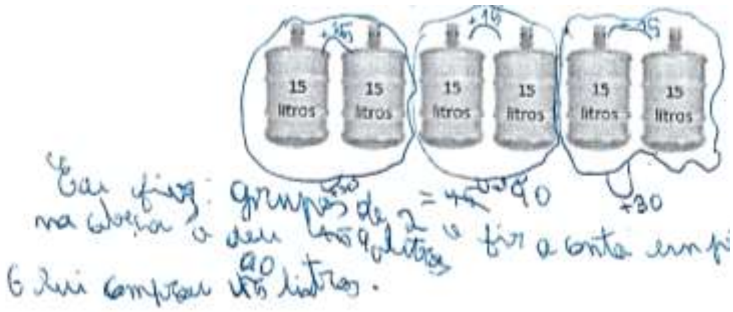


Figura 5 – Resolução do Gustavo da segunda parte da tarefa 1ª

A figura 6 mostra a resolução de Margarida V., pertencente ao grupo 2. Esta aluna teve a necessidade de desenhar representações icónicas para a ajudar a calcular. Contudo não explica como o fez, indicando apenas o total de litros da Ana e do Rui.

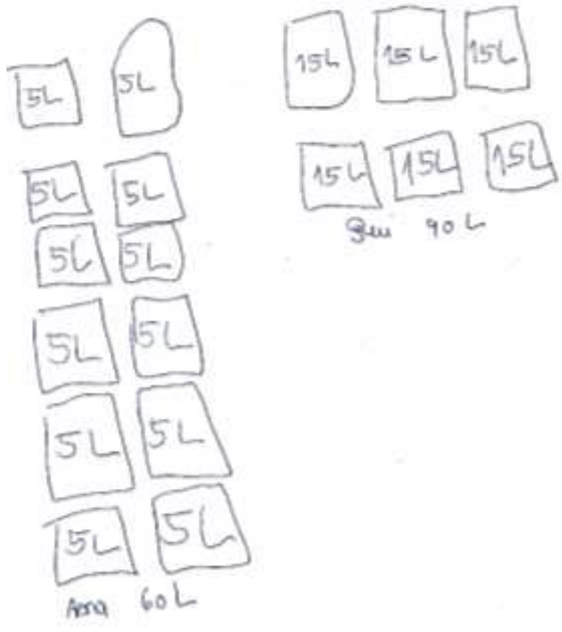


Figura 6 – Resolução da Margarida V. da tarefa 1

Relativamente à construção de representações icónicas, apenas quatro dos 10 alunos do grupo 2 a elas recorreram. No grupo 1, de entre os 11 alunos, sete utilizam o apoio da imagem da tarefa na parte 1 e nove alunos na parte 2 da mesma. Contudo, no caso dos alunos do grupo 1 a necessidade de recorrer às imagens pode ter sido "sugerida" pelas imagens que acompanharam a tarefa 1A (partes 1 e 2).

Por fim, tendo em consideração as dificuldades manifestadas, há um aluno do grupo 1 que evidencia dificuldades na interpretação do enunciado, tanto na parte 1 como na parte 2. Além disso há um aluno também do grupo 1 que, resolve incorretamente ambas as partes e outro que responde incorretamente à questão final e outro aluno que mostra dificuldade em dar sentido ao sinal de '='. Nenhum aluno do grupo 2 evidencia dificuldades na interpretação do enunciado, resolve ou dá uma resposta incorreta.

5.4. As estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na tarefa 3 (3A e 3B)

Nesta terceira secção analiso as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na resolução da tarefa 3 (3A e 3B).

A tabela 14 resume as estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades), explicitando se recorreram, ou não, às imagens que acompanham a tarefa e caracterizando as estratégias e dificuldades.

Tabela 14 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 1 na tarefa 3A

Nomes	Estratégias				Dificuldades manifestadas
	Recurso à imagem		Parte 1	Parte 2	
	Parte 1	Parte 2			
Catarina	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (9 grupos de 30 litros).	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2.	Adiciona 15+15=30 (a partir do algoritmo). Seguidamente usa um produto conhecido: 30×9=270 (usa o algoritmo) e 18×15=270	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore. Calcula 120+240=360 a partir do algoritmo. Além disso calcula 270+390 incorretamente, iguala a 630. Usa um produto conhecido: 30×9=270 (a partir do algoritmo).	Na segunda parte, parece ter algumas dificuldades em interpretar o enunciado do problema, bem como as suas estratégias. Responde incorretamente às questões formuladas.
Diogo	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (4 grupos de 60 litros).	Inicialmente adiciona 20 parcelas de 10, mas não acaba. Parece que o aluno tentava adicionar as dezenas. Como auxílio ao cálculo, regista por cima das imagens os cálculos parciais que vai efetuando: 10, 15, 20, 25,	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore. Para calcular 30+30 e 60+60 utiliza o algoritmo da adição, registando os valores corretos, 60 e 120 respetivamente.	Não manifesta.

Nomes	Estratégias				Dificuldades manifestadas
	Recurso à imagem		Parte 1	Parte 2	
	Parte 1	Parte 2			
			30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 Para adicionar 180+90 utiliza o algoritmo, igualando a 270.		
Gabriel	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Usa a adição repetida a partir da imagem (adiciona 30 parcelas de 15 litros). Porém abandona esta estratégia e começa a recorrer a um esquema em árvore, que não o acaba. Coloca como auxílio ao cálculo: 9×1=9 9×2=2 9×3=27 Usa um produto conhecido: 30×9=270 (resolve a partir do algoritmo)	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore. Para calcular 180+90, utiliza o algoritmo da adição, registando o valor correto – 270	Não manifesta.
Gustavo	Não recorre às imagens.	Não recorre às imagens.	Usa um produto conhecido: 2×9=18 Adiciona 15+15=30, a partir do algoritmo. Resolve incorretamente.	Adiciona 15+15=30. Resolve incorretamente.	Manifesta dificuldades na interpretação do enunciado, não resolve corretamente as duas partes das tarefas. Responde incorretamente às questões formuladas.
Isabel	Usa a imagem como auxílios para os cálculos.	Usa a imagem como auxílio para os cálculos.	Regista cálculos parciais 30, 30, 30… e o total correto – 270. Controla o cálculo com traços conforme vai adicionando mais 30. Resolve a partir do produto: 15×18=270	Embora na imagem tenha adicionado 2 a 2 para usar o número 60 nos cálculos e coloque o valor correto – 270, a aluna resolve a partir do produto: 15×18=270.	Não manifesta.
Karina	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (9 grupos de 30 litros).	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore.	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore.	Não manifesta.
Leonor	Não recorre à imagem.	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Resolve a partir do produto (usa o algoritmo):	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore.	Não manifesta.

Nomes	Estratégias				Dificuldades manifestadas
	Recurso à imagem		Parte 1	Parte 2	
	Parte 1	Parte 2			
			15×18=270 (120+150).	Para adicionar 240+30=270 usa o algoritmo da adição.	
Luiza	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (9 grupos de 30 litros).	Não recorre à imagem.	Usa um produto conhecido: 30×9=270 (resolve a partir do algoritmo).	Efetua os cálculos adicionando repetidamente 3 e obtém 27, em vez de 270 (6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27). Seguidamente, adiciona de 10 em 10 (20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90). Porém, apresenta a adição de 9 parcelas iguais a 30, igualando a 270. Não explica como calculou.	Manifesta dificuldades na adição, tentando efetuar a decomposição decimal das parcelas.
Mariana	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (9 grupos de 30 litros).	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (4 grupos de 60 litros).	Usa um produto conhecido: 30×9=270 (resolve a partir do algoritmo).	Usa um produto conhecido: 60×4=240. Adiciona 240+30=270.	Não manifesta.
Ricardo C.	Não recorre à imagem.	Não recorre à imagem.	Adiciona incorretamente: 2+8=18.	Adiciona incorretamente: 30+9=10	Evidencia dificuldades na interpretação do enunciado e não consegue resolver os problemas. Responde incorretamente à última questão.
Ricardo G.	Usa a imagem para agrupar quantidade de água dos garrafões 2 a 2 (9 grupos de 30 litros).	Usa a imagem como apoio ao cálculo.	Usa um produto conhecido: 30×9=270.	Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore. Recorre ao algoritmo da adição para resolver: 30+30=60 120+120=270	Não manifesta.

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 11 alunos do grupo 1, apenas dois, Gustavo e Ricardo C. não conseguem resolver ambos os problemas da tarefa 3A. Estes alunos manifestam dificuldades na interpretação do enunciado e resolvem incorretamente as duas partes da tarefa, não conseguindo também dar a resposta adequada à questão final sobre quem tinha comprado mais litros de água.

Há uma aluna, Catarina, que resolve os problemas corretamente, mostrando alguma dificuldade na interpretação das suas estratégias. Assim, a aluna, não associa os cálculos que efetuou com o que é pretendido, respondendo incorretamente à questão final. Além disso, há uma aluna, Luiza, que mostra dificuldades na adição, resolvendo incorretamente a decomposição decimal das parcelas (parte 2), tal como mostra a figura 7. A aluna efetua os cálculos adicionado repetidamente 3 (e não 30). Também adiciona de 10 em 10 e obtém 90, em vez de ter adicionado de 30 em 30.

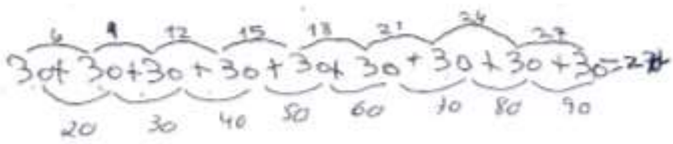


Figura 7 – Resolução da Luiza na segunda parte da tarefa 3A

Do grupo de 11 alunos, apenas dois deles não recorrem a qualquer das imagens que acompanham a tarefa, Gustavo e Ricardo C., pois ambos parecem não ter compreendido o enunciado. Dos restantes 9 alunos há dois que recorrem ao apoio das imagens apenas numa das partes: Leonor, apenas recorre ao apoio de imagem na segunda parte, provavelmente pelas características do número envolvido, o número 30, com o qual é mais difícil de calcular e Luiza que apenas recorre ao uso de imagem na primeira parte do problema pois o número 15 é um número com o qual é difícil de calcular.

Relativamente ao tipo de estratégias construídas na tarefa 3A, apenas duas alunas, Catarina e Mariana usam estratégias multiplicativas, recorrendo a um produto conhecido, tanto para resolver o primeiro como para resolver o segundo problema Além destas duas alunas também cinco alunos recorrem à mesma estratégia multiplicativa para resolver o primeiro problema. Os restantes alunos constroem estratégias aditivas para resolver ambos os problemas, recorrendo maioritariamente, ao apoio das imagens que os acompanham.

A análise dos dados organizados nesta tabela e das produções dos alunos não me permite concluir se a preferência por estratégias aditivas está associada ao uso das imagens uma vez que estas sugerem, sobretudo, o recurso a este tipo de estratégias.

A tabela 15 resume as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 2 na resolução da tarefa 3B.

Tabela 15 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 2 na tarefa 3B

Nomes	**Estratégias**		**Dificuldades manifestadas**
	Construção de representações icónicas		
André	Não recorre.	Resolve incorretamente 18×15=50 Por fim, usa um produto conhecido: 9×30=270.	Evidencia algumas dificuldades na interpretação do enunciado e não consegue resolver o problema. Responde incorretamente à questão formulada.
Isaac	Não recorre.	Usa produtos conhecidos da tabuada: 9×1=9	Não manifesta.

Nomes	Estratégias		Dificuldades manifestadas
	Construção de representações icónicas		
		9×2=18 15×1=15 15×2=30. Apresenta uma tentativa de uma estratégia aditiva, mas abandona-a (9+9 e 15+15). Por fim, usa dois produtos conhecidos, resolvendo a partir do algoritmo: 15×9=270 18×15=270 (90+180)	
Margarida L.	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.
Margarida V.	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.
Melissa	Recorre a “retângulos” para representar os garrafões, colocando a quantidade de água de cada garrafão inscrita em cada um (representação icónica).	Regista uma adição repetida de 18 parcelas iguais a 15, abandona esta estratégia. Usa um produto conhecido: 30×9=270. Regista uma adição repetida de 9 parcelas iguais a 30. Usa dobros para adicionar, recorrendo a um esquema em árvore. Recorre ao algoritmo da adição para resolver: 30+30=60 Adiciona em coluna: 120+120=240+30=270.	Não manifesta.
Nuno	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.
Rui	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.
Ricardo D.	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.

Nomes	Estratégias		Dificuldades manifestadas
	Construção de representações icónicas		
Sofia	Recorre a representações icónicas, apenas para representar os dados: representa 1 garrafão para os dezoito garrafões de 15 litros cada um (Joana) e outro garrafão que representa os nove garrafões de 30 litros (Rui).	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.
Vanessa	Não recorre.	Usa um produto conhecido, resolve a partir do algoritmo: 30×9=270 Resolve também a partir do algoritmo: 18×15=270 (90+180)	Não manifesta.

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 10 alunos do grupo 2, apenas um aluno, André, manifesta dificuldades na interpretação do enunciado da tarefa não respondendo corretamente à questão formulada sobre quem tinha comprado mais litros de água.

De entre o grupo de 10 alunos, apenas uma aluna constrói representações icónicas: Melissa representa os 18 garrafões de 15 litros e os nove garrafões de 30 litros, usando adição repetida numa primeira parte e seguidamente recorre a dobros para adicionar, a partir de um esquema em árvore. Os restantes alunos usam apenas representações simbólicas para resolver o problema, recorrendo maioritariamente a produtos conhecidos. Também Melissa apresenta uma estratégia multiplicativa (figura 8), embora pareça ter resolvido o problema através de estratégias aditivas.

