



Instituto Politécnico de Tomar

**Escola Superior de Tecnologia de Tomar**

**Paulo José Marques Da Silva**

# **Controlo de pêndulo invertido de base móvel linear**

Dissertação de Mestrado

Orientado por:

Prof. Doutor Paulo Coelho, IPT

Dissertação apresentada ao Instituto Politécnico de Tomar  
para cumprimento dos requisitos necessários  
à obtenção do grau de Mestre  
em Controlo e Eletrónica Industrial

## **Dedicatória**

---

Dedico este trabalho à minha família, amigos e professores que me apoiaram durante todos estes anos.



---

## Resumo

---

Este trabalho estuda o pêndulo invertido através da sua simulação e aplicação a um pêndulo real (IPO2 Quanser), diversos tipos de controlo são aplicados comparando os resultados de forma crítica.

Com a ajuda do MATLAB<sup>®</sup> foram criados diversos interfaces de utilizador que permitem de forma rápida configurar e testar diversas estratégias de controlo em tempo real e ver os resultados práticos com a ajuda de uma animação criada para o efeito.

**Palavras-chave:** pêndulo controlo Quanser invertido PID PD PV Lead Lag LQR

---

## Abstract

---

This work studies the inverted pendulum by simulation and applies it to one real inverted pendulum (IPO2 Quanser), several types of control methods are applied and the results are compared.

With the help of MATLAB<sup>®</sup> several interfaces were created that allow the configuration of the hardware and control, they also allow the test of several control strategies in real time and see the results with the help of one animation created for this thesis.

**Keywords:** inverted pendulum control Quanser PID PD PV Lead Lag LQR

## Agradecimentos

---

Quero agradecer a ajuda do meu orientador de projeto o professor Paulo Coelho que ao longo dos anos sempre me incentivou e ensinou a usar o MATLAB<sup>®</sup> como ferramenta fundamental no estudo de processos de controlo e não só.

## Índice

<b>0.</b>	<b>Introdução .....</b>	<b>1</b>
<b>0.1</b>	<b>Descrição geral da tese.....</b>	<b>1</b>
<b>0.2</b>	<b>Organização da tese .....</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>Estado da arte .....</b>	<b>2</b>
<b>1.1.</b>	<b>Métodos clássicos .....</b>	<b>3</b>
<b>1.2.</b>	<b>Métodos modernos .....</b>	<b>6</b>
<b>2.</b>	<b>Modelo matemático do carrinho do IP02 .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.</b>	<b>Versão simplificada do modelo dinâmico.....</b>	<b>13</b>
<b>2.2.</b>	<b>Versão completa do modelo dinâmico.....</b>	<b>16</b>
<b>3.</b>	<b>Controlo de posição .....</b>	<b>18</b>
<b>4.</b>	<b>Controlo PD (proporcional derivativo).....</b>	<b>19</b>
<b>5.</b>	<b>Controlo PV (Proporcional-velocidade) .....</b>	<b>20</b>
<b>6.</b>	<b>Controlo de velocidade usando método phase-lag .....</b>	<b>27</b>
<b>7.</b>	<b>Controlo de velocidade usando método phase-lead .....</b>	<b>34</b>
<b>8.</b>	<b>Minimização de oscilações do braço do pêndulo.....</b>	<b>40</b>
<b>9.</b>	<b>Linearização das equações de movimento (EOM) .....</b>	<b>47</b>
<b>10.</b>	<b>Projeto de colocação de pólos .....</b>	<b>52</b>
<b>11.</b>	<b>Projeto de controlador LQR.....</b>	<b>58</b>
<b>12.</b>	<b>Conclusões e trabalho futuro.....</b>	<b>74</b>
<b>13.</b>	<b>Referências bibliográficas.....</b>	<b>75</b>
<b>14.</b>	<b>Anexos .....</b>	<b>77</b>

## Índice de figuras

FIGURA 1: FLYBALL GOVERNOR DE JAMES WATT (SÉCULO XVIII) [1] .....	3
FIGURA 2: FOTO DE RUDOLF EMIL KALMAN [7].....	6
FIGURA 3: RESPOSTA DO IP COM CONTROLO EM TEMPO REAL [8] .....	7
FIGURA 4: MODELO SIMULINK DO SIMULADOR (PENDDEMO) .....	7
FIGURA 5: INTERFACE DE UTILIZADOR DO SIMULADOR (PENDDEMO).....	8
FIGURA 6: CURVAS DE APRENDIZAGEM [9].....	8
FIGURA 7: REDES DE DUAS CAMADAS [9].....	9
FIGURA 8: MODELO SIMULINK DO IP (SLCP).....	9
FIGURA 9- PARTE DO CONTROLADOR DE LÓGICA DIFUSA .....	10
FIGURA 10- DINÂMICA DO SISTEMA (CARRINHO E BRAÇO).....	10
FIGURA 11: INTERFACE DE UTILIZADOR DO SIMULADOR (SLCP).....	11
FIGURA 12: ÅSTRÖM E FURUTA [11].....	11
FIGURA 13: UMA DAS SIMULAÇÕES FEITAS NO ARTIGO [11] .....	12
FIGURA 14: MODELO DO CIRCUITO DO MOTOR DC DO IP02 .....	13
FIGURA 15: DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA .....	18
FIGURA 16: DIAGRAMA DE BLOCOS DO SISTEMA COM CONTROLO PV .....	20
FIGURA 17-GUI DE SETUP DO CONTROLO PID/PV .....	24
FIGURA 18-VISTA MAIS DETALHADA DA RESPOSTA DO SISTEMA COM CONTROLO PV ..	24
FIGURA 19-RELAÇÃO ENTRE A ENTRADA E A RESPOSTA SIMULADA .....	25
FIGURA 20-INTERFACE DE SIMULAÇÃO COM FUNCIONAMENTO EM TEMPO REAL.....	25
FIGURA 21-ANIMAÇÃO DO CARRINHO DO IP02 .....	26
FIGURA 22-DIAGRAMA DE BLOCOS DO ESQUEMA DE CONTROLO LAG .....	27
FIGURA 23- DIAGRAMA DE BODE DE UM COMPENSADOR LAG TÍPICO.....	28
FIGURA 24-DIAGRAMA DE BODE DA PLANTA COM O GANHO K.....	31
FIGURA 25-DIAGRAMA DE BODE PARA O COMPENSADOR LAG.....	31
FIGURA 26-RESPOSTA A DEGRAU DO SISTEMA COMPENSADO .....	32
FIGURA 27-RESULTADOS OBTIDOS NA SIMULAÇÃO .....	32
FIGURA 28- ESQUEMA DE CONTROLO USANDO O COMPENSADOR PHASE-LEAD .....	34
FIGURA 29-DIAGRAMA DE BODE DE UM COMPENSADOR PHASE-LEAD TÍPICO.....	35
FIGURA 30-DIAGRAMA DE BODE DO SISTEMA .....	37
FIGURA 31-RESPOSTA A DEGRAU DO SISTEMA COMPENSADO .....	37
FIGURA 32-RESPOSTA A DEGRAU DO SISTEMA COMPENSADO EM MALHA FECHADA.....	37
FIGURA 33-DIAGRAMA DE BODE DO SISTEMA COM INTEGRADOR .....	38
FIGURA 34-DIAGRAMA DE BODE DO SISTEMA COM INTEGRADOR E GANHO.....	38
FIGURA 35-DIAGRAMA DE BODE DO COMPENSADOR LEAD.....	38
FIGURA 36-DIAGRAMA DO SISTEMA COMPENSADO .....	38
FIGURA 37-RESULTADO DA SIMULAÇÃO COM COMPENSADOR LEAD .....	38
FIGURA 38-ESQUEMA DO PÊNDULO, COORDENADAS E SENTIDO DOS VETORES .....	41
FIGURA 39- LOCALIZAÇÃO DOS PÓLOS EM MALHA FECHADA.....	53
FIGURA 40-MAPA DE PÓLOS E ZEROS EM MALHA ABERTA .....	55
FIGURA 41-MAPA DE PÓLOS E ZEROS EM MALHA FECHADA .....	55
FIGURA 42-RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO SPG + IP02 + PP .....	55
FIGURA 43-POSIÇÃO DO CARRINHO E ÂNGULO DO BRAÇO .....	55
FIGURA 44-RESULTADOS DA SIMULAÇÃO (SEM PERTURBAÇÃO) .....	56
FIGURA 45-RESPOSTA A UMA PERTURBAÇÃO NO ÂNGULO DO PÊNDULO .....	56
FIGURA 46-ESQUEMA DO PÊNDULO, COORDENADAS E SENTIDO DOS VETORES .....	59
FIGURA 47-RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO (4 ESTADOS) .....	69
FIGURA 48-RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO .....	69
FIGURA 49-INTERFACE DE CÁLCULO DO K.....	71
FIGURA 50-RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO (4 ESTADOS) .....	71
FIGURA 51-RESPOSTA A DEGRAU UNITÁRIO (2 ESTADOS) .....	71
FIGURA 52-RESULTADOS DA SIMULAÇÃO .....	72

---

## Lista de abreviaturas e siglas

IP ou IP01	Pêndulo Invertido de base móvel linear
IP02	Pêndulo Invertido de base móvel linear capaz de se erguer
PID	Controlador proporcional–integral–derivativo
LQR	Regulador quadrático linear
PV	Regulador proporcional-velocidade
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
DC	Corrente contínua
AC	Corrente alternada

## Lista de símbolos

Símbolo	Descrição	Matlab/Simulink
$V_m$	Tensão na armadura do motor	Vm
$I_m$	Corrente na armadura do motor	Im
$R_m$	Resistência da armadura do motor	Rm
$L_m$	Indutância da armadura do motor	Lm
$K_t$	Constante de Binário do motor	Kt
$\eta_m$	Eficiência do motor	Eff_m
$K_m$	Constante da força contra-electromotriz (EMF)	Km
$E_{emf}$	Tensão da EMF	Eemf
$J_m$	Momento de inércia do rotor	Jm
$K_g$	Rácio da caixa de velocidades (Planetary Gearbox)	Kg
$\eta_g$	Eficiência da caixa de velocidades (Planetary Gearbox)	Eff_g
$M_{c2}$	Massa do carrinho (IP02)	Mc2
$M_w$	Massa do carrinho completo	Mw
$M$	Massa total do sistema	M
$P_r$	Ângulo de elevação	Pr
$r_{mp}$	Raio da roda dentada do motor	r_mp
$N_{mp}$	Número de dentes da roda dentada do motor	N_pp
$r_{pp}$	Raio da posição da roda dentada	r_pp
$N_{pp}$	Número de dentes da posição da roda dentada	N_pp
$B_{eq}$	Coefficiente de amortecimento viscoso visto da roda dentada	Beq
$T_m$	Binário gerado pelo motor	
$T_{mp}$	Binário aplicado pelo motor no pinion	
$F_c$	Força produzida pelo motor no cart	
$F_{ai}$	Inércia rotacional da armadura, atua sobre o cart	
$T_{ai}$	Binário inicial da armadura, visto do eixo do motor	
$\alpha_m$	Ângulo de rotação do eixo do motor	
$\omega_m$	Velocidade angular do eixo do motor	
$x$	Posição linear do cart	x

PO	Percentagem de overshoot	PO
$t_p$	Tempo de pico	$t_p$
t	Tempo	
s	Operador laplaciano	
$\omega_n$	Frequência natural não amortecida	Wn
$K_p$	Ganho proporcional	$K_p$
$K_v$	Ganho de velocidade	$K_v$
$\zeta$	Fator de amortecimento	Zeta

### Parâmetros do IP02

Símbolo	Descrição	Valores	Unidades
$M_{pl}$	Massa do pêndulo mais longo (com o encaixe)	0.230	Kg
$M_{pm}$	Massa do pêndulo médio (com o encaixe)	0.127	Kg
$L_{pl}$	Comprimento do pêndulo mais longo, eixo a ponta	0.6413	m
$L_{pm}$	Comprimento do pêndulo médio, eixo a ponta	0.3365	m
$l_{pl}$	Comprimento pêndulo mais longo, eixo ao centro gravidade	0.3302	m
$l_{pm}$	Comprimento do pêndulo médio, eixo ao centro gravidade	0.1778	m
$I_{pl}$	Momento de inércia do pêndulo longo, em relação ao seu centro de gravidade	7.88e-3	$Kg.m^2$
$I_{pm}$	Momento de inércia do pêndulo médio, em relação ao seu centro de gravidade	1.20e-3	$Kg.m^2$
$B_p$	Coefficiente de amortecimento viscoso, visto do eixo de pêndulo	0.0024	Nms/rad
g	Constante aceleração gravítica da Terra	9.81	$m/s^2$



## 0. Introdução

### 0.1 Descrição geral da tese

Esta tese modela o pêndulo invertido e aplica diversas estratégias de controlo ao seu modelo matemático, a base para a tese é a documentação que a Quanser fornece com o seu pêndulo (IP02), foram criados interfaces de utilizador e uma animação que facilita o teste de diversas estratégias de controlo sem ser necessário o hardware.<sup>1</sup>

### 0.2 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- Capítulo 1-Breve descrição de alguns métodos de controlo aplicáveis ao pêndulo, são dados alguns exemplos e indicados artigos e autores.
- Capítulo 2-Aqui são obtidas as equações do modelo matemático do carrinho, começando por uma versão simplificada e acabando na versão completa.
- Capítulo 3-Aqui é obtida a função de transferência em malha fechada.
- Capítulo 4-Breve descrição do controlador PD e função de transferência.
- Capítulo 5-Aplicação do controlo PV ao carrinho.
- Capítulo 6-Aplicação do método phase-lag para o controlo da velocidade do carrinho.
- Capítulo 7-Aplicação do método phase-lead para o controlo da velocidade do carrinho
- Capítulo 8-Aqui são obtidas as equações do modelo matemático completo do pêndulo (EOM).
- Capítulo 9-Aqui são linearizadas as equações de movimento (EOM).
- Capítulo 10-Colocação de polos para controlo de posição, minimizando as oscilações do braço do pêndulo.
- Capítulo 11-Aqui é projetado o controlador LQR que é usado para manter o braço do pêndulo equilibrado.
- Capítulo 12-Algumas conclusões e indicação do trabalho futuro.
- Capítulo 13-Lista das referências bibliográficas usadas para a execução desta tese.
- Capítulo 14-Informação sobre os anexos necessários e complementares a esta tese.

---

<sup>1</sup> Todos os ficheiros foram feitos no MATLAB® 2008b e como tal não são compatíveis com versões anteriores do MATLAB®, podendo até nem funcionarem em outras versões mais recentes.

## 1. Estado da arte

Os Pêndulos invertidos (IP) são ferramentas clássicas nos laboratórios de controlo desde 1950. Originalmente usado para ilustrar ideias de controlo linear tais como estabilização de sistemas instáveis. Devido á sua natureza não linear os IP mantiveram a sua utilidade e são agora usados para ilustrar muitas ideias emergentes no campo do controlo não linear [11].

Este projeto tem como intenção fornecer ferramentas virtuais aos alunos de controlo que permitam testar de forma segura e em tempo real os valores que calcularam para os ganhos, também são fornecidas ferramentas de cálculo automático dos ganhos e uma animação que permite poupar tempo e evitar danos no hardware.

A base para este projeto é a documentação do pêndulo e este documento (tese) não dispensa a consulta da documentação e ficheiros em suporte digital (DVD).

Neste capítulo serão abordados alguns métodos e técnicas aplicáveis ao controlo do IP02 acompanhado de uma breve revisão histórica.

## 1.1. Métodos clássicos

Para começar necessitamos de saber exatamente em que consiste a ação de controlar e que elementos são necessários para essa ação, podemos analisar um exemplo muito simples como encher um copo com água, os nossos olhos funcionam como sensores pois dão a indicação da posição do copo e nível da água dentro dele, a nossa mão e braço são os atuadores pois realizam o movimento, por fim o nosso cérebro faz a interligação entre os sensores e atuadores, ele decide onde deita a água e quando deve parar baseado nos sensores e através dos atuadores realiza a ação.

O exemplo do copo de água pode ser feito por um robô em vez de uma pessoa, aí os atuadores são motores e os sensores são detetores de nível e codificadores (encoders), o papel do cérebro é desempenhado por um microprocessador ou computador, nesse caso é um controlo automático pois é feito por automatismos.

A primeira aplicação que se conhece do controlo automático foi o chamado “Flyball governor” de *James Watt* [1].

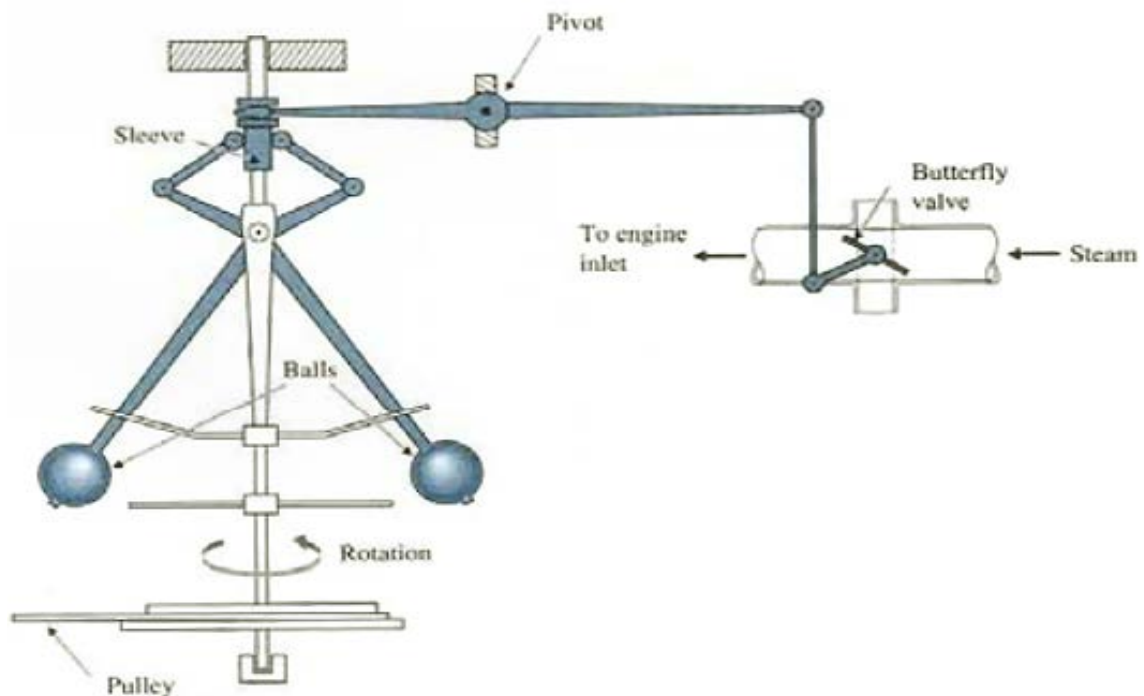


Figura 1: Flyball governor de James Watt (Século XVIII) [1]

A função do “Flyball governor” (figura 1) é controlar a velocidade de um motor a vapor, eis como funciona, á medida que a velocidade do motor aumenta as duas “bolas voadoras” afastam-se do eixo de rotação, esse afastamento vai fechar um pouco a válvula que por sua vez reduz a quantidade de vapor que entra no motor.

