DESENVOLVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS

PRÁTICAS E DESAFIOS

ORGANIZADORAS

CATARINA DELGADO, JOANA BROCARDO E FÁTIMA MENDES

REASON

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E FORMAÇÃO DE PROFESSORES

IPS Instituto Politécnico de Setúbal

Escola Superior de Educação

Conteúdo

1. INTRODUÇÃO

Neste e-book reunimos textos produzidos no âmbito de uma oficina de formação promovida pelo projeto REASON – *Raciocínio Matemático e Formação de Professores,* financiado por fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (Projeto C&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-©-EDG/28022/2017) que incluiu investigadores do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e das Escolas Superiores de Educação dos Institutos Politécnicos de Setúbal e de Lisboa.

As organizadoras deste e-book foram formadoras de uma oficina de formação contínua intitulada *Promover o raciocínio matemático dos alunos dos anos iniciais* e que teve uma forte vertente de preparação e reflexão em torno de aulas focadas no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos de 1.º e 2.º ciclos.

Na sequência do trabalho realizado, sete formandas produziram os textos que se publicam nos capítulos de 2 a 6. No capítulo 1 focamos algumas das principais características do projeto REASON que são ilustradas e discutidas a partir da experiência da oficina de formação dinamizada pela equipa do projeto da ESE/IPS.

Capítulo

1

FORMAR PROFESSORES VISANDO PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO DOS ALUNOS:

UMA ABORDAGEM QUE ARTICULA TEORIA E PRÁTICA

Fátima Mendes
Joana Brocardo
Catarina Delgado
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

1. INTRODUÇÃO

No âmbito do projeto REASON conduzimos uma oficina de formação de professores do 1.º e 2.º ciclos que incide no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos em *Números e Operações* e em *Geometria*, focando-se especificamente nos seguintes tópicos:

- Processos de raciocínio matemático
- Tarefas matemáticas promotoras do raciocínio matemático
- Dificuldades dos alunos no raciocínio matemático
- Ações do professor que favorecem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos

De entre os objetivos da oficina destacamos: (1) aprofundar o conhecimento sobre raciocínio matemático e processos de raciocínio; (2) planificar aulas focadas no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos; e (3) refletir sobre a prática realizada visando uma crescente atenção no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

A oficina de formação teve 19 formandos e decorreu ao longo de oito sessões presenciais, num total de 20 horas presenciais e de 20 horas de trabalho autónomo.

Tabela 1

Sessões presenciais e sua articulação com a prática letiva

Sessão 1	Tarefa inicial: o que é o raciocínio matemático?
Sessão 2	Discussão e apresentação sobre Raciocínio matemático (RM) e processos de RM. Análise de uma tarefa e das produções dos alunos
Sessão 3	Análise de tarefas de Números e Operações e de Geometria
Sessão 4	Preparar Levar à prática I
Sessão 5	Apresentar a experiência de Levar à prática I
Sessão 6	Análise de tarefas de Números e Operações e de Geometria
Sessão 7	Preparar Levar à prática II
Sessão 8	Apresentar a experiência de Levar à prática II Balanço final da oficina.

A tabela 1 permite perceber o foco e a articulação entre as várias sessões de trabalho presencial e o trabalho autónomo. Um aspeto central da formação foi a interligação teoria/prática operacionalizada, sobretudo, via a preparação, condução o e reflexão de uma aula em que cada formando explorou uma tarefa que potencialmente favorecia o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos.

Os capítulos seguintes deste livro, da autoria de 7 professoras que participaram nesta oficina, relatam e analisam um dos momentos da sua concretização pessoal do Levar à Prática. Neste capítulo inicial recorremos a exemplos que neles são referidos e a outros que fomos recolhendo ao longo da formação com o objetivo de avançar ideias fundamentadas para uma formação de professores focada no raciocínio matemático.

2. UMA FORMAÇÃO FOCADA NO RACIOCÍNIO: A IMPORTÂNCIA DAS TAREFAS

Uma grande preocupação na preparação da formação prendeu-se com a seleção/adaptação das tarefas que iríamos discutir durante as sessões de formação. Um documento interno do projeto REASON, sobre as características das tarefas para promover o raciocínio matemático (REASON, 2019), traduz as conclusões a que fomos chegando a partir da análise crítica (1) da investigação empírica e teórica sobre este tema e (2) das tarefas que íamos adaptando e testando.

Apresentamos, em seguida, uma tabela que resume os princípios, preconizados pelo REASON, para a elaboração de tarefas que visam promover o raciocínio matemático dos alunos.

Tabela 2

Princípios para a elaboração de tarefas que visam promover o raciocínio matemático dos alunos (REASON, 2019)

Princípios gerais	1. Incluir questões que permitem uma variedade de estratégias de resolução. 2. Incluir questões que envolvem uma variedade de representações. 3. Incluir questões que incentivem e favoreçam a reflexão sobre os processos de raciocínio utilizados.

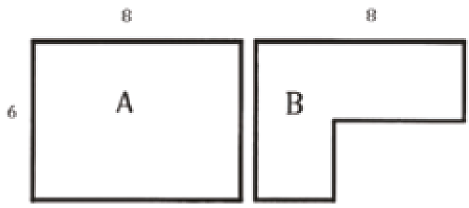
Princípios específicos para promover a generalização	4. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações baseadas na observação de semelhanças e diferenças entre objetos. 5. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações a partir do conhecimento prévio. 6. Incluir questões que incentivem a formulação de generalizações por transformação das condições da situação.
Princípios específicos para promover a justificação	7. Incluir questões que solicitem ou incentivem a justificação de respostas, ou de estratégias de resolução, ou de afirmações matemáticas. 8. Incluir questões que solicitem ou incentivem justificações de natureza diversa, nomeadamente, com base na cœrência lógica, com recurso a exemplos genéricos ou contræxemplos, por exaustão ou absurdo. 9. Incluir questões que solicitem a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações matemáticas. 10. Incluir questões que solicitem ou incentivem a análise por parte do aluno de justificações apresentadas por outros.
Princípios específicos para promover a classificação	11. Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização de objetos com base na identificação de características desses objetos. 12. Incluir questões que incentivem o estabelecimento de uma organização hierárquica ou partitiva de classes.

Estes princípios facilitam uma análise exaustiva das potencialidades de uma tarefa que está a ser criada ou adaptada, precisando sugestões para a sua exploração na sala de aula. De facto, as respostas que íamos dando, acerca da presença ou ausência de alguns desses princípios nas tarefas que iam sendo testadas em salas de aula, levaram-nos a considerar vários ajustes e a precisar várias indicações que ilustramos com o caso da tarefa *Comparar perímetros* (tarefa cuja exploração é descrita no capítulo 2).

Figura 1

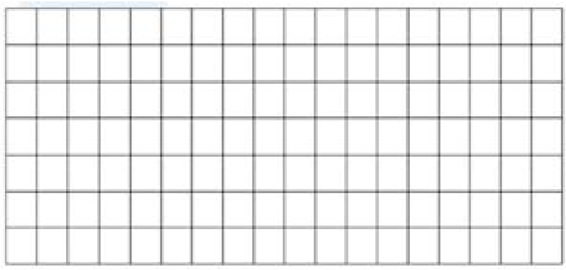
Duas versões da mesma tarefa "Comparar perímetros"[1]

Versão inicial da pergunta 1



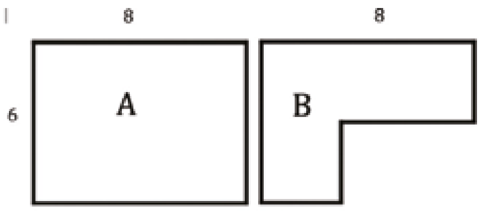
O Ivo diz que consegue determinar o perímetro da figura A, mas não consegue determinar o perímetro da figura B.

1. E tu? Para determinar o perímetro de A o que farias?
   Se isso te ajuda podes representar A no quadriculado seguinte, considerando que o lado da quadrícula mede 1.



Explica agora como farias para determinar o perímetro de A.

Versão final da pergunta 1



Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras tem maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?

Na versão inicial, as indicações para o professor sugeriam que, depois da fase inicial de introdução da tarefa em que se assegurava que os alunos a tinham globalmente percebido, seria proposta a resolução autónoma da tarefa. A possibilidade de os alunos começarem a trabalhar sem o apoio do professor levou-nos a apoiar a determinação do perímetro da figura sugerindo que poderiam usar o papel quadriculado. Deste modo, pensámos, os alunos conseguiriam sempre começar por 'fazer alguma coisa'.

Esta versão 1 foi reformulada a partir de um questionamento movido pelos princípios de design que íamos considerando e dos dados recolhidos numa turma de 3.º ano. Uma ideia que se tornou clara é que a pergunta 1 desta versão não dava abertura à possibilidade de várias estratégias de resolução nem ao uso de várias representações. Pelo contrário, depois de uma introdução em que se fala das duas figuras A e B, indicando que Ivo consegue determinar

[1] Adaptado de Battista, M. (2017). Mathematical reasoning and sense making. Em M. Battista, J. M. Bæk, K. Cramer, & M. Blanton (Eds.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 1-22). NCTM.

o perímetro de uma, mas não da outra, encaminha-se a atenção do aluno para o cálculo do perímetro de uma das figuras (aquela de que Ivo consegue determinar o perímetro), sugerindo o uso do quadriculado. Deste modo, o objetivo da tarefa de pensar no perímetro de figuras do 'tipo B' a partir da figura A, não era contemplado nesta primeira questão que tinha a vantagem de esclarecer/recordar, desde o início, como se pode determinar o perímetro de uma figura.

A versão final, conseguida depois de várias reformulações, mantém desde o início a comparação das duas figuras que foi ainda reforçada nas sugestões para o professor de:

> *Numa fase inicial o professor apresenta a tarefa e convida os alunos a ler o enunciado, desafiando alguns deles a explicar por palavras suas o que se pretende que façam. Ainda nesta fase inicial, sem efetuar quaisquer cálculos, o professor pode perguntar o que lhes parece que vai acontecer: qual das figuras tem maior perímetro, ou será que têm o mesmo perímetro?*

O desafio de analisar globalmente as figuras e de formular uma conjetura acerca do seu perímetro revelou-se um 'motor de entusiasmo': todos os alunos olham para as duas figuras e procuram relacioná-las.

Nesta última versão da tarefa, logo desde a pergunta 1, favorecia-se a possibilidade de recorrer a várias estratégias de resolução e de representação (dois dos princípios gerais para a construção e adaptação de tarefas, ver Tabela 2) e, através das sugestões ao professor, que também incluíam indicações no sentido de incentivar a exploração autónoma da tarefa e a justificação das respostas, promovia-se a justificação (princípios 7 a 10, Tabela 2).

O processo de design das tarefas que procurámos ilustrar anteriormente foi acompanhado pela conceção global dos materiais de formação que refletem as indicações de Lin et al. (2012). De facto, os materiais de formação enquadram-se no currículo de matemática oficial e refletem o conhecimento que a equipa do projeto foi desenvolvendo acerca do conhecimento sobre o raciocínio matemático.

Figura 2

Excerto da tarefa de formação Comparar perímetros, baseado na análise de três resoluções de alunos

2.1. Indique os processos de raciocínio que identifica nas resoluções dos alunos e nas explicações que deram.

2.2. Identifique dificuldades dos alunos que as resoluções apresentadas evidenciam.

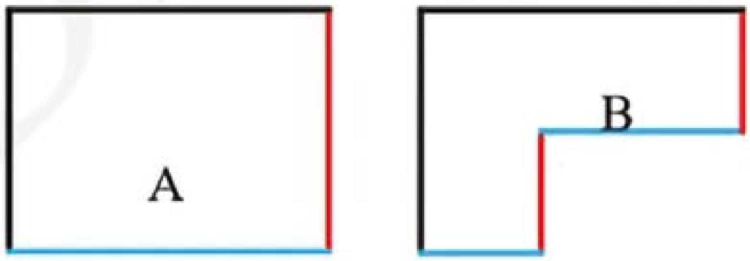
2.3. Como poderia apoiar estes alunos a melhorar o seu raciocínio na resolução da tarefa?

Figura 3

Excerto da tarefa de formação que inclui uma resolução de um aluno na tarefa Comparar perímetros

3. Na resolução da questão 1 uma aluna do 5.º ano deu a seguinte justificação:

[As figuras A e B] têm o mesmo perímetro. Porque pego neste lado (aponta para o lado a vermelho em A) e passo-o para ali (aponta para os lados a vermelho de B). E assim estes lados ficam iguais ao do retângulo [A]. E posso fazer o mesmo com os lados a azul. Por isso os lados em B ficam iguais aos lados em A. O perímetro é igual.



Como poderia preparar a exploração da tarefa de modo que todos os alunos da sua turma pudessem chegar a uma justificação deste tipo na resolução da questão 3 (*A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê*).

Também, globalmente, as tarefas da formação baseadas na exploração de propostas de trabalho pensadas para promover o raciocínio matemático dos alunos incluíam os aspetos recomendados por Lin et al. (2012), propondo aos professores que indicassem o enquadramento curricular, resolvessem a tarefa do ponto de vista dos alunos, justificassem a sua adequação para potenciar o raciocínio matemático dos seus alunos e analisassem resoluções concretas de alunos e episódios de sala de aula, como ilustram os exemplos das figuras 2 e 3.

3. LEVAR À PRÁTICA: UM ESPAÇO DE FORMAÇÃO E COLABORAÇÃO

Como se pode ver na tabela 1, a formação deu particular relevo à preparação e análise dos momentos que denominámos por *Levar à prática*. Cada um deles envolveu: (i) selecionar/adaptar uma tarefa que potencialmente favorecesse o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos; (ii) planificar detalhadamente a aula dedicada à exploração da tarefa na aula de cada professor/formando, explicitando os objetivos a atingir; a estrutura da aula e o(s) método(s) de trabalho a adotar; a atividade prevista para o professor e os alunos, incluindo uma previsão das estratégias e dificuldades dos alunos e formas/ações do professor para as ultrapassar; (iii) concretizar numa aula a exploração da tarefa planeada; e (iv) apresentar, durante uma sessão da formação, uma breve descrição e análise da aula, focada na promoção do raciocínio matemático.

Nos restantes capítulos deste livro as autoras, professoras que participaram na formação, descrevem e analisam criticamente o trabalho que realizaram, ilustrando o modo como concretizaram um dos momentos de *Levar à prática.* Neste capítulo centramo-nos numa análise mais macro, focada em características destes momentos de formação que se foram evidenciando ao longo da oficina.

Destacamos, em primeiro lugar, a importância de optar por dedicar duas sessões de formação à planificação do *Levar à prática I* e Levar à *prática II*. Mesmo significando reservar ¼ das sessões presenciais a este trabalho, esta opção revelou-se fundamental para apoiar o trabalho inicial de preparação da aula.

A decisão sobre a tarefa que iriam explorar na aula foi um dos aspetos que ocupou, em alguns grupos, um tempo significativo destas sessões. Discutia-se se esta ou aquela tarefa disponibilizada durante a formação seria adequada aos conhecimentos dos alunos, surgiam hipóteses alternativas relativas a outras tarefas que já conheciam anteriormente ou até que já tinham usado em anos anteriores e analisavam-se as potencialidades de cada uma para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos.

Um segundo aspeto que destacamos, diz respeito ao apoio previsto no âmbito do *Levar à prática I* e *Levar à prática II* e que claramente deu confiança aos formandos para ousar explorar tarefas focando a atenção no desenvolvimento do raciocínio. O suporte inicialmente previsto era constituído (i) por textos que permitiam aprofundar o conhecimento sobre raciocínio matemático e as ações do professor para o promover e (ii) tarefas que podiam ser exploradas com os alunos e que parcialmente tinham sido analisadas em profundidade durante as sessões de formação.