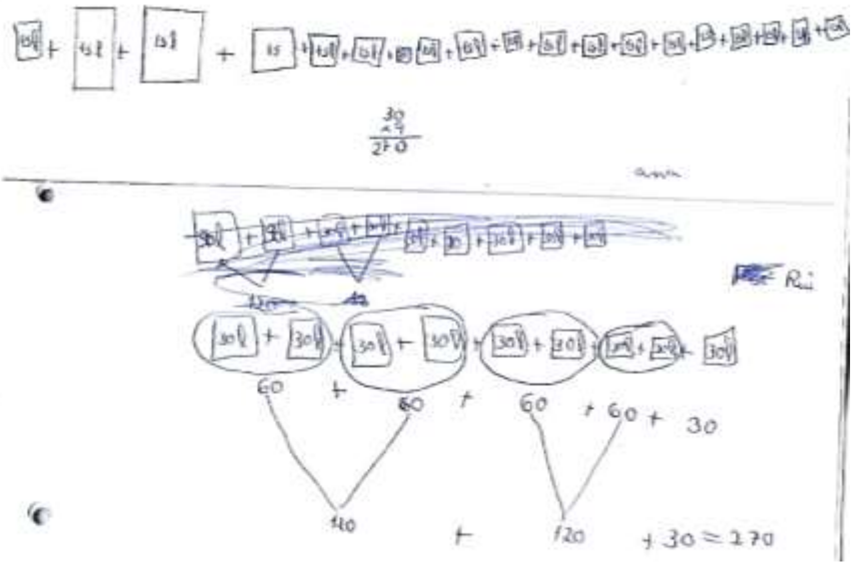


Figura 8 – Resolução da Melissa da tarefa 3B

Tal como na resolução da tarefa 1B, Sofia apresenta os dados de forma icónica, mas não utiliza este tipo de representação para resolver a tarefa, tal como mostra a figura 9:

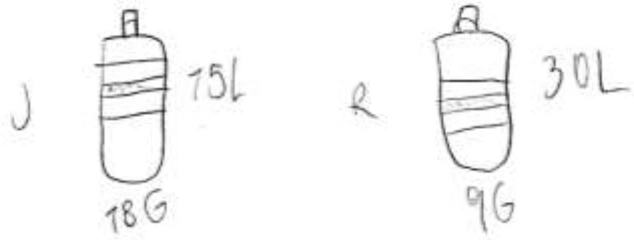


Figura 9 – Apresentação dos dados da tarefa 3B da Sofia

A análise dos dados organizados na tabela e das produções dos alunos permite evidenciar que os alunos que usam estratégias multiplicativas não necessitam de recorrer à construção de representações icónicas. No que respeita à preferência por estratégias aditivas, a análise da tabela evidencia que há uma minoria que sente a necessidade de recorrer a representações icónicas.

5.5. Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na tarefa 3 (3A e 3B)

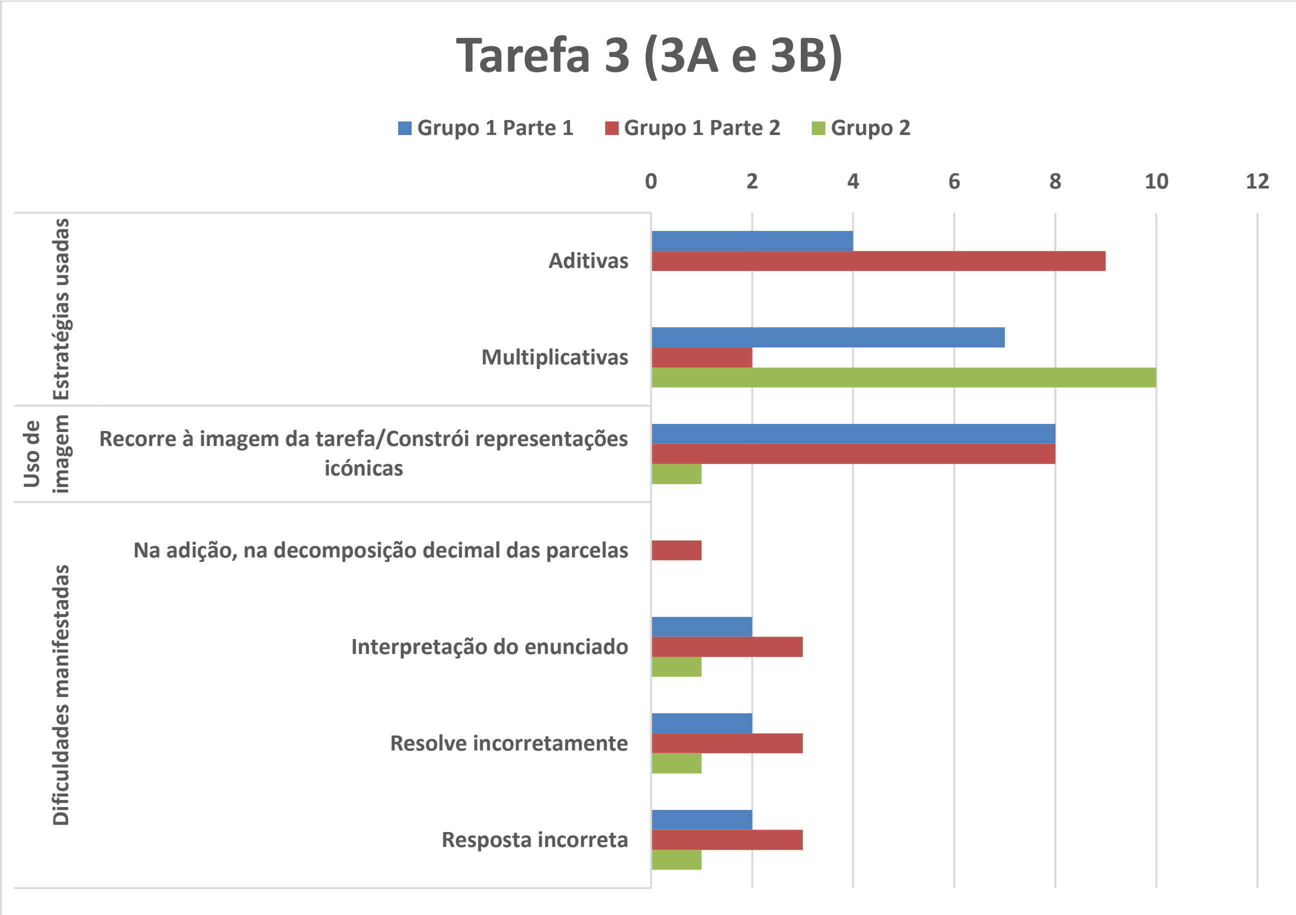
A tabela seguinte sintetiza as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na resolução das tarefas 3A e 3B.

Tabela 16 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na tarefa 3 (3A e 3B)

		Grupo 1		Grupo 2
		Parte 1	**Parte 2**	
Estratégias usadas	Aditivas	4	9	0
	Multiplicativas	7	2	10
Uso de imagem	Recorre à imagem da tarefa/Constrói representações icónicas	8	8	1
Dificuldades manifestadas	Na adição, na decomposição decimal das parcelas	0	1	0
	Interpretação do enunciado	2	3	1
	Resolve incorretamente	2	3	1
	Resposta incorreta	2	3	1

O gráfico seguinte apresenta também de uma forma sucinta as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 3A e 3B:

Gráfico 2 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 3 (3A e 3B)



A partir da análise da tabela 16 e do gráfico 2 verifica-se que os alunos do grupo 1, na parte 1 utilizam sobretudo estratégias multiplicativas e na parte 2 usam maioritariamente estratégias aditivas, possivelmente pelas imagens presentes na tarefa apelarem ao seu uso. Contudo, verifica-se o contrário nos alunos do grupo 2, em que todos utilizam estratégias multiplicativas.

Relativamente ao uso de imagens ou representações icónicas, de entre os 10 alunos do grupo 2, apenas um aluno constrói representações icónicas. No grupo 1, de entre os 11 alunos, 8 alunos utilizam o apoio da imagem tanto na parte 1 como na parte 2 da tarefa.

Por fim, tendo em consideração as dificuldades manifestadas, há dois alunos do grupo 1 que evidenciam dificuldades na interpretação do enunciado e, por isso, resolvem incorretamente as duas partes da tarefa. Além disso, de entre os dois alunos, há um que consequentemente responde incorretamente e, o outro que responde corretamente, provavelmente, porque copiou a resposta durante a discussão coletiva ou copiou por um colega. Ainda no grupo 1, há uma aluna que mostra dificuldades na interpretação do enunciado e responde incorretamente apenas na parte 2. No grupo 2, há um aluno que manifesta dificuldades tanto na interpretação do enunciado, como na resolução e resposta.

5.6. As estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na parte 2 da tarefa 5

Nesta quarta parte da análise de dados foco-me nas estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e grupo 2 na segunda parte da quinta tarefa. Tal como nas análises anteriores irei focar-me no recurso a representações icónicas e o tipo de estratégias utilizadas pelos alunos. É de realçar que o enunciado desta tarefa 5 era o mesmo tanto para os alunos do grupo 1 como do grupo 2. É ainda de notar que este enunciado não inclui qualquer imagem.

A tabela 17 resume as estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos do grupo 1 (com mais dificuldades), explicitando se recorreram, ou não, à construção de representações icónicas e caracterizando as estratégias e dificuldades.

Tabela 17 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 1 na parte 2 da tarefa 5

Nomes	Estratégias		Dificuldades manifestadas
	Construção de representações icónicas		
Catarina	Não recorre.	Recorrer a uma estratégia aditiva, abandonando-a. Resolve as adições a partir do algoritmo: 132+12=144 132+144=276 276+12=288 Apresenta dois produtos conhecidos, como apoio ao cálculo da divisão: 12×1=12 12×2=24. Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Diogo	Não recorre.	Adiciona em coluna: 12+12=24+12=36+12=48+12=60+12= 72+12=84+12=96+12=108+12=120+12=132	Não manifesta.
Gabriel	Não recorre.	Usa produtos conhecidos, resolvendo a partir do algoritmo: 12×10=120 (0+120) 12×11=132 (12+120)	Não manifesta.
Gustavo	Não recorre.	Usa produtos conhecidos consecutivos: 12×1=12 12×2=24 12×3=36 … 12×11=132 12×14=144	Não manifesta.

Nomes	Estratégias		Dificuldades manifestadas
	Construção de representações icónicas		
		Destaca o produto, colocando de lado: 12×11=132	
Isabel	Não recorre.	Apresenta dois produtos: 12×10=120 12×11=132. Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Karina	Não recorre.	Apresenta dois produtos conhecidos, como apoio ao cálculo da divisão: 12×1=12 12×2=24. Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Leonor	Não recorre.	Resolve o produto: 12×11=132	Não manifesta.
Luiza	Não recorre.	Recorre à operação divisão. Efetua corretamente o algoritmo.	Não manifesta.
Mariana	Não recorre.	Resolve os produtos, a partir do algoritmo: 12×10=120 (0+120) 12×11=132 (12+120)	Não manifesta.
Ricardo C.	Não recorre.	Apresenta os produtos: 12×10=120 12×11=132	Não manifesta.
Ricardo G.	Não recorre.	Resolve os produtos, a partir do algoritmo: 12×10=120 (0+120) 12×11=132 (12+120)	Não manifesta.

A análise dos dados da tabela mostra que, dos 11 alunos do grupo 1 apenas uma aluna, Isabel, mostra dificuldades quando resolve a divisão a partir do algoritmo.

Os 11 alunos deste grupo, não recorrem a qualquer tipo de representações (desenhos, entre outros), provavelmente por ser a última tarefa, havendo assim uma possível evolução a este nível. É de realçar que este foi o grupo de alunos que resolveu as tarefas anteriores que incluía imagens no seu enunciado.

Relativamente ao tipo de estratégias construídas, a maioria dos alunos – 9, utiliza uma estratégia multiplicativa, usando pelo menos um ou dois produtos conhecidos. Além disso, um aluno recorre a uma estratégia aditiva, provavelmente, por ainda não se sentir confortável em usar uma estratégia multiplicativa. E há ainda uma aluna, Luiza, que recorre à divisão, resolvendo a partir do algoritmo, como mostra a figura 10:

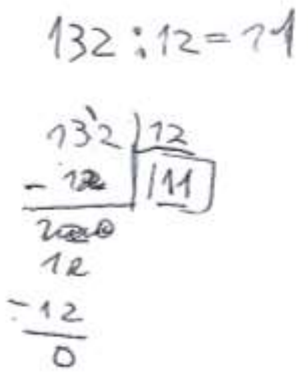


Figura 10 – Resolução de Luiza da parte 2 da tarefa 5

A análise dos dados organizados na tabela 17 e das produções dos alunos, permite-me concluir, que os alunos não sentiram a necessidade de construir representações icónicas e houve uma maior preferência por estratégias multiplicativas.

A tabela 18 resume as estratégias e dificuldades evidenciadas pelos alunos do grupo 2 na mesma tarefa.

Tabela 18 – Estratégias e dificuldades manifestadas pelo grupo 2 na parte 2 da tarefa 5

Nomes	**Estratégias**		**Dificuldades manifestadas**
	Construção de representações icónicas		
André	Não recorre.	Usa dois produtos conhecidos: 12×1=12 12×2=24. Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Isaac	Não recorre.	Usa dois produtos conhecidos: 12×10=120 12×11=132 12×14=144 Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Margarida L.	Não recorre.	Usa produtos conhecidos consecutivos: 12×0=0 12×1=12 12×2=24 … 12×10=120 12×11=132 Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Margarida V.	Não recorre.	Usa produtos conhecidos consecutivos: 12×0=0 12×1=12 12×2=24 …. 12×10=120 12×11=132	Não manifesta.
Melissa	Não recorre.	Usa produtos conhecidos: 12×1=12	Não manifesta.

Nomes	Estratégias		Dificuldades manifestadas
	Construção de representações icónicas		
		12×2=24 12×3=36 Seguidamente adiciona sucessivamente: 36+12=48 48+12=60 60+12=72 72+12=84 84+12=96 96+12=108 108+12=120 120+12=132	
Nuno	Não recorre.	Apresenta o produto: 12×10=120 Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Rui	Não recorre.	Subtrai em coluna: 132–12=120–12=108–12=96–12=84–12= 72–12=60–12=48–12=36–12=24–12=12–12=0	Não manifesta.
Ricardo D.	Não recorre.	Recorre à operação divisão. Efetua corretamente o algoritmo.	Não manifesta.
Sofia	Não recorre.	Apresenta três produtos: 12×10=120 12×11=132 12×12=144. Regista usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Relaciona a divisão com a multiplicação.	Não manifesta.
Vanessa	Não recorre.	Subtrai em coluna: 132–12=120–12=108–12=96–12=84–12= 72–12=60–12=48–12=36–12=24–12=12–12=0. Coloca um traço conforme vai adicionando o número de 12, de modo a controlar o cálculo.	Não manifesta.

A análise dos dados da tabela evidencia que, dos 10 alunos do grupo 2 (tal como acontece no grupo 1 com dois alunos, veja-se na tabela 17), cinco registam usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo. Estes alunos identificam o problema como sendo de divisão. Relacionam com a multiplicação e procuram o produto correspondente começando por um produto de referência: 12×10. Depois destes registam usando uma representação vertical da divisão (figura 11).

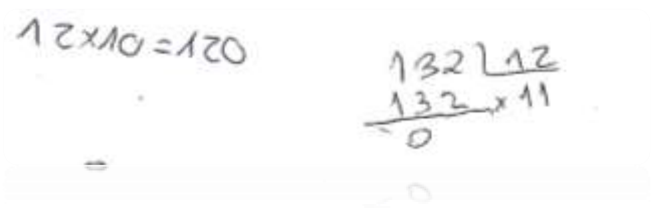


Figura 11 – Resolução de Nuno da parte 2 da tarefa 5

Tal como no grupo 1, nenhum aluno recorre ao uso de representações icónicas. É de referir que as tarefas apresentadas a este grupo, com exceção da quarta, não tiveram quaisquer imagens associadas ao enunciado.