Na época o “Flyball governor” foi inicialmente usado não só para controlar a velocidade de motores a vapor mas também para regular a velocidade da roda de moinhos a água [1].

O “Flyball governor” evoluiu para o controlo de direção em navios [2][3], um dos exemplos mais antigos de um controlador PID foi desenvolvido por *Elmer Sperry* em 1911 [4] enquanto que a primeira análise teórica do controlador PID foi feita pelo engenheiro *Nicolas Minorsky* [5], *Minorsky* desenhava sistemas automáticos de controlo de direção em navios para a marinha americana e baseou a sua análise na observação de um “homem do leme”, a sua observação concluiu que o “homem do leme” se baseia no erro corrente bem como no erro passado e rácio de mudança [3], *Minorsky* tornou as suas observações em expressões matemáticas. O seu objetivo era a estabilidade e não o controlo geral o que lhe permitiu simplificar significativamente o problema.

Foram realizadas experiências no Novo México com o controlador a controlar a velocidade angular do leme e chegou-se á conclusão de que os resultados eram melhores dos que a maioria dos “homem do leme” conseguiam atingir, a marinha americana acabou por não adotar o sistema devido a resistência do pessoal [3].

Atualmente o controlador PID é bastante usado no meio industrial, segundo *Ogata* [6] em 2002 mais de metade dos controladores industriais utilizam o controlador PID ou esquemas modificados do controlador PID.

Nos capítulos seguintes vamos tentar aplicar o controlador PID ou esquemas modificados ao controlo do IP02.

Um dos controladores mais utilizados é o controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo). Uma vez que estas componentes são facilmente visualizadas no domínio do

tempo, os controladores PID são normalmente projetados com base em métodos no domínio do tempo. Se o projeto for em frequência os controladores utilizam-se controladores em atraso, avanço, avanço-atraso [11].

Como já referido acima o controlador PID é um dos controladores mais utilizados. Cerca de 90 % dos problemas de controlo podem ser resolvidos por este controlador [17]. Nos capítulos anteriores temos discutido essencialmente casos em que o controlador corresponde a uma constante  $K$ . Este tipo de controlo é formalmente conhecido por controlador proporcional (como já referido), uma vez que o sinal à saída do controlador está relacionado com a entrada do controlador através de uma constante de proporcionalidade [12].

## 1.2. Métodos modernos

O controlo moderno é designado de controlo ótimo pois o controlador é obtido como solução de um processo de otimização onde se pretende minimizar uma função de custo ( $J$ ) restringida pela dinâmica do sistema.

A função de custo é tipicamente uma energia associada ao erro no estado e ao erro na entrada.

Minimizar a função de custo corresponde a escolher o valor de  $u$  que permita reduzir o erro no estado  $x$  e assim surge em 1960 o Regulador Quadrático Linear (LQR), desenvolvido por *Rudolf Emil Kalman*.

Também em 1960, *Kalman* publicou a teoria do agora designado Filtro de Kalman, que permite obter a melhor estimativa baseada na correção recursiva de cada uma das medidas individuais do processo, por se tratar de um método que é pouco influenciado pelo ruído, foi designado por filtro.



Figura 2: Foto de Rudolf Emil Kalman [7]

O controlador LQR pode ser facilmente aplicado ao IP como mostra um artigo publicado no IEEE em 2007 [8], apesar do motor não ser semelhante ao do hardware IP02 que vai ser usado neste projeto podemos constatar que os autores do artigo conseguiram minimizar o deslocamento do carrinho e manter o pêndulo ereto perante perturbações, apenas parece não ser muito rápido a reagir a perturbações como podemos ver na figura 3

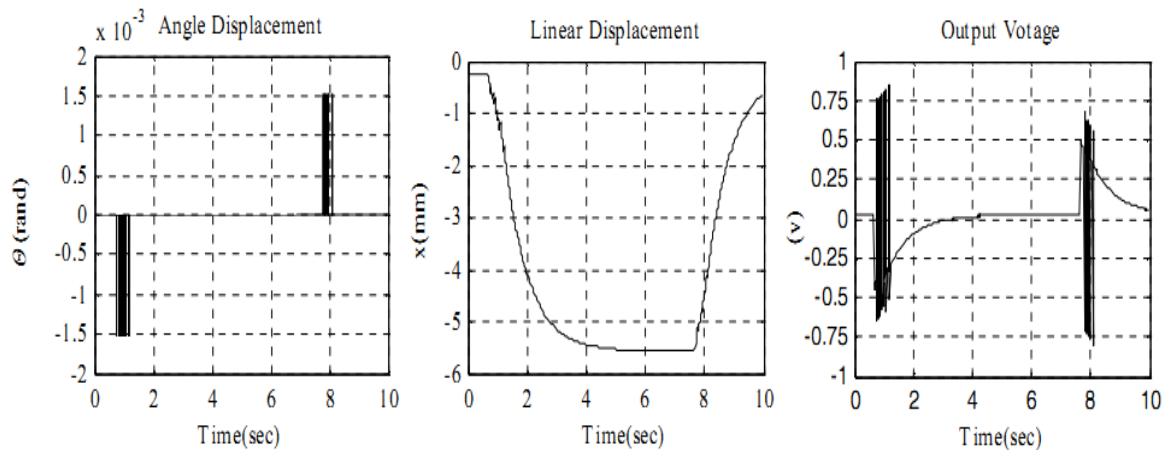


Figura 3: Resposta do IP com controlo em tempo real [8]

O MATLAB® possui um simulador de IP baseado em LQR, essa simulação pode ser acedida executando o comando **penddemo** na linha de comandos do MATLAB®, é um simulador interativo.

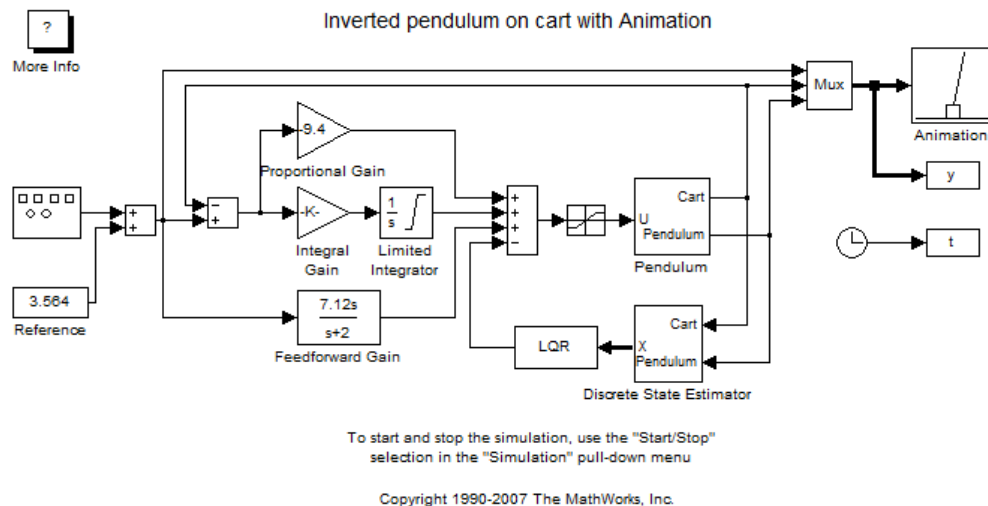
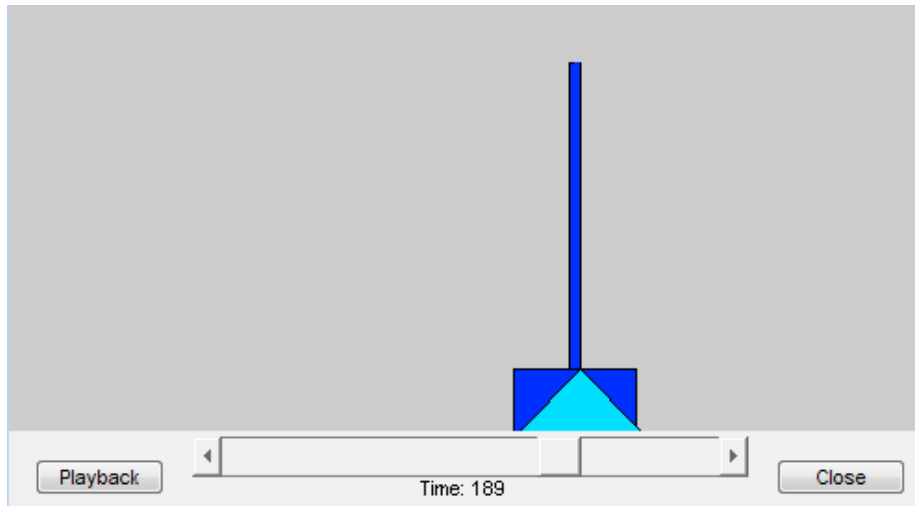


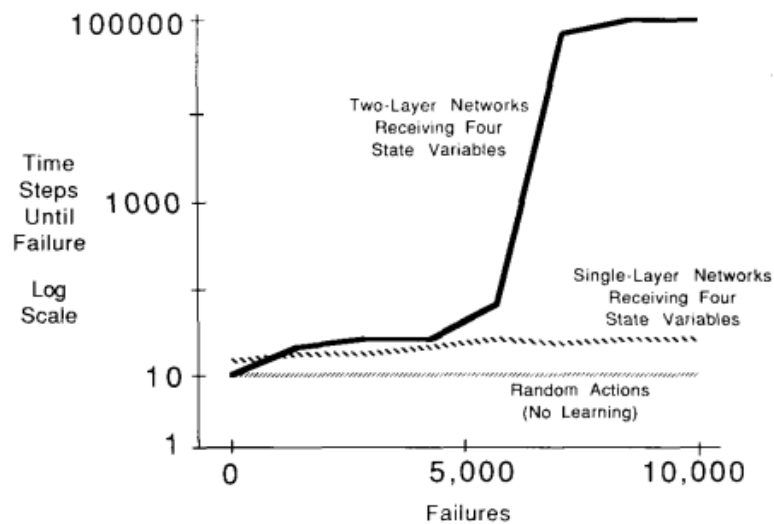
Figura 4: Modelo simulink do simulador (penddemo)



**Figura 5: Interface de utilizador do simulador (penddemo)**

O simulador funciona bastante bem e para além de manter o pêndulo erguido também permite ao utilizador definir onde quer o carrinho, isto é, permite alterar a referência da posição do carrinho.

*Charles W. Anderson* [9] usa redes neuronais para controlar um IP, desconhecendo inicialmente a dinâmica do sistema, é usado um método de aprendizagem.



**Figura 6: Curvas de aprendizagem [9]**

Na figura 6 podemos ver que a aprendizagem com duas redes de duas camadas é muito mais rápida.

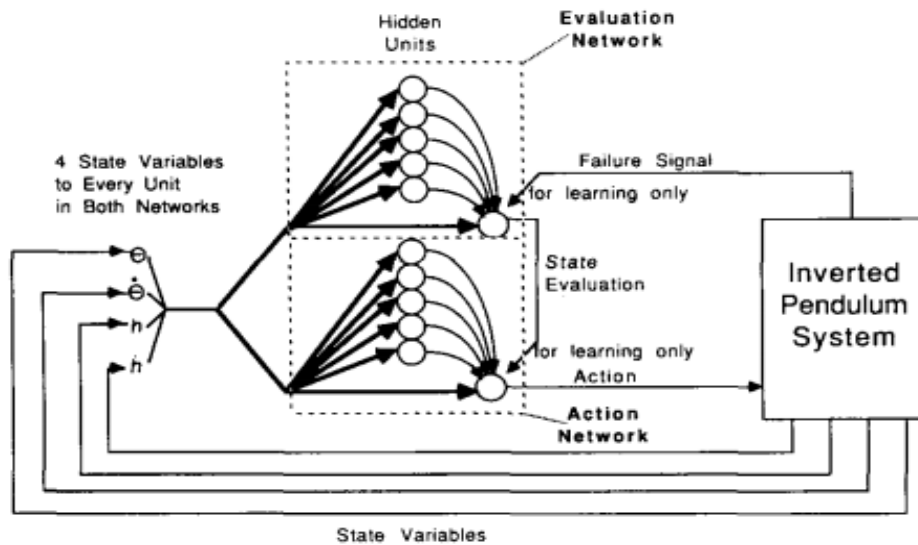


Figura 7: Redes de duas camadas [9]

Apesar de ser um método capaz de controlar sistemas com dinâmica desconhecida é um método lento pois necessita de tempo para “aprender”, o autor do artigo é cauteloso e não sabe se o sistema suporta incertezas do mundo real.

O MATLAB® possui um simulador de IP baseado em lógica difusa que vai provavelmente ser útil na realização deste projeto, essa simulação pode ser acedida executando o comando `slcp` na linha de comandos do MATLAB®, é um simulador interativo.

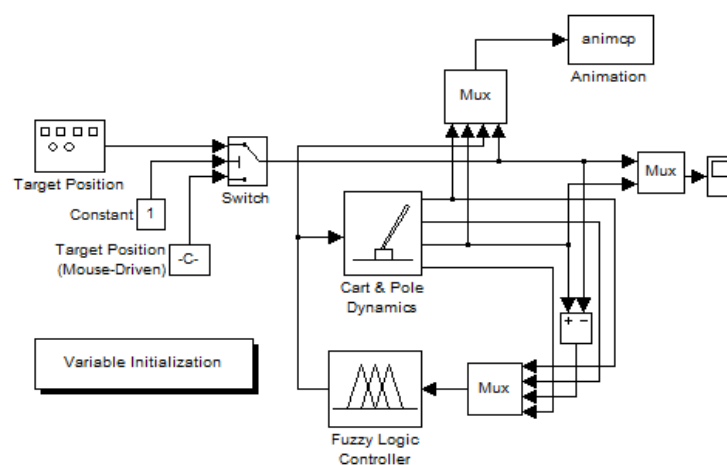


Figura 8: Modelo Simulink do IP (slcp)

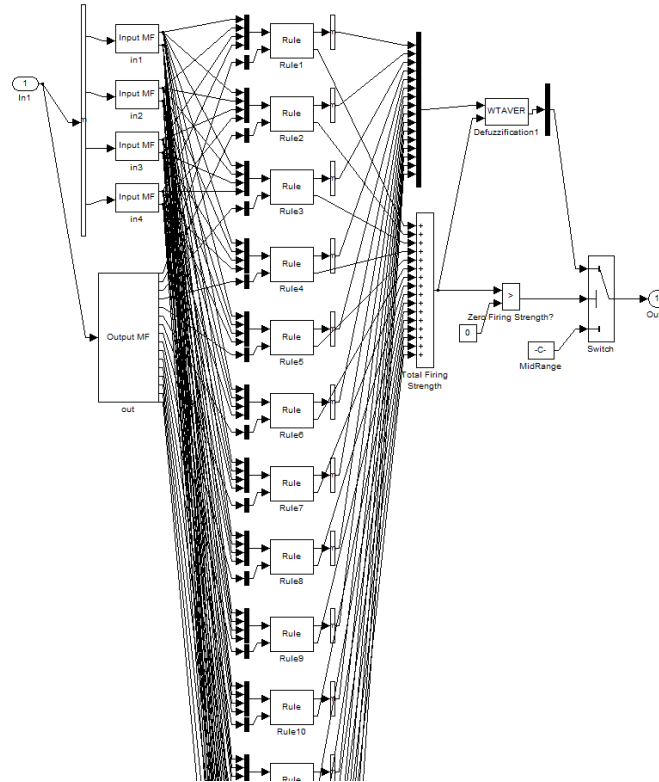


Figura 9- Parte do controlador de lógica difusa

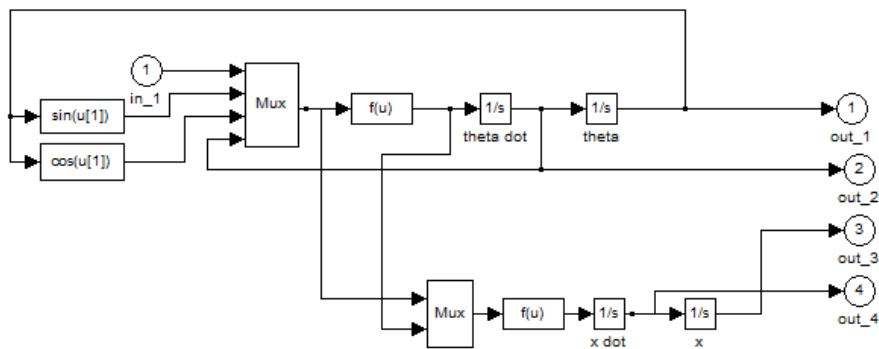
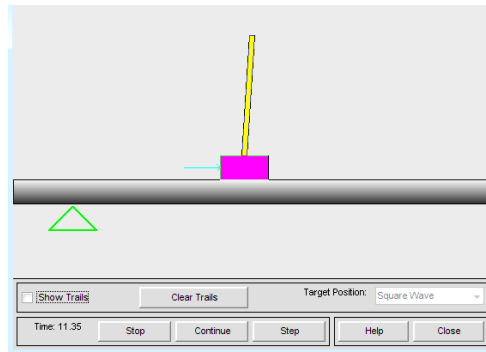


Figura 10- Dinâmica do sistema (carrinho e braço)

Na figura 9 podemos ver que o controlador de lógica difusa é bastante complexo e tem várias regras, na figura 10 podemos ver a dinâmica do sistema, as equações de movimento estão nos blocos  $f(u)$



**Figura 11: Interface de utilizador do simulador (slcp)**

No artigo [10] é demonstrado que erguer o pêndulo controlando a sua energia é bastante conveniente, usando a estratégia com o algoritmo difuso conseguiram uma performance superior ao proposto por *Åström e Furuta* [11] que vamos ver de seguida.

*Åström e Furuta* [11] tratam o IP como um problema de controlo de energia usando para isso a referência igual ao valor da energia do pêndulo no estado erguido.