A este suporte juntou-se um terceiro aspeto que conseguimos concretizar e que diz respeito à criação de uma forte componente colaborativa, interformandos e entre formandos e formadoras. Deliberadamente, na seleção dos formandos para a formação foi dada prioridade à possibilidade de ter vários da mesma escola e ciclo de ensino, de modo a facilitar a operacionalização de grupos que também pudessem funcionar no contexto do trabalho autónomo e na prática letiva. No entanto, a prática ultrapassou as nossas expetativas iniciais uma vez que a grande maioria dos formandos se conseguiu organizar de modo que, pelo menos numa das suas aulas de *Levar à prática*, pudessem contar com a observação/colaboração de um outro colega da formação. A colaboração também nos envolveu, uma vez que assistimos a pelo menos uma aula de cada formando.

Salientamos que a dinâmica de colaboração que se gerou no âmbito da oficina de formação é referida em vários dos capítulos seguintes e tanto na avaliação final da oficina como nas entrevistas finais realizadas a quatro formandas foi unanimemente sublinhada.

3.1. As tarefas exploradas com os alunos

Na prática, todas as tarefas propostas na formação, exceto uma, foram escolhidas no *Levar à prática*. A tarefa *Chupa-chupas* foi uma das mais escolhidas no L*evar à prática I* e a tarefa *O V mágico* no *Levar à prática II* (Figuras 4 e 5, respetivamente).

Podemos dizer que muitos professores/formandos gostaram de poder explorar uma tarefa que não conheciam e em que o conhecimento que iam adquirindo na formação e o facto de saber que podiam contar com o nosso apoio lhes deu a segurança necessária para se aventurar a trabalhar com uma tarefa nova para eles.

Figura 4

Enunciado da tarefa "Chupa-chupas"

Tarefa Chupa-chupas[2]

André e Rute receberam um saco de chupa-chupas. Partilharam os chupa-chupas entre si e sobrou 1. Tinham acabado de fazer esta partilha quando chegaram os seus amigos, Ana, Rui e António que também queriam chupa-chupas. Decidiram então partilhá-los novamente e sobraram 2 chupa-chupas. Quantos chupa-chupas podiam estar no saco? Explica como pensaste e justifica a tua resposta.

Figura 5

Enunciado da tarefa "O V mágico"

Tarefa O V Mágico[3]

Os dois V seguintes são formados pelos números de 1 a 5.

O segundo V é mágico porque as somas dos dois "braços" do V são iguais ou seja: 4+2+3=5+1+3

1. Usa os cartões que tens (cartões circulares e numerados de 1 a 5) para formar outros V e regista-os na tua folha de papel.
2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?
3. O André diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar. Concordas com o André? Porquê?

Além disso, estas tarefas incidiam em relações numéricas cuja exploração se relaciona facilmente com conhecimentos matemáticos incluídos nos 3.º, 4.º, 5.º e 6.º anos. Também, globalmente, os professores tenderam a considerar que os seus alunos conseguiriam explorá-las com o algum nível de autonomia e profundidade. No entanto, por motivos diversos, vários formandos optaram por usar tarefas que já tinham explorado anteriormente.

Neste livro as autoras dos vários capítulos concretizam as suas escolhas, avançando diferentes justificações. Globalmente, todas justificam a seleção pela preocupação em escolher uma tarefa que, simultaneamente, potenciasse o

[2] Tarefa adaptada da tarefa "Lots of Lollies", disponível em: https://nrich.maths.org/2360
[3] Tarefa adaptada de https://nrich.maths.org/6274

desenvolvimento do raciocínio matemático e que também estivesse relacionada com o tema matemático que estavam a trabalhar. Para além destes aspetos surgem ainda como preocupações: (i) a articulação das aprendizagens (*Tive a preocupação de relacionar a atividade com o prosseguimento da planificação das aprendizagens essenciais a desenvolver*, Stela), (ii) incidir em aspetos em que tradicionalmente os alunos têm dificuldades (*A nossa experiência tem-nos indicado que estes são aspetos em que muitos alunos têm alguma dificuldade e em que importa explicitamente trabalhar*, Gisélia e Teresa) e (iii) a adequação do grau de desafio (*a seleção desta tarefa justificou-se pelo grau de desafio que se considerou adequado para os alunos da turma,* Célia*; coloca um desafio aceitável que leva os alunos a envolverem-se na sua exploração e permite que desenvolvam a sua autonomia, autoconfiança e o espírito de colaboração*, Teresa Ramos).

3.2. A planificação das aulas

Na avaliação final da oficina e nas entrevistas, os formandos destacaram a importância de a formação ter valorizado a elaboração de uma planificação detalhada, reconhecendo que a promoção do raciocínio matemático e a condução de uma aula que seguiu uma abordagem de ensino exploratório (Ponte et al., 2020) tornaram essencial a elaboração de um plano de aula detalhado:

> *A planificação de uma tarefa que pretenda desenvolver nos alunos o raciocínio matemático tem, necessariamente, de prever os momentos em que é propício mobilizar os alunos para formularem conjeturas, as testarem e as justificarem e também os momentos propícios para a formulação de generalizações (...) a exploração da tarefa em sala de aula foi ancorada por uma planificação que contemplava todos os momentos da aula e a forma como os mesmos podiam ser conduzidos pela professora, antecipando também possíveis resoluções e dificuldades dos alunos e formas de reação da professora.* (Célia)

> *(...) considerámos fundamental o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos (...) Por isso, durante a planificação, focámos a nossa atenção na previsão das estratégias que os alunos poderiam usar, nas dificuldades que poderiam revelar em cada uma das questões que lhes foram colocadas, bem como em possíveis formas/ações para as ultrapassar.* (Ana)

A ideia de que o plano de aula, embora detalhado, deve ser flexível foi igualmente referida. Por exemplo, Gisélia e Teresa M., no capítulo 2, indicam que:

> *Tendo presente que qualquer plano de aula tem de ser flexível e estar aberto às surpresas que ocorrem nestes contextos educativos tão ricos, povoados por alunos tão diferentes, procurámos delinear um caminho orientador que permitisse o controlo de alguns aspetos fundamentais no desenvolvimento do trabalho.* (Gisélia e Teresa M.)

Também no texto de Teresa R., no capítulo 6, o subtítulo de uma das secções "A planificação – cuidados a ter para não "matar" a tarefa", de alguma forma, salienta a necessária previsão de uma planificação flexível.

O modo variado como as planificações das várias professoras foram organizadas por escrito foi brevemente analisado nas sessões de apresentação do Levar à prática, proporcionando alguma reflexão sobre diferentes formas de operacionalizar uma planificação. Referimos aqui dois exemplos de planificação operacionalizados de uma forma que nos parece bastante interessante e menos habitual (Figuras 6, 7 e 8).

A articulação teoria/prática esteve presente em várias planificações dos formandos. A figura 6 evidencia partes de uma das planificações da tarefa Chupa-chupas que ilustram bem a preocupação de justificar com os textos teóricos analisados na formação (neste caso, Ponte et al. (2020), em versão draft), as opções concretas que eram tomadas para a ação na sala de aula.

Figura 6

Exemplo de uma parte de uma planificação de Gisélia e Teresa M

- Apresentação da tarefa (5 minutos)
  - O professor apresenta a tarefa de forma global informando sobre a forma como será organizado trabalho na aula e distribui os enunciados;
  - Cada aluno lê em silêncio o enunciado da tarefa e alguns serão convidados a explicar por palavras suas o contexto apresentado ("reconto da história")

No lançamento da tarefa

- *Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado;*
- *Assegurar que todos os alunos compreendem o contexto;*
- *Desenvolver uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa;*
- *Destacar processos de raciocínio que podem estar envolvidos na tarefa, como a generalização e a justificação;*
- *Promover o envolvimento dos alunos na realização da tarefa sem diminuir o seu grau de desafio. [2]*

Figura 7

Exemplo de uma outra parte da mesma planificação de Gisélia e Teresa M

Durante o trabalho autónomo

Acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio;

- *Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia;*
- *Para os alunos que rapidamente resolvem a tarefa, propor extensões, envolvendo a exploração de novas questões, possíveis generalizações ou a formulação de justificações alternativas. [2]*

Possíveis caminhos a seguir pelos alunos

- Os alunos usam esquemas/desenhos/tabelas cálculos para encontrar e testar soluções possíveis;
- Os alunos usam um número limitado de exemplos na resposta;
- Os alunos testam a primeira condição e a segunda (em simultâneo) e encontram valores possíveis (em número limitado – um ou alguns exemplos);
- Os alunos generalizam, mas não testam as suas generalizações;
- Os alunos generalizam de forma correta, justificando o seu raciocínio por escrito e/ou oralmente
- ...

Antecipar

Antes de mais, é importante que o professor antecipe diferentes processos de resolução da tarefa. Para tal, é necessário considerar como poderão os alunos interpreta-la matematicamente, identificar o conjunto de estratégias (correctas e incorrectas) que poderão usar e de que forma tudo isto se poderá relacionar com as ideias matemáticas que pretende que os alunos aprendam. Antecipar as resoluções dos alunos requer que o professor, previamente à aula em que vai apresentar a tarefa, a resolva de todas as maneiras que conseguir. Pode ser útil, também, consultar colegas, analisar resoluções de anos anteriores e consultar publicações com ela relacionadas. [1]

A figura 7 ilustra, igualmente, como na referida planificação se articulam práticas com um texto sobre a orquestração de discussões coletivas, disponibilizado no âmbito do Programa de Formação Contínua de Matemática (PFCM) da ESE/IPS (Equipa do PFCM, 2010).

Um outro formato de planificação, igualmente partilhado na formação, operacionaliza de modo claramente articulado as possíveis resoluções dos alunos e as suas possíveis dificuldades com as ações do professor (Figura 8).

Esta forma de planificar é muito específica, incidindo nas resoluções e dificuldades que podem surgir em cada pergunta e antecipando ações potencialmente adequadas para cada uma das hipóteses que se antecipam. Por isso, as ações do professor deixam de ter um caráter genérico que lhes permite ser aplicável a um grande número de situações e passam a ser formuladas concretizando nas ação as resoluções e dificuldades que se antecipam.

Figura 8

Exemplo de uma parte da planificação de Célia

Questão 2

Resoluções possíveis	Ações do Professor/ Questionamento	Dificuldades possíveis	Ações do Professor/ Questionamento
Faltam 10 pauzinhos. Precisam de 15 pauzinhos ao todo. 10 bolinhas de plasticina ao todo.	Como fizeste para saber o n.º de pauzinhos que faltam/que tem ao todo? E o n.º de bolinhas?	Não ler informação de que é um prisma e resolver como se fosse pirâmide: 5 pauzinhos, 10 pauzinhos ao todo, 6 bolinhas.	**Ação**: Pedir para voltar a ler o enunciado. Estavas a fazer como se fosse uma pirâmide?
		Dificuldade na contagem/ identificação dos elementos	**Ação**: Pedir para ir buscar um sólido igual à caixa.

Questão 3

Resoluções possíveis	Ações do Professor/ Questionamento	Dificuldades possíveis	Ações do Professor/ Questionamento
A base do prisma terá 10 arestas. Porque num prisma o número de arestas total é o triplo do número de arestas da base e 30:3=10.	Como sabes que tem 10 arestas? Porque dizes que no prisma o n.º de arestas total é o triplo dos da base? Como sabes?	Não saber o que responder.	Se tem 30 pauzinhos no total, o que significa isso? O que representam os pauzinhos?
Justificação incompleta ou inexistente.	Como sabes que são 10 arestas na base? O que falta escrever do que disseste? **Ação:** Incentivar para escrever/completar a justificação.	Confundir com pirâmide 2 dizer que a base tem 15 pauzinhos.	Porque dizes que são 15? O que fizeste? **Ação:** Pedir para voltar a ler o enunciado.

3.3. A concluir

Todos os dados recolhidos nas entrevistas finais realizadas a quatro formandas, nas reflexões escritas finais e nas apreciações partilhadas durante as sessões de formação, apontam no sentido de uma avaliação muito positiva da oficina de formação. A colaboração com outros formandos, a presença das formadoras na concretização de aulas integradas no "Levar à prática" e a qualidade dos materiais da formação são claramente destacados.

Os formandos também consideram que o número de sessões presenciais devia ter sido maior e referem o grande volume de trabalho que implicou participar nesta formação. Na entrevista final uma das formandas refere que, na apresentação da formação, durante a primeira sessão presencial, ao perceber melhor o que estava planeado para a oficina, pensou: "onde é que eu me fui meter!".

Foi igualmente destacado, explicitamente, o caráter bem distinto desta formação, que consideram ter implicações para a sua prática. Esta última apreciação leva-nos a sublinhar a importância de que a formação contínua de professores contemple uma forte ligação de exploração de tarefas em contexto de sala de aula, vertente fundamental para se poder interpretar/criticar a teoria e melhorar sustentadamente a prática.

4. REFERÊNCIAS

Battista, M. (2017). Mathematical reasoning and sense making. Em M. Battista, J. M. Bæk, K. Cramer, & M. Blanton (Eds.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 1-22). NCTM.

Equipa do PFCM. (2010). O*rquestrar discussões coletivas: cinco práticas essenciais.* http://projectos.ese.ips.pt/pfcm/wp-content/uploads/2010/12/texto-Orquest-disc-colectivas-2010-2011.pdf

Lin, F.-L., Yang, K.-L., Lee, K.-H., Tabach, M., & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 305–325). https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_13

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática, 156*, 7-11. APM.

Projeto REASON (2019). *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático nos alunos* (versão draft). http://reason.ie.ulisboa.pt/wp-content/uploads/2020/12/Princi%CC%81pios-para-design-de-tarefas_vDraft_15-dez-2020.pdf

Capítulo

2

COMPARAR PERÍMETROS

UMA EXPERIÊNCIA COM DUAS TURMAS DE 5.º ANO DE ESCOLARIDADE

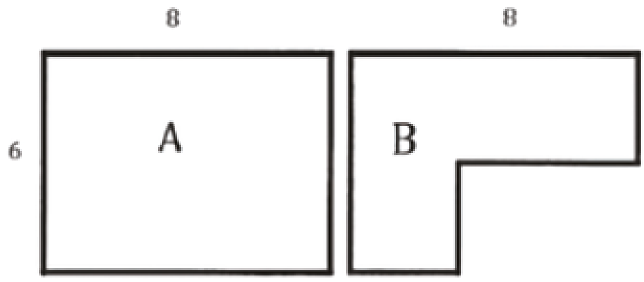
Gisélia Piteira
Maria Teresa Marques
Agrupamento de Escolas de Azeitão

1. INTRODUÇÃO – ESCOLHER A TAREFA

No âmbito da Ação de formação "Promover o raciocínio matemático dos alunos do primeiro e segundo ciclos do ensino básico", Levar à prática II, fomos desafiadas a planear e explorar em duas turmas de 5.º ano a tarefa "Comparar perímetros" (Figura 1).

Figura 1

Tarefa Comparar perímetros[1].



1. Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?
2. Desenha duas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B. (Podes usar papel quadriculado)
3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê.

Já trabalhamos juntas há bastante tempo e a partilha de ideias e estratégias é comum na nossa prática, o que foi fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

Depois de analisarmos a tarefa vimos que a sua exploração permite recorrer a uma diversidade de estratégias de resolução e chegar a conclusões com diferentes níveis de generalização. De facto, esta permite consolidar a ideia de que um problema pode ter mais do que uma solução, ou mesmo um número infinito de soluções, levando os alunos a compreender que a partilha de ideias e estratégias torna os processos de procura de soluções mais eficazes. Permite, ainda, a reflexão comparada sobre o tipo de raciocínios desenvolvidos para chegar às soluções e melhoria da qualidade das aprendizagens.