De entre o grupo de 10 alunos, seis recorrem ao uso de estratégias multiplicativas. Além disso, há dois alunos, Rui e Vanessa, que utilizam uma estratégia subtrativa, tal como mostra a figura 12.

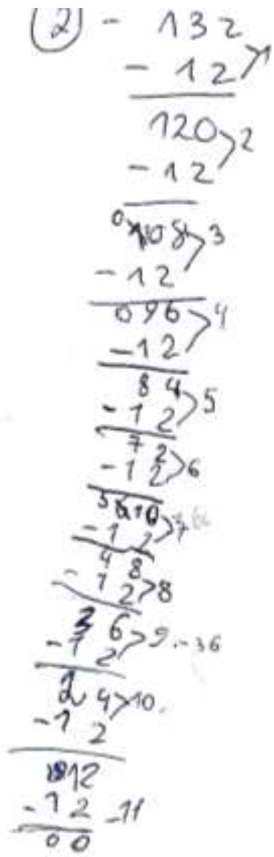


Figura 12 – Resolução de Vanessa da parte 2 da tarefa 5

Para além disso, há um aluno, Ricardo D., que recorre à operação divisão e efetua corretamente o algoritmo, tal como mostra a figura 13.

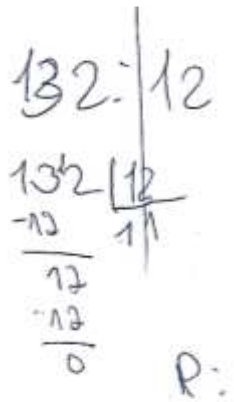


Figura 13 – Resolução de Ricardo D. da parte 2 da tarefa 5

A análise dos dados organizados na tabela e das produções dos alunos permite evidenciar que os alunos deste grupo, não necessitam de recorrer a representações icónicas, qualquer que seja a estratégia usada.

5.7. Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na segunda parte da tarefa 5

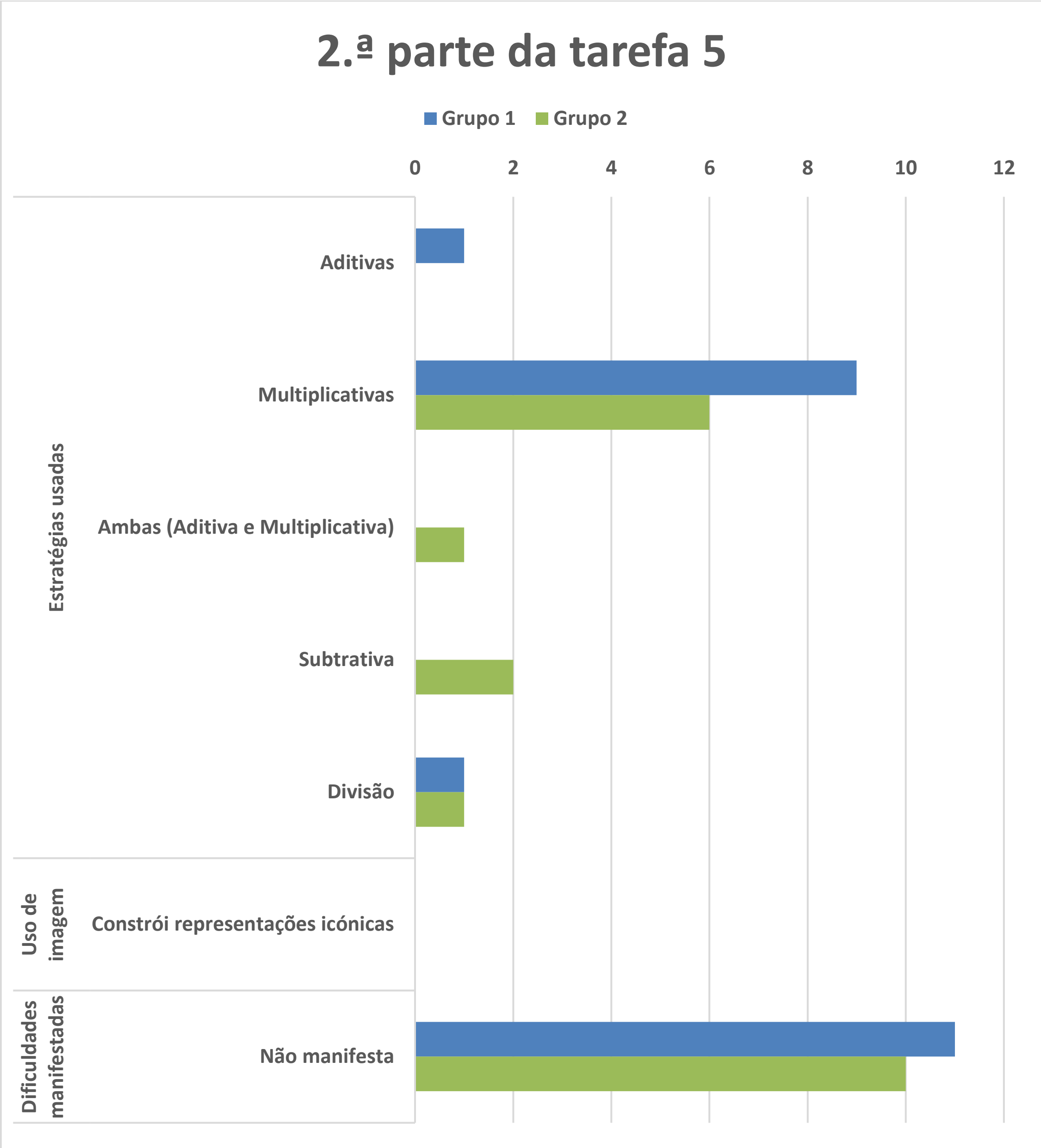
A tabela seguinte mostra de forma breve as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos na segunda parte da tarefa 5 do grupo 1 e 2.

Tabela 19 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na segunda parte da tarefa 5

		Grupo 1	Grupo 2
		Parte 2	
Estratégias usadas	Aditivas	1	0
	Multiplicativas	9	6
	Ambas (Aditiva e Multiplicativa)	0	1
	Subtrativa	0	2
	Divisão	1	1
Uso de imagem	Constrói representações icónicas	0	0
Dificuldades manifestadas	Não manifesta dificuldades	11	10

O gráfico seguinte mostra também, de uma forma sucinta, as estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na segunda parte da tarefa 5:

Gráfico 3 – Síntese das estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na segunda parte da tarefa 5



A partir da análise da tabela 19 e do gráfico 3 verifica-se que os alunos do grupo 1, maioritariamente, utilizam estratégias multiplicativas (9 alunos), um aluno utiliza uma estratégia aditiva e um aluno utiliza a divisão. Também os alunos do grupo 2 usam sobretudo estratégias multiplicativas (6 alunos), havendo uma aluna que utiliza tanto uma estratégia aditiva como multiplicativa, dois alunos que utilizam uma estratégia subtrativa e um aluno que utiliza a divisão.

Relativamente à construção de representações icónicas, nenhum dos alunos da turma sentiu a necessidade de recorrer a desenhos/representações para resolver a tarefa.

Por fim, tendo em consideração as dificuldades manifestadas, nenhum aluno do grupo 1 e do grupo 2 evidencia dificuldades na resolução da parte 2 da tarefa 5. É de referir que há alunos que utilizam estratégias multiplicativas, mas registam usando uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo, relacionando com a multiplicação (três alunos do grupo 1 e cinco alunos do grupo 2).

Nas secções seguintes analiso as estratégias e dificuldades manifestadas por uma aluna do grupo 1 e um aluno do grupo 2.

5.8. Isabel

Isabel é uma aluna que, a partir da análise da resolução da tarefa diagnóstico, foi colocada no grupo 1. As tarefas resolvidas por este grupo, com mais dificuldades, tinham o apoio de imagens (tarefas 1A, 2A e 3A, em anexo).

5.8.1. As resoluções de Isabel

Tarefa 1 – Quem comprou mais litros de água?

Na primeira parte da tarefa, em que era preciso calcular quantos litros de água tinha comprado a Ana (um total de 12 garrafões com a capacidade de 5 litros cada um) Isabel resolve-a como mostra a figura 14.

Figura 14 – Resolução de Isabel da primeira parte da tarefa 1A

Para resolver esta primeira questão Isabel utiliza as imagens (representação icónica). A aluna apoia-se nas imagens para chegar ao resultado final, uma vez que nos garrafões aparece a indicação de quanto tem cada um, Isabel coloca o símbolo ‘+’ entre cada um, igualando no fim o resultado final. Desta forma, parece ter adicionado mentalmente 5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5 calculando corretamente o resultado correspondente – 60 litros.

Estes cálculos parecem ter sido realizados mentalmente e a aluna não regista qualquer tipo de simbologia ou esquemas/desenhos que mostrem como chegou ao resultado. Efetivamente, uma vez que o 5 é um número de referência parece ter facilitado a resolução.

A resposta dada à primeira pergunta parece ser apenas a tradução dos cálculos que efetuou, uma vez que que indica que '12 garrafões de 5l é igual a 60 litros'. A resposta correspondente à pergunta efetuada seria "A Ana comprou 60 litros de água'.

Na segunda parte da tarefa em que era necessário calcular a quantidade de água contida em 6 garrafões com a capacidade de 15 litros cada um (comprados pelo Rui), Isabel recorre-se novamente da imagem e usa uma estratégia aditiva.

Figura 15 – Resolução de Isabel da segunda parte da tarefa 1A

Nos garrafões aparece a indicação de quanto tem cada um, assim Isabel coloca o símbolo '+' entre cada um, igualando no fim o resultado final. Desta forma, parece ter adicionado mentalmente 15+15+15+15+15+15 calculando corretamente o resultado correspondente às adições de parcelas iguais – 90 litros.

Tal como na situação anterior, a aluna não regista qualquer tipo de simbologia ou esquemas/desenhos que mostrem como chegou ao resultado coreto. Também neste caso, a resposta dada à segunda pergunta parece ser apenas o modo como pensou e que traduz a representação que efetuou, indica que '6 garrafões de 15 l é igual a 90 litros', uma vez que a resposta correspondente seria "O Rui comprou 90 litros de água'.

A estratégia usada pela Isabel, tal como na resolução da primeira parte da tarefa é uma estratégia aditiva, sugerida pelas imagens.

Para responder à última questão (Quem comprou mais litros de água?), Isabel escreve as igualdades representadas na figura 16, recorrendo à adição de parcelas iguais.

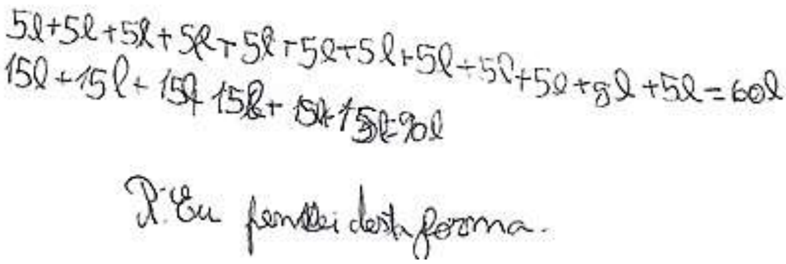


Figura 16 – Reposta de Isabel à tarefa 1A

Dá como resposta “Eu pensei desta forma” não respondendo efetivamente ao pretendido – quem comprou mais litros de água. Por isso interpelo-a, ainda durante a exploração da tarefa:

Investigadora: Isabel, a que conclusão chegaste?

Isabel: A Ana comprou 60 litros e o Rui comprou 90 litros de água…

Investigadora: Então consegues responder à última pergunta?

Isabel: Sim, já respondi!

Investigadora: Isabel, podes ler a pergunta 3?

Isabel: Quem comprou mais litros de água, a Ana ou o Rui? Explica como pensaste.

Investigadora: O que tu respondeste corresponde à parte explica como pensaste. Assim fiquei sem saber se foi a Ana ou o Rui que comprou mais.

Isabel: Pois…

Investigadora: Consegues olhando para os teus cálculos indicar-me afinal quem comprou mais litros de água?

(Isabel fica um pouco pensativa, começando a verbalizar os seus pensamentos)

Isabel: Então a Ana comprou 60 litros e o Rui comprou 90 litros…quem comprou mais foi o Rui.

A análise do diálogo mostra que a aluna tem dificuldades em responder ao pretendido, apenas tenta revelar o seu pensamento. Apenas explica como chegou ao resultado final, usando uma estratégia aditiva.

Ao identificar que Isabel não atribuía significado às suas resoluções de acordo com o contexto do problema, fui-lhe colocando questões de forma a orientá-la nesse sentido. Deste modo, após Isabel pensar sobre o que apresentara, responde corretamente oralmente.

Tarefa 2 – Quantos litros de água tem cada garrafão?

Na segunda tarefa, em que era preciso calcular quantos litros de água tinha cada garrafão comprado pela Ana – 8 garrafões com um total de 40 litros, Isabel resolve-a como mostra a figura 17.

Figura 17 – Resolução de Isabel à tarefa 2A

Nesta tarefa Isabel tenta chegar à resolução do mesmo modo que na tarefa anterior. Assim, apoia-se nas imagens dos garrafões e "adiciona-as" para perfazer um total de 40 litros. Contudo, parece alterar a estratégia, uma vez que precisa de saber a capacidade de cada garrafão. Parece ter recorrido depois a produtos conhecidos da tabuada, pois regista $8 \times 5 = 40$.

A resposta dada traduz o modo como pensou: '*Eu pensei na tabuada do 8 e então descobri que 8×5=40*', uma vez que a resposta correspondente seria "Cada garrafão tem 5 litros de água'. Por isso, perguntei-lhe, durante a exploração da tarefa:

Investigadora: Isabel, afinal quantos litros tem cada garrafão?

Isabel: Eu fiz assim: se há oito garrafões e no total têm 40 litros, pensei na tabuada do 8. Pensei qual o número que multiplicado por 8 dava 40 e descobri que era o 5.

Investigadora: Então consegues responder à pergunta?

(Isabel fica um pouco pensativa)

Investigadora: Sabes explicar-me em $8 \times 5 = 40$ o que é que significa cada número?

Isabel: O 8 é dos garrafões…

Investigadora: Sim, e que mais me podes dizer?

Isabel: O 40 é o número total de litros de água….

Investigadora: E o que é que precisamos de saber?

Isabel: Quantos litros de água tem cada garrafão…

Investigadora: E olhando para o que escreveste e pensando no que tu disseste, sabes indicar quanto litros de água tem cada garrafão?

(Isabel fica um pouco pensativa novamente)

Isabel: 5?

Investigadora: 5? Onde queres chegar?