**Figura 12: *Åström e Furuta* [11]**

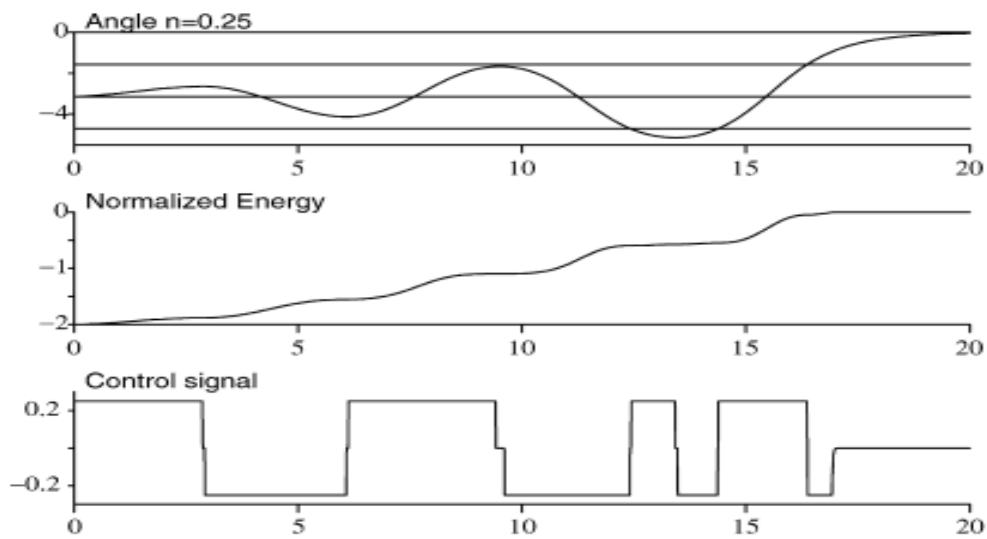


Figura 13: Uma das simulações feitas no artigo [11]

Na figura 13 podemos ver os resultados de uma das simulações, o IP02 necessitou de 5 balanços para erguer o pêndulo, o comportamento depende do rácio da máxima aceleração do motor com a aceleração da gravidade ou seja quanto maior a aceleração menos balanços serão necessários para erguer o pêndulo, atenção que também depende da distância que o carrinho pode percorrer.

De salientar que não é só uma estratégia de controlo, quando o pêndulo está próximo da posição desejada a estratégia de controlo deve mudar de forma a “capturar” o pêndulo.

O artigo [11] é dos mais interessantes para o projeto do IP02 e não é nenhuma surpresa pois os dois autores são muito experientes nestas andanças.

## 2. Modelo matemático do carrinho do IP02

### 2.1. Versão simplificada do modelo dinâmico

Começa-se por aplicar a segunda lei de Newton ao sistema

$$M \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \quad (1.1)$$

A inércia da armadura do motor e o atrito de Coulomb são ignorados apenas para obtermos um modelo simplificado.

$$F_c = \frac{\eta_g K_g T_m}{r_{mp}} \quad (1.2)$$

Na figura seguinte é representado o modelo do circuito do motor dc do IP02

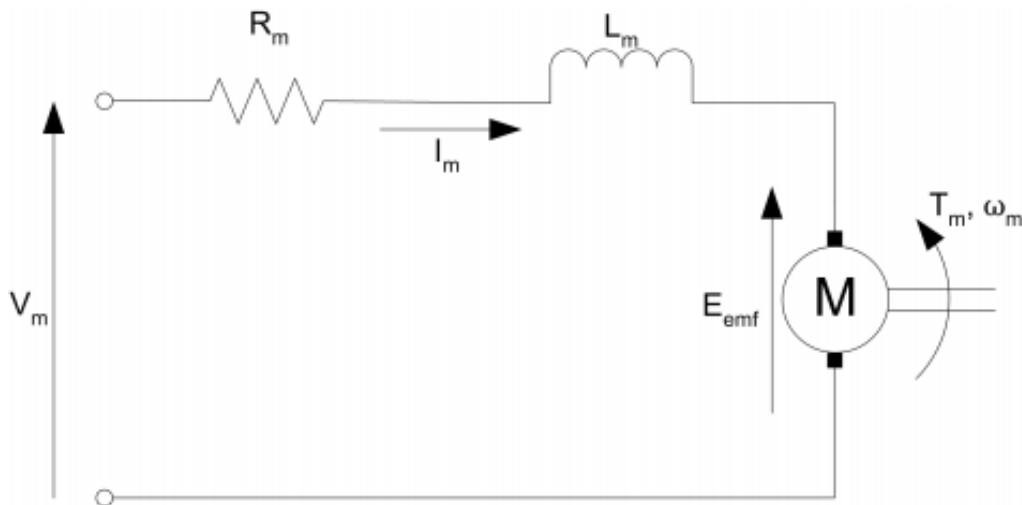


Figura 14: Modelo do circuito do motor DC do IP02

Usando a lei das malhas (uma das leis de Kirchhoff) obtém-se

$$V_m - R_m I_m - L_m \left( \frac{\partial}{\partial t} I_m \right) - E_{emf} = 0 \quad (1.3)$$

Como  $L_m$  é muito menor que  $R_m$  podemos desprezar a indutância do motor ficando assim

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m} \quad (1.4)$$

$E_{emf}$  é conhecida, ela é proporcional á velocidade do eixo do motor, podemos substitui-la da seguinte forma

$$I_m = \frac{V_m - K_m \omega_m}{R_m} \quad (1.5)$$

De forma a ter em conta as perdas elétricas do motor, a eficiência do motor é introduzida para calcular o Binário gerado pelo motor.

$$T_m = \eta_m K_t I_m \quad (1.6)$$

Substituindo as equações (1.5) e (1.6) na equação (1.2)

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t (V_m - K_m \omega_m)}{R_m r_{mp}} \quad (1.7)$$

Combinando a roda dentada do motor, o seu eixo e os mecanismos da caixa de velocidades, a velocidade angular do motor pode ser escrita como função da velocidade linear do carrinho

$$\omega_m = \frac{K_g \left( \frac{d}{dt} x(t) \right)}{r_{mp}} \quad (1.8)$$

Substituindo a equação (1.8) na equação (1.7) e rearranjando os termos

$$F_c = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t \left( V_m r_{mp} - K_g K_m \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \right)}{R_m r_{mp}^2} \quad (1.9)$$

Finalmente, substituindo a equação (1.9) na equação (1.1), aplicando a transformada de Laplace e rearranjando os termos obtemos a função transferência  $G(s)$  do sistema (IP02)

$$G(s) = \frac{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t}{(R_m M r_{mp}^2 s + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2) s} \quad (1.10)$$

## 2.2. Versão completa do modelo dinâmico

A função de transferência obtida em (1.10) é simples mas não inclui fatores importantes, vamos então tentar obter uma função de transferência mais completa.

Vamos introduzir a inércia do armadura do motor o que vai melhorar a nossa função de transferência.

Começa-se por aplicar a segunda lei de Newton ao sistema e também o princípio de D'Alembert [17]

$$M \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + F_{ai}(t) = F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \quad (2.1)$$

Vista da roda dentada do motor a inércia da armadura do motor pode ser exprimida como função da inércia do Binário da armadura

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g T_{ai}}{r_{mp}} \quad (2.2)$$

Aplicando a segunda lei de Newton ao eixo do motor:

$$J_m \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_m(t) \right) = T_{ai}(t) \quad (2.3)$$

A configuração mecânica da roda dentada e do eixo dá a seguinte relação

$$\theta_m = \frac{K_g x}{r_{mp}} \quad (2.4)$$

Substituindo a equação (2.3) e (2.4) na equação (2.2) obtemos a inércia da armadura

$$F_{ai} = \frac{\eta_g K_g^2 J_m \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right)}{r_{mp}^2} \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (1.9) e (2.5) na (2.1), e rearranjando os termos

$$\left( M + \frac{\eta_g K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \left( \frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) + \left( B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) = \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m(t)}{R_m r_{mp}} \quad (2.6)$$

A equação (2.6) expressa o movimento do sistema com uma só equação diferencial de segunda ordem.

Finalmente aplicando a transformada de Laplace e rearranjando os termos obtemos a versão completa do modelo matemático do sistema IP02

$$G(s) = \frac{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t}{\left( (R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m) s + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2 \right) s} \quad (2.7)$$

### 3. Controlo de posição

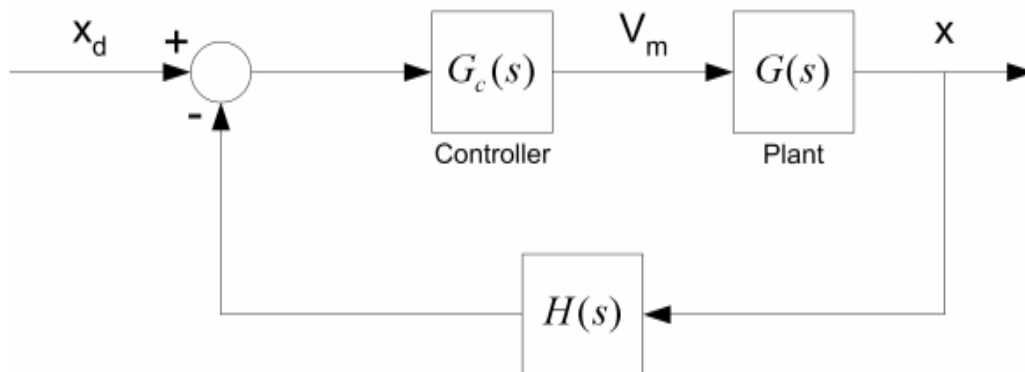


Figura 15: Diagrama de blocos do sistema

A partir do diagrama de blocos da figura anterior podemos obter a função de transferência  $T(s)$

$$T(s) = \frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} \quad (3.1)$$

A equação (2.7) expressa um modelo de processo (Plant) que não tem zeros mas tem dois pólos, para satisfazer requisitos de performance a teoria de controlo providencia formulas aproximadas [13], que são baseadas em sistemas de lag quadrático sem zeros, é o caso da equação seguinte

$$T(s) = \frac{K_{dc}\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.2)$$

Onde  $K_{dc}$  é o ganho DC do sistema (valor obtido quando  $s$  tende para 0)

Sendo assim a equação característica em malha fechada é

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad (3.3)$$

## 4. Controlo PD (proporcional derivativo)

Num controlador PD a função transferência do controlador é dada por:

$$G_c(s) = K_d s + K_p \quad (4.1)$$

Colocando o controlador dado pela expressão 4.1 na malha direta resulta na introdução de um zero na função de transferência em malha fechada, como resultado da introdução do zero a função de transferência em malha fechada deixa de corresponder à forma da equação 3.2. Assim sendo a formula derivada da equação 3.2 já não se pode aplicar o que torna muito difícil projetar um controlador que cumpra as especificações temporais definidas pelo utilizador.

A componente integral de um controlador PID na malha direta não será necessária visto que a função de transferência em malha aberta, vista na equação 1.10 já é de tipo 1, isto é tem um polo localizado na origem do plano  $s$  ( $s=0$ ).

## 5. Controlo PV (Proporcional-velocidade)

Para contornar o problema do zero do controlo PD podemos em alternativa implementar um controlo PV (Proporcional-velocidade). O controlo PV possui dois termos corretivos:  $K_p$  que vai ser proporcional ao erro de posição e  $K_v$  proporcional à velocidade (derivada da posição atual) do processo (Plant). Por coincidência a equação característica do controlo PV e PD é igual.

A equação seguinte expressa a lei de controlo PV onde  $x_d$  é o sinal de referência (a posição desejada)

$$V_m(t) = K_p (x_d(t) - x(t)) - K_v \left( \frac{d}{dt} x(t) \right) \quad (5.1)$$

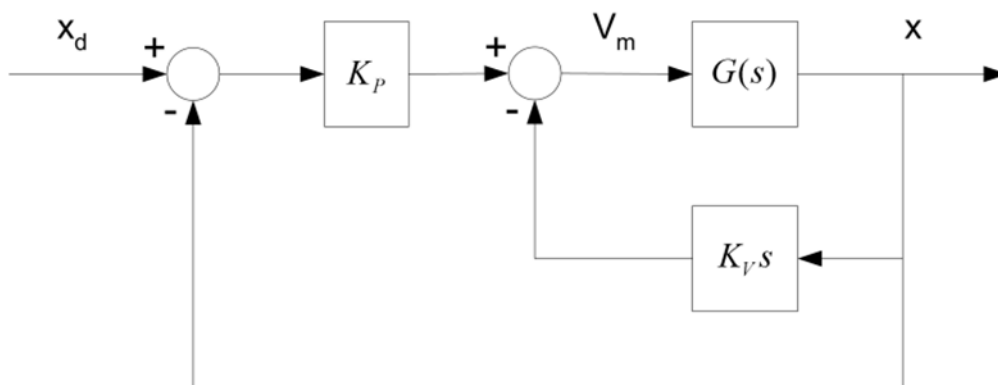


Figura 16: Diagrama de blocos do sistema com controlo PV

Os requisitos iniciais do projeto são os seguintes:

- i) Percentagem de sobre-elevação igual a 10%
- ii) Tempo de pico 0.15s

Começamos por fazer a redução de blocos

$$H(s) = \frac{K_v s}{K_p} + 1 \quad G_c(s) = K_p \quad (5.2)$$

Substituindo  $G_c(s)$  e  $H(s)$  da equação 5.2 na equação 3.1 obtemos

$$T(s) = \frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{K_p G(s)}{1 + K_p(s)G(s) + G(s)K_v s} \quad (5.3)$$

Substituindo  $G(s)$  com a função transferência do em malha aberta do IP02 determinada em (2.7) chegamos à função de transferência em malha fechada do sistema

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{K_t \eta_m K_g \eta_g r_{mp} K_p}{\left( s^2 R_m M r_{mp}^2 + s^2 R_m \eta_g K_g^2 J_m + s \eta_g K_g^2 K_t \eta_m K_t K_m + \right.} \quad (5.4)$$

$$\left. s B_{eq} R_m r_{mp}^2 + r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_v s + r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_p \right)$$

Normalizando a equação (5.4) ficamos com

$$s^2 + \frac{(r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_v + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2) s}{R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m} + \frac{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_p}{R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m} = 0 \quad (5.5)$$

Identificando com a equação característica (3.3) podemos obter  $w_n$

$$w_n = \frac{\sqrt{R_m (M r_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m) r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_p}}{R_m M r_{mp}^2 + R_m \eta_g K_g^2 J_m} \quad (5.6)$$

Da mesma forma se obtém  $\zeta$  como função de  $w_n$

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2 + r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_v}{R_m M r_{mp}^2 \omega_n} \quad (5.7)$$

Substituindo equação (5.6) na (5.7) obtém-se

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_v + \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2}{\sqrt{R_m (M r_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m) r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t K_p}} \quad (5.8)$$

De acordo com as equações (5.6) e (5.8) podemos inferir que:

i) Mantendo  $K_v$  constante enquanto se aumenta  $K_p$ ,  $\omega_n$  vai aumentar e  $\zeta$  diminui, isto significa que  $t_p$  (tempo de pico) diminui mas o overshoot aumenta. Será um sistema mais rápido mas menos amortecido.

ii) Mantendo  $K_p$  constante enquanto se aumenta  $K_v$ ,  $\omega_n$  não varia mas  $\zeta$  aumenta, isto significa que  $t_p$  se mantém mas o overshoot é menor. O sistema fica mais amortecido com o aumentar de  $K_v$ .

Pegando na equação (5.6) podemos obter  $K_p$  em função de  $\omega_n$

$$\omega_n = \frac{\omega_n^2 R_m (M r_{mp}^2 + \eta_g K_g^2 J_m)}{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t} \quad (5.9)$$

Substituindo a equação (5.9) na (5.8) e resolvendo para  $K_v$  temos

$$K_v = \frac{2\zeta \omega_n R_m M r_{mp}^2 + 2\zeta \omega_n R_m \eta_g K_g^2 J_m - \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m - B_{eq} R_m r_{mp}^2}{r_{mp} \eta_g K_g \eta_m K_t} \quad (5.10)$$

Usando as duas equações seguintes [13] podemos exprimir os parâmetros  $\omega_n$  e  $\zeta$  como função das especificações  $t_p$  e PO.

$$PO = 100e^{\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (5.11)$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (5.12)$$

Tendo o valor de PO podemos obter  $\zeta$  com a equação (5.11)

$$\zeta = \frac{\left| \ln\left(\frac{PO}{100}\right) \right|}{\sqrt{\ln\left(\frac{PO}{100}\right)^2 + \pi^2}} \quad (5.13)$$

Tendo o valor de  $t_p$  podemos obter  $\omega_n$  com a equação (5.12)

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.14)$$

Substituindo  $\zeta$  em (5.14) pela equação (5.13)

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{PO}{100}\right)^2 + \pi^2}}{t_p} \quad (5.15)$$

De acordo com a equação (5.13) uma percentagem de sobre-elevação menor que 10% corresponde a um fator de amortecimento maior que 0.59. Assumimos então  $\zeta=0.59$

De acordo com a equação (5.15) e as especificações iniciais  $PO=10\%$  e  $t_p=0.15s$  obtemos uma frequência natural  $\omega_n=26.0$  rad/s.

Finalmente usando as equações (5.9) e (5.10) com os valores de  $\omega_n$  e  $\zeta$  que temos e os valores dos parâmetros do IP02 obtemos os ganhos:

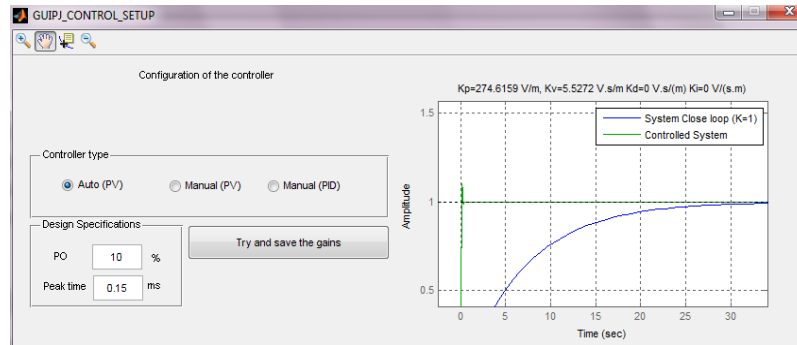
$$K_p=274.62 \text{ V/m e } K_v=5.53 \text{ Vs/m}$$

Para os testes são usados os ficheiros da documentação do IP02 [13] e interfaces de utilizador (GUIs) criados especificamente para este projeto.