É uma tarefa aberta à criatividade dos alunos na utilização de materiais físicos de apoio preexistentes, se necessário, ou, preferencialmente, à criação

[1]Adaptado de Battista, M. (2017). Mathematical reasoning and sense making. Em M. Battista, J. M. Bæk, K. Cramer, & M. Blanton (Eds.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 1-22). NCTM.

de modelos/caminhos próprios facilitadores da resolução dos problemas propostos. Nesses processos abertos de construção de diferentes caminhos, as questões propostas nesta tarefa promovem desde a possibilidade de recurso a diferentes representações iniciais (ativas e icónicas) até à formalização do pensamento com recurso a representações simbólicas (linguagem natural, oral e escrita, ou utilização de símbolos matemáticos).

Analisando mais em detalhe percebemos que as questões propostas nesta tarefa apelam à necessidade de apresentar justificações para as respostas dadas (Questão 1), permitem criar modelos para a procura de respostas de forma mais sistematizada e esboçar conjeturas que correspondam às condições (Questão 2). Possibilitam, também, a ampliação/generalização de modelos, prevendo a existência de um número infinito de respostas, justificando/fundamentando essas afirmações e refletindo sobre os processos de raciocínio utilizados (Questão 3).

Ao entusiasmo que nos gerou perceber a potencial riqueza da tarefa, aliou-se ainda o facto de ela incidir no tema Geometria e Medida, focando a distinção entre perímetro e área e a noção de que o facto de as figuras serem isoperimétricas não significa que tenham a mesma área. A nossa experiência tem-nos indicado que estes são aspetos em que muitos alunos têm alguma dificuldade e em que importa explicitamente trabalhar. Para o fazer, costumamos recorrer à exploração de uma tarefa de que gostamos muito – *Uma casa para o Faísca* e que consiste em descobrir qual o retângulo com um dado perímetro cuja área é máxima. Trata-se de uma tarefa menos aberta, com bastante potencial e do agrado dos alunos, mas aproveitando o facto de estarmos numa formação, com vontade de experimentar outros desafios, decidimos investir na planificação e exploração com os alunos de uma tarefa que nunca tínhamos usado.

Por fim, e não menos importante, o facto da tarefa conter em si o potencial para ser explorada em diferentes níveis de complexidade foi decisivo, já que as duas turmas em que esta foi explorada apresentavam perfis distintos e experiências diferentes de adesão às atividades propostas pelas professoras em sala de aula.

Identificada a pertinência curricular da tarefa no contexto do trabalho em desenvolvimento nas turmas, procurámos fazer o enquadramento curricular e a previsão de todos os conteúdos passíveis de exploração com a sua exploração (tabela 1), tendo em conta os documentos programáticos em vigor.

Tabela 1

Enquadramento curricular da tarefa "Comparar perímetros"

TEMA	APRENDIZAGENS ESSENCIAIS	CAPACIDADES TRANSVERSAIS
Geometria e medida	Compreender o conceito de perímetro de uma figura. Distinguir perímetro de área. Compreender o conceito de figuras isoperimétricas. Reconhecer propriedades de polígonos.	Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas em contextos matemáticos e não matemáticos; compreender que um problema pode ter mais do que uma solução ou, até, infinitas soluções, podendo a solução ser generalizada. Desenvolver a capacidade de abstração e de generalização; de compreender e construir explicações, justificações matemáticas e raciocínios lógicos, incluindo o recurso a exemplos e contræxemplos. Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas e justificar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios dos diferentes temas matemáticos trabalhados (convenções, notações, terminologia e simbologia).

2. DA IDEIA À AÇÃO – PLANIFICAR

Tendo presente que qualquer plano de aula tem de ser flexível e estar aberto às surpresas que ocorrem nestes contextos educativos tão ricos, povoados por alunos tão diferentes, procurámos delinear um caminho orientador que permitisse o controlo de alguns aspetos fundamentais no desenvolvimento do trabalho.

Da gestão do tempo, ao inventário dos materiais/recursos necessários, passando pela previsão de caminhos e dificuldades dos alunos, tendo em conta o perfil das turmas e as suas experiências prévias, elaborámos um guião para a ação que nos permitisse garantir a segurança e amparo de uma linha de ação e, simultaneamente, a liberdade e abertura ao inesperado, garantida pela resolução das questões mais práticas do desenvolvimento da tarefa (tabela 2).

É fundamental que o professor antecipe diferentes processos de resolução da tarefa, considerando como poderão os alunos interpretá-la matematicamente. Deverá identificar o conjunto de estratégias corretas e incorretas que poderão vir a ser usadas e de que forma se poderão relacionar com as ideias matemáticas que pretende que os alunos desenvolvam.

No processo de planificar procurámos imaginar e antecipar as aulas, tendo em conta o conhecimento dos alunos das nossas turmas (com um perfil distinto), desenvolvendo diferentes cenários possíveis e formas de os resolver. Procurámos, também, preparar os recursos necessários ao desenvolvimento da tarefa, garantindo que estivessem reunidas todas as condições para o sucesso da sua exploração.

Tabela 2

Planificação da tarefa "Comparar perímetros"

<table>
<tr><td>ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO</td><td>Lançamento da tarefa (5 minutos)
O professor apresenta a tarefa de forma global informando sobre a forma como será organizado o trabalho na aula (trabalho a pares, ou em pequenos grupos) e distribui os enunciados.
Cada aluno lê, em silêncio, o enunciado da tarefa e alguns são convidados a explicar por palavras suas o contexto apresentado ("reconto da história"). O professor pode aproveitar para perguntar (sem apresentação de cálculos) o que lhes parece que vai acontecer: qual das figuras terá maior perímetro, ou se terão o mesmo, sem aprofundar, convidando os alunos a resolver a tarefa.
Assim, através do desenvolvimento de uma linguagem comum para descrever os aspetos essenciais da tarefa, assegura-se que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado e o contexto daquela. Por outro lado, promove-se o envolvimento dos alunos na realização da tarefa sem diminuir o seu grau de desafio.
Desenvolvimento da tarefa
Os alunos devem primeiro envolver-se ativamente na tarefa, experimentando e analisando várias possibilidades (5/10 minutos). Num primeiro momento, o professor deve circular pela sala de aula, prestando muita atenção ao que os alunos fazem e dizem. O seu apoio consistirá, sobretudo, em encorajar a exploração e não o de avançar sugestões concretas. Deve colocar questões que permitam tornar visível os raciocínios e ajudem a clarificar o seu pensamento. Poderá sugerir a criação de materiais de apoio que ajudem a pensar nos caminhos para a resolução e utilização da folha quadriculada, que deve ser dada aos alunos quando solicitada.</td></tr>
</table>

ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	Quando a grande maioria dos alunos tiver avançado com possíveis soluções e respetivas justificações (Questões 1 e 2 – cerca de 15 minutos), o professor pode desafiá-los a avançar na sua exploração, propondo a resolução da Questão 3. Se existirem grupos com maior dificuldade em progredir, o professor pode desafiá-los a avançar na sua exploração clarificando conceitos e sugerindo uma estratégia inicial que permita desbloquear a resolução da tarefa (folha de papel quadriculado, ou outro material). Assim, o professor vai orientando o trabalho dos alunos em função das estratégias ensaiadas por eles e das dificuldades detetadas nessas abordagens, aproveitando o trabalho já desenvolvido. Se o professor verificar que a maioria dos alunos ainda tem dificuldades em resolver a Questão 3, pode optar por utilizar respostas hipotéticas (previamente preparadas), ou comparar as respostas diferentes dadas pelos vários pares à Questão 2.
POSSÍVEIS CAMINHOS A SEGUIR PELOS ALUNOS	Os alunos usam esquemas/desenhos sobre a folha do enunciado sem recurso à folha quadriculada (correspondências, transporte de linhas...), sem recurso a medições ou contagens. Os alunos usam esquemas/desenhos/cálculos para encontrar e testar soluções possíveis, sobre a folha quadriculada, recorrendo a contagem/medição. Os alunos constrœm materiais de apoio à resolução do problema ou usam objetos pessoais, aproveitando as suas dimensões. Os alunos verificam de forma alternativa a resposta de um colega de grupo. Os alunos constrœm as soluções por tentativa e erro. Os alunos relacionam entre si elementos de cada figura e entre as duas figuras. Os alunos generalizam, mas não testam a generalização. Os alunos generalizam de forma correta, justificando o seu raciocínio de forma ativa com materiais de apoio, por escrito e/ou oralmente.
DIFICULDADES PREVISTAS	É igualmente importante que o professor antecipe as possíveis dificuldades dos alunos nos processos de resolução da tarefa, para que os possa ajudar a ultrapassar essas dificuldades. São exemplos de dificuldades previstas as seguintes: Dificuldade no trabalho a pares/grupo ao nível da partilha e fundamentação de ideias. Esquecimento do conceito de perímetro. Os alunos considerarem que sendo o número de lados maior na segunda figura, o valor do seu perímetro é maior. Os alunos usarem de forma incorreta a folha quadriculada na procura de soluções. Os alunos construírem as soluções por tentativa e erro sem encontrar padrões no processo de resolução que os libertem da folha quadriculada.

DIFICULDADES PREVISTAS	Os alunos contarem quadrados inteiros e não os lados da quadrícula. Os alunos desenharem figuras que não têm seis lados (na questão dois) ou figuras com seis lados mas que não apresentam o mesmo perímetro. Os alunos apresentarem resultados sem indicar justificações. Os alunos considerarem que um exemplo ou número reduzido prova que podem existir muitos mais. Os alunos considerarem que o facto de duas figuras terem o mesmo número de lados significa que têm o mesmo perímetro.
DIFICULDADES PREVISTAS	Prevendo estas dificuldades, o professor pode antecipar questões que fará para os ajudar, nomeadamente: - *O que é o perímetro de uma figura?* - *Em que é que o perímetro difere da área?* - *Como encontraste esta resposta?* - *Como podes verificar esta resposta?* - *O que queres dizer com... ?* - *Podes provar que...?* - *Concordas com... ?* - *Dá um exemplo onde "tal" não se verifique...* - *Explica o teu desenho...* - *Por que razão fizeste isto?* - *Como é que sabes que...?* - *O que descobriste?...*
RECURSOS	Tarefa (uma por aluno). Folhas quadriculadas (por grupo). Material diverso disponível para utilização, mas que não é inicialmente apresentado aos alunos: fio, cartolina, papel.

3. NO CENTRO DA AÇÃO – O QUE ACONTECEU?

3.1. Lançamento da tarefa

Chegou o dia de passar à ação em ambas as turmas. O lançamento de uma tarefa é uma fase fundamental do trabalho e pode condicionar todo o seu desenvolvimento.

Sendo professoras diferentes e com turmas diferentes, nunca o fazemos exatamente da mesma forma e, frequentemente, em experiências de exploração de outras tarefas (em que estivemos presentes nas aulas uma da outra), o lançamento da tarefa numa turma gera reflexão e alterações no lançamento da tarefa noutra. Aprende-se na ação e com a ação e essa tem sido uma mais valia no desenvolvimento das nossas competências profissionais.

A primeira a explorar a tarefa com os alunos foi a Gisélia, que seguiu de perto a planificação que tínhamos elaborado. Depois de dar tempo aos alunos para ler individualmente o enunciado, procura garantir que todos compreendem a tarefa. Para isso pede que alguns alunos expliquem por palavras suas o que perceberam. No excerto seguinte pode ver-se como um aluno da turma é apoiado pela Gisélia (PG) a evoluir de uma descrição do contexto proposto para a formulação concreta do que é pedido na última pergunta.

A1 – Está aqui a dizer que existem muitas figuras com 6 lados e o mesmo perímetro que B.
PG – Essa última pergunta é para fazer o quê? É para pensar?
A1 – Não, está aqui a dizer que a Maria diz que há muitas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro que B.
PG – Então vocês vão ver se é verdade ou não, não é?
A1 – Sim. E aqui está a dizer para fazer contas e explicar porquê.

A esta fase dedicada à promoção da compreensão do que estava envolvido na tarefa, segue-se, tal como previsto na planificação, uma outra em que Gisélia faz apelo à perceção global das figuras A e B para comparar o seu perímetro:

PG – Muito bem. E assim olhando, sem medir, para as figuras A e B parece-vos que têm o mesmo perímetro ou que há uma figura maior do que outra?
A2 – Para mim, a figura B parece ser maior, ter maior comprimento, porque (gesticula com os dedos e braços) faz assim e assim e depois faz uma curva e a outra não faz curvas.
PG – Mais alguma opinião?
A3 – Parece ser a A.
PG - Para o Aluno 3 parece ser a A porque a outra (figura B) está cortada. Portanto a A parece ter maior perímetro. Agora o Aluno A4.
A4 – Se isto (aponta para a figura) não estivesse cortado, eu acho que eram iguais por isso acho que são iguais.
PG – Pensas que são iguais, porquê? Pensa lá novamente, que eu não percebi.
A4 – Se a figura B não estivesse cortada era igual à A e como a B está cortada são iguais.
PG – Parecem-te iguais. Mais alguma opinião?
A1 – Eu acho que a A é maior porque como a B tem aquela parte cortada, fica com a medida dos lados mais pequena.

Em seguida, resume as posições dos alunos e pede que iniciem a resolução formal da tarefa:

PG – Pronto, então temos aqui três opiniões. Uns que acham que a A tem maior perímetro, outros que acham que a B tem maior perímetro e outros que acham que têm igual perímetro. Então vamos começar a resolver!

Na turma da Teresa (PT) a introdução da tarefa é semelhante. No entanto, tendo em conta a reflexão suscitada pela exploração da tarefa na turma da Gisélia, acentua a divisão do que é pedido em cada pergunta:

PT – Eu vou entregar uma tarefa a cada um e vocês têm uns minutos para ler. Depois vou fazer umas perguntas e pedir que vocês me expliquem a tarefa. Não é obrigatório usar materiais se vocês conseguirem pensar sem eles.

PT – O que é que pretendemos com este problema que está dividido em três tarefas?

A1 – Temos de comparar os perímetros da figura A e B e ver se são iguais ou diferentes.

PT – E o que é que pede a seguir?

A2 – Desenhar figuras que são iguais ao perímetro da figura B e podemos usar papel quadriculado.

PT – Desenhar?

A2 – Duas figuras com 6 lados.

PT – E que tenham?

A2 – O mesmo perímetro que a figura B. (...)

PT – Sem utilizar estratégias, há alguém que me diga, a olho nu, sem pensar e resolver, o que é que vos parece?

A3 – A figura B é mais pequena do que a A.

PT – Porquê?

A3 – Porque falta aquele bocado.

PT – Mais opiniões?

A4 – Acho que as figuras são iguais.

PT – Quem é que acha que a A tem menor comprimento do que a B?

A5 – Eu acho que a figura A é mais pequena que a B porque a B é maior. Se esticarmos todas as linhas da A eu acho que a B fica maior.

A6 – Eu acho que são as duas iguais.

PT – Podem começar a tarefa!