Isabel: 5 são os litros de cada garrafão…

A análise do diálogo mostra que Isabel tem dificuldade em responder à questão "Quantos litros de água tem cada garrafão?", embora explique corretamente como procurou o número que multiplicado por 8 é igual a 40. Ao identificar que Isabel não atribuía significado à expressão '8×5=40' de acordo com o contexto do problema, fui-lhe colocando questões que a orientassem nesse sentido. Deste modo, ainda que com algum receio, Isabel responde que o 5 corresponde à quantidade de água de cada garrafão

A estratégia usada pela Isabel é uma estratégia multiplicativa, apesar de inicialmente tentar utilizar as imagens e usar uma estratégia aditiva para chegar ao resultado final.

Tarefa 3 – Quem comprou mais litros de água?

Na primeira parte da tarefa, em que era preciso calcular quantos litros de água tinha comprado a Joana (num total de 18 garrafões com 15 litros cada um), Isabel resolve-a como mostra a figura 18.

Figura 18 – Resolução de Isabel da primeira parte da tarefa 3A

Nesta primeira questão Isabel utiliza o apoio das imagens para a resolver (representação icónica). A aluna recorre às imagens para chegar ao resultado, colocando o símbolo '+' entre cada imagem do garrafão, igualando no fim o resultado final. Para além disso, agrupa os garrafões dois a dois, formando nove grupos de 30 litros. Para calcular esse resultado, inicialmente tenta adicionar a partir do algoritmo, mas, uma vez que se engana no cálculo, passa para o uso da multiplicação. Embora represente o algoritmo da multiplicação para resolver 15×18, e escreva o resultado correto – 270 litros, não há evidências de que o tenha calculado deste modo.

A análise dos seus registos evidencia que tenta usar o algoritmo da multiplicação, mas que o faz incorretamente, riscando os cálculos efetuados. Assim, não há evidências do modo como chegou ao número 270. Provavelmente este foi escrito já durante a discussão coletiva. Contudo, a aluna em diálogo indica que o 15 representa os litros de cada garrafão e o 18 representa o número total de garrafões, tendo explicitado oralmente quando apresenta a sua resolução na discussão coletiva: “Quando multipliquei 15 litros pelos 18 garrafões deu-me 270 litros”. Embora também aqui não diga como efetuou os cálculos.

Para realizar a segunda parte da tarefa em que era necessário calcular a quantidade de água contida em 9 garrafões com a capacidade de 30 litros cada um (comprados pelo Rui), Isabel recorre-se novamente da imagem e usa uma estratégia aditiva.

Figura 19 – Resolução de Isabel da segunda parte tarefa 3A

Na segunda parte da tarefa, Isabel utiliza o apoio das imagens para calcular (representação icónica). Inicialmente a aluna coloca o símbolo ‘+’ entre a imagem de cada garrafão, utilizando uma estratégia aditiva, mas sem sucesso, igualando no fim o resultado final (270). Desta forma, parece ter adicionado mentalmente a quantidade de água dos garrafões dois a dois, formando quatro grupos de 60 e um de 30.

Embora tenha tentado adicionar as parcelas duas a duas, aparentemente sem sucesso, parece ter chegado à resolução através do cálculo 9×30, que efetuou usando o algoritmo.

A resposta à segunda pergunta foi dada oralmente, uma vez que, na folha, Isabel não dá qualquer tipo de resposta. Assim, quando questionada refere que o Rui comprou 270 litros de água.

Á última pergunta, a aluna responde incorretamente, mostrando que interpretou mal o enunciado, rasurando em seguida coloca a resposta correta, como mostra a figura 20.

Figura 20 – Resposta de Isabel à tarefa 3A

A análise da resposta da aluna à questão 3 mostra que, inicialmente, escreve que foi o Rui quem comprou mais litros de água. Esta resposta parece decorrer dos primeiros cálculos efetuados por Isabel sobre a primeira parte da tarefa. Efetivamente, na primeira parte a aluna chega a um resultado incorreto (135), que depois rasura. Por isso, ao comparar 135 com 270 identifica corretamente que 270 corresponde a uma maior quantidade de água. Provavelmente já no decurso da discussão coletiva altera o resultado de 135 para 270.

No início da discussão coletiva ainda refere que foi o Rui quem comprou mais litros de água, surgindo o seguinte diálogo:

Investigadora: Isabel, repara nos cálculos que apresentaste…o que é que me podes dizer?

Isabel: Então a Joana tinha 18 garrafões com 15 litros e quando fiz a multiplicação deu 270 litros. O Rui tinha 9 garrafões com 30 litros e quando fiz a multiplicação deu 270 litros.

Investigadora: Então afinal quem é que comprou mais litros de água? Sabes dizer-me a mim e aos teus colegas?

Isabel: Foi o Rui…

Investigadora: Isabel, já reparaste nos valores que te deram os dois cálculos?

(Isabel analisa durante 1 a 2 minutos)

Isabel: Ah, são iguais!

Investigadora: Pois são! E o que é que isso quer dizer?

Isabel: Que deu a mesma coisa!

Investigadora: Consegues explicar melhor? Para percebermos o que é isso de ter dado a mesma coisa.

Isabel: Então se a Joana comprou 270 litros e o Rui comprou 270 litros…os dois compraram a mesma coisa…

A análise do diálogo evidencia que a aluna, através do questionamento da investigadora, altera a sua resposta e dá significado aos resultados obtidos. Após este diálogo, Isabel corrige a sua resposta para "Os dois tiveram a mesma coisa".

Tarefa 4 – A caderneta de cromos

Para resolver a primeira pergunta da quarta tarefa, em que era preciso calcular quantas páginas de uma caderneta de cromos tinha o Francisco completamente preenchidas (sabendo que cada página levava 8 cromos), Isabel resolve-a como mostra a figura 21.

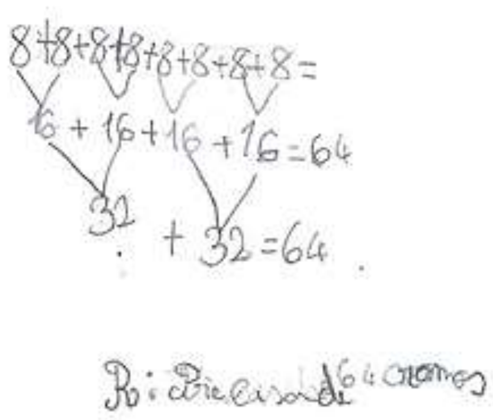


Figura 21 – Resolução de Isabel da primeira questão da tarefa 4

A aluna recorre à adição repetida adicionado oito vezes o oito. Para calcular adiciona dobros, ou seja, as parcelas 2 a 2, sucessivamente, usando um esquema em árvore. Apesar de apresentar o resultado final na segunda igualdade, adiciona novamente parcelas iguais (32+32) igualando de novo ao resultado final. A aluna não recorre ao uso de imagens para resolver a tarefa.

A aluna resolve corretamente as adições chegando ao resultado pretendido. Contudo, nesta parte da tarefa, não responde à questão – "Quantas páginas precisa o Francisco para ter a caderneta toda preenchida?". Para além disso, faltam alguns passos para chegar ao resultado final, uma vez que apenas resolveu como se o Francisco tivesse 64 cromos e não 96 cromos. Por isso, não resolve corretamente a questão, manifestando alguma dificuldade na compreensão do enunciado.

No final, a resposta dada à primeira pergunta encontra-se incorreta, uma vez que a aluna refere que o Francisco "Precisa de 64 cromos" e não indica quantas folhas da caderneta já estavam preenchidas.

Na segunda parte, em que era preciso saber quantos cromos a Vera já tinha, a aluna recorre à multiplicação resolvendo a partir do algoritmo. Como na questão anterior, Isabel não sente a necessidade de recorrer a imagens/desenhos para chegar ao resultado final.

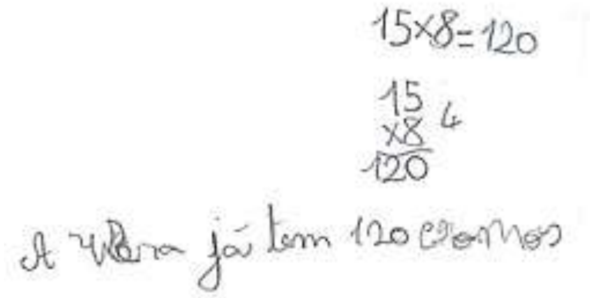


Figura 22 – Resolução de Isabel da segunda questão da tarefa 4

Nesta segunda questão a aluna não mostra dificuldades na sua resolução e responde corretamente: "A Vera já tem 120 cromos", explicando, num diálogo informal, que pensou da seguinte maneira "se cada página podia ter 8 cromos e se a Vera já tinha 15 páginas…pensei em utilizar a multiplicação para chegar ao resultado final".

Tarefa 5 – Os livros

Na última tarefa, em que era preciso calcular numa primeira questão quantas páginas tinha o livro do Nuno (sabendo que em cada dia leu 6 páginas e precisou de 21 dias para o acabar de ler), Isabel resolve-a como mostra a figura 23.

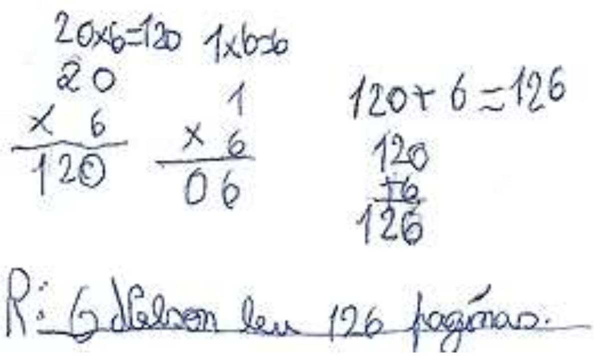


Figura 23 – Resolução de Isabel da primeira questão da tarefa 5

A análise da sua produção mostra que a aluna utiliza o algoritmo da multiplicação e da adição para a resolver a mesma (representação simbólica), não tendo recorrido ao uso de desenhos.

A aluna decompõe o número 21 em 20+1 e, seguidamente representa 20×6 e 1×6, escrevendo na forma de algoritmo 6×20 e 6×21. Depois de calculados estes produtos parciais adiciona-os obtendo o resultado correto – 126. Também responde corretamente à pergunta "O Nuno leu 126 páginas".

Na segunda questão em que era preciso saber quantas página a Margarida leu por dia, Isabel recorre à tabuada e à operação divisão para a resolver, não tendo recorrido ao uso de desenhos (representação icónica).

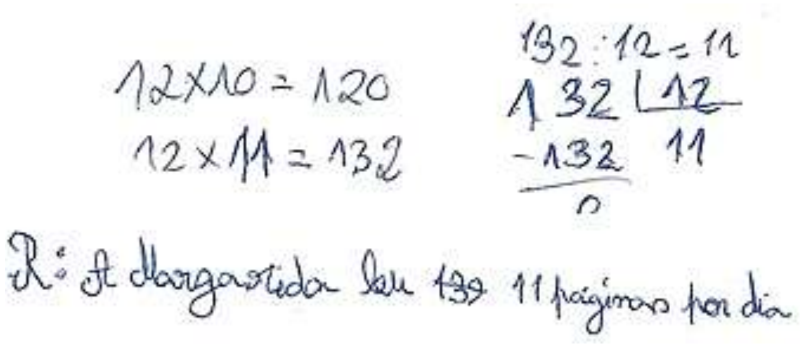


Figura 24 – Resolução de Isabel da segunda questão da tarefa 5

Isabel parece ter pensado em usar produtos conhecidos, procurando produtos na tabuada (que usa com os fatores trocados), próximos de 132. Começa por representar 12×10=120 e depois escreve o próximo produto 12×11=132. Como parece reconhecer a relação entre divisão e multiplicação escreve os registos à direita, usando esta operação, tanto na forma horizontal como vertical. A aluna responde incorretamente à pergunta colocada, embora mais tarde tenha rasurado a sua resposta e substituído 132 por 11, tal como evidenciam os registos que efetuou.

5.8.2. Síntese das resoluções de Isabel

As resoluções de Isabel ao longo das cinco tarefas parecem evidenciar alguma evolução tanto a nível das estratégias usadas como das respostas dadas. A tabela seguinte apresenta de forma sintetizada alguns dos aspetos analisados, tais como as estratégias utilizadas pela aluna, bem como as dificuldades sentidas durante a realização das diferentes tarefas.

Tabela 20 – Síntese das estratégias de resolução de problemas e das dificuldades manifestadas por Isabel

Tarefa	Operação e sentido	Estratégias utilizadas	Dificuldades manifestadas
1A	Multiplicação – sentido aditivo	**Estratégia aditiva** – uso de adição sucessiva com suporte da imagem.	Interpretar o resultado obtido e dar a resposta correta por escrito.
2A	Divisão por partilha	**Estratégia multiplicativa** – uso de um produto de referência (8×5)	Interpretar o resultado obtido e dar resposta correta à questão colocada.

3A	Multiplicação – sentido aditivo	Começa por usar uma **estratégia aditiva** – adição sucessiva com suporte da imagem, sem sucesso. Seguidamente, recorre a uma **estratégia multiplicativa** – multiplica em coluna, obtendo um resultado incorreto, o qual substitui posteriormente.	Adicionar parcelas iguais (30+30+30+30+30+30+30 +30+30); Efetuar o produto 15×18, altera o resultado obtido, durante a discussão coletiva.
4	o Divisão por medida o Multiplicação – sentido aditivo	Começa por usar uma **estratégia aditiva** – adição sucessiva sem suporte de desenhos/esquemas, adicionado as parcelas duas a duas, mas não chega ao resultado correto. **Estratégia multiplicativa** – usa o algoritmo (15×8)	Interpretação do enunciado, dificuldade em alcançar o resultado como no caso da tarefa de divisão.
5	o Multiplicação – sentido aditivo o Divisão por medida	**Estratégia multiplicativa** – Uso da decomposição decimal de um dos fatores. Recorre a produtos parciais. **Estratégia multiplicativa** – Uso de dois produtos (12×10=120; 12×11=132).	Dificuldade em dar significado aos cálculos efetuados.

Nos problemas de multiplicação, Isabel opta sobretudo por estratégias aditivas, podendo estas terem sido sugeridas pelas imagens que acompanham as tarefas (nos três primeiros casos). Em alguns casos (tarefa 2A e 3A) substitui a estratégia aditiva por multiplicativa, uma vez que, por vezes, usa a estratégia aditiva sem sucesso. Na primeira tarefa, a aluna parece ter alguma dificuldade em explicar como realizou a sua estratégia, explicando que "Eu pensei desta forma", após analisar a sua resolução percebe-se que Isabel utilizou uma estratégia aditiva para chegar ao resultado obtido. Desta forma, a aluna resolve corretamente a tarefa, respondendo oralmente ao que se pretendida. No entanto, quando lhe é pedido que explique como chegou ao resultado final, porque utilizou aquela estratégia, tanto oralmente tanto por escrito, a aluna sente alguma dificuldade neste aspeto. Tanto na tarefa 1 como na 2, a aluna mostra dificuldades em dar a resposta correta por escrito, apenas escreve o seu raciocínio, o modo como chegou ao resultado final.