Os GUIs estão em inglês para facilitar o seu uso por mais pessoas e quem sabe mais tarde a sua partilha online.<sup>2</sup>

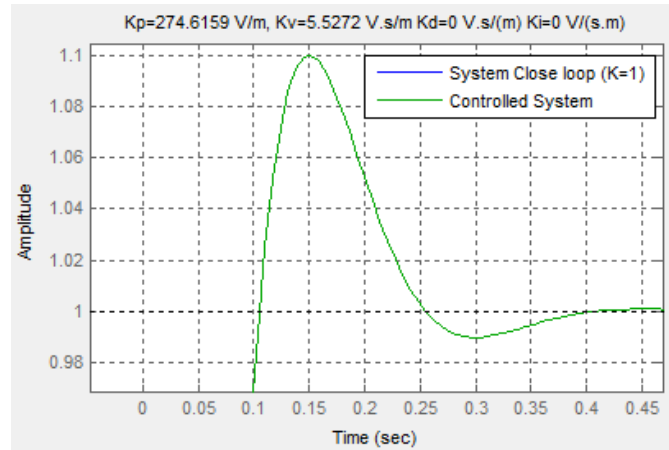
<sup>2</sup> os ficheiros seguem num DVD juntamente com as copias em papel deste projeto (tese), posso também fornecer os GUIs a quem me pedir através do email [paulojmdeasilva@gmail.com](mailto:paulojmdeasilva@gmail.com), não posso é fornecer os ficheiros da documentação do IP02 sem autorização da Quanser

Para este teste são usados os ficheiros da pasta **Exp01 - Position - PV\Lab Design Files** , o ficheiro de simulação é **s\_position\_pv\_ip01\_2.mdl** , o interface é **GUIPJ\_Inter\_Sim.m**, abrir o ficheiro do interface e executar, o MATLAB<sup>®</sup> pede para mudar a diretoria, aceite a mudança.



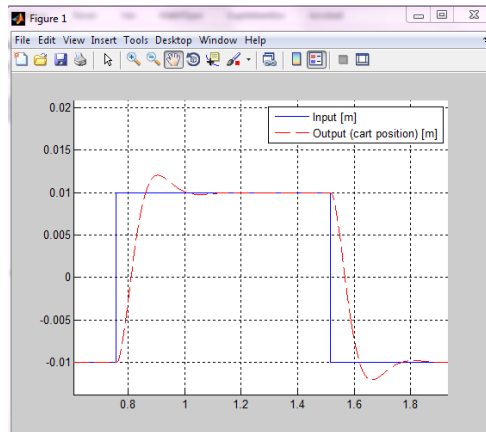
**Figura 17-GUI de setup do controlo PID/PV**

Na figura 17 podemos ver o interface de configuração do controlo e a resposta a uma entrada em degrau unitário, de salientar que a introdução do controlo PV reduz bastante o tempo de estabelecimento tal como era de esperar.



**Figura 18-Vista mais detalhada da resposta do sistema com controlo PV**

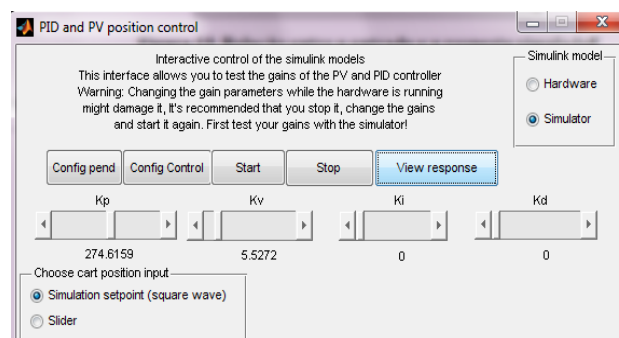
Os ganhos foram obtidos automaticamente, podemos ver na figura 18 que os requisitos do projeto são satisfeitos.



**Figura 19-Relação entre a entrada e a resposta simulada**

Após a simulação podemos ver na figura 19 que a resposta é a esperada.

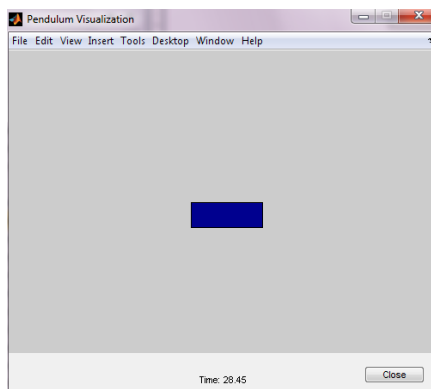
O GUI de simulação permite também alterar os ganhos do controlador em tempo real e até escolher uma entrada dada pelo utilizador no próprio interface em vez da onda quadrada.



**Figura 20-Interface de simulação com funcionamento em tempo real**

A simulação em tempo real com controlo dos ganhos permite verificar os efeitos da alteração dos ganhos na resposta do carrinho, por exemplo ao aumentar  $K_p$  reduzimos o tempo de resposta mas aumenta a sobre-elevação (overshoot) e o esforço de controlo, ao aumentar  $K_v$  reduzimos a sobre-elevação mas o tempo de estabelecimento aumenta.

Colocando o ganho  $K_v$  a zero podemos testar o controlo PID, neste caso o ganho  $K_i$  (integral) não tem grande efeito visto não existir erro em regime estacionário, o ganho  $K_D$  (derivativo) atua de forma similar ao  $K_v$  ou seja diminui a sobre-elevação mas reduz o tempo de estabelecimento.



**Figura 21-Animação do carrinho do IP02**

Na figura 21 podemos ver a animação do carrinho do IP02 que foi adaptada a partir da do penddemo que vem com o MATLAB<sup>®</sup>, a animação tem um efeito pedagógico pois mostra o que vai acontecer com a posição do carrinho (também com braço do pêndulo nos próximos capítulos).

Existem algumas discrepâncias entre a simulação e os resultados obtidos pelo hardware (IP02), fica aqui uma lista delas:

- Aproximações matemáticas ao modelo e incertezas dos valores dos parâmetros
- Saturação do amplificador
- Fricção de Coulomb (fricção estática ou seca)
- Inercia
- Folga entre a roda dentada e a pista
- Ruído branco que causa algum “nervosismo” ao sistema
- Pista desnivelada

## 6. Controlo de velocidade usando método phase-lag

O método de controlo ou também chamado compensador phase-lag é muito comum em controladores analógicos e a sua implementação é simples bastando um circuito RC e um amplificador [13] [18].

Vamos usar os seguintes requisitos de projeto:

- i. O erro final da resposta a um degrau unitário deve ser menor possível, menor que meio milímetro por segundo, assim definimos:

$$|e_{ss}| \leq 0.0005 \text{ m/s}$$

- ii. A largura de banda do sistema compensado em malha aberta deve ser cerca de:

$$\omega_c = 80 \text{ rad/s}$$

- iii. A margem de fase do sistema compensado em malha aberta deve ser de:

$$\Phi_m = 85^\circ$$

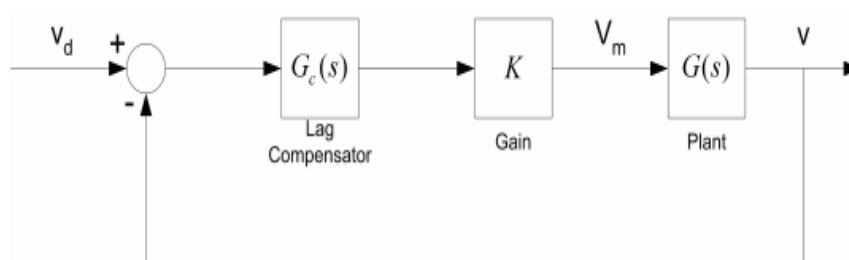
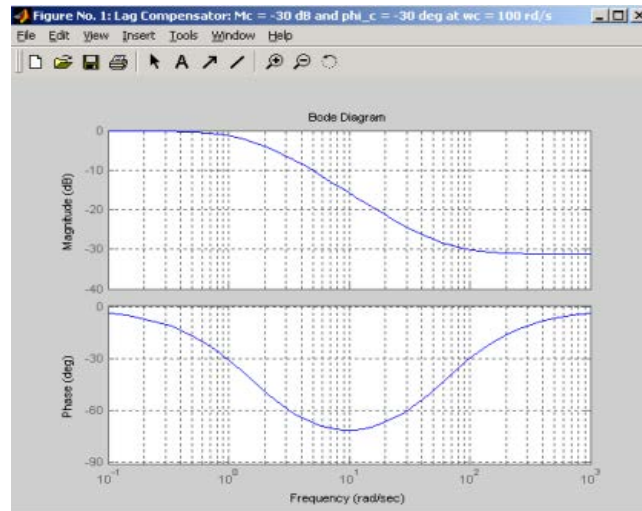


Figura 22-Diagrama de blocos do esquema de controlo Lag

$G(s)$  foi obtida na equação 2.7 basta então encontrar o valor de  $K$  e a equação do compensador Lag ou seja o  $G_c(s)$  pode ser dada pela equação seguinte

$$G_c(s) = \frac{\beta^*(s+b)}{s + \beta^*b} \quad (6.1)$$

Na figura 23 podemos ver o diagrama de bode de um típico compensador Lag, devido às suas características de ganho em baixa frequência um compensador Lag usualmente permite um bom seguimento da referência e uma boa rejeição de perturbações. Atua aproximadamente como um integrador.



**Figura 23- Diagrama de bode de um compensador Lag típico**

Em relação ao parâmetro  $\beta$

$$\beta < 1 \tag{6.2}$$

e ainda  $\beta$  é a raiz real e positiva da equação

$$(q^2 - c + 1)\beta^2 + 2qc\beta + (q^2c + c - 1)c = 0 \tag{6.3}$$

Onde os parâmetros  $q$  e  $c$  são dados por

$$\begin{aligned} q &= \tan(\Phi_c) \\ c &= 10^{\frac{1}{10}M_c} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Demonstra-se que a condição necessária e suficiente para a existência do compensador Lag, isto é a existência da solução real e positiva  $\beta$  na expressão seguinte

$$q^2c + c < 1 \tag{6.5}$$

Ao determinar  $\beta$  podemos passar ao segundo parâmetro da equação 6.1 que é o parâmetro  $b$  que pode ser obtido pela equação

$$b = \frac{w_c \sqrt{\beta^2 - c}}{\beta} \tag{6.6}$$

Uma propriedade interessante do projeto do compensador Lag é que o máximo ocorre à frequência  $\omega_m$

$$\omega_m = b\sqrt{\beta} \quad (6.7)$$

Assim sendo o máximo pode ser calculado

$$\Phi_m = -\arcsin\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \quad (6.8)$$

Adicionalmente podemos dizer que da equação 6.1, a máxima atenuação ocorre assintoticamente a uma frequência infinita dada por

$$\text{Max}(M_c) = 20\log_{10}(\beta) \quad (6.9)$$

Partindo da função transferência e malha aberta 2.7, derivando em ordem a  $s$  de forma a obter velocidade à saída em vez de posição e usando os valores por defeito tal como não colocando o peso adicional no carrinho obtemos a seguinte expressão

$$G(s) = \frac{2.46}{s-17.13} \quad (6.10)$$

Da expressão 6.10 podemos constatar que não existem zeros e existe apenas um polo em -17.13. Como o sistema não tem pólos na origem é considerado de tipo 0 e assim sendo vai existir um erro não nulo em regime estacionário, assumindo realimentação unitária e que a entrada é um degrau unitário

$$e_{ss} = \frac{1}{1-G(0)} \quad (6.11)$$

Substituindo  $s$  por  $j*0$  na equação 6.10 e substituindo o valor obtido na equação 6.11 obtemos

$$e_{ss} = 874.6\left[\frac{mm}{s}\right] \quad (6.12)$$

Assumindo o sistema em malha aberta  $KG(s)$  resulta num erro em regime estacionário igual a  $e_{ss}$  para uma entrada em degrau unitário

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + KG(0)} \quad (6.13)$$

Assim o ganho  $K$  que limita o erro em regime estacionário pode ser calculado pela seguinte equação

$$K = \frac{1 - e_{ss}}{e_{ss} G(0)} \quad (6.14)$$

Obtemos então o valor para  $K$

$$K = 13945.6674 \left[ \frac{Vs}{m} \right] \quad (6.15)$$

Assumindo que o sistema em malha aberta tem uma magnitude de  $|KG(j\omega_c)|$  maior que a unidade, o compensador Lag requer uma atenuação  $M_c$  que pode ser calculada pela relação

$$M_c = -20 \log_{10}(|KG(j\omega_c)|) \quad (6.16)$$

Avaliando a expressão 6.16 para o IP02 vem

$$M_c = -52.43dB \quad (6.17)$$

Assumindo que os ganhos em malha aberta  $KG(s)$  têm uma fase de  $\Phi_{wc}$  graus na frequência de crossover  $\omega_c$ , o ângulo  $\Phi_c$  que o compensador requer é dado pela seguinte relação

$$\Phi_c = -180 + \Phi_m - \Phi_{oc} \quad (6.18)$$

Avaliando  $\Phi_c$  para o sistema IP02 obtém-se

$$\Phi_c = -17.09^\circ \quad (6.19)$$

Então de acordo com as equações 6.3 e 6.4 o parâmetro  $\beta$  obtido é

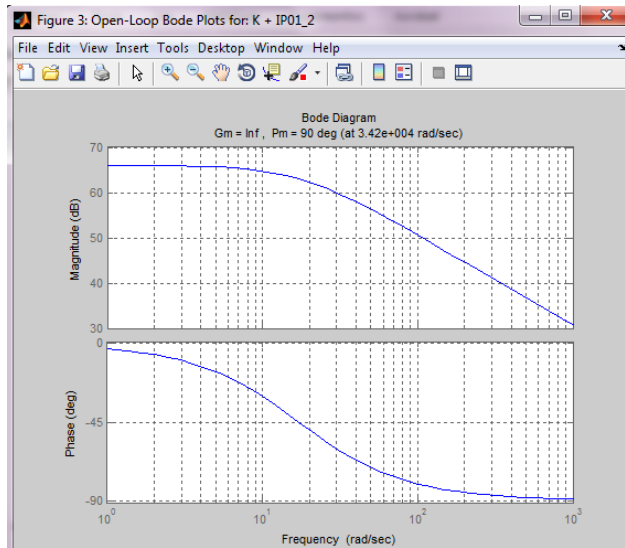
$$\beta = 0.0022833 \quad (6.20)$$

Usando a equação 6.6 podemos então calcular o parâmetro  $b$

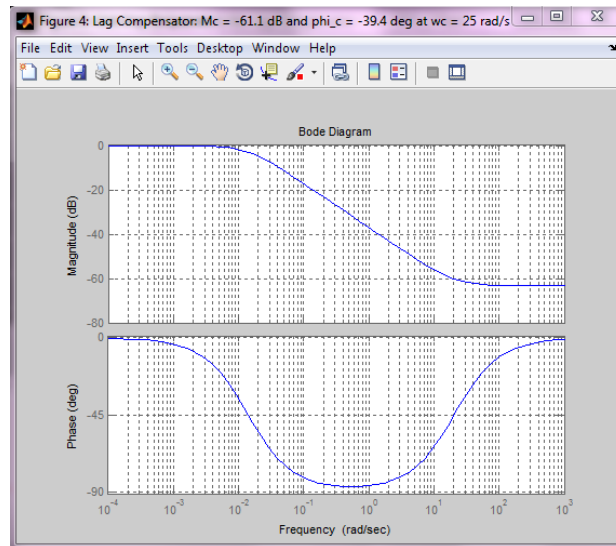
$$b = 24.6509 \left[ \frac{rad}{s} \right] \quad (6.21)$$

Para este teste são usados os ficheiros da pasta **Exp02\_03 - Speed - Lead and Lag**, o ficheiro de simulação é **s\_speed\_lag\_ip01\_2.mdl**, o interface é **GUIPJ\_Inter\_Sim.m**, abrir o ficheiro do interface e executar, o MATLAB® pede para mudar a diretoria, aceite a mudança.

Utilizando os interfaces podemos visualizar os diagramas de bode seguintes:

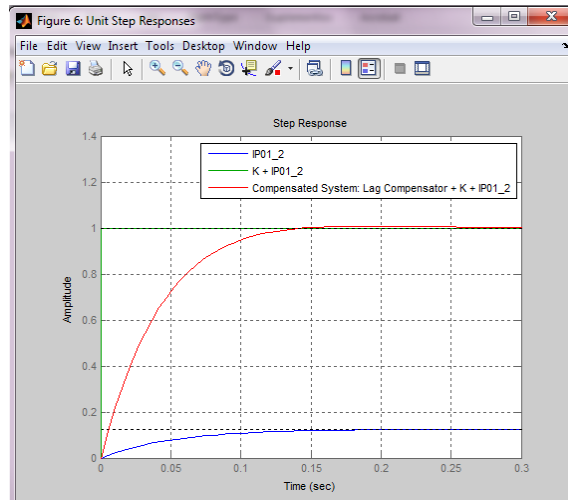


**Figura 24-Diagrama de bode da planta com o ganho K**



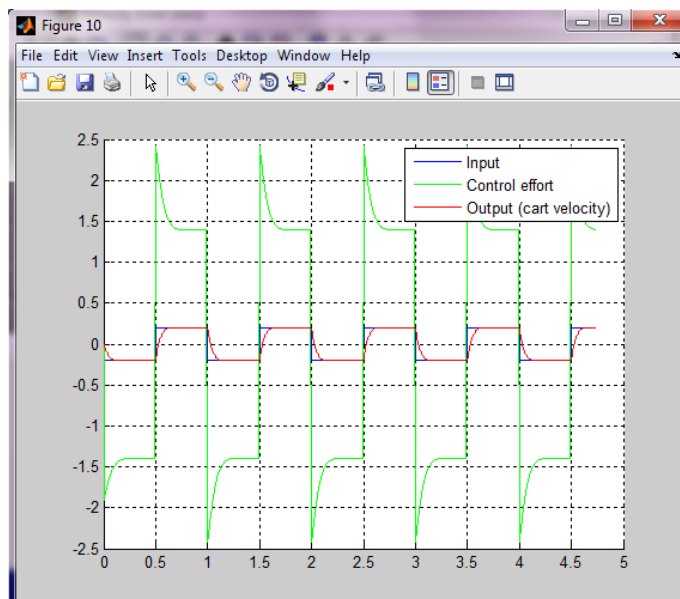
**Figura 25-Diagrama de bode para o compensador Lag**

Tal como se pode ver nas figuras 24 e 25 os requisitos do projeto do compensador são satisfeitos.