Tal como previsto, tanto numa turma como noutra, distribuímos folhas quadriculadas. No entanto, o modo como foi referida a possibilidade de usar fios e cartolina para comparar os perímetros das figuras A e B, foi alterado. Embora já tivéssemos antecipado na planificação que este material não seria distribuído a todos os alunos e que só se iria referir a possibilidade de o usar, se necessário, verificámos que ele não se revelou de muita utilidade aos poucos alunos que o usaram, porque despenderam muito tempo a contornar as figuras com os cordéis de modo conseguir determinar o perímetro o mais exatamente possível. Pode talvez dizer-se que o recurso acabou por limitar a possibilidade de pensar de outra forma, ou procurar caminhos diferentes para encontrar a resposta. Verificou-se que os alunos que não recorreram a estes materiais exploraram de forma criativa outras possibilidades e modos de olhar, pelo que na segunda aula (Teresa) a opção foi não mencionar (ou mostrar) quaisquer recursos especiais, deixando os alunos fazer a sua investigação livremente com os recursos disponíveis nas suas mesas, o que pode ter permitido maior diversidade de caminhos e trazido algumas vantagens na procura da resposta à questão 1. Trata-se de um aspeto importante para reflexão: quando é que a introdução de recursos em excesso se pode tornar um obstáculo ao pensamento dos alunos? No nosso caminho de experimentação compreendemos que, por vezes, menos é mais e que alguma contenção na apresentação de materiais auxiliares pode simplificar o processo, garantir maior espaço de manobra ao pensamento dos alunos, garantindo maior diversidade e criatividade de estratégias.

3.2. Caminhos seguidos pelos alunos

Lançada a tarefa, chegou o tempo de disfrutar das estratégias e pensamento dos alunos no processo de análise da situação proposta e resposta às questões.

A diversidade foi grande, mas existiram pontos comuns entre as duas turmas no caminho inicial feito de comparação dos perímetros (Questão 1). Alguns alunos desenharam esquemas/desenhos na folha do enunciado, sem recurso à folha quadriculada. Fizeram correspondências e transporte de linhas, sem medições ou contagens (Figuras 2, 3 e 4). O nosso papel foi importante para estimular nos alunos a descrição de processos de pensamento e de clarificação dos seus esquemas, como ilustramos nos episódios seguintes:

Figura 2

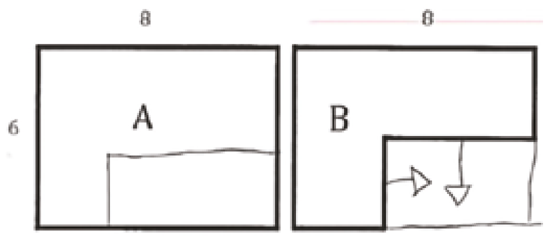


Figura 3

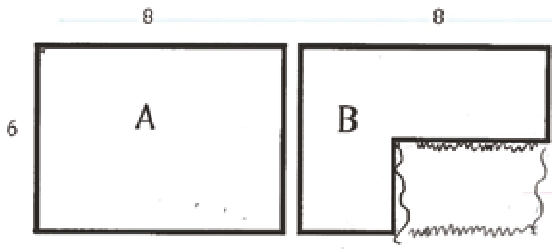


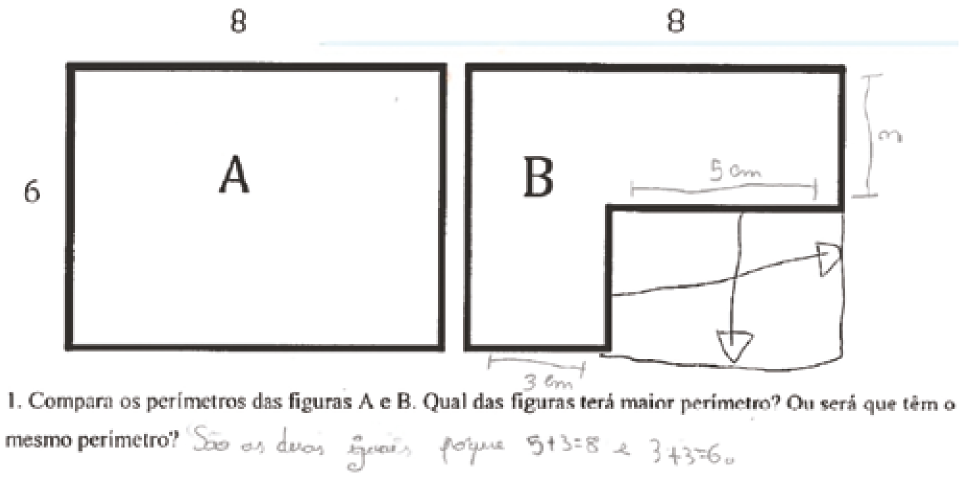
Figura 4

PG – Estou a ver aí umas setas, és capaz de me explicar?

A5 – É porque a reta superior da parte recortada de B se a descermos fica igual à parte de baixo de A e a reta lateral esquerda da parte recortada de B se a pusermos para a frente vai ficar igual a A, logo são iguais. Então têm o mesmo perímetro.

Outros alunos, embora tendo usado esquemas/desenhos sobre a folha do enunciado, recorreram a medições e a contagens para justificar os seus raciocínios.

Figura 5

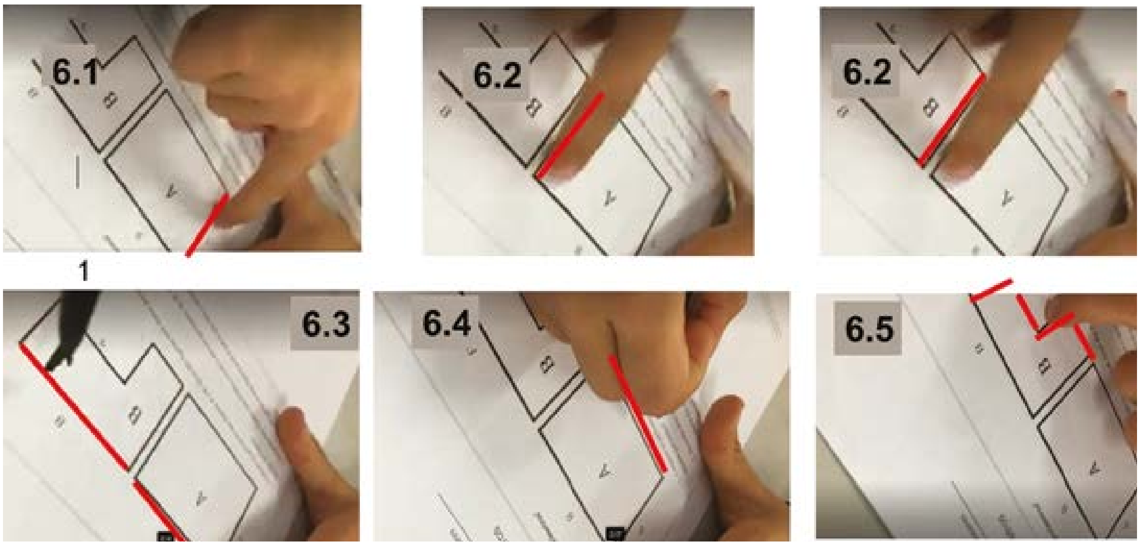


Alguns deles usaram setas (Figura 5) para indicar como se podia obter a figura A a partir da B, concluindo que o perímetro era igual uma vez que 5+3= 8 e 3+3= 6. A explicação oral apresentada por A7 (Figura 6) ilustra o modo como pensaram os alunos que, tal como os que apresentaram o registo da figura 5, recorrem à translação de dados da figura B para obter a A. Outros grupos relacionaram entre si elementos de cada figura e entre elementos das duas figuras.

PT – Como chegaste a essa conclusão?

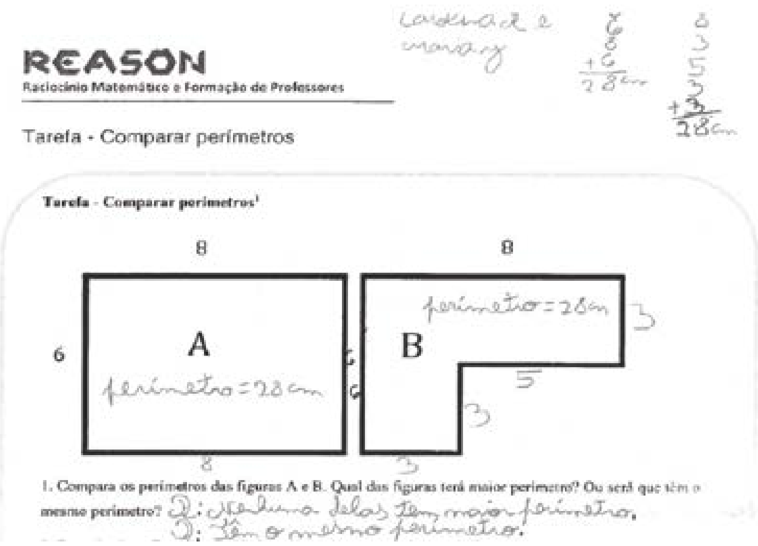
A7 – Este risco é igual a este... porque este é 6 (6.1) e este também tem de ser 6... e este também (6.2)... e depois este é 8 e este também é 8 (foi sempre apontando) (6.3) e depois este aqui também é 8 (6.4), mas se nós somarmos este com este e com este e com este (6.5) vai dar 8!

Figura 6



Vários alunos não suportaram a sua resolução numa translação de lados da figura B para obter A e optaram por propor medidas para todos os lados da figura B, concluindo desta forma que o perímetro era igual (Figura 7).

Figura 7

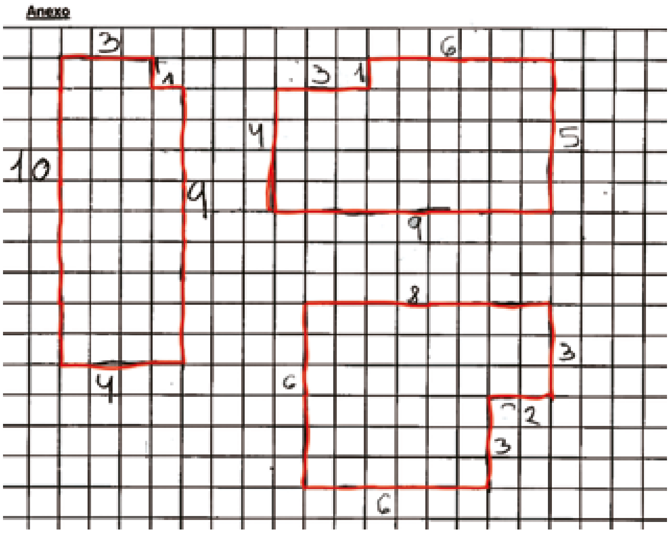


Alguns grupos construíram materiais de apoio à resolução do problema ou usaram objetos pessoais, aproveitando as suas dimensões. O cordel foi usado para ajudar a comparar as figuras, auxiliando na visualização de que a translação dos lados da figura B permitia chegar à figura A (Figura 8).

Figura 8

Na exploração da questão 2, os alunos usaram esquemas/desenhos/cálculos para encontrar e testar soluções possíveis, sobre a folha quadriculada, recorrendo a contagens e medições. Uns alunos partiram da figura A, retangular, e cortaram-lhe um vértice, de forma a ficarem com 6 lados, por semelhança à figura B (Figura 9).

Figura 9



PG – Explica lá o teu raciocínio.

A1 – Metemos 10 aqui (aponta para um lado) e 10 aqui (aponta) e não deu.

A2 – Porque era quadrado. Ia ficar com 4 lados.

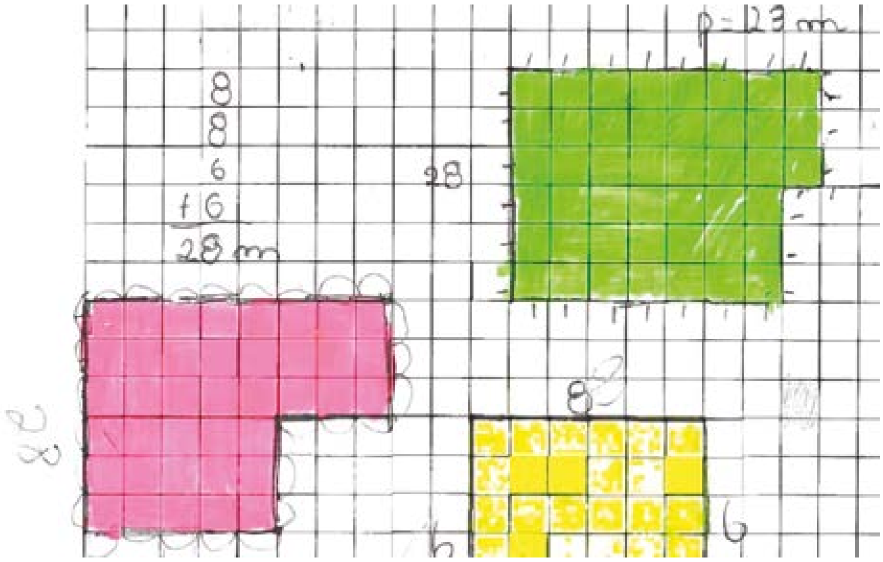
A1 – Então eu quis virar para aqui (aponta para um vértice do lado de 9 cm) e para aqui e consegui 6 lados e dar 28.

PG – E isso dá 28? Mostra-me lá.

A1 – 10 e (aponta para o 9), 19 com mais 1, 20. (Aponta para o 4) e 3, 27 e mais 1, 28.

Outros alunos partiram da figura B e dos valores apresentados para as medidas dos lados, testando outras hipóteses de parte recortada (Figura 10).

Figura 10

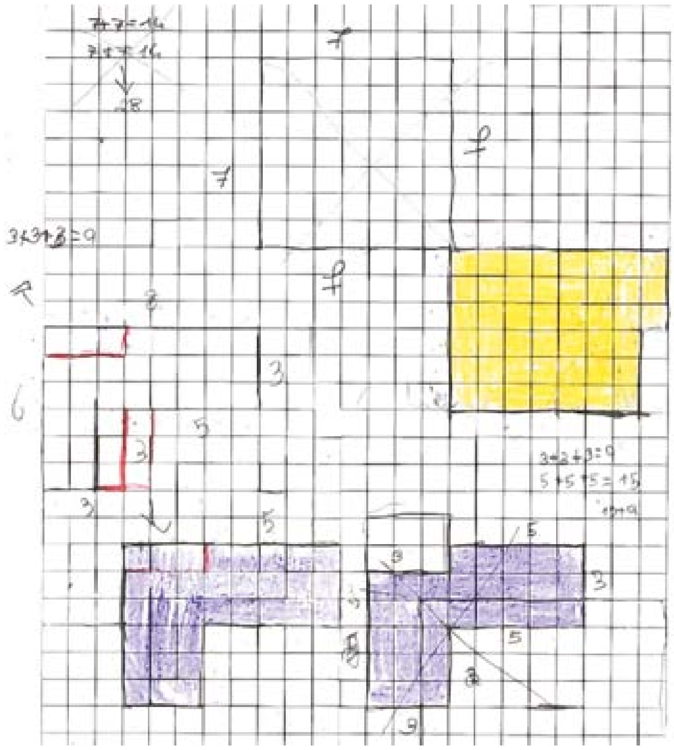


Alguns alunos construíram as soluções por tentativa e erro, desenhando figuras no papel quadriculado e verificando se o perímetro era o pretendido (Figuras 11 e 12). Em algumas situações usaram a diagonal do quadrado como lado no cálculo do perímetro dessas figuras, precisando da ajuda da professora para perceberem a incorreção.

> **PG** – Vocês fizeram algo diferente? Visto que a orientação era ter o oito e o seis, vocês passaram para o sete e para o cinco. Como fizeram isso? Como é que pensaram que podiam alterar os valores?
>
> **A1** e **A2** – Neste caso, pusemos o oito e fomos experimentando.
>
> **PG** – Ok, iam tentando.