Nos problemas de divisão a aluna opta, sobretudo, por estratégias multiplicativas. Contudo, na tarefa 4 começa por tentar usar uma estratégia aditiva, mas sem sucesso, dando uma resposta incorreta. Na última tarefa, Isabel representa também a divisão tanto horizontal como verticalmente. Porém, parece que a aluna inicialmente usa a tabuada, procurando produtos conhecidos (12×10=120; 12×11=132) e só posteriormente recorre à divisão.

Relativamente às dificuldades manifestadas pela aluna ao longo das cinco tarefas, em alguns casos resolve incorretamente (tarefa 3A e 4), embora tenha depois substituído os resultados obtidos inicialmente, talvez durante a discussão coletiva (tarefa 3). Do início até ao final das tarefas, Isabel manifesta muita dificuldade em interpretar os resultados obtidos e dar-lhes significado à luz do contexto dos problemas propostos. A aluna responde incorretamente, ou seja, a resposta que dá é apenas uma mera explicação de como chegou até ao resultado final.

As imagens que acompanham os enunciados nas primeiras três tarefas parecem ter sugerido o uso das estratégias aditivas usadas por Isabel. Contudo, a última tarefa como não tinha imagens e Isabel não parece ter sentido necessidade de representar os seus raciocínios através de representações icónicas. Na tarefa 4, apesar de incluir imagens, a aluna não recorre às mesmas para a resolver, embora tenha usado incorretamente uma estratégia aditiva.

5.9. Isaac

Isaac é um aluno que, a partir da análise da resolução da tarefa diagnóstico, foi incluído no grupo 2. As tarefas associadas a este grupo não tinham o apoio de imagens (1B, 2B e 3B).

5.9.1. As resoluções de Isaac

Tarefa 1 – Quem comprou mais litros de água?

Na primeira tarefa, em que era preciso saber quem comprou mais litros de água, tendo em conta que a Ana tinha comprado um total de 12 garrafões com a capacidade de cinco litros cada um e o Rui tinha comprado um total de seis garrafões com a capacidade de 15 litros cada um, Isaac resolve-a como mostra a figura 25.

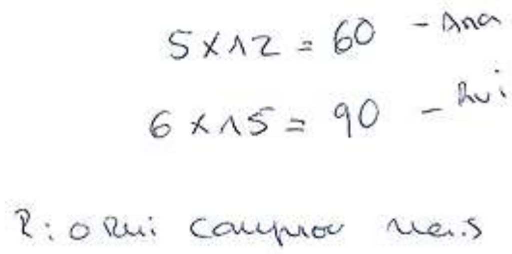


Figura 25 – Resolução de Isaac da tarefa 1B

Nesta tarefa Isaac recorre apenas a representações simbólicas para resolver, ou seja, não utiliza representações icónicas. O aluno recorre à operação multiplicação para chegar ao resultado final.

O aluno utiliza uma estratégia multiplicativa: 5×12=60 e 6×15=90, mas apesar de o resultado se encontrar correto, Isaac não mostra como chegou ao valor final. Parece ter realizado os cálculos mentalmente, pois quando lhe é perguntado como os resolve, explica que, mentalmente, fez 5×2 e depois 5×10 e adicionou os resultados chegando assim a 60. O mesmo aconteceu para o cálculo seguinte, explica que mentalmente fez 6×5 e em seguida 6×10, adicionando os resultados parciais e chegando ao resultado correto – 90.

A resposta dada à tarefa pelo aluno encontra-se correta, uma vez que responde que “O Rui comprou mais”. Isaac explica que chegou a esta resposta porque a Ana comprou 60 litros e o Rui 90 litros e, “90 é maior do que 60”.

Tarefa 2 – Quantos litros de água tem cada garrafão?

Na segunda tarefa, em que era preciso calcular quantos litros de água tinha cada garrafão comprado pela Ana – oito garrafões com um total de 40 litros, Isaac resolve-a como mostra a figura 26.

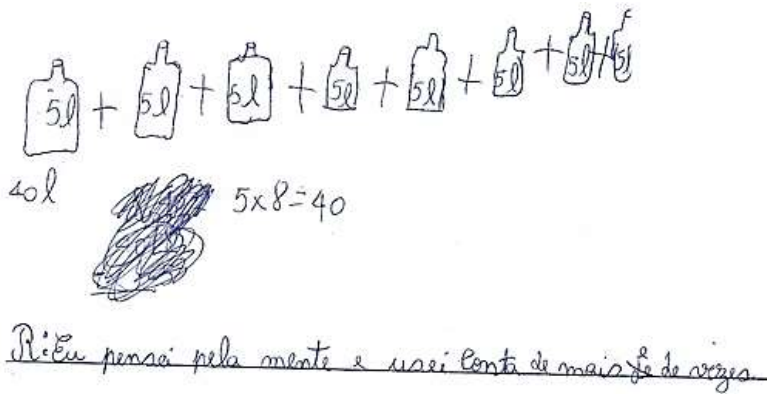


Figura 26 – Resolução de Isaac da tarefa 2B

A análise da sua produção evidencia que Isaac constrói representações dos garrafões (representação icónica), o aluno representa os oito garrafões, indicando que cada um tem cinco litros. Além disso, coloca o sinal de ‘+’ entre cada um. É de referir que o aluno coloca ainda por debaixo dos garrafões a quantidade total de todos os garrafões (40 l).

Apesar de escrever 5×8, e não 8×5 sabia que havia oito garrafões e no total 40 litros de água. Efetivamente, o facto de o 5 ser um número de referência parece ter facilitado a resolução.

O aluno escreve ainda o produto: 5×8=40. Assim, o uso das representações icónicas parece ser apenas um complemento do que realizou, evidenciando assim que havia oito garrafões com cinco litros cada um. Durante uma conversa informal, explica que pensou na tabuada, tentando encontrado o número que multiplicado por oito “desse” 40, recorrendo assim aos seus conhecimentos sobre a multiplicação.

A resposta dada à pergunta parece ser apenas uma justificação do seu pensamento para chegar ao resultado final, pois indica que ‘Eu pensei pela mente e usei conta de mais e de vezes’, uma vez que a resposta correspondente seria ‘Cada garrafão tem 5 litros de água’. Mais tarde surgiu o seguinte diálogo, a partir de uma conversa informal:

Investigadora: Isaac, afinal quantos litros tem cada garrafão?

Isaac: Tem 5 litros…

Investigadora: Olhando para o que escreveste e sabendo que cada garrafão tem 5 litros, será que eu conseguia saber quantos litros de água contém cada garrafão se lesse a tua resposta?

(Isaac fica um pouco pensativa novamente)

Isaac: Pois…

Investigadora: Se reparares o que tu respondeste corresponde apenas à parte em que é pedido ‘Explica como pensaste’…

Isaac: Pois…falta-me indicar que cada garrafão tem 5 litros…

A análise do diálogo mostra que o aluno, inicialmente, tem dificuldades em responder à questão colocada, embora explique corretamente por escrito como chegou ao resultado final, procurando um número que multiplicado por oito fosse igual a 40. Ao identificar que Isaac, tal como Isabel, não atribuía significado à expressão 5×8=40, a partir do contexto do problema, coloquei-lhe questões que o orientassem nesse sentido. Deste modo, após alguma reflexão da sua parte, indica corretamente que cada garrafão tem cinco litros.

Tarefa 3 – Quem comprou mais litros de água?

Na terceira tarefa, em que era preciso saber quem comprou mais litros de água, tendo em conta que a Joana tinha comprado um total de 18 garrafões com uma capacidade de 15 litros cada um e o Rui tinha comprado um total de nove garrafões com uma capacidade de 30 litros cada um, Isaac resolve-a como mostra a figura 27.

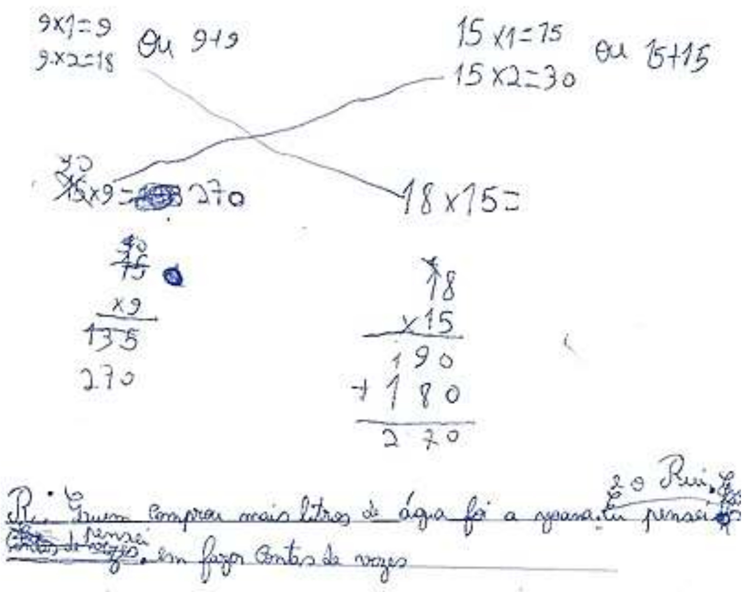


Figura 27 – Resolução de Isaac da tarefa 3B

A análise dos seus registos permite perceber que o aluno recorre a uma estratégia multiplicativa, inicialmente apresenta: 9×1=9 e 9×2=18 e seguidamente: 15×1=15 e 15×2=30. Na resolução da tarefa, não recorre ao uso de representações icónicas. Após uma tentativa Isaac recorre ao algoritmo para efetuar 15×18, chegando ao resultado correto.

O aluno também responde corretamente à pergunta: “Quem comprou mais litros de água foi a Joana e o Rui”. Isaac explica-me numa conversa informal que, inicialmente, não tinha reparado que os valores eram iguais, dessa forma acrescenta o Rui posteriormente. Assim, o aluno parece ter analisado o que fizera de modo a confirmar se a sua resposta estava de acordo com o pretendido.

Tarefa 4 – A caderneta de cromos

Para resolver a primeira questão da quarta tarefa, em que era preciso calcular quantas páginas de uma caderneta de cromos tinha o Francisco completamente preenchidas (sabendo que cada página levava oito cromos), Isaac resolve-a como mostra a figura 28.

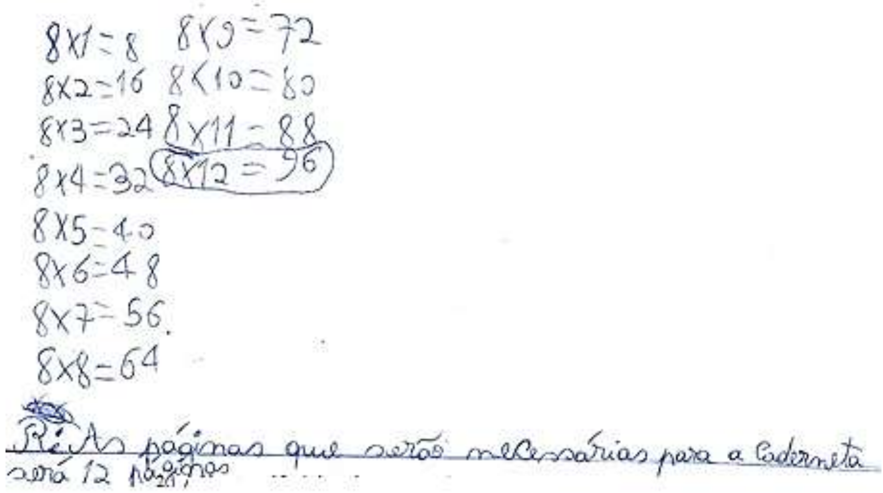


Figura 28 – Resolução de Isaac da primeira parte da tarefa 4

Nesta primeira parte, o aluno não recorre ao uso de imagens para resolver a tarefa (representação icónica). Isaac recorre à tabuada para resolver a tarefa efetuando produtos sucessivos, até encontrar o valo pretendido: 96, uma vez que sabia que o Francisco tinha os 96 primeiros cromos e que cada página levava 8 cromos.

O aluno utiliza corretamente a tabuada, embora use os produtos ao contrário, consegue chegar ao pretendido, circunda assim o produto: 8×12=96. Desta forma, a resposta dada à questão final encontra-se correta.

Na segunda questão em que era preciso saber quantos cromos a Vera já tinha, o aluno recorre novamente a uma estratégia multiplicativa usando o algoritmo. Como anteriormente, Isaac não sente a necessidade de recorrer a representações icónicas para resolver a tarefa.

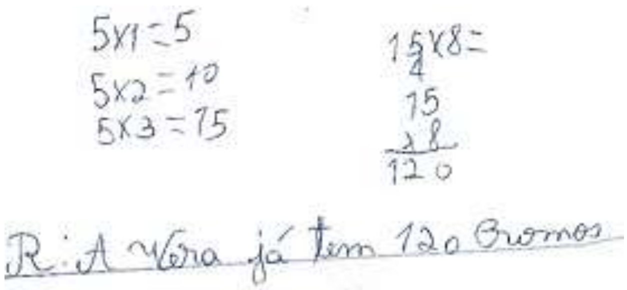


Figura 29 – Resolução de Isaac da segunda parte da tarefa 4

Isaac responde corretamente "A Vera já tem 120 cromos", explicando, num diálogo informal, que pensou que "se cada página leva 8 cromos, a Vera já tinha 15 páginas. Pensei em multiplicar os dois números para saber quantos cromos a Vera já tinha".

Tarefa 5 – Os livros

Na última tarefa, em que era preciso calcular numa primeira questão quantas páginas tinha o livro do Nuno (sabendo que em cada dia leu seis páginas e precisou de 21 dias), Isaac resolve-a como mostra a figura 30.

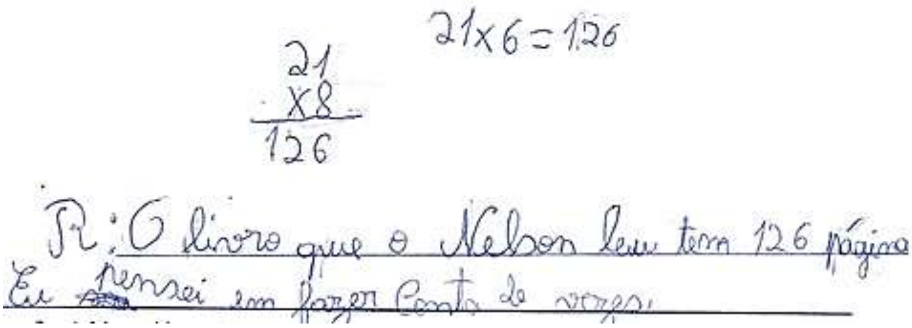


Figura 30 – Resolução de Isaac da primeira questão da tarefa 5

A análise da sua resolução mostra que o aluno utiliza o algoritmo da multiplicação, não tendo recorrido ao uso de representações icónicas.