**Figura 26-Resposta a degrau do sistema compensado**

Na figura 26 podemos ver o efeito diferenciador do compensador Lag, o seu efeito é reduzir a sobre-elevação mas introduz também um pequeno atraso no tempo de estabelecimento.



**Figura 27-Resultados obtidos na simulação**

Tal como se pode ver na figura 27 o sistema com o compensador Lag funciona como esperado e o esforço de controlo é bastante reduzido.

O interface de simulação permite ajustar os parâmetros mas recomenda-se bastante cuidado pois a performance pode ser melhorada mas para isso o esforço de controlo torna-se muito elevado, os picos de tensão causados por valores incorretos podem destruir o hardware.

Existem algumas discrepâncias entre a simulação e os resultados obtidos pelo hardware (IP02), fica aqui uma lista delas:

- Ruído introduzido ao diferenciar o sinal de posição
- Atraso introduzido pelo filtro passa baixo que filtra a diferenciação do sinal de velocidade
- Aproximações matemáticas ao modelo e incertezas dos valores dos parâmetros
- Saturação do amplificador
- Fricção de Coulomb (fricção estática ou seca)
- Inercia
- Folga entre a roda dentada e a pista
- Ruído branco que causa algum “nervosismo” ao sistema
- Pista desnivelada

## 7. Controlo de velocidade usando método phase-lead

O método phase-lead permite satisfazer três requisitos de projeto predefinidos para o sistema em malha fechada. O propósito dos requisitos de projeto é em primeiro lugar reduzir ou eliminar o erro em regime estacionário e em segundo lugar melhorar a resposta em regime transitório através do aumento da largura de banda e margem de fase do sistema [13] [18].

Vamos usar os seguintes requisitos de projeto (os mesmos do phase-lag)

- i. O erro final da resposta a um degrau unitário deve ser menor possível, menor que meio milímetro por segundo, assim definimos:  
 $|e_{ss}| \leq 0.0005 \text{ m/s}$
- ii. A largura de banda do sistema compensado em malha aberta deve ser cerca de:  
 $\omega_c = 80 \text{ rad/s}$
- iii. A margem de fase do sistema compensado em malha aberta deve ser de:  
 $\Phi_m = 85^\circ$

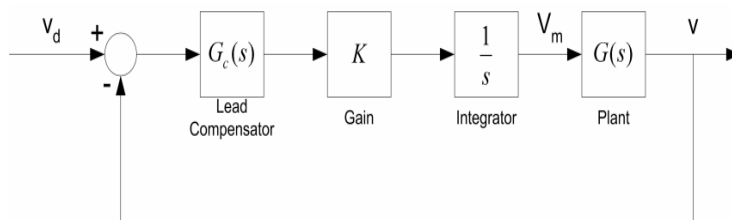
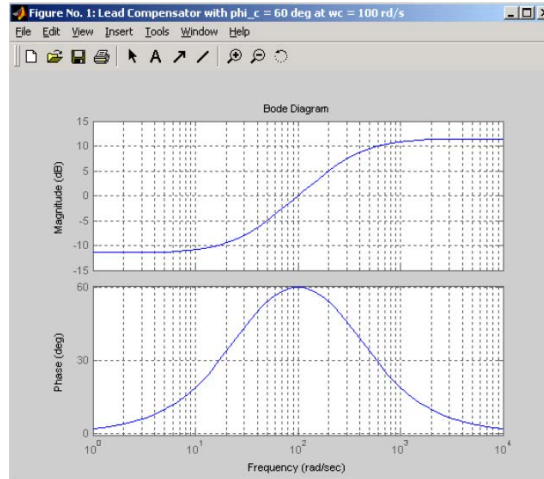


Figura 28- Esquema de controlo usando o compensador phase-lead



**Figura 29-Diagrama de bode de um compensador phase-lead típico**

Como se pode ver na figura 28 um compensador phase-lead é usualmente colocado na malha direta do sistema a ser compensado, contribui com um ângulo de fase positivo e assim tende a aumentar a margem de fase e estabilidade relativa. Atua aproximadamente como um “diferenciador”.

A função de transferência do compensador lead é dada pela seguinte expressão

$$G_c(s) = \frac{\alpha \left( s + \frac{\omega_c}{\alpha} \right)}{s + \omega_c \alpha} \quad (7.1)$$

Para obter o efeito de compensação desejada

$$1 < \alpha \quad (7.2)$$

O que resulta pela equação 7.1 numa amplificação do compensador  $M_c$  igual a 0dB, isto é magnitude igual à unidade na frequência  $\omega_c$ .

O parâmetro  $\alpha$  pode ser determinado por

$$\begin{aligned} \alpha &= q + \sqrt{q^2 + 1} \\ q &= \tan(\phi_c) \end{aligned} \quad (7.3)$$

O ganho  $K$  deve ser tal que a frequência do ganho de crossover seja  $\omega_c$ , ou seja o ganho  $K$  mais o integrador mais o sistema (pêndulo IP02) deve ter uma amplitude de 1 na frequência  $\omega_c$ . Assim sendo o ganho  $K$  pode ser dado pela expressão

$$K = \frac{1}{\left| \frac{G(j\omega_c)}{j\omega_c} \right|} \quad (7.4)$$

Assim para os valores de projeto teremos

$$K = 2665.59 \left[ \frac{Vs}{m} \right] \quad (7.5)$$

Assumindo que a malha direta do sistema da figura 19 tem um ângulo de fase de  $\Phi_{\omega_c}$  graus a uma frequência  $\omega_c$ , o compensador requer uma fase de  $\Phi_c$  dada pela expressão

$$\phi_c = -180 + \phi_m - \phi_{\omega_c} \quad (7.6)$$

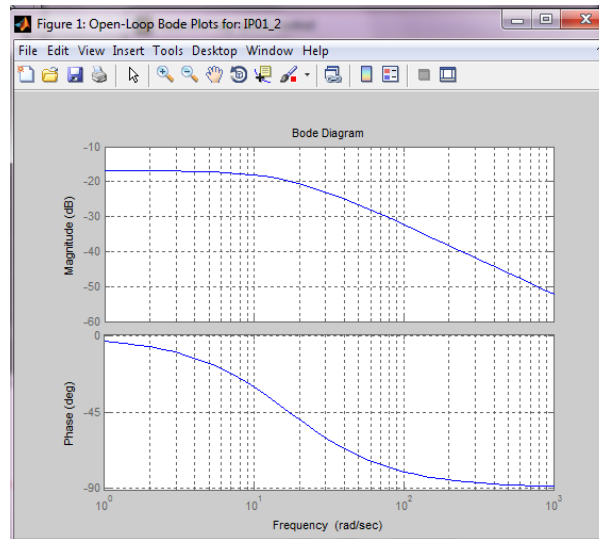
Para o nosso sistema IP02 teremos

$$\phi_c = 72.91^\circ \quad (7.7)$$

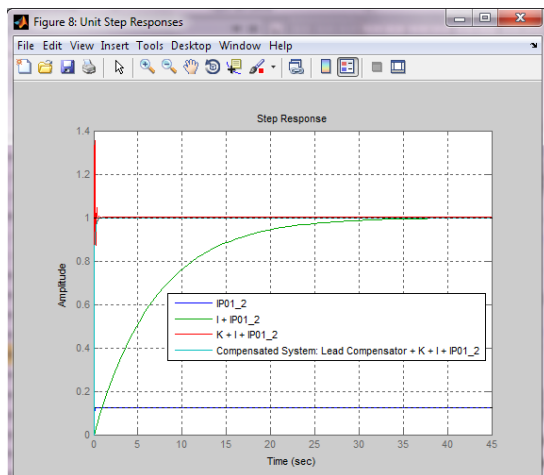
Assim sendo de acordo com a equação 7.3 o compensador lead terá o seguinte parâmetro  $\alpha$

$$\alpha = 6.6571 \quad (7.8)$$

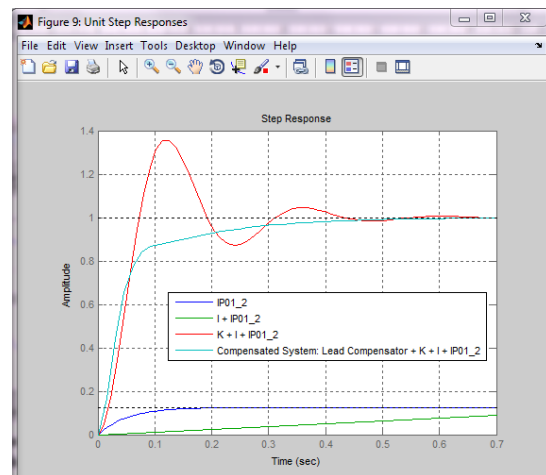
Para este teste são usados os ficheiros da pasta **Exp02\_03 - Speed - Lead and Lag**, o ficheiro de simulação é **s\_speed\_lead\_ip01\_2.mdl**, o interface é **GUIPJ\_Inter\_Sim.m**, abrir o ficheiro do interface e executar, o MATLAB<sup>®</sup> pede para mudar a diretoria, aceite a mudança.



**Figura 30-Diagrama de bode do sistema**



**Figura 31-Resposta a degrau do sistema compensado**



**Figura 32-Resposta a degrau do sistema compensado em malha fechada**

A resposta temporal do sistema compensado para uma entrada em degrau é mostrada na figura 31 tal como na figura 32 mas na figura 32 a escala temporal é mais reduzida.

Podemos constatar que o sistema compensado atinge a velocidade desejada (referência) sem erro em regime estacionário.

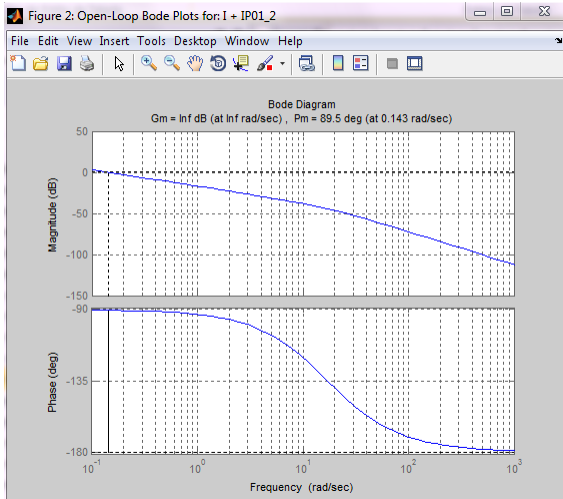


Figura 33-Diagrama de bode do sistema com integrador

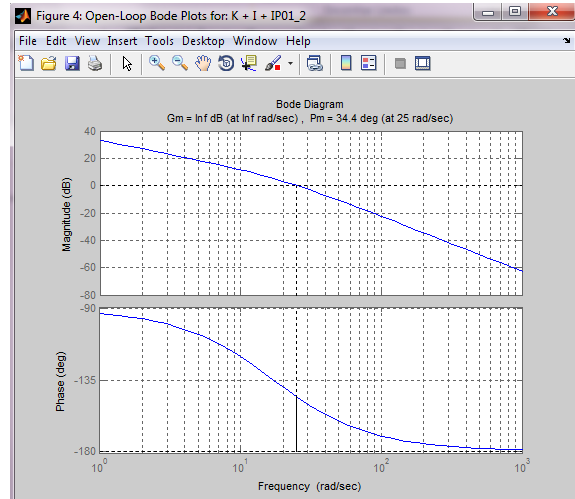


Figura 34-Diagrama de bode do sistema com integrador e ganho

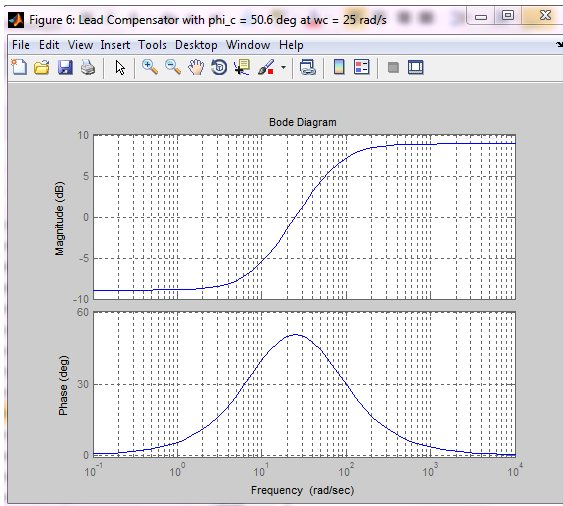


Figura 35-Diagrama de bode do compensador Lead

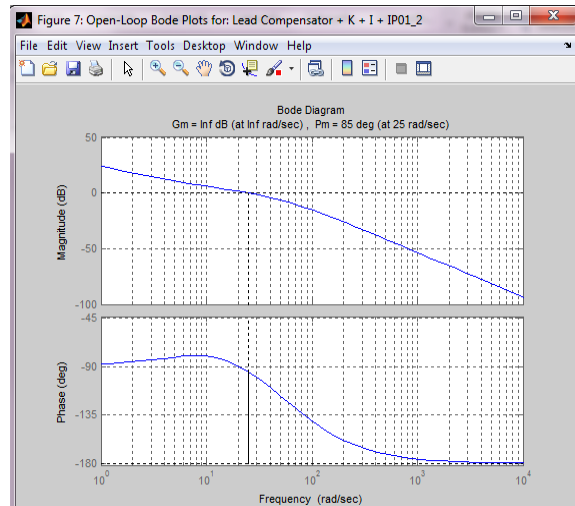


Figura 36-Diagrama do sistema compensado

Os diagramas de bode das figuras 33 a 36 mostram o efeito do compensador tal como era desejado.

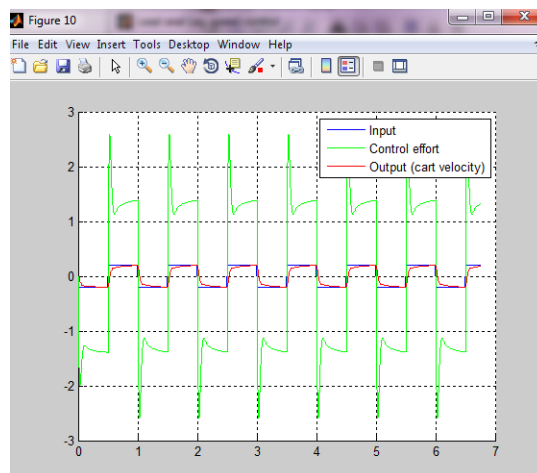


Figura 37-Resultado da simulação com compensador Lead

Na figura 37 podemos ver os resultados da simulação, o compensador Lead faz um bom trabalho e tal como o compensador Lag o esforço de controlo é bastante reduzido.

O interface de simulação permite ajustar os parâmetros mas recomenda-se bastante cuidado pois a performance pode ser melhorada mas para isso o esforço de controlo torna-se muito elevado, os picos de tensão causados por valores incorretos podem destruir o hardware.

Existem algumas discrepâncias entre a simulação e os resultados obtidos pelo hardware (IP02), fica aqui uma lista delas:

- Ruído introduzido ao diferenciar o sinal de posição
- Atraso introduzido pelo filtro passa baixo que filtra a diferenciação do sinal de velocidade
- Aproximações matemáticas ao modelo e incertezas dos valores dos parâmetros
- Saturação do amplificador
- Fricção de Coulomb (fricção estática ou seca)
- Inercia
- Folga entre a roda dentada e a pista
- Ruído branco que causa algum “nervosismo” ao sistema
- Pista desnivelada

## 8. Minimização de oscilações do braço do pêndulo

Algumas aplicações práticas que se podem projetar e simular com o pêndulo IP02:

- I. Ponte rolante ou grua
- II. Robot de linha de montagem
- III. Cabeça de impressão de impressora de jato de tinta

Em todas aplicações listadas o objetivo é mover algo para uma dada posição tendo em conta uma dada performance pretendida, os parâmetros são:

- I. Rapidez de resposta
- II. Oscilação mínima
- III. Exatidão na posição

Desta vez o controlo não vai ser apenas da posição do carrinho mas também do braço do pêndulo que se vai encontrar na posição de repouso.

As especificações do projeto são as seguintes:

1. Percentagem de sobre-elevação (PO) do braço do pêndulo ao longo do eixo  $x$ ,  $x_t$ , deve ser menor que 5%

$$PO \leq 5\% \quad (8.1)$$

2. Tempo de estabilização da ponta do pêndulo ao longo do eixo  $x, x_t$ , deve ser menor que 2.2 segundos

$$t_s \leq 2.2[s] \quad (8.2)$$

3. Erro em regime estacionário do braço do pêndulo,  $x_t$

$$e_{ss} = 0 \quad (8.3)$$

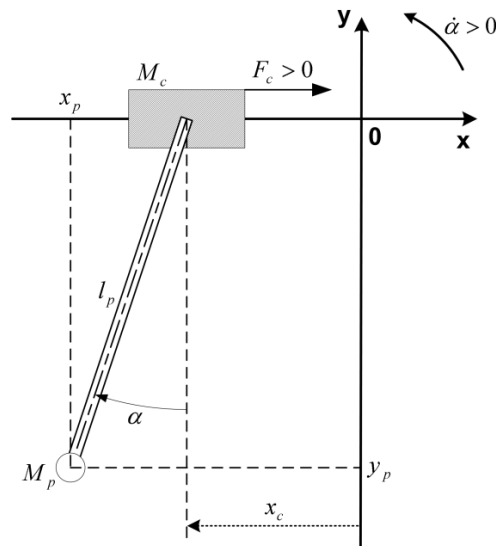
4. Percentagem de baixa-elevação (PU) do braço do pêndulo ao longo do eixo  $x, x_t$ , deve ser menor que 10% da amplitude da entrada.

$$PU \leq 10\% \quad (8.4)$$

PU é uma redução inicial na resposta e é provocada pela presença de um ou mais zeros na metade direita do plano  $s$ , um sistema deste tipo é qualificado como de fase não mínima.

5. A Tensão do motor  $V_m$  é proporcional ao esforço de controlo não pode fazer com que o amplificador (VoltPAQ) entre em saturação

Todas as especificações são para uma referência na entrada em onda quadrada que provoca uma deslocação do carrinho de  $\pm 30\text{mm}$ . PO e PU são definidos de forma a limitar o ponto final relativo do braço do pêndulo.



**Figura 38-Esquema do pêndulo, coordenadas e sentido dos vetores**

Na figura 38 podemos ver como vai funcionar o pêndulo, a rotação vai ser positiva no sentido contrário aos ponteiros dos relógios (CCW) quando estamos de frente para o pêndulo, o ângulo é zero quando o pêndulo está em repouso ou seja aponta para baixo, o sentido positivo do deslocamento do carrinho é para a direita quando estamos de frente para o pêndulo.