Figura 11

Figura 12



Na resolução da questão 3, os alunos apresentaram diferentes estádios de justificação. Por exemplo, uns generalizaram, mas não testaram a generalização (Figura 13).

Figura 13

3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê. Sim, porque podemos criar muitas figuras com o perímetro de 28cm.

Outros alunos generalizaram de forma correta, justificando o seu raciocínio com materiais de apoio, por escrito e/ou oralmente (Figura 14).

Figura 14

3 Porque nós, na figura b, é só aumentar e diminuir 1 cm

Em alguns casos o processo de generalização ficou condicionado pelo material existente. Por exemplo, alguns alunos aproveitaram o papel quadriculado para desenhar figuras com 8 quadriculas de lado e depois experimentaram outras, aumentando ou diminuindo as quadriculas, não indo além do valor 8 (Figura 15).

Figura 15

PG – A primeira é a figura das tirinhas. E o que é que foram fazendo?

A4 e **A5** – Aumentando e diminuindo.

PG – E foram aumentando quanto? Da verde para a rosa quanto tem a mais?

A4 e **A5** – 1 cm.

PG – Andaram 1 cm para a frente e 1 cm para trás e isso vai dar o quê?

A4 e **A5** – Novas figuras.

PG – Com o quê de perímetro? Figuras com perímetros diferentes?

A4 e **A5** – Não. Com perímetros iguais.

PG – Eu estou a ver ali uma amarela que parece muito diferente.

A4 e **A5** – Essa nós fizemos naquela folha antes da explicação da professora.

PG – Então essa foi uma que vocês criaram antes de eu ter dado aquela sugestão. A última de todas também faz parte dessa estratégia de aumentar e diminuir?

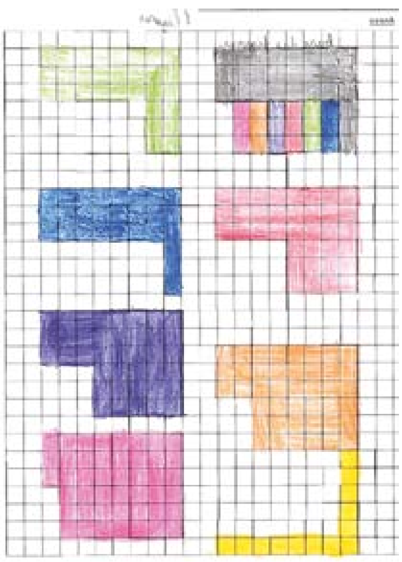
A4 e **A5** – Sim.

PG – Então vocês conseguiram quantas figuras diferentes?

A4 e **A5** – Sete figuras diferentes.

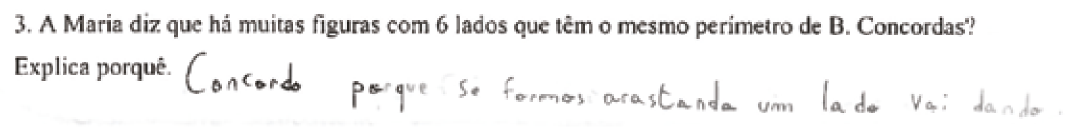
Durante a discussão coletiva de resultados, um grupo de alunos fundamentou a possibilidade de construir um número infinito de figuras, a partir de um padrão (Figura 16).

Figura 16



Outros alunos apresentaram um esboço de generalização, não explicando o seu processo de raciocínio (Figura 17).

Figura 17


3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas?
Explica porquê. Concordo porque se formos arastando um lado vai dando.

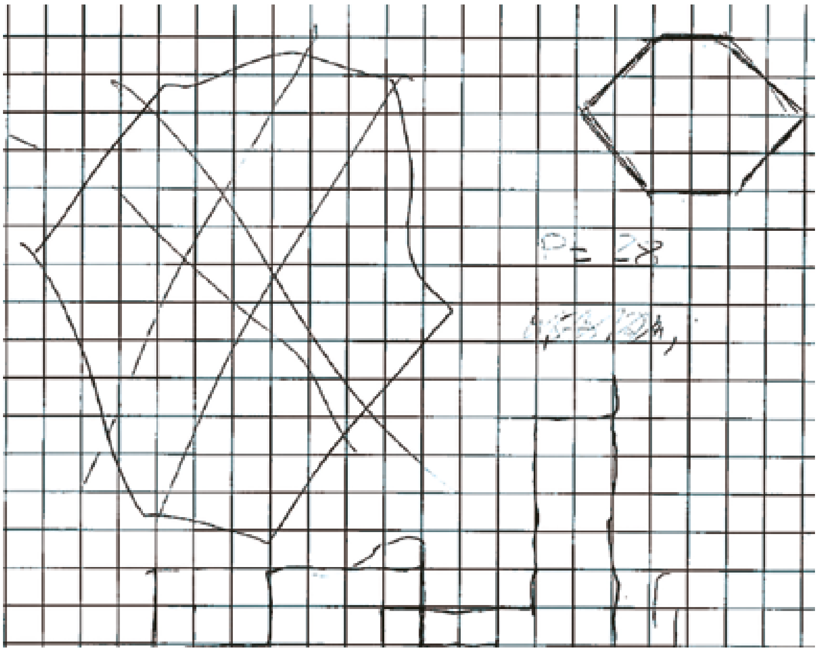
3.3. Dificuldades sentidas pelos alunos

Ao longo da aplicação da tarefa fomos estando atentas às dificuldades dos alunos, de forma a dar-lhes o feedback necessário para a continuarem. Algumas destas dificuldades tinham sido previstas por nós na planificação da tarefa, o que nos facilitou a aplicação de uma estratégia para ajudar os alunos.

As dificuldades que identificámos na aplicação da tarefa foram:

- considerar-se (numa primeira abordagem) que sendo o número de lados maior na figura B, o seu perímetro seria maior do que o da figura A;
- contabilizar-se quadrados em vez de lados da quadrícula, na medição do perímetro (confusão entre perímetro e área);
- não se atender às duas condições da questão 2 (ter 6 lados e o mesmo perímetro de B), o que fez com que fossem desenhadas figuras que não tinham seis lados ou figuras com seis lados mas que não apresentavam o mesmo perímetro de B;
- considerar-se que um número reduzido de exemplos (na questão 3) era prova que podiam existir muitos mais;
- utilizar-se de forma incorreta a folha quadriculada na procura de soluções, desenhando a diagonal da quadrícula como lado da figura de 6 lados (Figura 18);

Figura 18



- construir-se soluções por tentativa e erro sem encontrar padrões no processo de resolução que os libertasse da folha quadriculada (Figura 19).

A1 – Professora esta figura também dá!

PT – O que é que acabaram de me dizer? É que o ideal seria fazer...

A2 – Vários “L”s (aludindo à letra L... a forma das figuras seria sempre a mesma e experimentavam-se várias).

PT – Vários Ls... a figura L... parecida com esta... tinha algum potencial para poderem ter os seis lados com facilidade...

A1 e **A2** – Oh professora nós já fizemos duas! Fizemos esta (aponta para ela - 19.1) e esta aqui que ainda não está a vermelho (19.2). Tem seis lados mas ainda não contámos a ver se dá...

PT – Vejam lá se tem o perímetro... vejam lá... (contam em voz alta os lados das quadrículas apontando com o lápis para cada uma)

A1 – Tem 22... (percebem que não deu... silêncio)

PT – Têm de fazer aí um ajuste... qual é o perímetro que vocês estão à procura?

A1 e **A2** – Só se (várias vozes... começam a tentar tirar e acrescentar com o lápis (19.3)... percebe-se algum conflito e falta de acordo...)

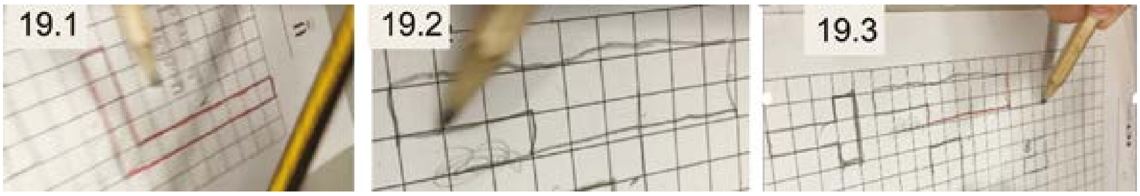
A2 – Eu tenho uma ideia! (continuam com o lápis a acrescentar de um lado, esquecendo o outro...)

A1 – E depois estes aqui...? E como é que fechas ali?

A2 – Hã? (continuam a tentar...)

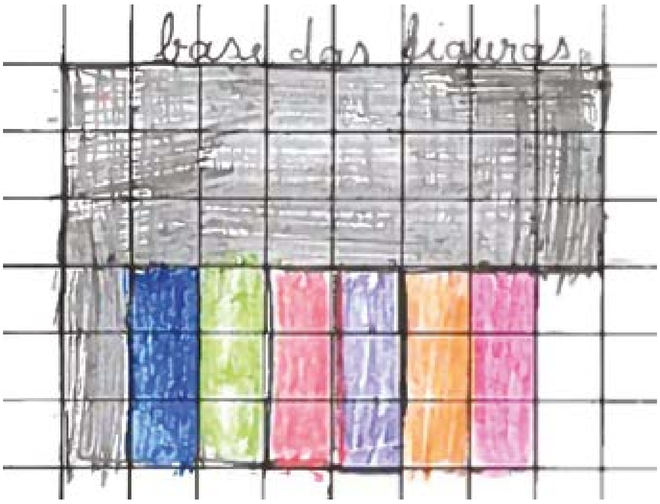
A1 – Não dá! (continuaram à procura sem estratégia e depois foram orientados no sentido de organizar melhor a procura, prestando atenção a alguns elementos das figuras).

Figura 19



No decorrer das aulas, perante as dificuldades que identificámos nas resoluções dos alunos, aplicámos algumas estratégias para os ajudar a superá-las, como as identificadas na tabela 2. Por exemplo, as duas professoras, para os alunos com dificuldades na resolução da Questão 2, sugeriram que os alunos alterassem as medidas do retângulo recortado, criando outras figuras (Figura 20).

Figura 20



3.4. Discussão coletiva das resoluções e sistematização dos resultados

A apresentação das estratégias de resolução foi feita de forma diferente nas duas turmas, devido às suas diferentes características. Na turma da professora Gisélia, a apresentação dos resultados foi feita por três grupos de alunos, procurando-se que de um para o outro fossem construídas pontes de raciocínio, em que uma solução acrescentasse algo à solução anterior. Por outro lado, na turma da professora Teresa (muito participativa e entusiasmada com o processo) todos os alunos quiseram partilhar as suas descobertas e a orquestração da apresentação e discussão em grande grupo não foi tão estruturada, embora tivesse sido rica. Assim, todos os alunos apresentaram os seus raciocínios e foram explorados alguns desacordos de forma a que se conseguisse, entre todos, a aproximação a uma generalização.

A1 - Eu acho que se fizeres assim, depois as figuras a certa altura deixam de ter 6 lados...
A2 - Mas eu deixava sempre uma fila de quadrados, portanto ficavam sempre seis lados...
A3 - Eu acho que não concordo que seja infinito...
A4 - Mas olha, se mudares meios quadrados, ou um quarto ou... E como os números são infinitos podes mudar coisas pequeninas mas fica na mesma com o mesmo perímetro....
A5 - Ahhh pois... Até uma migalhinha e já ficava diferente...

Ao longo das discussões coletivas, estas foram algumas das questões colocadas pelas duas professoras para que os alunos justificassem os seus raciocínios:

- Conseguem desenhar uma outra figura com o mesmo número de lados de A e com perímetro diferente?
- E só podemos mover filas de quadrados inteiros?
- Será que fazer mais do que uma figura de 6 lados e com o mesmo perímetro é suficiente para dizer que existem muitas figuras nessas condições?
- Como é que sabes que há muitas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B?
- O que queres dizer com procurar figuras com um lado 8, outro lado 6 e os restantes lados iguais a 14?
- Podes provar que a soma do comprimento de todos os lados das figuras construídas desta maneira é sempre 28?

4. REFLEXÃO FINAL SOBRE A TAREFA

4.1. Adesão à tarefa

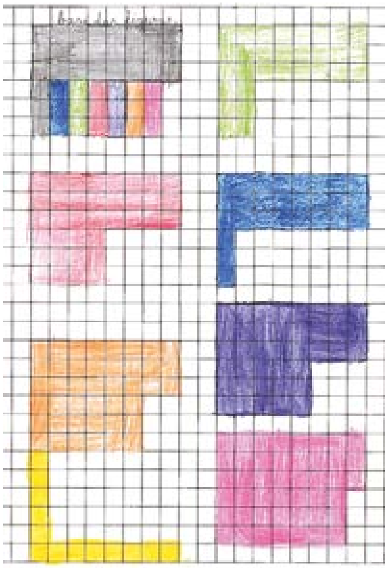
Em ambas as turmas os alunos aderiram bem à tarefa, envolvendo-se rapidamente na sua resolução, através da procura de respostas e desenvolvimento de estratégias de superação das dificuldades, com maior ou menor grau de complexidade. Para as turmas foi rápida a descoberta de que as figuras tinham o mesmo perímetro.

Verificou-se, contudo, que na turma da professora Teresa houve maior extensão do tempo de adesão sem desmotivação ou cansaço, em relação à turma da professora Gisélia, devido às características específicas das turmas, já conhecidas previamente pelas professoas, sendo previsível a diferença observada.

4.2. Aspetos que surpreenderam

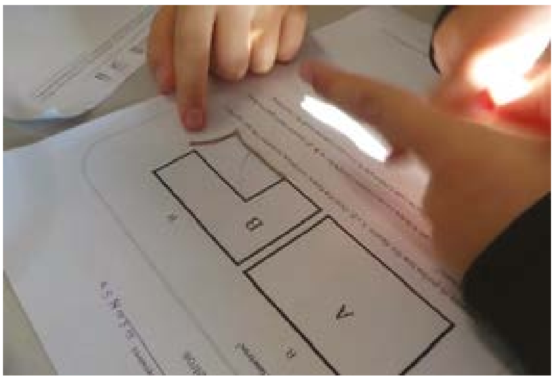
Numa das turmas um grupo apresentou a resposta a Questão 2 e Questão 3 utilizando cores para explicar a sua estratégia (Figura 21).

Figura 21



A utilização de fio como auxiliar na Questão 1, inicialmente deslocado de forma incorreta, acabou por ser um bom auxiliar na correção da resposta inicial (Figura 22).

Figura 22



4.3. Identificação de pontos fortes

Numa das turmas surgiu uma forma inesperada e sistematizada de construção de soluções para a Questão 2 que, na discussão geral, foi a base para um esboço de generalização (Questão 3), com a colaboração de alunos de outros grupos, e que encaminhou a argumentação no sentido de justificar a possibilidade de construção de um número infinito de figuras. Permitiu explorações com recurso a números racionais e trabalhar a ideia de infinitude do conjunto dos números naturais no denominador (Figuras 23 a 25).