Apesar de apresentar horizontalmente 21×6, igualando ao valor correto – 126, quando apresenta o algoritmo coloca 8 em vez de 6, parece que houve uma pequena distração por parte do aluno.

O aluno responde corretamente à pergunta "O livro que o Nuno leu tem 126 páginas". Durante uma conversa informal, o aluno parece ter percebido a sua incorreção, mostrando assim que se enganara e trocara o número devido a uma distração.

Investigadora: Isaac, achas que 21×6 e 21×8 dão o mesmo valor?

Isaac: Não…

Investigadora: Então já reparaste nas operações que realizaste? Deram o mesmo valor – 126.

Isaac: Pois, não tinha reparado…

Investigadora: Consegues explicar-me o que significa o 21?

Isaac: O 21 corresponde aos dias que o Nuno precisou para ler o seu livro e leu em cada dia 6 páginas…enganei-me a colocar o 8, era para ser o 6.

A análise do diálogo mostra que o aluno apenas se enganou na passagem da representação horizontal para o algoritmo. Desta forma, os seus registos, bem como as suas respostas evidenciam que o aluno percebe o que realizou e não tem quaisquer dificuldades de interpretação do enunciado.

Na segunda questão em que era preciso saber quantas páginas a Margarida leu por dia, Isaac recorre à tabuada e à operação divisão para a resolver (representação simbólica), não tendo usado representações icónicas.

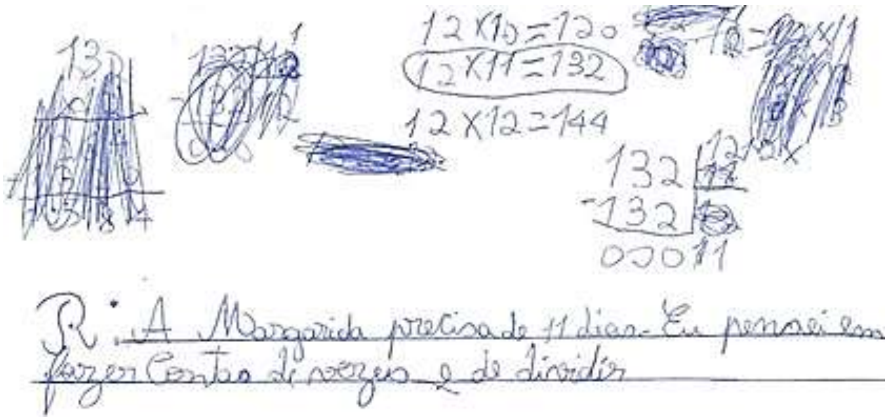


Figura 31 – Resolução de Isaac da segunda questão da tarefa 5

O aluno começa por recorrer à tabuada para encontrar o número que multiplicado por 12 fosse igual a 132. Isaac apresenta três produtos conhecidos, embora troque a ordem dos fatores: 12×10=120, 12×11=132, e 12×12=144, circundando o segundo produto, uma vez que o resultado obtido corresponde ao pretendido, o total de páginas do livro da Margarida –132 páginas.

Ao registar a operação divisão, o aluno apresenta-a horizontal e verticalmente. Por fim, o aluno responde corretamente à pergunta "A Margarida precisa de 11 dias".

5.9.2. Síntese das resoluções de Isaac

A análise das resoluções das cinco tarefas evidência alguma evolução tanto ao nível das estratégias como das respostas dadas por parte do aluno. A tabela seguinte apresenta de forma sintetizada alguns dos aspetos analisados.

Tabela 21 – Síntese das estratégias de resolução de problemas e das dificuldades manifestadas por Isaac

Tarefa	Operação e sentido	Estratégias utilizadas	Dificuldades manifestadas
1B	Multiplicação – sentido aditivo	**Estratégia multiplicativa**	Explicitar como efetuou os produtos: 5×12 e 6×15. Não mostra como chegou aos resultados finais.
2B	Divisão por partilha	**Estratégia multiplicativa**	Interpretar o resultado obtido e dar resposta correta à questão colocada.
3B	Multiplicação – sentido aditivo	**Estratégia multiplicativa**	Não demonstra ter quaisquer dificuldades em realizar a tarefa.
4	○ Divisão por medida ○ Multiplicação – sentido aditivo	**Estratégia multiplicativa** – recorre ao uso da tabuada para chegar ao resultado correto. **Estratégia multiplicativa** – usa o algoritmo (15×8)	Não demonstra ter quaisquer dificuldades em realizar a tarefa.
5	○ Multiplicação – sentido aditivo ○ Divisão por medida	**Estratégia multiplicativa** – Uso o algoritmo (21×8). **Estratégia multiplicativa** – Uso de três produtos conhecidos (12×10=120; 12×11=132; 12×12=144).	Não demonstra ter quaisquer dificuldades em realizar a tarefa.

Nos problemas de multiplicação, Isaac opta sobretudo por estratégias multiplicativas. Na segunda tarefa, o aluno parece ter alguma dificuldade em explicar como construiu a sua estratégia, explicando que "Eu pensei pela mente e usei conta de mais e de vezes". Após se analisar a sua resolução percebe-se que Isaac utilizou uma estratégia multiplicativa, ou seja, tenta arranjar um produto conhecido que dê 40 (5×8). Seguidamente representa a quantidade de garrafões (8) e inscreve em cada um a quantidade de litros (5), utilizando assim uma estratégia aditiva. Parece que o aluno apenas utiliza esta estratégia como confirmação da estratégia multiplicativa.

Nos problemas de divisão o aluno opta sobretudo por estratégias multiplicativas. Na tarefa 4 começa por utilizar a tabuada, procurando qual o produto conhecido que correspondia ao valor pretendido (8×12=96). Na última tarefa, Isaac regista uma representação vertical da divisão próxima do algoritmo, parecendo reconhecer a relação entre a multiplicação e a divisão.

As dificuldades manifestadas pelo aluno ao longo das cinco tarefas, relacionam-se com a explicitação de como efetuou dois produtos: 5×12 e 6×15. Num outro caso o aluno demonstra dificuldade em interpretar os resultados obtidos, contudo após uma intervenção da minha parte o aluno demonstra dar significado à luz do contexto dos prolemas propostos. O aluno responde incorretamente, ou seja, a resposta que dá é apenas uma mera explicação de como chegou até ao resultado final (tarefa 2B).

Capítulo 6

Conclusões

O presente capítulo engloba a síntese do estudo realizado ao longo da minha intervenção. Seguidamente, são apresentadas as conclusões do estudo, organizadas de modo a tentar responder às questões orientadoras da investigação que realizei. E, por fim, é apresenta uma reflexão final acerca de todo o trabalho realizado.

6.1. Síntese do estudo

A investigação desenvolvida decorreu no âmbito da Unidade Curricular: Estágio IV realizado numa turma de 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Este projeto focou-se na realização de tarefas com diferentes graus de dificuldades, as quais envolviam as operações multiplicação e divisão e, compreender como os alunos as relacionavam. Desta forma, o estudo decorreu em contexto de estágio no qual foi implementada uma sequência de tarefas, previamente construída, incluindo quatro tarefas associadas à operação multiplicação (tarefa 1, 3, parte 2 da tarefa 4 e parte 1 da tarefa 5) e três relacionadas com a operação divisão (tarefa 2, parte 1 da tarefa 4 e parte 2 da tarefa 5). Ao longo da resolução das mesmas foram proporcionados momentos em que os alunos tivessem a oportunidade de expor as suas resoluções (discussões coletivas).

A temática estudada surge a partir da minha observação, em estágios anteriormente realizados, na dificuldade manifestada por parte dos alunos na interpretação de enunciados, na resolução de tarefas, em especial associadas às operações envolvidas, e, em especial, por vezes mostrarem dificuldade em construir uma estratégia para que pudessem chegar ao resultado final. Seguindo esta linha de pensamento, na análise dos dados foquei-me na análise de estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos durante a resolução das tarefas propostas.

Tendo em conta o meu objetivo de estudo, formulei três questões orientadoras, imprescindíveis para a minha investigação:

- Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação?
- Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à divisão, recorrendo ou não, à multiplicação?

- Quais as dificuldades manifestadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação e à divisão?

A nível da metodologia adotada na minha investigação, esta centra-se numa investigação sobre a prática e, qualitativa, na qual realizei duas análises para todas as tarefas de dois alunos, um de cada grupo. Para além dos dados recolhidos das resoluções destes dois alunos, também me foquei na resolução de todos os alunos em três tarefas (primeira, terceira e segunda parte da quinta tarefa), o que contribuiu para uma análise mais aprofundada, relacionada com as questões formuladas.

Na secção seguinte apresento as conclusões da investigação realizada, tendo por base as questões inerentes ao estudo.

6.2. Conclusões do estudo

As conclusões do estudo pretendem dar resposta às questões orientadoras articulando a análise dos dados que recolhi e com referência de outros autores sobre a mesma temática.

De forma a responder às questões orientadoras, analisei os dados recolhidos, tendo uma visão geral das estratégias e dificuldades manifestadas por todos os alunos nas tarefas 1, 3 e parte 2 da tarefa 5 e, posteriormente analisei mais detalhadamente todas as tarefas de apenas dois alunos (um de cada grupo). Assim, de forma a responder a cada pergunta elaborarei quatro tabelas com as diferentes estratégias construídas: duas tabelas comparativas, uma para os dois alunos de cada grupo e outra para todos os alunos dos dois grupos para a operação multiplicação. Seguidamente, apresento duas tabelas comparativas para as tarefas relacionadas com a operação divisão.

Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação?

Relativamente às tarefas de multiplicação, de modo a analisar as estratégias relativas aos alunos do grupo 1 e grupo 2, analisei as produções recolhidas da tarefa 1 e tarefa 3 e, dos alunos, Isabel e Isaac, analisei as tarefas 1, 3, parte 2 da tarefa 4 e parte 1 da tarefa 5.

A tabela seguinte evidencia as estratégias usadas na tarefa 1 e 3 pelos dois grupos.

Tabela 22 – Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos do grupo 1 e 2 nas tarefas 1 e 3 (tarefas de multiplicação)

Tarefas	Estratégias	Grupo 1		Grupo 2
		Parte 1	Parte 2	
1	Aditivas	6	9	3
	Multiplicativas	3	2	4
	Ambas (Aditiva e Multiplicativa)	0	0	1
	Não apresenta cálculos	2	1	2
3	Aditivas	4	9	0
	Multiplicativas	7	2	10

A tabela 22 evidencia que a preferência por estratégias aditivas por parte do grupo 1 poderá estar relacionada com as imagens presentes nas tarefas 1A e 3A que sugerem, sobretudo, o uso deste tipo de estratégias, mas por outro lado o recurso às mesmas poderá estar associado às etapas de desenvolvimento dos alunos. Porém, alguns alunos do grupo 2, utilizam apenas estratégias aditivas na tarefa 1B, associando as mesmas a representações icónicas (uma vez que as três primeiras tarefas propostas a este grupo não tinham quaisquer imagens associadas). Assim, as estratégias estão associadas aos processos de raciocínio dos alunos, usando-as por se sentirem mais confortáveis (Boavida et al., 2008). Contudo há alunos que iniciam o seu raciocínio a partir de uma estratégia aditiva, mas acabam por desistir, ou porque sentem dificuldades em chegar ao resultado final ou porque acabam por considerar não ser essa a melhor estratégia. Desta forma, possivelmente a preferência por este tipo de estratégias (aditivas) por parte dos alunos do grupo 1, pode estar associada às imagens presentes nas tarefas. Ainda assim, uma vez que a operação multiplicação se relaciona com a adição (Ponte & Serrazina, 2000), os alunos podem estar a começar a dar significado à multiplicação a partir da adição de parcelas sucessivas (Mendes, 2012).

Relativamente às estratégias multiplicativas, os alunos do grupo 2, maioritariamente, utilizam este tipo de estratégias nas tarefas 1B e 3B. Em especial na terceira tarefa, nenhum aluno utiliza uma estratégia aditiva, resolvendo-a a partir de produtos conhecidos. Esta situação pode estar relacionada com facto de que, nas tarefas dadas a este grupo não havia quaisquer imagens que pudessem sugerir estratégias e estes alunos já se sentiam mais 'confortáveis' no uso de estratégias multiplicativas.

A partir da análise dos dados organizados na tabela anterior, pode-se constatar que ao longo da sequência de tarefas começa a haver mais alunos do grupo 1 a utilizar estratégias multiplicativas. Segundo Mendes (2013) os alunos vão evoluindo ao longo do tempo nas suas estratégias de resolução das tarefas associadas à multiplicação, começando a usar estratégias mais eficientes.

De modo a perceber o tipo de estratégias usadas por Isabel e Isaac, a tabela seguinte mostra as estratégias a que recorreram nas tarefas 1, 3, parte 2 da tarefa 4 e parte 1 da tarefa 5.

Tabela 23 – Síntese das estratégias utilizadas por Isabel e Isaac nas tarefas de multiplicação

Tarefas	Isabel	Isaac
1	**Estratégia aditiva**	**Estratégia multiplicativa**
3	**Estratégia multiplicativa**	**Estratégia multiplicativa**
4 (Parte 2)	**Estratégia multiplicativa**	**Estratégia multiplicativa**
5 (Parte 1)	**Estratégia multiplicativa**	**Estratégia multiplicativa**

A tabela 23 mostra que os alunos resolvem as tarefas associadas à multiplicação a partir de estratégias multiplicativas, utilizando produtos conhecidos. Este tipo de procedimentos poderá estar associado a conhecimento prévio por parte dos alunos. Na primeira tarefa, Isabel, utiliza uma estratégia aditiva, possivelmente devido a essa tarefas estar associadas imagens. Nas restantes tarefas, o uso de estratégias multiplicativas pode estar associado ao conhecimento que os alunos já detêm sobre a multiplicação.

A análise das suas produções e da tabela mostra que Isabel vai abandonando o uso de estratégias aditivas e recorre a estratégias multiplicativas, parecendo evidenciar uma melhor compreensão sobre esta operação.

De forma sucinta e respondendo à questão de estudo – Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação? – posso concluir que:

- Apenas um aluno do grupo 2 utiliza duas estratégias na mesma tarefa de forma a mostrar a sua compreensão do pretendido (uma estratégia aditiva e seguidamente uma estratégia multiplicativa);
- A maioria dos alunos recorre à estratégia subjacente às tarefas propostas;
- Alguns alunos do grupo 2 sentem a necessidade de construir representações icónicas;

- Alguns alunos do grupo 1 recorrem à imagem associada à tarefa para resolver a mesma;
- Os alunos utilizam diversificadas estratégias para resolver tarefas associadas à multiplicação, nomeadamente, estratégias aditivas e multiplicativas.

A opção pelo uso de tarefas paralelas, ou seja, com diferentes níveis de dificuldades, parece ter ajudado os diferentes alunos da turma a evoluírem na sua aprendizagem da multiplicação, uma vez que tanto os alunos do grupo 1 como do grupo 2 optam cada vez mais por estratégias mais eficientes, em particular, multiplicativas.