## Equações não lineares do movimento (EOM)

O método de Lagrange (Lagrangiano) permite obter as equações de uma forma mais fácil que usando as leis de Newton, a única entrada vai ser  $F_c$ . Para obter as equações necessitamos do chamado Lagrangiano do sistema que é obtido a partir do cálculo da energia potencial e cinética do sistema [11].

De acordo com o esquema da figura 21, as coordenadas absolutas do centro de gravidade do pêndulo podem ser caracterizadas por

$$\begin{aligned}x_p(t) &= x_c(t) + l_p \sin(\alpha(t)) \\t_p(t) &= -l_p \cos(\alpha(t))\end{aligned}\tag{8.5}$$

Em primeiro lugar vamos calcular a energia potencial total do sistema  $V_T$ , a energia potencial num sistema é a quantidade de energia que o sistema ou parte dele tem devido a algum tipo de trabalho estar a acontecer ou ter acontecido. É usualmente causado pelo deslocamento vertical do ponto de repouso ou por um deslocamento elástico.

No pêndulo a única energia potencial é apenas devida à força da gravidade, O deslocamento do carrinho é horizontal e assim nunca existe deslocamento vertical. Assim sendo a energia potencial total é completamente descrita pela equação seguinte

$$V_T = -M_p g l_p \cos(\alpha(t))\tag{8.6}$$

Agora necessitamos de determinar a energia cinética total  $T_T$ . A energia cinética mede a quantidade de energia que um sistema tem devido ao seu movimento. Neste caso do pêndulo é a soma da energia cinética da translação e rotação do carrinho e pêndulo, isto devido à ortogonalidade dos dois movimentos, ou seja são totalmente independentes.

A energia cinética da translação do carrinho  $T_{cT}$  é expressa pela expressão seguinte

$$T_{cT} = \frac{1}{2} M \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2\tag{8.7}$$

A energia cinética devida à rotação do braço do pêndulo  $T_{cr}$  é expressa pela expressão seguinte

$$T_{cr} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2}{r_{mp}^2} \quad (8.8)$$

Assim partindo da equação (8.7) e (8.8),  $T_c$ , a energia cinética total do carrinho pode ser escrita:

$$T_c = \frac{1}{2} M_c \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 \quad (8.9)$$

$$M_c = M + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2}$$

Assumindo que a massa do pêndulo está concentrada no seu centro de gravidade (COG) a energia cinética de translação,  $T_{pt}$ , pode ser expressa como função da velocidade linear do centro de gravidade

$$T_{pt} = \frac{1}{2} M_p \sqrt{\left( \frac{d}{dt} x_p(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} y_p(t) \right)^2} \quad (8.10)$$

Onde as coordenadas  $x$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo são determinadas por

$$\frac{d}{dt} x_p(t) = \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad (8.11)$$

Sendo as coordenadas  $y$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo dadas por

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad (8.12)$$

Falta apenas a energia cinética da rotação do braço do pêndulo,  $T_{pr}$ , dada por

$$T_{pr} = \frac{1}{2} I_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \quad (8.13)$$

Finalmente a energia cinética total do sistema pode ser calculada, vai ser a soma das quatro energia cinéticas dadas nas equações (8.9),(8.10),(8.11),(8.12) e (8.13).

Através de manipulação matemática no software MAPLE obtemos uma versão simplificada da soma que é dada por

$$T_T = \frac{1}{2}(M_c + M_p) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 + M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + \frac{1}{2}(I_p + M_p l_p^2) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \quad (8.14)$$

Podemos ver na equação (8.14) que a energia cinética total pode ser expressa em relação às duas coordenadas ( $x_c$  e  $\alpha$ ) e às suas derivadas de primeira ordem.

Considerando agora as equações de Lagrange do pêndulo, por definição as duas equações de Lagrange resultam das coordenadas já obtidas e possuem as seguintes fórmulas

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_c} L \right) = Q_{x_c} \quad (8.15)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} L \right) = Q_\alpha \quad (8.16)$$

Nas equações (8.15) e (8.16),  $L$  é chamada Lagragiano e é definido por

$$L = T_T - V_T \quad (8.17)$$

Na equação (8.15),  $Q_{x_c}$  é a força aplicada na coordenada  $x_c$ , da mesma forma na equação (8.16),  $Q_\alpha$  é a força aplicada na coordenada  $\alpha$ . As forças no pêndulo podem ser definidas na seguinte equação

$$\begin{aligned} Q_{x_c}(t) &= F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \\ Q_\alpha(t) &= -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \end{aligned} \quad (8.18)$$

Existem grandezas que foram desprezadas de modo a simplificar os cálculos, uma é a fricção de Coulomb que tem características não lineares, outra é a força do braço do pêndulo sobre o carrinho.

Calculando (8.15) resulta numa expressão mais explícita para a primeira equação de Lagrange.

$$(M_c + M_p) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) + M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) - M_p l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 = F_c - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \quad (8.19)$$

Da mesma forma (8.16) resulta

$$M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) + M_p g l_p \sin(\alpha(t)) = -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad (8.20)$$

Finalmente, podemos resolver as equações de Lagrange, tal como estão expressas em (8.19) e (8.20), para a derivada de segunda ordem das duas coordenadas de Lagrange em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{\left( - (I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + (M_p^2 l_p^3 + l_p M_p l_p) \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 + M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) F_c + M_p^2 l_p^2 g \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \right)}{\left( (M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2 \right)} \quad (8.21)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \frac{\left( -(M_c + M_p) M_p g l_p \sin(\alpha(t)) - (M_c + M_p) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - M_p^2 l_p^2 \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 + M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \right)}{\left( (M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2 \right)} \quad (8.22)$$

As equações (8.21) e (8.22) obtidas representam as equações de movimento (EOM) do pêndulo.

## 9. Linearização das equações de movimento (EOM)

Para projetar um controlador e implementar uma realimentação de estado para o pêndulo é necessário determinar a representação em espaço de estados. As matrizes de espaço de estados representam por definição um conjunto de equações diferenciais lineares que descreve a dinâmica do sistema. Assim as equações de movimento (8.21) e (8.22) têm de ser linearizadas em torno de um ponto de operação, neste caso esse ponto é o ponto de repouso do braço do pêndulo (a apontar para o chão), nessa posição o ângulo  $\alpha$  é zero, considerando pequenas variações de  $\alpha$  e usando a expansão em série de segunda ordem [17] [14] [13]:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= 1 + O(\alpha^2) \\ \sin(\alpha) &= \alpha + O(\alpha^2)\end{aligned}\tag{9.1}$$

Podemos assim linearizar as equações (8.21) e (8.22) usando a expressão (9.1)

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{\begin{pmatrix} -(I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + M_p l_p B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + \\ (I_p + M_p l_p^2) F_c + M_p^2 l_p^2 g \alpha(t) \end{pmatrix}}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2}\tag{9.2}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \frac{\begin{pmatrix} -(M_c + M_p) M_p g l_p \alpha(t) - (M_c + M_p) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + \\ M_p l_p B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - F_c M_p l_p \end{pmatrix}}{(M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2}\tag{9.3}$$

A representação em espaço de estados tem a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} X = AX + BU \quad (9.5)$$

Onde  $X$  é o vector de estado do sistema (pêndulo), na pratica,  $X$  é escolhido de forma a incluir as coordenadas como também as derivadas de primeira ordem, no caso do pêndulo,  $X$  é definido para que a sua transposta seja dada por

$$X^T = \left[ x_c(t), \alpha(t), \frac{d}{dt} x_c(t), \frac{d}{dt} \alpha(t) \right] \quad (9.6)$$

Onde  $U$  à primeira vista é a entrada do sistema e neste caso como já foi referido vai ser a força  $F_c$ , força que faz mover o carrinho.

$$U = F_c \quad (9.7)$$

Mas  $F_c$  é causada pela tensão aplicada ao motor  $V_m$

$$U = V_m \quad (9.8)$$

O cálculo da força a partir da tensão do motor já foi calculado previamente e é dado pela expressão

$$F_c = \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}} \quad (9.9)$$

O momento de inércia em torno do centro de gravidade é dado por

$$I_p = \frac{1}{12} M_p L_p^2 \quad (9.10)$$

Agora já podemos usar as equações previamente obtidas e coloca-las em forma de espaço de estados, a matriz do espaço de estados  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gM_p^2 l_p^2}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{B_{eq}(I_p + M_p l_p^2)}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & \frac{M_p l_p B_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \\ 0 & -\frac{M_p g l_p (M_c + M_p)}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & \frac{M_p l_p B_{eq}}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{(M_c + M_p)B_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

Da mesma forma a matriz de espaço de estados B é dada pela forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_p + M_p l_p^2}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \\ -\frac{M_p l_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

Apenas como curiosidade vamos ver como são as matrizes de estado quando os parâmetros  $I_p, B_p$  e  $B_{eq}$  são desprezados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gM_p}{M_c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g(M_c + M_p)}{M_c l_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_c} \\ -\frac{1}{M_c l_p} \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

Para o pêndulo com o peso extra e o braço longo temos as seguintes matrizes de espaço de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1.5216 & -11.6513 & 0.0049 \\ 0 & -26.1093 & 26.8458 & -0.0841 \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5304 \\ -3.5261 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

Como a matriz A tem 4 linhas e quatro colunas devem existir quatro pólos em malha aberta, a equação característica em malha aberta pode ser expressa por

$$\det(sI - A) = 0 \quad (9.17)$$

Onde  $\det()$  é a função determinante,  $s$  é o operador de Laplace e  $I$  é a matriz identidade, assim os pólos em malha aberta podem ser vistos como os valores próprios da matriz de estado A (9.15) obtemos assim os pólos em malha aberta

$$-11.3975, -0.1689 + 4.8040j, -0.1689 - 4.8040j, 0 \quad (9.18)$$

Como se pode ver pelos valores dos pólos (9.18) o sistema em malha aberta é estável, isto é não existem pólos com valor real positivo, todos os pólos se encontram na parte esquerda do plano  $s$ . Existe no entanto um par de pólos com valor conjugado, o coeficiente de amortecimento  $\zeta$  dado pela expressão

$$\begin{aligned} \zeta &= |-0.1689 / \omega_n| = 0.0351 \\ \omega_n &= \sqrt{-0.1689^2 + 4.8040^2} = 4.8070 \end{aligned} \quad (9.19)$$

Olhando para o valor do coeficiente de amortecimento constatamos que o sistema é muito sub-amortecido, como consequência teremos de implementar um controlador com realimentação de estado para que se cumpram as especificações do projeto, modificando assim modificando os pólos do sistema.

O pêndulo pode ser visto como um sistema SIMO (Single Input Multiple Output), a entrada é a tensão no motor  $V_m$  e as saídas são a deslocação do carrinho  $x_c$  e o ângulo do braço do pêndulo  $\alpha$ . No entanto na configuração SPG (pêndulo em modo grua) a variável a ser controlada é  $x_t$ , a deslocação da ponta do braço no eixo  $x$ . Assim a performance do sistema é avaliada de forma mais adequada se considerarmos o sistema como SISO (Single Input Single Output).  $x_t$  que vai ser a saída  $Y$  é dado por

$$x_t = x_c + L_p \sin(\alpha) = Y \quad (9.20)$$

Em representação de espaço de estados  $Y$  vem dado por

$$Y = CX + DU \quad (9.21)$$

Usando a linearização para ângulos pequenos as matrizes  $C$  e  $D$  do sistema SISO são dadas por

$$\begin{aligned} C &= [1 \quad L_p \quad 0 \quad 0] \\ D &= [0] \end{aligned} \quad (9.22)$$

## 10. Projeto de colocação de pólos

De forma a cumprir as especificações de projeto os pólos em malha fechada (também chamados de valores próprios) devem ser colocados cuidadosamente, os pólos são designados por  $p_1, p_2, p_3$  e  $p_4$ .

A teoria de controlo de realimentação de estados diz que qualquer conjunto de pólos em malha fechada pode ser alcançado através de um vetor de ganho constante,  $K$ , se o par de matrizes  $A$  e  $B$  for controlável [19] [20]. Primeiro temos de calcular numericamente a controlabilidade do sistema,  $Co$ , baseado nas matrizes  $A$  e  $B$  cujo valor foi obtido em (9.15) e (9.16), usando a Control System Toolbox™ do MATLAB® e a função `ctrb` podemos obter a matriz de controlabilidade a partir de  $A$  e  $B$

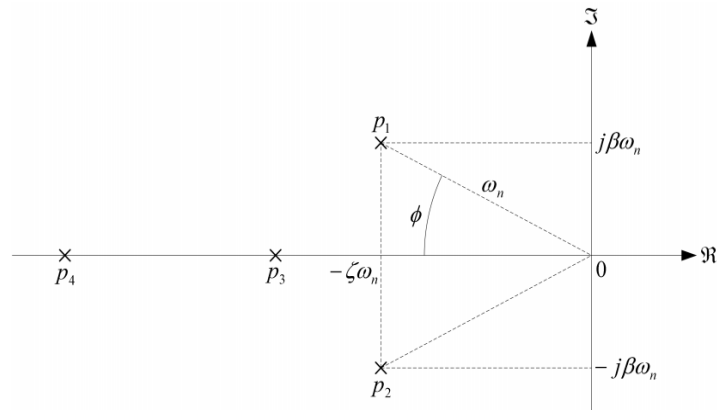
$$Co = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (10.1)$$

Numericamente teremos:

$$Co = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & -17.8 & 202.8 \\ 0 & -3.5 & 41.4 & -390.6 \\ 1.5 & 17.8 & 202.8 & -2301.7 \\ -3.5 & 41.4 & -390.6 & 4396.5 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Usando mais uma vez o MATLAB calculamos o determinante de  $Co$  que é  $-14877$ , como o determinante não é zero a matriz tem “full rank” ou seja as linhas são todas linearmente independentes tal como as suas colunas, também se podia ter usado a função `rank` do MATLAB®, assim o sistema é controlável.

O método de colocação de pólos consiste na localização de um par dominante de pólos complexos e conjugados,  $p_1$  e  $p_2$  que satisfaçam os requisitos de amortecimento e largura de banda. Os pólos em malha fechada restantes  $p_3$  e  $p_4$  são então colocados sobre o eixo real e à esquerda dos pólos dominantes, como se pode ver na figura 39.



**Figura 39- Localização dos pólos em malha fechada**

Os pólos dominantes são dados pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} p_1 &= -\zeta\omega_n + j\beta\omega_n \\ p_2 &= -\zeta\omega_n - j\beta\omega_n \end{aligned} \tag{10.3}$$

Onde  $\beta$  é dado por

$$\beta = \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{10.4}$$

Analisando a figura 22 podemos ver as seguintes relações

$$\begin{aligned} \zeta &= \cos(\phi) \\ \beta &= \sin(\phi) \end{aligned} \tag{10.5}$$

O fator mínimo de amortecimento que cumpre a percentagem de sobre-elevação (PO) pode ser obtido pela expressão

$$\zeta = \frac{\left| \ln\left(\frac{PO}{100}\right) \right|}{\sqrt{\ln\left(\frac{PO}{100}\right)^2 + \pi^2}} \tag{10.6}$$

A frequência natural, é calculada pela expressão

$$\omega_n = \frac{5}{\zeta t_s} \tag{10.7}$$

Substituindo a equação (10.6) na (10.7) ficamos com a frequência natural em função da percentagem de sobre-elevação (PO) e do tempo de estabelecimento.

$$\omega_n = \frac{4\sqrt{\ln\left(\frac{PO}{100}\right)^2 + \pi^2}}{\left|\ln\left(\frac{PO}{100}\right)\right| t_s} \quad (10.8)$$

De acordo com a equação (10.6), uma percentagem de sobre-elevação menor que 5% ( $PO \leq 5\%$ ) corresponde a um fator de amortecimento  $\zeta$  maior que 0.69. Assumindo um fator de amortecimento  $\zeta=0.69$ ,  $PO=5\%$  e  $t_s=2.2s$  teremos de acordo com a equação (10.8) uma frequência natural  $\omega_n=2.63\text{rad/s}$ .

Finalmente aplicando as equações (10.3),(10.4) e (10.5) com os valores do paragrafo anterior podemos calcular os pólos em malha fechada.

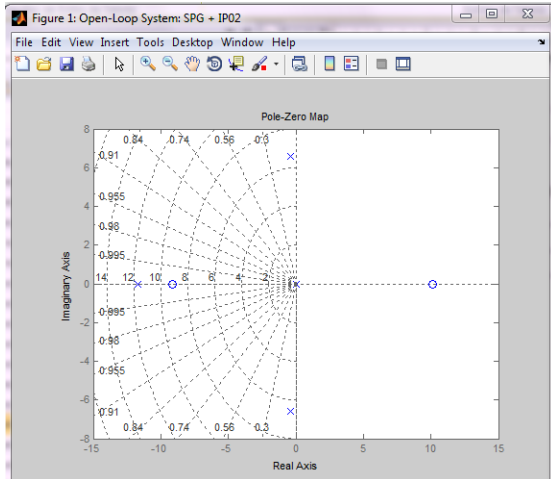
$$\begin{aligned} p_1 &= -1.8182 + 1.9067j \\ p_2 &= -1.8182 - 1.9067j \end{aligned} \quad (10.9)$$

Em relação aos pólos  $p_3$  e  $p_4$  devemos ter o cuidado de não serem dominantes, atribuímos valores como por exemplo

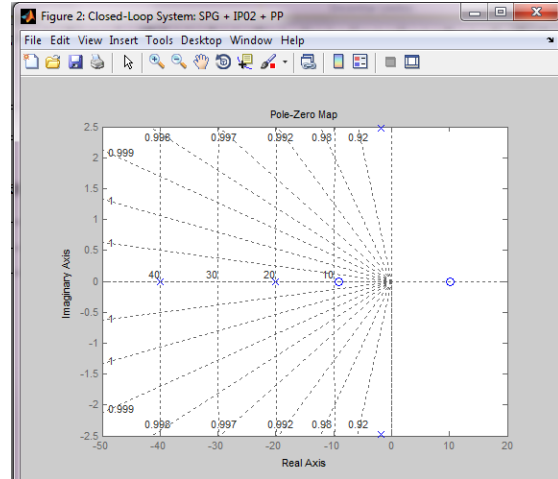
$$\begin{aligned} p_3 &= -20 \\ p_4 &= -40 \end{aligned} \quad (10.10)$$

A influência de  $p_3$  e  $p_4$  vai ser muito pequena.