Figura 23

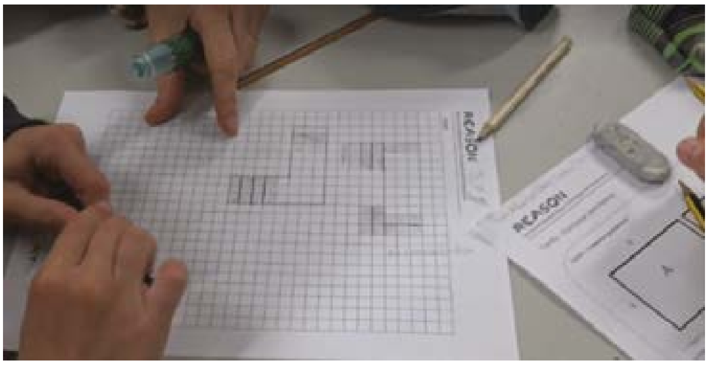
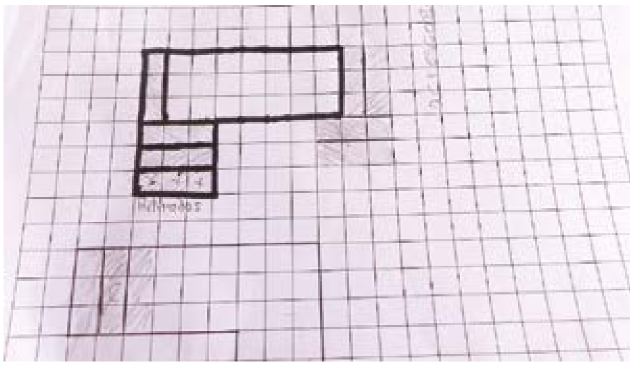


Figura 24



PT – Eu não percebo os contornos das figuras, expliquem-me lá.
A1 – A figura original está aqui. E dela nós íamos retirar daqui e acrescentar aqui.
PT – Eu preciso de ver as figuras isoladas, se não não percebo quantos lados tem cada uma.
(...)
A1 – Para construir outra figura podemos ir retirando dali e adicionando aqui. (Exemplificou no quadro - Figura 25)
A2 – É possível tirar 1/3, ¼ e por aí fora e o perímetro não altera.

Figura 25

PT – Ou seja, podemos tirar fatias de torta de um milímetro e até menos?

Alunos – Sim!

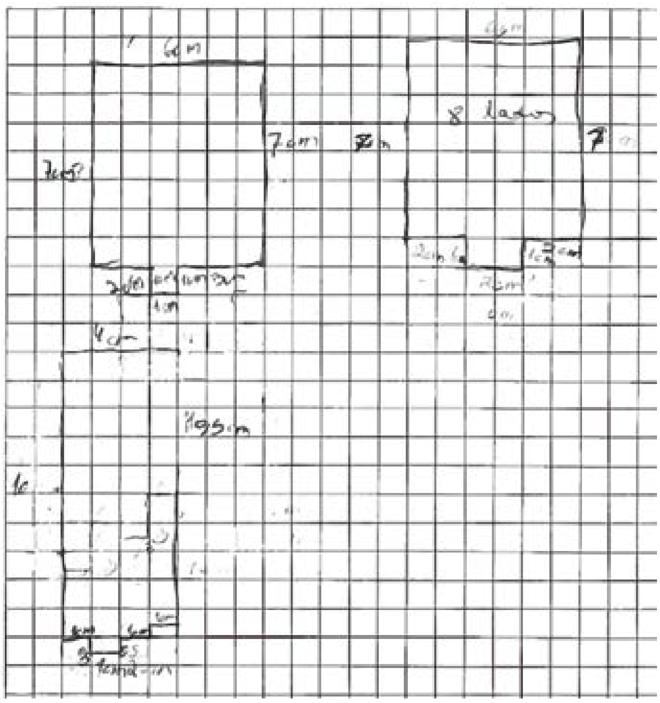
(...)

A3 – Se os números são infinitos por que é que as figuras não podem ser? Mesmo que se tire uma migalhinha vai ser sempre diferente, nunca vai ficar igual!

PT – Exatamente!

Dois alunos de uma das turmas, embora não chegando à generalização, mas com um trabalho consistente nas Questões 1 e 2, avançaram para um trabalho de extensão da tarefa - encontrar figuras com 8 lados e com o mesmo perímetro de B (Figura 26).

Figura 26



4.4. Aspetos a reformular em realizações futuras da tarefa

Atendendo a que há alunos que têm um processo de raciocínio mais rápido do que outros, ou que desmotivam rapidamente, há que contemplar extensões ao problema. Por exemplo: "usando papel quadriculado desenhar figuras com 8 e 10 lados e com o mesmo perímetro do que B". Esta extensão permite também trabalhar o conceito de perímetro e de figuras isoperimétricas.

Se surgirem conclusões semelhantes a uma das turmas, nomeadamente sobre a possibilidade de deslocar frações de quadrados na composição de novas figuras, o professor poderá trabalhar os números racionais, fazendo conexões com geometria.

4.5. Balanço final

Não nos ficaram dúvidas sobre o enorme potencial desta tarefa, a partir da qual se promoveram momentos ricos e interessantes de reflexão e descoberta com efeitos importantes sobre a capacidade de resolução de problemas, o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática. É uma tarefa aberta que permite aos alunos caminhos e estratégias diversas (à medida das suas experiências prévias e limitações) das mais simples às mais complexas, facilitando a integração de todos e a sua implicação e motivação na procura de soluções aos desafios. Permite, ainda, a exploração de conteúdos previstos nas aprendizagens essenciais para este ano de escolaridade (Geometria e Medida) e a conexão a conteúdos dos temas Números e Álgebra, o que lhe confere oportunidade e densidade pela possibilidade de integração de conteúdos e estabelecimento de fios condutores entre eles, base fundamental para a compreensão e consolidação de conhecimentos.

5. BIBLIOGRAFIA:

Battista, M. (2017). Mathematical reasoning and sense making. Em M. Battista, J. M. Bæk, K. Cramer, & M. Blanton (Eds.), *Reasoning and sense making in the mathematics classroom. Grades 3-5* (pp. 1-22). NCTM.

Capítulo

3

UMA EXPERIÊNCIA DE APRENDIZAGEM

HEXÁGONOS E MAIS HEXÁGONOS

Stela Batinas

Agrupamento de Escolas Augusto Louro

1. UMA EXPERIÊNCIA DE APRENDIZAGEM - "HEXÁGONOS E MAIS HEXÁGONOS"

Este texto surge como um testemunho e reflexão pessoal sobre a exploração de uma tarefa matemática, que associada a um contexto favorável ao desenvolvimento do raciocínio matemático, permitiu igualmente uma reflexão conjunta, no âmbito de uma formação contínua de professores. Assim, de acordo com a caracterização do contexto, efetuei a seleção, planificação e exploração da tarefa matemática, e consequente reflexão sobre os vários aspetos que envolveram a dinâmica em sala de aula. Essa reflexão e resultados surgem descritos neste texto, facilitando a compreensão de todo o processo que envolveu a definição de estratégias de ensino e de aprendizagem, numa perspetiva de aprendizagem conjunta.

No contexto da oficina de formação explorei várias tarefas, analisando-se as suas potencialidades no desenvolvimento do raciocínio matemático e a forma como estas deviam ser exploradas em sala de aula.

Numa primeira fase decorreu o que se designou por "Levar à prática I", com a primeira exploração de uma tarefa que permitiu identificar relações entre números e operações. Com a preocupação em criar um clima de descoberta de possibilidades de somas de um número par de números ímpares e a sua relação com o resultado, foi dada a possibilidade aos alunos de reconhecer relações numéricas, justificar raciocínios oralmente e por escrito e desenvolver a capacidade de efetuar generalizações. Numa segunda fase, no "Levar à prática II", efetuei os necessários ajustes a partir da reflexão da exploração da primeira tarefa, tendo sido selecionada uma outra tarefa. Este texto irá incidir sobre a exploração desta segunda tarefa.

Com a primeira exploração, numa perspetiva de supervisão colaborativa entre professores, participei numa reflexão conjunta e pude constatar que estas tarefas promovem uma motivação associada ao caráter exploratório e investigativo. Permitem ainda a aprendizagem colaborativa, favorecem a perceção de que há tarefas que podem não ter solução e que a explicitação de raciocínios é por vezes uma dificuldade para os alunos. Nesta altura, foi possível relacionar a exigência com o ritmo de trabalho e a gestão de tempo, seja o tempo de trabalho autónomo, como o tempo de discussão coletiva. No que respeita à gestão do tempo, no momento da planificação, a expectativa era desajustada face à realidade, pois o desenvolvimento da tarefa demorou mais tempo do que previsto. Este facto permitiu que tivesse uma maior preocupação na planificação da segunda exploração. Também pude constatar que efetuar o registo e sistematização progressiva das conclusões, não os deixando para o final da tarefa, favoreceu o ritmo adequado da aula, mantendo todos os alunos focados na validação das suas conjeturas de uma forma mais persistente.

Após esta primeira exploração, a seleção e planificação da segunda tarefa teve em consideração a gestão do tempo e a dinâmica da aula, que se mostrou eficaz no decorrer da primeira implementação.

A turma onde decorreu a exploração das tarefas era constituída por 21 alunos, de 6.º ano de escolaridade. Dado que era uma turma de continuidade pedagógica, sendo este o segundo ano letivo de trabalho conjunto, o conhecimento aprofundado dos alunos permitiu identificar necessidades e pontos fortes. Por um lado, era um grupo com muita necessidade de dinamismo em sala de aula, por ter tendência para dispersar. Por outro lado, com uma grande heterogeneidade, existiam alunos com uma considerável capacidade de raciocínio e de resolução de problemas e outros que apresentavam dificuldades ao nível do cálculo e da interpretação de enunciados. Cœxistiam assim variados ritmos de trabalho que era necessário gerir ao longo de todo o ano letivo, incentivando alguns alunos a prosseguirem autonomamente na melhoria da qualidade dos seus conhecimentos e capacidades e outros a ultrapassarem obstáculos que já não o eram para vários dos seus colegas de turma.

De acordo com o que referi, tendo em conta estas características, fazia parte da rotina da turma a realização de tarefas de trabalho autónomo, de forma a manter o elevado ritmo de trabalho que possuíam, bem como a sua organização em grupos de trabalho heterogéneos.

No "Levar à Prática II", optei por selecionar uma tarefa que potenciasse o desenvolvimento do raciocínio matemático, mas que também estivesse relacionada com as propriedades de figuras no plano, e com a relação entre os seus elementos. Tive a preocupação de relacionar a atividade com o prosseguimento da planificação das aprendizagens essenciais a desenvolver.

2. A TAREFA "HEXÁGONOS E MAIS HEXÁGONOS"

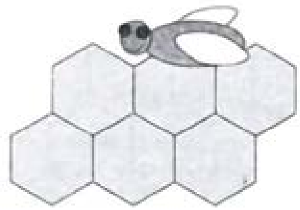
A segunda tarefa explorada, "Hexágonos e mais hexágonos", foi uma tarefa adaptada de uma publicação da Associação Professores de Matemática (APM) de 2000, I*nvestigações Matemáticas na sala de aula: Propostas de trabalho*, que constou do conjunto de tarefas selecionadas para o Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico (2009-2010) da ESE/IP Setúbal, cuja versão original se apresenta na figura 1.

Figura 1

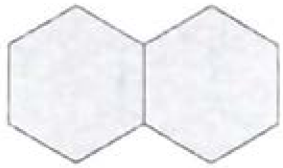
Versão original da tarefa Hexágonos e mais hexágonos

Hexágonos e mais hexágonos

Os favos das abelhas parecem hexágonos regulares unidos uns aos outros pelos seus lados. Unindo quatro hexágonos regulares...



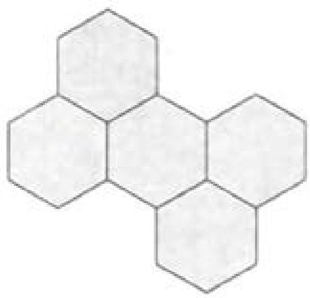
Se quisermos enfeitar a figura ao lado, formada por dois hexágonos regulares, contornando-a com uma fita bem juntinha aos seus lados, precisamos de uma fita com comprimento igual a 10 lados do hexágono.



1. Construir uma figura unindo quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados. Para enfeitar da mesma forma a figura construída, que tamanho deve ter a fita?
2. Investigar se existirão figuras, formadas por quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados, que possam ser enfeitadas por fitas com o mesmo tamanho (registar as figuras construídas na folha com malha hexagonal e comentar as descobertas)

Unindo cinco hexágonos regulares...

Ao lado está um exemplo de uma figura formada por cinco hexágonos regulares unidos pelos seus lados.



1. Desenhar outras figuras diferentes do exemplo apresentado formadas por cinco hexágonos regulares unidos pelos seus lados. Determinar o perímetro de cada figura, considerando para unidade de medida de comprimento o lado do hexágono.
2. Construir uma nova figura diferente das anteriores, mas também formada por cinco hexágonos regulares unidos pelos seus lados. Como determinar o perímetro desta figura sem contar os seus lados? Explicar o raciocínio feito (Sugestão: Observar com atenção as várias figuras desenhadas em 1 e o respetivo perímetro)

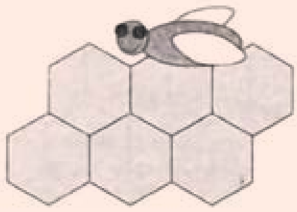
Partindo da tarefa original, criei um novo enunciado, com a exploração dividida em duas partes, como mostra a figura 2.

Figura 2

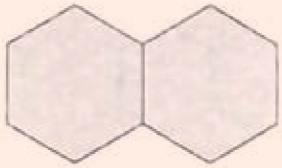
Tarefa Hexágonos e mais hexágonos proposta aos alunos

Hexágonos e mais hexágonos

Os favos das abelhas parecem hexágonos regulares unidos uns aos outros pelos seus lados.



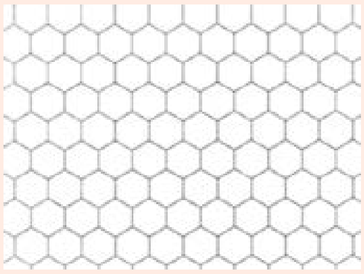
Se quisermos enfeitar a figura ao lado, formada por dois hexágonos regulares, contornando-a com uma fita bem juntinha aos seus lados, precisamos de uma fita com comprimento igual a 10 lados do hexágono (tal como identificado na figura).



Deste modo, poderemos dizer que o perímetro desta composição de figuras é 10, considerando como unidade de medida o lado do hexágono regular.
Então...

(Parte I)

1. Construam, na malha hexagonal, uma figura unindo quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados e identifiquem o seu perímetro?
2. Investiguem se existirão figuras diferentes, formadas por quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados, que possam ter o mesmo perímetro.



Registem as figuras e o respetivo perímetro.

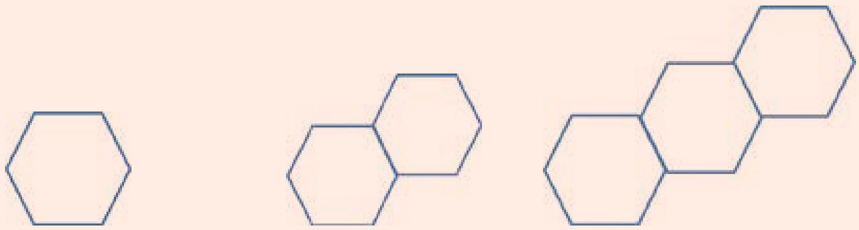
3. Observem os valores e as figuras construídas e retirem algumas conclusões.
4. Depois da investigação que efetuaram haverá uma forma de determinar o perímetro das figuras construídas, sem contar os seus lados?

Explicitem o raciocínio apresentando todas as representações e cálculos efetuados.

(Parte II)

A seguinte sequência de figuras compostas por hexágonos regulares, é construída mantendo-se uma regularidade quanto ao número de hexágonos de cada figura e quanto à posição em que se encontram colocados.

Assim, de acordo com as três imagens seguintes, responde às questões apresentadas.