A opção pelo uso progressivo de estratégias multiplicativas, pelos alunos do grupo 1, com mais dificuldades, parece ter sido ancorado no tipo de tarefas que lhes foram propostas. Efetivamente, muitos deles não conseguiram resolver tarefas de multiplicação usando estratégias multiplicativas (veja-se a tabela 7 com as estratégias usadas nas tarefas diagnóstico) e nas tarefas que foram resolvendo, que incluíam imagens, parecem tê-los ajudado a 'dar sentido' à multiplicação.

Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à divisão, recorrendo ou não, à multiplicação?

No que concerne às tarefas de divisão, de modo a analisar as estratégias relativas dos alunos do grupo 1 e grupo 2, analisei as produções recolhidas da parte 2 da tarefa 5 e dos dois alunos, Isabel e Isaac, analisei as tarefas 2, parte 1 da tarefa 4 e parte 2 da tarefa 5.

A tabela seguinte evidencia as estratégias usadas na parte 2 da tarefa 5 pelos alunos dos dois grupos.

Tabela 24 – Síntese das estratégias utilizadas pelos alunos do grupo 1 e 2 na parte 2 da tarefa 5 (tarefa de divisão)

Tarefa	Estratégias	Grupo 1	Grupo 2
5 (Parte 2)	**Aditiva**	1	0
	Multiplicativa	9	6
	Ambas (Aditiva e Multiplicativa)	0	1
	Subtrativa	0	2
	Divisão	1	1

A partir da análise da tabela 24 pode-se concluir que os alunos na resolução desta tarefa de divisão optam maioritariamente por estratégias multiplicativas. É de realçar que os alunos com mais dificuldades recorrem a estratégias multiplicativas, evidenciando reconhecer a relação entre esta operação e a divisão. Apenas dois alunos do grupo 2 utilizam uma estratégia subtrativa. Os alunos relacionam assim a multiplicação com a divisão, principalmente pelo uso da multiplicação, a partir de produtos conhecidos da tabuada. Em ambos os grupos evidencia-se que há um aluno que ainda opta pelo uso de uma estratégia aditiva e, no caso do segundo grupo dois alunos utilizam uma estratégia subtrativa. Podemos concluir assim, que tanto os alunos do grupo 1 como do grupo 2 parecem ter progredido na aprendizagem da divisão relacionando esta operação com a multiplicação. No caso das estratégias multiplicativas, destaca-se o uso de produtos conhecidos.

O uso de estratégias multiplicativas mostra que os alunos conseguem fazer uma ligação entre as duas operações, evidenciando que desenvolveram o seu raciocínio e a compreensão da relação destas duas operações.

A tabela seguinte mostra as estratégias usadas por Isabel e Isaac nas tarefas de divisão, nas tarefas 2, parte 1 da tarefa 4 e parte 2 da tarefa 5.

Tabela 25 – Síntese das estratégias utilizadas por Isabel e Isaac nas tarefas de divisão

Tarefas	Isabel	Isaac
2	**Estratégia multiplicativa**	**Estratégia multiplicativa**
4 (Parte 1)	**Estratégia aditiva**	**Estratégia multiplicativa**
5 (Parte 2)	**Estratégia multiplicativa**	**Estratégia multiplicativa**

A tabela 25 evidencia que nas tarefas de divisão ambos os alunos recorrem maioritariamente a estratégias multiplicativas. Porém, na primeira parte da tarefa 4, a Isabel usa uma estratégia aditiva, recorrendo a um esquema em árvore. Sendo a única tarefa em que qualquer um dos alunos recorre a este tipo de estratégias.

A análise da tabela e das produções dos alunos evidenciam que estes utilizam estratégias multiplicativas a partir de um produto conhecido e/ou de referência. Esta preferência pode relacionar-se com o seu conhecimento da tabuada.

É de referir que os alunos ao recorrerem a estratégias multiplicativas, parecem evidenciar que têm uma melhor compreensão sobre a relação entre a multiplicação e a divisão, sendo capazes de resolver as tarefas de divisão utilizando a multiplicação nas suas estratégias. Segundo Brocardo, Serrazina e Rocha (2008) os alunos quando resolvem problemas associados à divisão, recorrem aos conhecimentos que detêm sobre a multiplicação, utilizando a mesma para a sua resolução, consolidando assim os seus conhecimentos, a partir de produtos conhecidos. De facto, para que haja uma progressão de estratégias de divisão, os alunos devem ter uma boa compreensão da relação parte/todo (Fosnot & Dolk, 2001).

É importante referir ainda a importância das discussões coletivas, onde foram colocadas "em confronto as suas estratégias, conjeturas e justificações, cabendo ao professor desempenhar o papel de moderador" (Ponte, Brocardo, & Oliveira, 2003, p. 41). Depois das discussões coletivas, alguns alunos começaram por adotar outras estratégias diferentes daquela em que se sentiam mais confortáveis, passando assim a haver uma maioria a utilizar estratégias multiplicativas, tanto em tarefas multiplicativas ou de divisão.

De forma sucinta e respondendo à questão de estudo – Quais as estratégias usadas pelos alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à divisão, utilizando a multiplicação nas suas estratégias? – posso concluir que:

- Apenas um aluno do grupo 2, utiliza duas estratégias na mesma tarefa de forma a mostrar a sua compreensão do pretendido (uma estratégia multiplicativa e seguidamente uma aditiva);
- A maioria dos alunos recorre à estratégia subjacente à tarefa proposta;
- Nenhum aluno sente a necessidade de construir representações icónicas;
- Os alunos utilizam diversificadas estratégias para resolver tarefas associadas à divisão, nomeadamente, estratégias aditivas, multiplicativas

e de divisão. Porém no grupo 2, dois alunos recorrem a uma estratégia subtrativa.

Tal como nas tarefas de multiplicação, ter recorrido ao uso de tarefas paralelas, ou seja, tarefas com diferentes graus de dificuldades, parece ter contribuído para que os diferentes alunos da turma evoluíssem na sua aprendizagem da divisão, uma vez que tanto os alunos do grupo 1 como do grupo 2 optam cada vez mais pelo uso de estratégias multiplicativas. Além disso, há alunos que identificam o problema como sendo de divisão e usam estratégias de multiplicação, mostrando assim reconhecer a relação entre a divisão e a multiplicação.

Que dificuldades manifestam os alunos do 3.º ano quando resolvem tarefas com diferentes graus de dificuldade associadas à multiplicação e à divisão?

A análise das produções dos alunos da turma das tarefas 1 (1A e 1B), 3 (3A e 3B) e parte 2 da tarefa 5 e de dois alunos das tarefas: 1A, 1B, 2A, 2B, 3A, 3B, 4 e 5, tendo como apoio a observação em sala de aula e dos diálogos informais, permite-me concluir que os alunos apresentam as seguintes dificuldades na realização das tarefas propostas: interpretação do enunciado, a interpretação do resultado/raciocínio, justificação do raciocínio, adição – decomposição decimal das parcelas e dar sentido ao sinal de igual.

A primeira dificuldade associa-se, essencialmente, à compreensão do enunciado. Esta dificuldade evidenciada por alguns alunos, relaciona-se com a interpretação e compreensão de um problema matemático, para as quais é preciso ter conhecimentos matemáticos associados à temática que está a ser estudada e, principalmente, de Português. De acordo com Costa e Fonseca (2009), a nível da área do Português há alunos que possuem menos facilidade, em especial, na compreensão, relacionada com menos hábitos de leitura, não usando esta área "na interpretação/compreensão dos enunciados" (p. 7) e, consequentemente, evidenciam também dificuldades na compreensão do vocabulário dos enunciados de problemas matemáticos.

No que diz respeito às dificuldades manifestadas na interpretação dos resultados, estas verificam-se nas produções de Isabel e de Isaac, nas tarefas 1 A, 2 A e 2 B. Nos seus registos parece que os alunos têm dificuldades em responder corretamente, uma vez que dão uma mera explicação de como chegaram até ao resultado final e não respondem à questão final. Associada a esta dificuldade, está outra de dar sentido aos cálculos, por parte de Isabel, na tarefa 5. A aluna inicialmente escreve uma resposta incorreta, uma vez que coloca o produto 12×11=132, e a sua primeira intuição foi escolher como resposta o

132 (que corresponde ao número de páginas), emendando posteriormente para 11 dias. A aluna evidencia, assim, que tem dificuldades em interpretar e dar sentido aos cálculos que realizou.

Relativamente à dificuldade da justificação do raciocínio, esta manifesta-se em Isaac, na tarefa 1B, em que este não explicita como efetuou dois produtos: 5×12 e 6×15. Analisando os seus registos, parece que o aluno resolveu a partir do cálculo mental. Porém, ao não apresentar quaisquer cálculos, não posso concluir se, por exemplo, o aluno resolveu a partir da decomposição decimal ou não.

Também num outro problema, na parte 2 na tarefa 5, há uma aluna, Luiza, que evidencia dificuldades na adição, resolvendo incorretamente a decomposição decimal das parcelas (veja-se na figura 7).

A dificuldade evidenciada por um outro aluno (tarefa 1A) está associada ao dar sentido ao sinal de igual, uma vez que efetua operação os cálculos incorretamente de modo sequencial (10+10=20+10=30). Autores como Cusi e Malara (2007) (citado por Ponte, Branco & Matos, 2009) consideram que é frequente "os alunos realizarem operações de um modo sequencial, da esquerda para a direita, usando o sinal de igual tanto como «separador» entre dois raciocínios como para introduzir um novo resultado, a partir de valores numéricos anteriores" (p. 22).

6.3. Reflexão final

A presente reflexão incide no percurso realizado, no balanço final do estudo e também em algumas dificuldades com que me deparei ao longo do mesmo. Para além disso, foco-me na importância de um professor ser reflexivo, ou seja, na importância de o professor refletir sobre a sua prática e, em especial, na área da Matemática.

É de referir que a presente investigação foi desafiadora, aprofundando o meu conhecimento sobre o tema desenvolvido. Com este estudo pude antecipar e prever resoluções dos alunos e planear os momentos de discussão coletiva, tendo em consideração como poderia chegar a todos os alunos, como deveria intervir e dúvidas que poderiam surgir ao longo da resolução das tarefas. Além disso, é de referir que após cada intervenção questionei-me sobre o que poderia melhorar na próxima proposta de tarefa.

Seguindo esta linha de pensamento, de acordo com Ponte (2005) é importante que o professor reflita sobre a sua prática, ou seja, é importante que tenha "uma consideração cuidadosa e ativa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que os justificam e das consequências que dai resultam" (p. 8). Desta forma, ao longo da minha intervenção tentei adotar uma postura reflexiva, para que pudesse obter resultados enriquecedores para o estudo e, em especial, para que pudesse obter uma análise de dados com conteúdos pertinentes. Ao focar-me na área da Matemática centrei-me nas dificuldades apresentadas pelos alunos apenas nesta área curricular, partindo de uma tarefa diagnóstica, delineando uma sequência de cinco tarefas que apoiasse, tanto os alunos com mais dificuldades, como os alunos que apresentaram menos dificuldades, a nível das operações multiplicação e divisão.

Deste modo, considero que foi importante procurar melhorar a minha prática ao longo desta investigação, questionando-me de forma a encontrar uma maneira ou estratégia que promova oportunidades potenciadoras de aprendizagem dos alunos. Segundo Serrazina (2002), os professores "tornam-se realmente profissionais à medida que ensinam e refletem o seu ensino" (p. 11). Ao efetuar-se uma análise crítica da 'nossa' prática, Ponte (2002) refere que esta é "um processo fundamental de construção do conhecimento sobre essa mesma prática e, portanto, uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente" (Ponte J. P., 2002, p. 3). Seguindo esta linha de pensamento, enquanto futura professora, será tão importante ensinar como ser autocrítica em relação à prática, gerar questões e refletir sobre as mesmas, "adotando uma atitude de aprendizagem relativamente à [minha] prática" (Ponte, 2002, p. 5).

Esta investigação teve como desafio a implementação de uma sequência de tarefas diferenciadas à turma. O facto de haver alunos com tarefas que incluíam imagens e outras sem imagens, fez surgir as seguintes questões, antes da exploração em sala de aula – "Como seria que iriam reagir a esta diferença?" Ou "Será que iriam aceitar haver tarefas diferentes?". Desde a primeira tarefa, expliquei aos alunos que iriam resolver uma tarefa/um desafio e que, tanto eu como a minha colega de estágio estávamos a realizar um trabalho. No meu caso em particular, informei que teria de haver alunos cuja tarefa teria uma imagem, enquanto que para outros não iria haver qualquer tipo de imagem associada à tarefa, embora as pudessem construir, no caso de o quererem fazer.

Associada à exploração das tarefas, é de referir que de forma a prever que tipo de estratégia poderia surgir ao longo da sua resolução, para poder escolher quais os alunos que iriam apresentar as suas estratégias no momento da discussão coletiva, antecipei algumas estratégias. Surgiram também leituras referentes ao tema, de forma a adquirir conhecimento sobre o mesmo. Assim, antes de cada discussão coletiva, escolhia previamente dois alunos de cada grupo, um rapaz e uma rapariga, para que partilhassem com os restantes colegas as suas estratégias. Nas primeiras intervenções, houve por parte dos alunos algumas dificuldades ao nível da expressão oral, falavam baixo, mostravam alguma timidez e pouco intervinham. Este tipo de situação foi por mim trabalhado, em que por exemplo, mudava de posição na sala, afastando-me do quadro, de forma a que tivessem a perceção de que havia colegas que não os ouviam e, consequentemente, não participavam porque não percebiam o que fora partilhado.

Associada às discussões coletivas está a gestão do tempo das minhas intervenções, ajustado ao período temporal disponibilizado pela professora cooperante e à interligação com as intervenções da minha colega de estágio. Consegui realizar o planeamento da sequência de tarefas dentro do planeado, principalmente as discussões coletivas, que preferencialmente deveriam ser realizadas após a resolução de cada tarefa, pois os alunos poderiam não se lembrar de como tinham resolvido e, caso não tivessem sido realizadas no momento, não teriam tido o mesmo impacto.

A estes aspetos associa-se a análise dos dados, a qual foi complexa. Para obter uma melhor organização dos mesmos, após a realização de cada tarefa realizava uma tabela de forma a analisar as estratégias utilizadas por cada aluno. Assim, quando iniciei posteriormente a análise dos dados deste projeto, estas tabelas previamente feitas ajudaram-me a ter as ideias organizadas, focando-me no que era essencial e no que era importante analisar. De forma a interligar a análise dos dados com a revisão da literatura, a construção de tabelas ajudou a analisar as estratégias utilizadas pelos alunos a partir de estudos de autores citados.