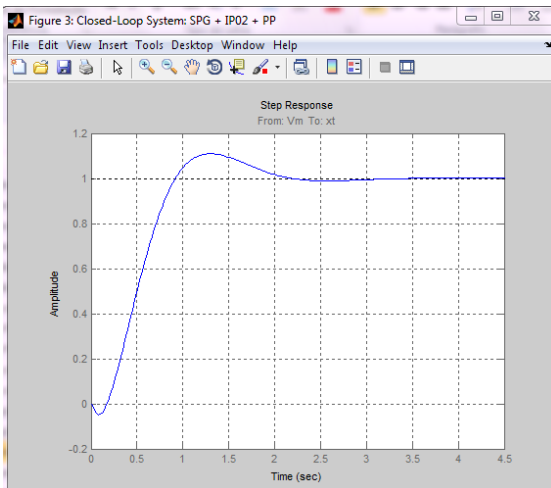
Para este teste são usados os ficheiros da pasta **Exp04 - SPG - PP**, o ficheiro de simulação é **s\_spg\_pp.mdl**, o interface é **GUIPJ\_Inter\_Sim.m**, abrir o ficheiro do interface e executar, o MATLAB<sup>®</sup> pede para mudar a diretoria, aceite a mudança.



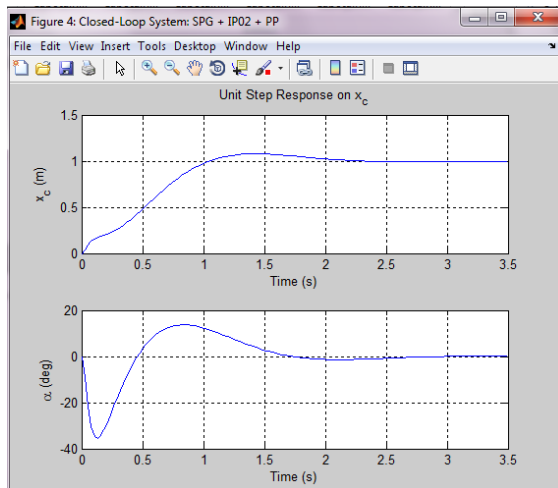
**Figura 40-**Mapa de pólos e zeros em malha aberta



**Figura 41-**Mapa de pólos e zeros em malha fechada



**Figura 42-**Resposta a degrau unitário SPG + IP02 + PP

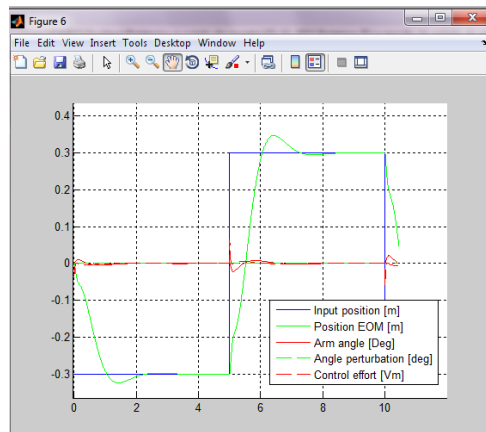


**Figura 43-**Posição do carrinho e ângulo do braço

Na figura 40 e 41 podemos ver a localização dos pólos e zeros calculados anteriormente.

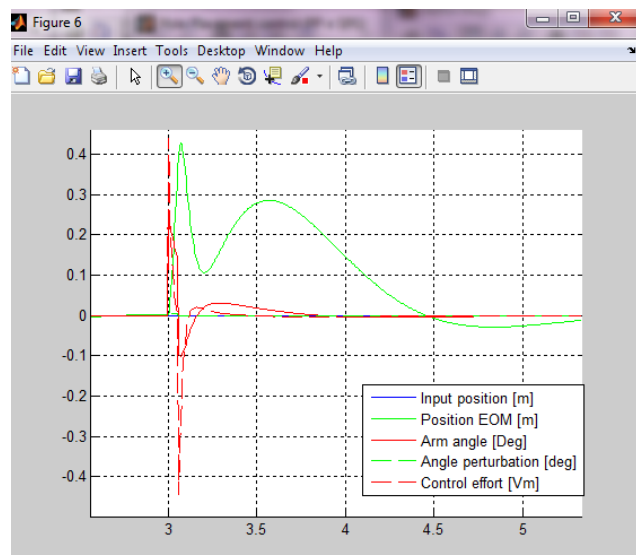
Na figura 42 podemos ver que existe uma ligeira sub-elevação, podemos ver também que demora cerca de 2 segundos a atingir a referência, isto deve-se à minimização da oscilação, se fosse mais rápido o braço oscilava mais.

Na figura 43 podemos ver a posição do carrinho e o ângulo do braço, podemos tal como anteriormente ver que demora cerca de 2 segundos a atingir a referência (neste caso um degrau unitário), o ângulo também não varia muito, podemos também ver que quando o carrinho anda para um lado o braço “foge” para o outro o que é perfeitamente normal.



**Figura 44-Resultados da simulação (sem perturbação)**

Na figura 44 podemos ver que o carrinho segue a referência sem grandes oscilações do braço, cumpre os requisitos do projeto.



**Figura 45-Resposta a uma perturbação no ângulo do pêndulo**

Na figura 45 podemos ver como o sistema responde a uma pequena perturbação no ângulo do braço, mantendo a referência a zero, o carrinho “compensa” a perturbação indo para o mesmo lado do braço e regressando à referência mal a perturbação termine.

Atenção que é preciso ter cuidado com este tipo de perturbações, o carrinho entra facilmente em colisão com os limites da pista.

Existem algumas discrepâncias entre a simulação e os resultados obtidos pelo hardware (IP02), fica aqui uma lista delas:

- Ruído introduzido ao diferenciar o ângulo do pêndulo e a posição do carrinho
- Atraso introduzido pelo filtro passa baixo que filtra a diferenciação do sinal de velocidade do carrinho e da variação do ângulo do pêndulo
- Aproximações matemáticas ao modelo e incertezas dos valores dos parâmetros
- Saturação do amplificador
- Banda morta do motor DC
- Fricção de Coulomb (fricção estática ou seca)
- Inercia
- Folga entre a roda dentada e a pista
- Ruído branco que causa algum “nervosismo” ao sistema
- Pista desnivelada

## 11. Projeto de controlador LQR

Um dos exemplos práticos mais interessantes que se podem fazer com um pêndulo como o IP02 é manter o braço do pêndulo virado para cima enquanto o carrinho está em repouso ou mesmo em movimento, algo similar ao equilíbrio de uma vassoura sobre a nossa mão [6] [8] [15] [17].

Para esta experiência vai ser usado o esquema de controlo LQR (Linear Quadratic Regulator), o objetivo vai ser manter o braço do pêndulo apontado para cima enquanto o carrinho se move para uma posição na pista.

Tanto a dinâmica do sistema como o problema de controlo são similares ao que acontece na estabilização do leme de navios [13].

A forma como o esquema de controlo vai ser implementado destina-se a encontrar um vetor de ganho  $K$  que mantenha o braço do pêndulo apontado para cima, o controlo ótimo vai permitir um equilíbrio entre performance e custo do controlo.

As especificações do projeto são as seguintes:

- Ângulo em relação à vertical que não deve ser excedido

$$|\alpha| \leq 1^\circ \quad (11.1)$$

- Tempo máximo de subida

$$t_r \leq 1.5[s] \quad (11.2)$$

- Minimizar o esforço de controlo, que vai ser proporcional à Tensão do motor  $V_m$ . O amplificador (VoltPAQ) não pode saturar.

Todas as especificações são para uma referência na entrada em onda quadrada que provoca uma deslocação do carrinho de  $\pm 20\text{mm}$  a  $\pm 30\text{mm}$ . As especificações aplicam-se tanto ao braço medio como ao braço longo do pêndulo.

O sistema tem como saída  $x_c$  e  $\alpha$ , como entrada tem apenas  $F_c$ .

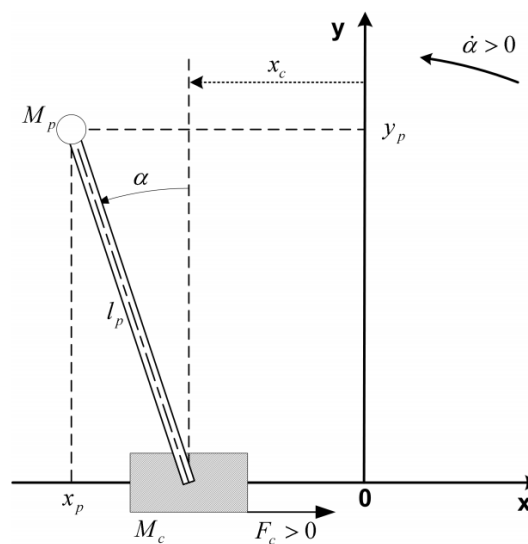


Figura 46-Esquema do pêndulo, coordenadas e sentido dos vetores

A figura 46 apresenta o esquema e notações que serão usadas, a rotação é em sentido, anti-horário,  $\alpha$  é nulo quando o braço do pêndulo está apontado para cima, o sentido positivo do movimento do carrinho é para a direita quando estamos a olhar de frente para o sistema

### **Equações não lineares do movimento (EOM)**

O método de lagrange (lagrangiano) [11] permite obter as equações de uma forma mais fácil que usando as leis de Newton, a única entrada vai ser  $F_c$ . Para obter as equações necessitamos do chamado lagrangiano do sistema que é obtido a partir do cálculo da energia potencial e cinética do sistema.

De acordo com o esquema da figura 23, as coordenadas absolutas do centro de gravidade do pêndulo podem ser caracterizadas por

$$\begin{aligned}x_p(t) &= x_c(t) - l_p \sin(\alpha(t)) \\t_p(t) &= l_p \cos(\alpha(t))\end{aligned}\tag{11.3}$$

Em primeiro lugar vamos calcular a energia potencial total do sistema  $V_T$ , a energia potencial num sistema é a quantidade de energia que o sistema ou parte dele tem devido a algum tipo de trabalho estar a acontecer ou ter acontecido. È usualmente causado pelo deslocamento vertical do ponto de repouso ou por um deslocamento elástico.

No pêndulo a única energia potencial é apenas devida à força da gravidade, O deslocamento do carrinho é horizontal e assim nunca existe deslocamento vertical. Assim sendo a energia potencial total é completamente descrita pela equação seguinte

$$V_T = M_p g l_p \cos(\alpha(t))\tag{11.4}$$

Agora necessitamos de determinar a energia cinética total  $T_T$ . A energia cinética mede a quantidade de energia que um sistema tem devido ao seu movimento. Neste caso do pêndulo é a soma da energia cinética da translação e rotação do carrinho e pêndulo, isto devido à ortogonalidade dos dois movimentos, ou seja são totalmente independentes.

A energia cinética da translação do carrinho  $T_{cT}$  é expressa pela expressão seguinte

$$T_{cT} = \frac{1}{2} M \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 \quad (11.5)$$

A energia cinética devida à rotação do braço do pêndulo  $T_{cr}$  é expressa pela expressão seguinte

$$T_{cr} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2}{r_{mp}^2} \quad (11.6)$$

Assim partindo da equação (11.5) e (11.6),  $T_c$ , a energia cinética total do carrinho pode ser escrita:

$$T_c = \frac{1}{2} M_c \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 \quad (11.7)$$

$$M_c = M + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2}$$

Assumindo que a massa do pêndulo está concentrada no seu centro de gravidade (COG) a energia cinética de translação,  $T_{pt}$ , pode ser expressa como função da velocidade linear do centro de gravidade

$$T_{pt} = \frac{1}{2} M_p \sqrt{\left( \frac{d}{dt} x_p(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} y_p(t) \right)^2} \quad (11.8)$$

Onde as coordenadas  $x$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo são determinadas por

$$\frac{d}{dt} x_p(t) = \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad (11.9)$$

Sendo as coordenadas  $y$  da velocidade linear do centro de gravidade do pêndulo dadas por

$$\frac{d}{dt} y_p(t) = -l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \quad (11.10)$$

Falta apenas a energia cinética da rotação do braço do pêndulo,  $T_{pr}$ , dada por

$$T_{pr} = \frac{1}{2} I_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \quad (11.11)$$

Finalmente a energia cinética total do sistema pode ser calculada, vai ser a soma das quatro energia cinéticas dadas nas equações (11.7),(11.8),(11.9),(11.10) e (11.11).

Através de manipulação matemática no software MAPLE<sup>®</sup> obtemos uma versão simplificada da soma que é dada por

$$T_T = \frac{1}{2} (M_c + M_p) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + \frac{1}{2} (I_p + M_p l_p^2) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \quad (11.12)$$

Podemos ver na equação (11.12) que a energia cinética total pode ser expressa em relação às duas coordenadas ( $x_c$  e  $\alpha$ ) e às suas derivadas de primeira ordem.

Considerando agora as equações de Lagrange do pêndulo, por definição as duas equações de Lagrange resultam das coordenadas já obtidas e possuem as seguintes fórmulas

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \frac{d}{dt} x_c(t)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_c} L \right) = Q_{x_c} \quad (11.13)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \frac{d}{dt} \alpha(t)} L \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} L \right) = Q_\alpha \quad (11.14)$$

Nas equações (8.15) e (8.16),  $L$  é chamada Lagrangiano e é definido por

$$L = T_T - V_T \quad (11.15)$$

Na equação (11.13),  $Q_{x_c}$  é a força aplicada na coordenada  $x_c$ , da mesma forma na equação (11.14),  $Q_\alpha$  é a força aplicada na coordenada  $\alpha$ . As forças no pêndulo podem ser definidas na seguinte equação

$$\begin{aligned}
 Q_{x_c}(t) &= F_c(t) - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) \\
 Q_{\alpha}(t) &= -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)
 \end{aligned}
 \tag{11.16}$$

Existem grandezas que foram desprezadas de modo a simplificar os cálculos, uma é a fricção de Coulomb que tem características não lineares, outra é a força do braço do pêndulo sobre o carrinho.

Calculando (11.13) resulta numa expressão mais explícita para a primeira equação de Lagrange.

$$\begin{aligned}
 (M_c + M_p) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) - M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) + M_p l_p \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 = \\
 F_c - B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)
 \end{aligned}
 \tag{11.17}$$

Da mesma forma (11.14) resulta

$$\begin{aligned}
 & -M_p l_p \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) \left( \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) \right) - M_p g l_p \sin(\alpha(t)) = \\
 & -B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)
 \end{aligned} \tag{11.18}$$

Finalmente, podemos resolver as equações de Lagrange, tal como estão expressas em (11.17) e (11.18), para a derivada de segunda ordem das duas coordenadas de Lagrange em relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned}
 & \left( - (I_p + M_p l_p^2) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) - (M_p^2 l_p^3 + l_p M_p l_p) \sin(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 \right. \\
 & \left. - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) + (I_p + M_p l_p^2) F_c + \right) \\
 \frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = & \frac{M_p^2 l_p^2 g \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t))}{\left( (M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{11.19}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( (M_c + M_p) M_p g l_p \sin(\alpha(t)) - (M_c + M_p) B_p \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right) - \right. \\
 & \left. M_p^2 l_p^2 \sin(\alpha(t)) \cos(\alpha(t)) \left( \frac{d}{dt} \alpha(t) \right)^2 - M_p l_p \cos(\alpha(t)) B_{eq} \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right) + \right) \\
 \frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = & \frac{F_c M_p l_p \cos(\alpha(t))}{\left( (M_c + M_p) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2 \right)}
 \end{aligned} \tag{11.20}$$

As equações (11.19) e (11.20) obtidas representam as equações de movimento (EOM) do pêndulo.

### Linearização das equações de movimento (EOM)

Para projetar um controlador e implementar uma realimentação de estado para o pêndulo é necessário determinar a representação em espaço de estados. As matrizes de espaço de estados representam por definição um conjunto de equações diferenciais lineares que descreve a dinâmica do sistema. Assim as equações de movimento (11.19) e (11.20) têm de ser linearizadas em torno de um ponto de operação, neste caso esse ponto é o ponto em que o braço do pêndulo aponta para cima, nessa posição o ângulo  $\alpha$  é zero, considerando pequenas variações de  $\alpha$  e usando a expansão em série de segunda ordem [14]:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= 1 + O(\alpha^2) \\ \sin(\alpha) &= \alpha + O(\alpha^2)\end{aligned}\tag{11.21}$$

Podemos assim linearizar as equações (11.19) e (11.20) usando a expressão (11.21)

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{\left( \begin{array}{l} -\left(I_p + M_p l_p^2\right) B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x_c(t)\right) + M_p l_p B_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t)\right) + \\ \left(I_p + M_p l_p^2\right) F_c + M_p^2 l_p^2 g \alpha(t) \end{array} \right)}{\left(M_c + M_p\right) I_p + M_c M_p l_p^2}\tag{11.22}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \frac{\left( \begin{array}{l} -\left(M_c + M_p\right) M_p g l_p \alpha(t) - \left(M_c + M_p\right) B_p \left(\frac{d}{dt} \alpha(t)\right) + \\ M_p l_p B_{eq} \left(\frac{d}{dt} x_c(t)\right) - F_c M_p l_p \end{array} \right)}{\left(M_c + M_p\right) I_p + M_c M_p l_p^2 + M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha(t))^2}\tag{11.23}$$

A representação em espaço de estados tem a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} X = AX + BU\tag{11.24}$$

Onde  $X$  é o vetor de estado do sistema (pêndulo), na pratica,  $X$  é escolhido de forma a incluir as coordenadas como também as derivadas de primeira ordem, no caso do pêndulo,  $X$  é definido para que a sua transposta seja dada por

$$X^T = \left[ x_c(t), \alpha(t), \frac{d}{dt} x_c(t), \frac{d}{dt} \alpha(t) \right] \quad (11.25)$$

Onde  $U$  à primeira vista é a entrada do sistema e neste caso como já foi referido vai ser a força  $F_c$ , força que faz mover o carrinho.

$$U = F_c \quad (11.26)$$

Mas  $F_c$  é causada pela tensão aplicada ao motor  $V_m$

$$U = V_m \quad (11.27)$$

O cálculo da força a partir da tensão do motor já foi calculado previamente e é dado pela expressão

$$F_c = -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \left( \frac{d}{dt} x_c(t) \right)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}} \quad (11.28)$$

O momento de inércia em torno do centro de gravidade é dado por

$$I_p = \frac{1}{12} M_p L_p^2 \quad (11.29)$$

Agora já podemos usar as equações previamente obtidas e coloca-las em forma de espaço de estados, a matriz do espaço de estados  $A$  é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gM_p^2 l_p^2}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{B_{eq}(I_p + M_p l_p^2)}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{M_p l_p B_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \\ 0 & \frac{M_p g l_p (M_c + M_p)}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{M_p l_p B_{eq}}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} & -\frac{(M_c + M_p)B_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix} \quad (11.30)$$

Da mesma forma a matriz de espaço de estados B é dada pela forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{I_p + M_p l_p^2}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \\ \frac{M_p l_p}{(M_c + M_p)I_p + M_c M_p l_p^2} \end{bmatrix} \quad (11.31)$$

Apenas como curiosidade vamos ver como são as matrizes de estado quando os parâmetros  $I_p, B_p$  e  $B_{eq}$  são desprezados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gM_p}{M_c} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(M_c + M_p)}{M_c l_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.32)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_c} \\ \frac{1}{M_c l_p} \end{bmatrix} \quad (11.33)$$

Para o pêndulo sem o peso extra e o braço longo temos as seguintes matrizes de espaço de estado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.2643 & -15.8866 & -0.0073 \\ 0 & 27.8203 & -36.6044 & -0.0891 \end{bmatrix} \quad (11.34)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.2772 \\ 5.2470 \end{bmatrix} \quad (11.35)$$

Como a matriz  $A$  tem 4 linhas e quatro colunas devem existir quatro pólos em malha aberta, a equação característica em malha aberta pode ser expressa por

$$\det(sI - A) = 0 \quad (11.36)$$

Onde  $\det()$  é a função determinante,  $s$  é o operador de Laplace e  $I$  é a matriz identidade, assim os pólos em malha aberta podem ser vistos como os valores próprios da matriz de estado  $A$  (11.36) obtemos assim os pólos em malha aberta

$$-16.2577, -4.5611, 0, 4.8426 \quad (11.37)$$

Como se pode ver pelos valores dos pólos (11.37) o sistema em malha aberta é instável, isto é, existe pelo menos um polo com valor real positivo, teremos então de projetar um controlador que em malha fechada não tenha pólos com valor real positivo.