1.ª figura 2.ª figura 3.ª figura

1. Desenha, na malha hexagonal, a 5.ª figura e a 10.ª figura.
2. Quantos hexágonos compõem a 20.ª figura?
3. Considerando como unidade de medida o lado do hexágono, qual o perímetro da 2.ª figura? E da 3.ª figura?
4. Qual o perímetro da 20.ª figura?
5. Como podemos calcular o perímetro de qualquer figura, nesta sequência?

Desta forma, como é possível identificar por comparação das duas tarefas, efetuei uma adaptação à tarefa original, criando etapas de concretização, que permitissem um percurso de aprendizagem que favorecesse igualmente a exploração e validação de conjeturas, mas que fosse mais claro para os alunos. Foi também efetuado um prolongamento da tarefa, como forma de se adequar aos objetivos de aprendizagem estabelecidos, de acordo com a planificação. De facto, a tarefa foi selecionada tendo como referência o facto de permitir a exploração e investigação de regularidades geométricas e, também, o facto de permitir um aprofundamento do tópico referente às sequências e regularidades.

Resumindo, adequei a tarefa ao grupo-turma e aos objetivos de aprendizagem estabelecidos, para aquele período de tempo e de acordo com os pré-requisitos existentes.

A seleção da tarefa teve ainda em consideração o facto de permitir a investigação e de, de acordo com a caracterização da turma, ser de nível de dificuldade adequado como forma de favorecer o desenvolvimento do raciocínio matemático, mantendo o nível de desafio.

2.1. A planificação: plano de aula

Apresenta-se em seguida o plano de aula criado, para a exploração da tarefa:

Tabela 1

Plano de implementação da tarefa

Objetivos de aprendizagem

Descreve figuras (no plano/espaço), com base nas suas propriedades e nas relações entre os seus elementos;

- Determinar a lei de formação de uma sequência não numérica;
- Usar expressões numéricas para representação de uma dada situação;
- Compreender e constrói explicações e justificações matemáticas com recurso a exemplos e contræxemplos;
- Justificar raciocínios, procedimentos e conclusões recorrendo a vocabulário e linguagem matemática.

Aspetos prévios: material e equipamento necessário; organização da sala

- Alunos em pequeno grupo, selecionados pela professora de forma a criar a necessária heterogeneidade;
- Cada aluno recebe o enunciado da tarefa - Parte I (que inclui a malha hexagonal) para que possa fazer os seus registos individuais;
- Na sala de aula estarão disponíveis modelos de polígonos em papel, para os grupos que necessitarem, podendo este material ser necessário para identificar a congruência de figuras;
- Ao longo da tarefa será essencial o acompanhamento por parte do professor para identificar dificuldades e colocar questões que podem influenciar a persistência dos alunos;
- No final da tarefa haverá uma discussão conjunta e partilha de conclusões;
- Seguidamente é entregue a tarefa - Parte II, permitindo a continuidade da tarefa, com o objetivo de identificar a lei de formação de uma sequência de imagens;
- Os grupos irão novamente partilhar conclusões e refletir sobre o trabalho desenvolvido nesta aula;
- Cada grupo faz a autoavaliação do trabalho de grupo e do desempenho individual num documento específico, utilizado de uma forma rotineira pelos alunos em sala de aula.

Sugestões para a apresentação da tarefa aos alunos

- A tarefa - Parte I será apresentada num documento que será entregue individualmente;
- Será dado um momento para que possam fazer uma leitura silenciosa;

- Pedir a 2 ou 3 alunos que expliquem por palavras suas a interpretação que fizeram do enunciado;
- Fazer a introdução da tarefa, partindo dos favos das abelhas, e questionar os alunos sobre o que é um hexágono.

Conhecimentos prévios: *Hexágono é uma figura plana fechada (ou polígono) formada por seis lados. Um hexágono é regular se os seus lados tiverem o mesmo comprimento e os seus ângulos a mesma amplitude, ou seja se tiver ângulos iguais e lados iguais.*

- Garantir que os alunos sabem o conceito de perímetro.

Conhecimentos prévios: *Perímetro de uma figura plana fechada é o comprimento da linha que delimita a figura (da sua fronteira).*

Nota*: Esta definição ajuda os alunos a verificarem que as linhas internas de uma figura não são utilizadas para o cálculo do perímetro.*

Na tarefa, propositadamente, não se refere a unidade do sistema métrico para os alunos perceberem que qualquer comprimento (neste caso o do lado do hexágono) pode ser considerado a unidade de medida e que medir é comparar com o comprimento escolhido para unidade.

- Pede-se aos alunos para construírem uma figura unindo quatro hexágonos regulares pelos seus lados. Para tal, os alunos devem utilizar a folha com a malha hexagonal que foi distribuída;
- Em seguida, utilizando a malha hexagonal, os alunos procuram descobrir diferentes formas de unir 4 hexágonos regulares pelos seus lados, sendo incentivados a descobrir todas as possibilidades. A professora vai verificando se as formas descobertas são diferentes (há apenas 7 formas diferentes que o professor tem sistematizado numa folha, que não deve ser dada aos alunos), Frequentemente as figuras parecem diferentes, mas rodando verifica-se que é a mesma. Os alunos poderão confirmar utilizando os hexágonos em papel;
- Sempre que os alunos descobrem uma figura nova devem registar ao lado o seu perímetro;
    - Em todas as figuras há 4 hexágonos regulares iguais, logo as figuras têm a mesma área e chamam-se figuras equivalentes, mas não são geometricamente iguais;
    - Quando o número de ligações é 3 obtém-se o maior perímetro que é 18. Estas figuras são diferentes, mas têm sempre o mesmo perímetro.
    - Quando o número de ligações é 4 o seu perímetro é 16;
    - O número de ligações é 5 e o seu perímetro é 14;
    - Conclui-se que quando aumenta o número de ligações entre os hexágonos diminui o perímetro e que cada ligação faz diminuir o perímetro em dois (os dois lados que se unem);

- A expressão para o cálculo do perímetro resulta de se imaginar que os 4 hexágonos separados teriam um perímetro de 4 ×6=24 ao qual se retiram os 2 lados que ficam unidos em cada ligação.

  Resumir que há figuras diferentes com a mesma área que podem ter o mesmo perímetro, mas há outras que têm perímetro diferente. Área e perímetro são pois conceitos diferentes.

- Depois da sistematização e apresentação das 7 imagens possíveis os grupos devem ser capazes de chegar à generalização:

  (6 x número de hexágonos) - (número de lados coincidentes x 2)

- Pode ainda ser efetuada a exploração de quanto mais lados coincidentes tiver a figura composta, menor é o perímetro;
- Seguidamente e após as conclusões finais, entrega-se a tarefa - Parte II a cada um dos alunos;
- Após a leitura silenciosa, solicita-se a realização da mesma, com discussão em pequeno grupo (2-3 alunos);
- Na sequência de imagens, os alunos devem conseguir construir a 5.ª figura e a 10.ª figura;
- Também irão identificar que na figura 20 existirão 20 hexágonos regulares;
- Em seguida e usando o conhecimento adquirido anteriormente irão identificar o perímetro da 2.ª figura, que é 10, e o perímetro da 3.ª figura, que é 14 (considerando como unidade de medida o lado do hexágono regular);
- Posteriormente terão de descobrir o perímetro da 20.ª figura e chegarão ao perímetro de 82;
- Para chegar à generalização os alunos poderão recorrer ao conhecimento anterior e escrever

  Perímetro = (nº hexágonos x 6) – (2 x nº ligações)
  mas também *(nº da figura ou nº hexágonos x 4) + 2*

- Serão posteriormente efetuadas as sistematizações e se os alunos não tiverem chegado à conclusão que existem duas possibilidades, a professora dará pistas que os encaminhem para a reflexão quanto a outra resposta, podendo colocar as seguintes questões/observações:

  Nesta sequência haverá outra forma de identificar o perímetro de qualquer figura sem nos basearmos nas ligações?

  Verifiquem se existem lados que se mantêm em todas as figuras e relacionem o número de hexágonos com os restantes lados!

Sugestões para acompanhamento da realização da tarefa durante o trabalho autónomo

- Inicialmente a professora só deverá ter a função de encorajar o aluno na exploração da tarefa e não de dar pistas para a concretização da tarefa;

- Se a grande maioria dos alunos já tiver avançado com exemplificações, mas não tiver conseguido apresentar justificações e/ou generalizações, a professora deverá desafiá-los a avançar na sua exploração propondo-lhes a análise de respostas dadas por outros alunos da turma ou fazendo uma sistematização sobre o que os grupos já descobriram. Poderá ainda ser entregue um exemplo de produções de alunos para que possam identificar semelhanças e diferenças de acordo com o percurso que fizeram na investigação;
- Caso a maioria dos alunos ainda tenha dificuldade em resolver o problema, em grande grupo, pode ser analisado o documento de respostas dos alunos, em conjunto com a professora, permitindo a análise crítica;
- A sistematização deverá surgir da partilha de conclusões entre grupos e a sistematização deverá ser efetuada por todos os alunos no caderno diário, para que a folha de resposta contenha apenas o contributo do grupo.

Sugestões para discussão coletiva das resoluções dos alunos e sistematização dos resultados

Na discussão final poderá recorrer ao documento de apoio a discussões coletivas, que o professor vai preenchendo de acordo com o acompanhamento que vai fazendo do trabalho dos alunos. Este documento orienta a seleção dos grupos a serem chamados a explicar o seu raciocínio, por uma ordem intencional;

- É importante que sejam estabelecidas "pontes" entre as resoluções, podendo usar-se os exemplos de resolução em anexo[1];
- Poderão ser colocadas as seguintes questões aos alunos:
    - Que semelhanças encontram nas vossas resoluções?
    - Qual vos parece mais completa e porquê?

2.2. A exploração da tarefa

Em meados de fevereiro de 2020, apliquei o plano de aula na aula de matemática, com a duração de dois tempos de 50' consecutivos.

Reconhecendo que as ações dos professores durante a exploração das tarefas constituem-se como complementares e igualmente centrais na promoção do raciocínio matemático, existiu uma preocupação face à dinamização da tarefa.

De acordo com o descrito anteriormente, o meu papel como professora contemplou a planificação e apresentação da tarefa, bem como a disponibilização do material necessário. Por um lado, criando o ambiente

[1]Produções de alunos recolhidas da exploração da tarefa "Unindo 4 hexágonos regulares" do Programa de Formação Contínua do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico (2008-2009) da ESE/IPS, tendo sido estas produções recolhidas no ano letivo 2007-2008.

propício à partilha, à discussão, à reflexão conjunta e à formalização de conclusões, por outro lado, potenciando um ambiente desafiador que permitisse a persistência necessária à concretização do plano de aula. Como mediador o professor deve incentivar a reflexão e argumentação com questões como "*Como sabes que é assim?", "Será que é sempre assim*?, e outras que não atribuem caminhos mas conduzem à reflexão e argumentação associada à construção do conhecimento matemático. Ao longo da exploração da tarefa foi sempre esta a minha postura, controlando as indicações dadas de forma a não conduzir os alunos num único caminho ou numa única resposta, que não surgiu dos seus processos de raciocínio. Nestes contextos em que os alunos trabalham autonomamente a partir de tarefas planeadas por mim, com os recursos que disponibilizei, ultrapassando dificuldades, colaborando e sem recorrer a mim enquanto professora, transmite a sensação de estar a caminhar no sentido correto. A nível profissional sinto que me adapto com facilidade às situações e contextos e que a nível pessoal estou em constante mutação, contrariando a minha necessidade e hábito de controlar tudo o que se passa em sala de aula, reduzindo por vezes o tempo de participação dos alunos.

Quanto ao papel do aluno, este tem um papel ativo em toda a aula, dado que a partir do desafio, procura concluir cada uma das fases da tarefa, em colaboração com os colegas. Para além da procura em dar resposta ao desafio, partilha as suas opiniões, testa as conjeturas e procura a existência de uma regra que possibilite uma generalização.

Tal como planifiquei, foi entregue a primeira parte da tarefa, conjuntamente com a malha hexagonal para facilitar os registos. Para além deste material, estavam ainda disponíveis hexágonos regulares recortados, para que pudessem ser utilizados pelos grupos de trabalho, se considerassem necessário. A leitura da tarefa foi efetuada por um dos alunos, tendo sido discutido o objetivo desta parte da tarefa. Desta forma, pretendi assegurar que todos os alunos tinham compreendido os termos matemáticos e o contexto, promovendo o envolvimento de todos na realização da tarefa.

Seguidamente, iniciou-se o trabalho autónomo dos alunos, agrupados em pequenos grupos. Durante a realização autónoma da tarefa, acompanhei o desenvolvimento da atividade, lançando questões que poderiam servir de desbloqueio. Também foi importante o meu acompanhamento a grupos que manifestaram mais dificuldades, dando sugestões e lançando questões facilitadoras que permitiram a continuidade do interesse e persistência do trabalho.

Nesta fase, os grupos de alunos foram respondendo às várias questões pela ordem em que se encontravam, colocavam dúvidas e em conjunto tentavam encontrar uma forma de se expressarem por escrito, algo que percebi que era tarefa difícil - escrever conclusões ou raciocínios. Para os meus alunos a utilização de expressões numéricas ou representação por imagens foi algo mais fácil do que a escrita e descrição de percursos de raciocínio efetuados. Tiveram bastante dificuldade em descrever por escrito a forma como pensaram e as suas conclusões.

Posteriormente, foi efetuada a sistematização das principais respostas e conclusões. A sistematização conjunta foi decorrendo em cada fase da tarefa, com a descrição e listagem das primeiras conclusões e construções. Como tal, recorri a um cartaz com a malha hexagonal (Figura 3) que permitiu a apresentação das várias imagens construídas e das principais conclusões, facilitando também a argumentação e justificação, bem como a reflexão conjunta entre grupos. O critério de participação com registo de respostas e conclusões esteve relacionado com as minhas observações, recolhidas no acompanhamento aos grupos. Selecionei grupos que tinham respostas variadas ou que tinham conseguido obter a mesma resposta mas utilizavam estratégias/representações diferentes para a justificar. Também foi importante a apresentação de grupos que consideravam ter várias imagens diferentes mas que na verdade eram geometricamente iguais. Esta seleção/verificação foi depois realizada em discussão conjunta, com a argumentação por parte dos alunos que se encontravam a fazer os registos e dos alunos que tentavam compreender qual tinha sido o raciocínio dos colegas.

Figura 3

Cartaz de registo de imagens

Neste cartaz foi possível apresentar os resultados referentes à primeira e segunda questão, onde era exigido que construíssem figuras diferentes, compostas pelos quatro hexágonos regulares, identificando o seu perímetro. Nesta altura foram identificadas figuras repetidas, apesar de se encontrarem em posições diferentes.

Para além deste cartaz, as conclusões e regularidades foram igualmente registadas no quadro, para que todos pudessem partilhar as suas ideias e analisar criticamente a resposta dos colegas.

Nestas discussões coletivas os alunos foram incentivados a argumentar as suas posições, identificar justificações válidas e inválidas, conhecer os diferentes processos de raciocínio utilizados e procurar dar resposta a novas questões que foram surgindo, que pudessem estabelecer relação com as generalizações.

Após o registo das principais conclusões referentes à Parte I da tarefa, os alunos foram desafiados a responder a outras questões que se constituíram como uma extensão da tarefa. Também foi efetuada a leitura por parte de um dos alunos da turma, para que pudessem compreender o enunciado, os conceitos e contexto, permitindo uma relação entre a Parte I da tarefa. Desta forma, foi possível utilizar os conhecimentos adquiridos, num outro contexto que permitisse uma aplicação da generalização alcançada anteriormente.