A sequência de tarefas e a respetiva análise dos dados, evidenciaram uma evolução das estratégias na resolução das tarefas de multiplicação e divisão. Assim, foram delineados objetivos que pretendia que os alunos atingissem. As tarefas articularam-se entre si, a partir da grandeza dos números envolvidos, dando oportunidade aos alunos de evoluírem os seus raciocínios matemáticos para resolverem tarefas de multiplicação e divisão.

Em conclusão, considero pertinente futuramente continuar a utilizar este método de trabalho, visto que obtive resultados positivos. As dificuldades que foram surgindo ao longo da minha intervenção, motivaram-me a ler e pesquisar mais sobre o tema em estudo e assim, melhorar a minha intervenção, motivando os alunos a querer participar nos momentos de partilha de estratégias. Este projeto envolveu da minha parte dedicação, esforço e muita pesquisa.

Gostei bastante de realizar este projeto, não só pelo conhecimento adquirido, mas também pela partilha de experiências com as pessoas com quem me cruzei ao longo da minha investigação, tanto com a professora cooperante, como com os alunos, com a minha colega de estágio e com a minha orientadora. Este estudo está relacionado com uma área na qual me identifico e da qual sempre gostei: Matemática.

Em síntese, todo o trabalho desenvolvido correspondeu a aprendizagens diversificadas, que contribuíram para alcançar os objetivos a que me propus no seu início.

Este estudo ajudou-me a compreender que as crianças têm diferentes ritmos de aprendizagem e nos primeiros anos escolares, o professor ao não ajustar as tarefas aos alunos com mais dificuldades, estes poderão desmotivar-se e perder um bom ritmo de aprendizagem.

Referência Bibliográficas

Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: um guia prático e crítico.* Porto: Edições ASA.

Almeida, P. (2011). *Diferenciação Pedagógica.* Obtido em 21 de Junho de 2017, de http://pt.slideshare.net/perpetuaparreira/diferenciaco-pedaggica

Ambrose, R., Baek, J. M., & Carpenter, T. P. (2003). Children's invention of multidigit multiplication and division algorithms. Em A. J. Baroody, & A. Dowker (Edits.), *The development of arithmetic concepts and skills* (pp. 305-336). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Anghileri, J. (2003). Issues in teaching multiplication and division. Em I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 184-194). Buckingham: Open University Press.

Arendes, I. R. (1995). *Aprender a Ensinar.* McGraw-Hill.

Baek, J. M. (2006). Children's mathematical understanding and invented strategies for multidigit multiplication. Em *Teaching Children Mathematics, 12(5)* (pp. 242-247).

Bardin, L. (1995). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. Em K. G. M. Beishuizen, *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures* (pp. 127-162). Utrecht: The Netterlands.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemático para o Ensino Básico.* Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular: Lisboa.

Boavida, A. M., Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J., & Duarte, J. (2016). *Matemática para Professores do Ensino Primário.* Luanda: Fundação Calouste Gulbenkian.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no Ensino Básico: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Bofferding, L., Kemmerle, M., & Murata, A. (Outubro de 2017). Focusing on differentiation, three teachers push all their kindergartners toward recognizing relationships among combinations. *Teaching children mathematics, 19*, pp. 164-173.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2005). A multiplicação no contexto do sentido de número. *Equipa do Projecto Desenvolvendo o sentido do número: perspetivas e exigências curriculares, Desenvolvendo o sentido de número: Materiais para o educador e para o professor do 1º Ciclo, II*, pp. 9-17.

Brocardo, J., Duarte, J. A., Boavida, A. M., Delgado, C., & Mendes, F. (2018). *Diferenciação pedagógica em Matemática - Volume II.* Fundação Calouste Gulbenkian, Banco Mundial e República de Angola.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática.* Porto: Porto Editora.

Buys, K. (2008). Mental arithmetic. Em M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. Portalegre: Escola Superior de Educação de Portalegre.

Correia, S., & Serra, H. (2005). *Educação Especial: Diferenciação do conceito à prática.* Porto: Escola Superior de Educação Paula Frassinetti.

Costa, A. M., & Fonseca, L. (2009). Os números na interface da Língua Portuguesa e da Matemática. Em SPIEM, *Actas do XIXEIEM* (pp. 1-11). Vila Real.

Coutinho, C. P. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teorias e prática.* Coimbra: Almedina.

Delgado, C., Mendes, F., Brocardo, J., Duarte, J., & Boavida, A. M. (2017). Avaliação Pedagógica: As aprendizagens iniciais em Matemática. Em E. d. Setúbal, *A avaliação pedagógica das aprendizagens iniciais dos alunos em Língua Portuguesa e em Matemática* (pp. 97-193). Fundação Calouste Gulbenkian; Banco Mundial; República de Angola.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing mulyiplication and division.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Hartnett, J. E. (2007). Categorisation of mental strategies to support teaching and to encourage classroom dialogue. Em Watson, J. & Beswick (Eds.), *Proceedings 30th annual conference of the Mathematics Education Research of Australasia -*

Mathematics: Essencial Research. Essencial Practice (pp. 345-352). Hobart: Tasmania.

Henriques, R. F. (2016). *Refletindo sobre a prática pedagógica em Educação de Infância e Ensino do 1.º Ciclo: Estratégias de diferenciação pedagógica nos primeiros anos de vida.* Leiria: Escola Superior de Educação e Ciências Sociais.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1990). *Investigação Qualitativa: Fundamentos e Prática.* Lisboa: Instituto Piaget.

Martin, G., Gomes, C., Brocardo, J., Pedroso, J., Carrillo, J., Silva, L., . . . Rodrigues, S. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação/Direção-Geral (DGE); Diretor-Geral da Educação; José Víto Pacheco.

Matos, J. M., & Serrazina, M. L. (1996). *Didática da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

McIntosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. Em *For the Learning of Mathematics 12 (3)* (pp. 2-8 & 44).

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Mendes, F. (2013). A aprendizagem da divisão: um olhar sobre os procedimentos usados pelos alunos. *Investigação às Práticas, 3(2),* pp. 5-30.

Mendes, F., & Delgado, C. (2008). A aprendizagem da multiplicação e o desenvolvimento do sentido de número. Em J. Brocardo, L. Serrazina, & I. (. Rocha, *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam a prática* (pp. 159-182). Lisboa: Escolar Editora.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). Em M. Isoda, & R. Olfos, *A multiplicação: construir oportunidades para a sua aprendizagem.* Chile.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (Fevereiro de 2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Desenvolvimento Curricular e Didática*.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante, XXII, n.º 1*, pp. 133-162.

Mendes, F., Brocardo, J., Delgado, C., & Gonçalves, F. (2010). *Números e operações: 3.º ano: números naturais, operações com números naturais, números racionais* *não negativos.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Mendes, F., Brocardo, J., Duarte, J. A., Boavida, A. M., & Delgado, C. (2017). *Diferenciação Pedagógica em Matemática - Volume I.* Fundação Calouste Gulbenkian, Banco Mundial e República de Angola.

Mendes, F., Oliveira, H., & Brocardo, J. (2011). As potencialidades de sequências de tarefas na aprendizagem da multiplicação. *Actas do XXII SIEM: Seminário de Investigação em Educação Matemática*, pp. 237-252.

Ministério da Educação. (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação.

Ministério da Educação/Departamento da Educação. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico - Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação/Departamento da Educação.

NCTM. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

NCTM. (2000). *Princípios e Normas para a Matmática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

NCTM. (2017). *Princípios para Ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* Lisboa: APM.

Néo, A. P. (2015). *Diferenciação Pedagógica: Ver para além do visível.* Lisboa: Escola Superios de Educadores de Infância Maria Ulrich.

Oliveira, I., & Serrazina, L. (2002). *A reflexão e o professor como investigador.* Lisboa.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico.* Lisboa: Lidel.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em G. (Org), *Refletir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-228). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didática da Matemática do 1.º Ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Preston, R. V., & Garner, A. S. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. (NCTM, Ed.) *9*, pp. 38-43.

Quivy, R., & Campenhoudt, L. V. (1992). *Manual de Investigação em Ciências Sociais.* Lisboa: Gradiva.

Santana, R. I. (2017). *Resolver tarefas de multiplicação e divisão. Um estudo com alunos de.* Setúbal: Escola Superior de Educação - Instituto Politécnico de Setúbal.

Santos, E., Menino, H., Rocha, I., Botas, P., & Lucas, T. (2005). *Estratégias de multiplicação: Uma experiência curricular de desenvolvimento do sentido do número.* Leiria.

Serrazina, L. (2002). *A formação para o ensino da matemática na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico.* Porto: Porto Editora.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2001). *O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática.* Lisboa.

Silva, C. F. (2015). *A aprendizagem da multiplicação: Um estudo no 2.º ano de escolaridade.* Setúbal: Escola Superior de Setúbal - Instituto Politécnico de Setúbal.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston: NCTM.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparisons: Their roles in the development of number sense and computational estimation. Em &. M. J. Hiebert, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stake, R. (2012). *A Arte de Investigação com Estudos de Caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. Em *Mathematical Thinking and Learning* (pp. 313-340).

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for strategies for addition and subtraction. Part 1. Em *Mathematics in School, 28(5)* (pp. 2-4).

Tomlinson, A. C. (2008). *Diferenciação Pedagógica e Diversidade. Ensino de alunos em turmas com diferentes níveis de capacidades.* Porto: Porto Editora.

Tomlinson, C., & Allan, S. (2002). *Liderar Projetos de Diferenciação Pedagógica.* Porto: Edições ASA.

Torbeyns, J., Smedt, B. d., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71(I)*, pp. 1-17.

Verschaffel, L., Greer, B., & de Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. Em F. K. (Ed), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning (Vol II)* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Yin, R. (1989). *Case study research: Design and methods*. Newbury Park (Califórnia): Sage.

Anexos

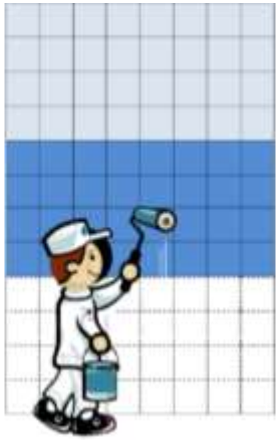
Anexo 1

Tarefa Diagnóstico – "Colocar azulejos"

Tarefa D1

Tarefa – Colocar azulejos

1. Na escola do André, o Sr. João está a colocar azulejos, com dois tons de azul numa parede do complexo desportivo, tal como mostra a figura.



1.1 Quantos azulejos já colocou o Sr. João? Explica como pensaste.

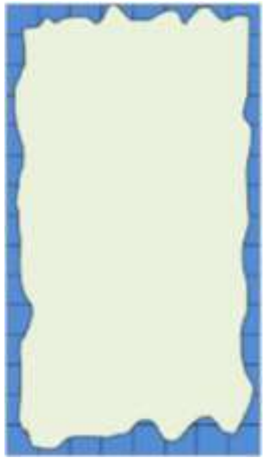
1.2 Quantos azulejos faltam colocar ainda na parede? Explica como pensaste.

1.3 Quando terminar, quantos azulejos terá colocado o Sr. João? Explica como pensaste.

Tarefa D2

Tarefa – Colocar azulejos

1. Numa outra parede com azulejos foi danificada pela humidade e alguns azulejos caíram. Quantos azulejos precisam de ser novamente colocados? Explica como pensaste.



Tarefa 1 – “Quem comprou mais litros de água?”

Tarefa 1A

Tarefa – Quem comprou mais litros de água?

1. A Ana comprou os garrafões de água representados na figura, cada um com capacidade igual a 5 litros. Quantos litros de água comprou a Ana? Explica como pensaste.

2. O Rui também comprou os garrafões de água representados na figura, com capacidade igual a 15 litros. Quantos litros de água comprou o Rui? Explica como pensaste.

Tarefa 1B

Tarefa – Quem comprou mais litros de água?

A Ana comprou 12 garrafões de água, cada um com capacidade igual a 5 litros. O Rui comprou 6 garrafões, também de água, cada um com capacidade igual a 15 litros. Quem comprou mais litros de água? Explica como pensaste.

Tarefa 2 – "Quantos litros de água tem cada garrafão?"

Tarefa 2A

Tarefa – Quantos litros de água tem cada garrafão?

A Ana comprou 8 garrafões de água, com um total de 40 litros. Como os garrafões são todos iguais, quantos litros de água contém cada um? Explica como pensaste.

Tarefa 2B

Tarefa – Quantos litros de água tem cada garrafão?

A Ana comprou 8 garrafões de água, com um total de 40 litros. Como os garrafões são todos iguais, quantos litros de água contém cada um? Explica como pensaste.

Tarefa 3 – "Quem comprou mais litros de água?"

Tarefa 3A

Tarefa – Quem comprou mais litros de água?

1. A Joana comprou os garrafões representados na figura, cada um com capacidade igual a 15 litros. Quantos litros de água comprou a Joana? Explica como pensaste.

2. O Rui também comprou os garrafões de água representados na figura, com capacidade igual a 30 litros. Quantos litros de água comprou o Rui? Explica como pensaste.

3. Quem comprou mais litros de água, a Joana ou o Rui? Explica como pensaste.

Tarefa 3B

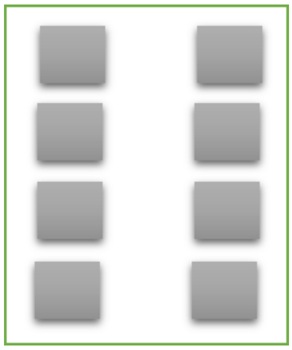
Tarefa – Quem comprou mais litros de água?

A Joana comprou 18 garrafões de água, cada um com capacidade igual a 15 litros. O Rui comprou 9 garrafões, também de água, cada um com capacidade igual a 30 litros. Quem comprou mais litros de água? Explica como pensaste.

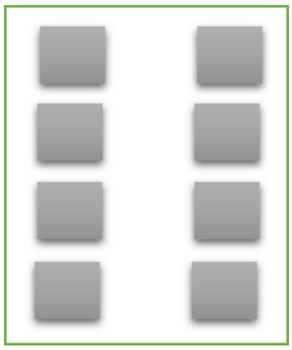
Tarefa 4 – "A caderneta de cromos…"

Tarefa – A caderneta de cromos

1. O Francisco tem os primeiros 96 cromos de uma coleção. Se em cada página forem colados 8 cromos, quantas páginas da caderneta tem o Francisco completamente preenchidas?



2. A Vera tem 15 páginas da mesma caderneta completamente preenchidas. Quantos cromos já tem a Vera?



Tarefa 5 – “Os livros…”

Tarefa – Os livros…

1. O Nelson esteve a ler um livro. Em cada dia leu 6 páginas e precisou de 21 dias para o ler. Quantas páginas tem o livro que o Nelson leu? Explica como pensaste.

2. A Margarida também decidiu ler um livro que tem 132 páginas. Decidiu ler 12 páginas por dia. Em quantos dias irá a Margarida ler o livro? Explica como pensaste.