Os interfaces e scripts para o teste do controlo LQR permitem calcular automaticamente  $Q$  e  $R$  mas também permitem ao utilizador introduzir os valores manualmente, os scripts usam o comando `lqr` do MATLAB<sup>®</sup> para obter o ganho ótimo  $K$  que é obtido pela minimização da equação de Riccati.

### Escolha dos valores para Q e R

Q é uma matriz em que apenas os valores diagonais podem ser diferentes de zero, R é um valor que indica o peso do esforço de controlo.

- Q(1,1) é o “peso” do erro da posição do carrinho, aumentando este valor em relação aos outros estamos a valorizar mais a posição do carrinho.
- Q(2,2) é o “peso” do erro do ângulo do braço do pêndulo, aumentando este valor em relação aos outros estamos a valorizar mais o ângulo do pêndulo, este é o valor mais importante porque o objetivo é minimizar a variação do ângulo.
- R é o peso do esforço de controlo, aumentando este valor reduzimos o peso da referência, se a Tensão do motor entrar em saturação devemos aumentar o valor de R.

Para este teste são usados os ficheiros da pasta **Exp05 - SIP - LQR**, o ficheiro de simulação é **s\_sip\_lqr.mdl**, o interface é **GUIPJ\_Inter\_Sim.m**, abrir o ficheiro do interface e executar, o MATLAB® pede para mudar a diretoria, aceite a mudança.

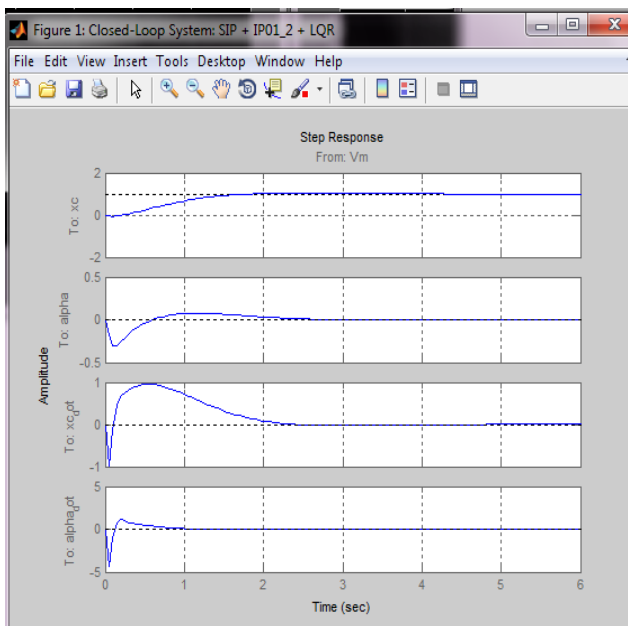


Figura 47-Resposta a degrau unitário (4 estados)

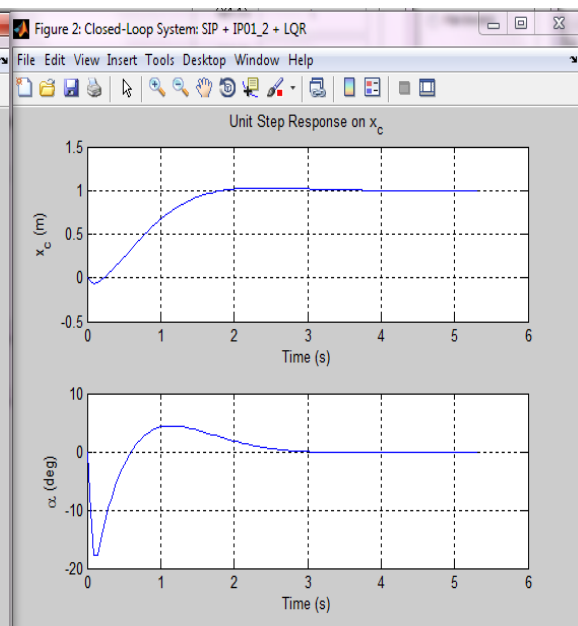


Figura 48-Resposta a degrau unitário (2 estados)

Na figura 47 e 48 podemos ver a resposta a degrau unitário (aplicado ao ângulo do braço do pêndulo), em ambas podemos ver que o ângulo varia ligeiramente mas o carrinho “compensa” e mantém o pêndulo apontado para cima (equilibrado).

Na documentação do IP02 há um exemplo de valores aceitáveis para Q e R, isto para o carrinho sem o peso extra e com o braço mais longo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11.38)$$

$$R = 0.0002$$

Q e R também podem ser obtidos através do método de *Bryson and Ho* [21]

O ganho K obtido pelo comando `lqr` no MATLAB<sup>®</sup> é:

$$K = [-44.72 \quad 200.80 \quad -49.77 \quad 27.38] \quad (11.39)$$

Regras simples para a sintonização do LQR de forma a obter um controlo ótimo:

- Se a posição não cumprir as especificações deve-se aumentar Q(1,1) e baixar Q(2,2)
- Se o ângulo oscilar para além das especificações ou perder o equilíbrio deve-se aumentar Q(2,2) e/ou baixar Q(1,1)
- Devem-se encontrar valores de Q(1,1) e Q(2,2) que satisfaçam todas as especificações, muitas vezes é necessário encontrar um ponto de acordo entre as respostas de posição e variação do ângulo
- Se a Tensão do motor ( $V_m$ ) saturar tentar incrementar R e/ou baixar Q(1,1) e Q(2,2), o mesmo deve ser feito se o carrinho vibrar demasiado.

A presença de erro em regime estacionário na posição do carrinho pode ser explicada pelas não linearidades do sistema que o modelo não tem em conta, o mesmo acontece com incertezas nos parâmetros.

Testando os valores sugeridos na documentação do pêndulo e o cálculo automático do K

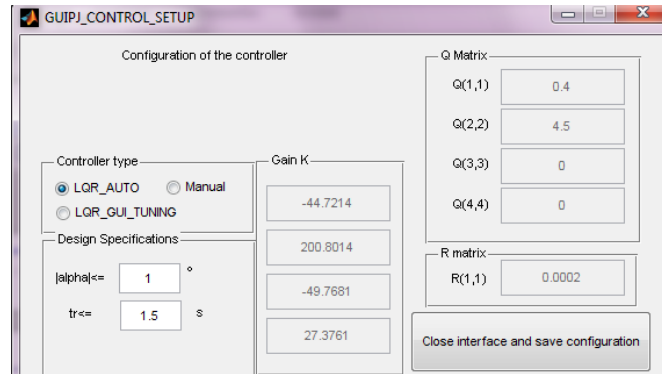


Figura 49-Interface de cálculo do K

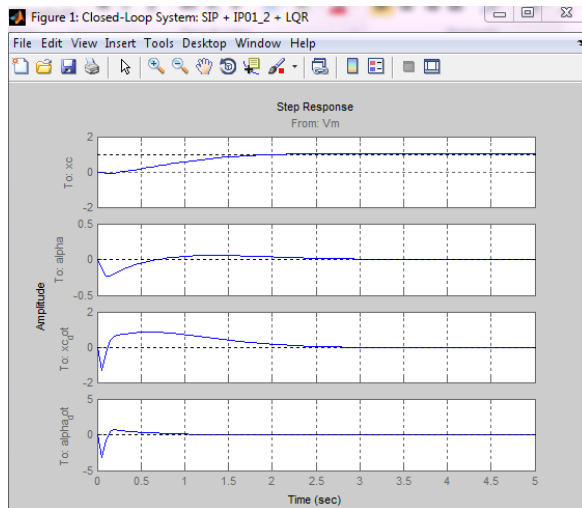


Figura 50-Resposta a degrau unitário (4 estados)

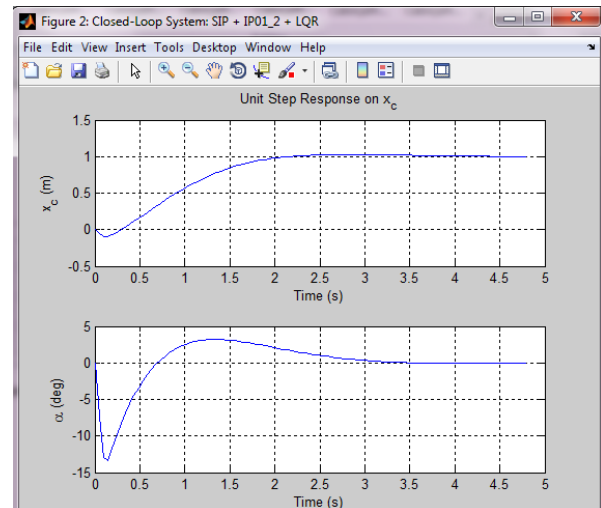
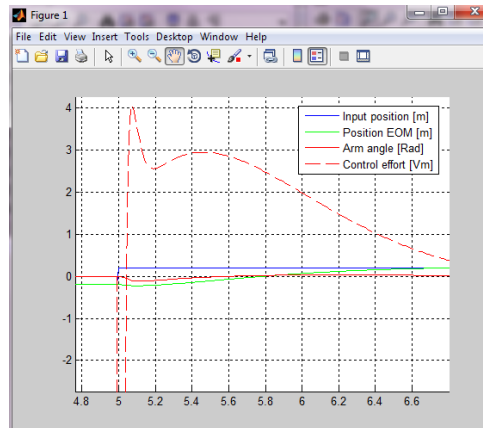


Figura 51-Resposta a degrau unitário (2 estados)

Como podemos ver na figura 50 e 51 o carrinho atinge a posição desejada mantendo o braço do pêndulo equilibrado.



**Figura 52-Resultados da simulação**

Simulando podemos ver na figura 52 que o ângulo varia muito pouco tal como especificamos no início e que o tempo de subida também é cumprido, o carrinho segue a referência.

Também é possível simular a queda livre do braço do pêndulo usando o mesmo interface que usa o ficheiro **s\_sip freefall\_ss\_vs\_eom.mdl**, para isso basta seleccionar *freefall* na parte *Simulink model*, inicie a simulação e escolha *slider* como referência, basta um pequeno toque no *slider* para o braço do pêndulo cair, apesar da animação funcionar corretamente não é apresentada aqui a figura pois os resultados obtidos não estão corretos e não consegui descobrir a causa.

No modo *freefall* é interessante constatar que é necessário um pequeno toque no *slider* para o braço cair, no hardware real isso não acontece pois é muito difícil manter o braço do pêndulo virado para cima, isto deve-se às incertezas do hardware que as equações não têm em conta.

O interface permite alteração do ganho em tempo real o que é útil para pequenos ajustes mas não é recomendado quando se usa o hardware, para ajustar o hardware é aconselhado primeiro desligar a alimentação do hardware.

O LQR parece ser o método mais apropriado para manter o pêndulo ereto embora também seja possível equilibrar usando a colocação de pólos estudada no capítulo 10.

O controlo LQR é capaz de manter o pêndulo ereto mesmo quando é sujeito a pequenas perturbações, podemos considerar como perturbação a deslocação do carrinho para uma nova posição (mudança da referência), ao usar o hardware é interessante dar um pequeno toque no braço do pêndulo, o carrinho vai compensar e mal termina a perturbação ele regressa à posição inicial, no entanto convém ter cuidado e não dar grandes perturbações ao pêndulo real (hardware) senão ele entra em colisão com os limites da pista ou danifica a roda dentada.

Existem algumas discrepâncias entre a simulação e os resultados obtidos pelo hardware (IP02), fica aqui uma lista delas:

- Ruído introduzido ao diferenciar o angulo do pêndulo e a posição do carrinho
- Atraso introduzido pelo filtro passa baixo que filtra a diferenciação do sinal de velocidade do carrinho e da variação do angulo do pêndulo
- Aproximações matemáticas ao modelo e incertezas dos valores dos parâmetros
- Saturação do amplificador
- Banda morta do motor DC
- Fricção de Coulomb (fricção estática ou seca)
- Inercia
- Folga entre a roda dentada e a pista
- Ruído branco que causa algum “nervosismo” ao sistema
- Pista desnivelada

## 12. Conclusões e trabalho futuro

Foram criados com sucesso os interfaces de utilizador e uma animação para ajudar os alunos a testar os valores calculados, para além de ajudar a tornar mais rápido o processo de cálculo dos valores de ganhos apropriados também previne danos no hardware.

No início a ideia era de também testar exaustivamente os interfaces no hardware IP02 da Quanser mas infelizmente o hardware tem um problema grave que é a roda dentada que faz a tração do carrinho na pista, essa roda dentada é de um plástico muito frágil e destrói-se facilmente, a Quanser forneceu mais rodas dentadas mas elas destroem-se muito depressa, para além disso a pista também está ligeiramente empenada o que causa em certos locais que a roda dentada não esteja totalmente em contacto com a pista.

Sendo assim os interfaces criados representam uma mais-valia para poupar o hardware e fornecer aos alunos ferramentas seguras de teste.

Outro problema grave são os picos de tensão que certos parâmetros podem causar ao motor, por exemplo quando o erro de posição é muito grande o amplificador entra em saturação, o resultado na maioria destes casos é uma roda dentada destruída.

Os interfaces podem conter erros e como tal os seus resultados não podem ser tomados como certos, é aconselhada a verificação dos valores obtidos junto ao docente da cadeira, eles também permitem usar o hardware mas é preciso ter cuidado pois não foram implementadas todas as seguranças para não destruir o hardware, o utilizador ainda pode causar muitos problemas, na parte de escolher a referência com a barra de deslocamento é preciso ter muito cuidado e não variar muito de cada vez.

O desempenho do controlo LQR e da colocação de polos foi bastante bom mas a aplicação do filtro de Kalman poderá trazer vantagens porque permite alguma tolerância a perturbações causadas por ruído branco nos *encoders* ou vibrações na pista do pêndulo.

Os interfaces podem-se ainda tornar mais robustos e evitar que o utilizador envie comandos que danifiquem o hardware.

### 13. Referências bibliográficas

- [1] Paulo Coelho (2010), Aulas teóricas de Controlo Digital, p. 4
- [2] Bennett, Stuart (1984), "Nicholas Minorsky and the automatic steering of ships", IEEE Control Systems Magazine 4 (4), November, pp. 10-15
- [3] Bennett, Stuart (1993), A history of control engineering, 1930-1955, IEEE Control Engineering Series No. 47, Preface
- [4] Bennett, Stuart (1996), A brief history of automatic Control, Control Systems, IEEE Issue Date: Jun 1996, Volume: 16 Issue:3, pp. 17 - 25
- [5] Minorsky, Nicolas (1922), "Directional stability of automatically steered bodies". J. Amer. Soc. Naval Eng. 34 (2), p. 284
- [6] K. Ogata (2002), "Modern Control Engineering", 4ª Edição, Prentice-Hall, pp. 75-84, pp. 173-179
- [7] <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/kalmanBio.html> (2011)
- [8] Xianmin Chen et al. (2007), Linear Motor Driven Inverted Pendulum and LQR Controller Design, Automation and Logistics, 2007 IEEE International Conference pp. pp. 1750 - 1754
- [9] Charles W. Anderson (1989), Learning to control an inverted pendulum using neural networks, Control Systems Magazine, IEEE Volume: 9 Issue:3, pp. 31 - 37
- [10] Nemad Muskinja (2006), Swinging up and stabilization of a real inverted pendulum, Industrial Electronics, IEEE Transactions, Volume: 53 Issue:2, pp. 631 - 639
- [11] K. J. Åström and K. Furuta (1996), SWINGING UP A PENDULUM BY ENERGY CONTROL, Automatica 36 (2000), pp. 287-295
- [12] Paulo Coelho (2006), Manual de controlo, p. 155
- [13] Quanser, Linear Motion Servo Plants (2011), IPO1 or IPO2 Linear Motion Servo Plants
- [14] Zoran Gajic (2003), Linear Dynamic Systems and Signals, Prentice Hall, 2003, pp.8-98
- [15] Paulo Coelho (2010), Aulas teóricas de Controlo Ótimo e Adaptativo, aula 6
- [16] Franklin et al (1998), Digital Control of Dynamic Systems, 3rd Edition, Addison-Wesley, pp. 87-110

[17] K.J. Åström, The Control Handbook (1995), The Electrical Engineering Handbook Series. CRC Press, Inc., Boca Raton/FA

[18] <http://www.engin.umich.edu/group/ctm/extras/lead.lag.html> (2011)

[19] Karl J. Åström and Richard M. Murray (2008). Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, pp. 361-366

[20] Franklin et al. (2002). Feedback Control of Dynamic Systems (4 ed.), pp. 366-392

[21] Bryson, A.E.; Ho, Y.C. (1975). Optimization, Estimation and Control. Washington, DC: Hemisphere.

## **14. Anexos**

Todos os ficheiros incluídos no suporte digital (DVD) desta tese podem ser considerados anexos e devem ser consultados de forma a complementarem esta tese.