O balanço foi bastante positivo com a motivação esperada e com a adequação dos enunciados ao grau de compreensão dos alunos, facilitando a resolução das tarefas com um grau elevado de autonomia. Contudo, ao longo da realização da tarefa tive a necessidade de acompanhar, de uma forma mais individualizada, um dos grupos de trabalho. A elevada heterogeneidade no grupo e a competitividade de alguns dos seus elementos, levou a que se criassem dois grupos distintos em ritmos diferentes de desenvolvimento. Por um lado, os alunos mais perspicazes e com maior capacidade de raciocínio queriam desenfreadamente responder a todas as questões e melhorar sistematicamente o seu trabalho. Por outro lado, os alunos com mais dificuldade sentiam-se constrangidos e retraiam-se aquando da discussão de conclusões, levando a que se distanciassem e que criassem dois subgrupos. Foi assim necessária a minha intervenção, no auxílio aos alunos com mais dificuldades para que conseguissem alcançar algumas das respostas e conclusões já efetuadas. Também foi necessário solicitar a ajuda dos alunos que se encontravam a avançar no seu trabalho, que apoiassem os colegas, sendo eles próprios a explicitar aos colegas as conclusões alcançadas.

Nos restantes grupos de trabalho não foi necessário intervir e a dinâmica no seio de cada grupo, trouxe sempre conclusões conjuntas e justificações clarificadas por todos os elementos do grupo.

As produções de alunos, referidas anteriormente, como suporte de reflexão e interpretação dos seus processos de raciocínio, foram entregues aos vários grupos. No decorrer na Parte I da tarefa percebi que a maioria dos grupos não rentabilizou este recurso, possivelmente por não identificarem diferenças significativas, mas também poderá ter estado relacionado com o facto de não estarem habituados a utilizar este tipo de recurso em sala de aula.

2.3. Os processos de raciocínio dos alunos

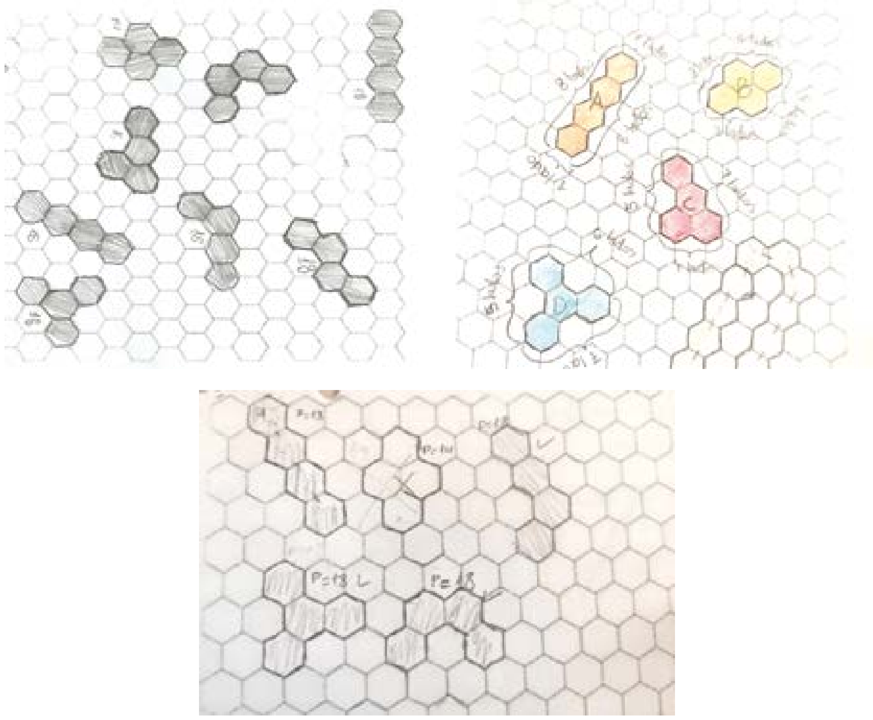
A figura 4 mostra algumas das resoluções dos alunos, processos de organização de dados e conclusões registadas no quadro, relativas à Parte I da tarefa.

Exemplos de registos dos alunos às questões:

1. Construam, na malha hexagonal, uma figura unindo quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados e identifiquem o seu perímetro?
2. Investiguem se existirão figuras diferentes, formadas por quatro hexágonos regulares unidos pelos seus lados, que possam ter o mesmo perímetro. Registem as figuras e o respetivo perímetro.

Figura 4

Respostas às questões 1 e 2



Através destes exemplos consegui perceber que construíam as diferentes figuras procurando o mesmo perímetro. Em alguns casos, anulavam algumas das figuras por não terem o valor do perímetro correspondente ao da maioria das figuras.

Questões 3 e 4 da tarefa:

3. Observem os valores e as figuras construídas e retirem algumas conclusões.
4. Depois da investigação que efetuaram haverá uma forma de determinar o perímetro das figuras construídas, sem contar os seus lados?

Explicitem o raciocínio apresentando todas as representações e cálculos efetuados.

As questões 3 e 4 foram respondidas após a sistematização de algumas conclusões tiradas pelos alunos:

São 4 hexágonos e cada hexágono tem 6 lados.

Cada vez que se unem 2 hexágonos e que partilham um lado, desaparecem dois lados, ou seja, cada ligação retira dois lados.

As figuras com o mesmo perímetro têm o mesmo número de ligações.

O perímetro é sempre par porque os hexágonos têm um número par de lados!

Não, não, porque como alguns lados estão dentro, desaparecem do valor do perímetro por isso pode ser ímpar!

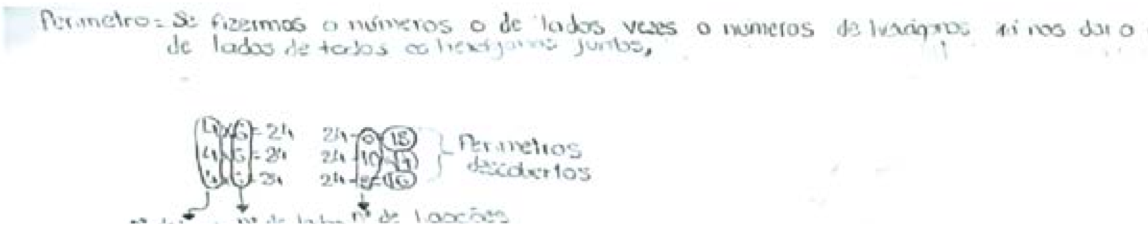
Quanto maior o perímetro menor o número de ligações!

Estas observações, que foram registadas no quadro durante a discussão coletiva, permitiram o prosseguimento para a sistematização e justificação de raciocínios. Enquanto docente fui lançando questões e dando indicações, como por exemplo: *Será que é mesmo assim?; Chegaram à mesma conclusão; Verifiquem para as restantes figuras para perceber se é mesmo assim...; Não apaguem nenhuma das vossas respostas, quero saber qual o vosso percurso...;* e outras que favoreceram a atenção, concentração e persistência na procura de respostas e conclusões.

A figura 5 apresenta alguns exemplos de resposta às questões 3 e 4.:

Figura 5

Respostas às questões 3 e 4



Hexágono – 6 lados
4 Hexágonos
cada ligação une 2 lados
5 uniões

6x4=24
2x5=10
24–10=14 .

Perímetro igual a multiplicação do número de hexágonos (4) com o número do lados ( ) dos hexagonos (6
a multiplicação do número de ligações (2) com o número de uniões (5,4,3) e depois su
o resultado das duas multiplicações. Exp.: 4x6=24 2x5=10 24-10=14
2x4=8 24-8=16
2x3=6 24-6=18

Desta forma, os vários grupos perceberam a existência de uma relação entre o número de hexágonos, o número de ligações e a descoberta do perímetro da figura. Para além disso, descobriram ainda quais as possibilidades de perímetros diferentes utilizando 4 hexágonos. No que respeita aos processos de raciocínio os alunos exemplificaram e justificaram os seus raciocínios e, posteriormente, envolveram-se na procura de uma regra que conduziu a outros registos. Apresento, ao lado, um desses exemplos.

Assim, os alunos conseguiram criar uma expressão que permitisse calcular o valor do perímetro, sabendo o número de hexágonos que a constitui e o número de ligações ou uniões entre esses hexágonos. Nesta altura, lancei a seguinte questão:

4x6 – 2x ligações
n= 4 hexágonos 6 lados

E se fossem 5 hexágonos, qual o maior perímetro que conseguiríamos ter?

De acordo com as resoluções efetuadas anteriormente, perceberam que existia uma relação entre o perímetro, pois quanto mais ligações existissem menor era o perímetro, por isso perceberam que o menor número de ligações neste caso seria 4 e que permitia obter o maior perímetro.

Assim, aplicando a expressão:

Nº hexágonos x 6 – 2 x nº ligações

Chegaram rapidamente à resposta de 22 de perímetro, tal como mostra o registo ao lado.

Nesta fase, os alunos foram capazes de generalizar criando um processo que possibilitava a resposta a várias questões em torno do cálculo de perímetro de figuras compostas por hexágonos regulares ou a identificação do número de hexágonos, a partir do número de ligações e perímetro.

5 hexágonos
maior perímetro
4 ligações
P= 5x6 - 2x4
P= 30 - 8
P= 22 ℓ

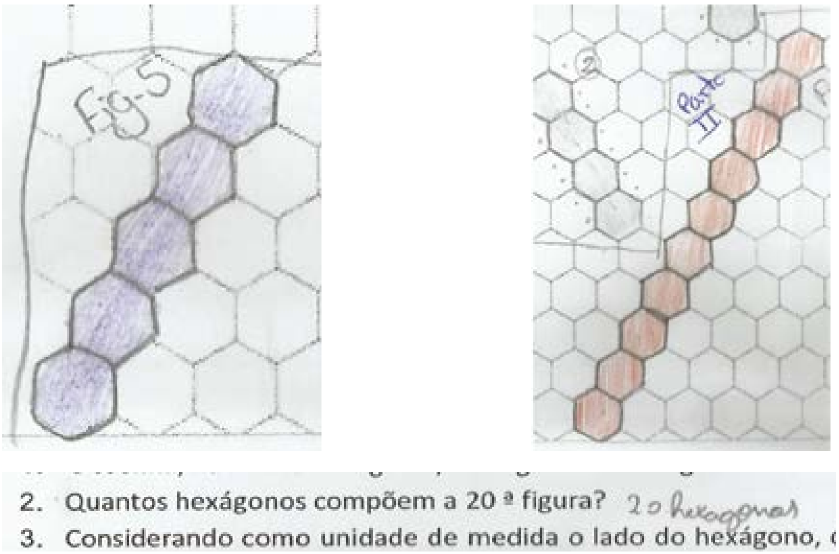
Como extensão da *Parte I* da tarefa, apresentei a *Parte II,* que permitiu a aplicação da regra encontrada, na resposta a tarefas relacionadas com sequências e regularidades, mais especificamente a expressão geradora.

A partir das conclusões obtidas na *Parte I* da tarefa, a dificuldade desta tarefa diminuiul, na medida em que compreenderam estar perante figuras compostas por hexágonos regulares, com um número mínimo de ligações, ou seja, o número de ligações correspondia a *n.º de hexágonos* – 1, sendo que o número de hexágonos correspondia ao número da figura da referida sequência.

Estes foram alguns dos resultados apresentados:

Figura 6

Produções de alunos na parte II da tarefa

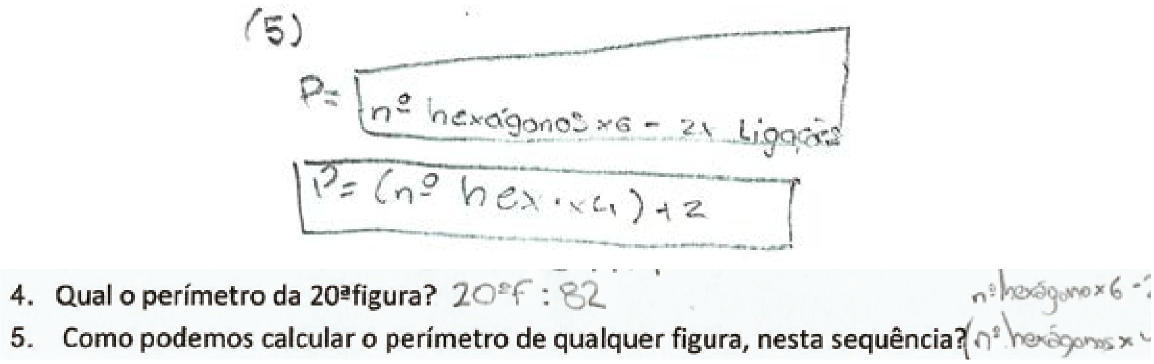


De acordo com os registos apresentados, os alunos compreenderam a forma como se devia construir a figura seguinte a partir da anterior, identificando que o número de hexágonos de cada figura corresponde ao termo da sequência. Assim, tornou-se claro como deveriam calcular o perímetro da figura 2, figura 3 e figura 20 da sequência.

Na questão 5, mais uma vez, era pedido que generalizassem e identificassem uma expressão que permitisse calcular o perímetro de qualquer figura desta sequência, tendo sido estas algumas das respostas dadas:

Figura 7

Respostas de alunos à questão 5



Após a sistematização de todas estas conclusões foi interessante perceber o percurso dos alunos desde o início com a tarefa dos hexágonos até à fase final da sistematização de uma expressão geradora. Permitiu, assim, mostrar a potencialidade de tarefas desta natureza, no que respeita ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio e argumentação a questões de progressivo grau de dificuldade. A sistematização ao longo das tarefas permitiu ainda uma melhor gestão do tempo.

No final desta atividade os alunos efetuaram uma autoavaliação relativamente ao trabalho de grupo e à colaboração nele existente, bem como uma autoavaliação individual. Esta autoavaliação foi efetuada em documento próprio, sendo este rotineiro nas tarefas desenvolvidas em sala de aula.

2.4. Considerações finais

Numa perspetiva de formação contínua, potenciando a exploração de tarefas e reflexão sobre a prática letiva, o desenvolvimento do raciocínio matemático surge como um desafio para os professores. Num contexto de mudança ao nível de políticas educativas e do currículo, com a gestão e organização necessárias, muitos aspetos aprofundados na formação inicial deixam de estar tão presentes na nossa prática letiva. O necessário aprofundamento teórico, o trabalho colaborativo e a oportunidade de testar estratégias e recursos, favorece a valorização desta capacidade matemática transversal - o raciocínio.

A utilização de uma tarefa inicial (*Parte I*) selecionada por conter questões que implicam a exploração e investigação por parte dos alunos, por permitir uma variedade de estratégias e por solicitar a formulação de conjeturas e generalizações, favoreceu o aprofundamento de conhecimentos matemáticos relacionados com um tema que iria ser iniciado nas aulas seguintes - sequências e regularidades (*Parte II*).

Assim, sendo criado um ambiente favorável à descoberta, discussão conjunta, argumentação e justificação, pretendi que os alunos explicitassem os seus raciocínios, utilizando a linguagem natural e simbólica, que estimulasse a reflexão e compreensão de diferentes processos de resolução, validando-os ou não. Desta forma, é importante que os alunos sejam capazes de explicar e defender o seu pensamento através da argumentação e que analisem criticamente contributos dos colegas, podendo chegar a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado das ideias matemáticas.

Ao raciocinarem matematicamente os alunos recorreram a representações e esquemas que apoiaram e acompanharam o seu raciocínio, facilitando a interpretação, comunicação e justificação. As generalizações foram efetuadas durante o trabalho autónomo dos alunos e apresentadas e discutidas nos momentos de discussão coletiva.

Com base na análise do trabalho realizado é percetível a potencialidade das tarefas desta natureza, no desenvolvimento do raciocínio matemático e na capacidade de argumentação e comunicação, onde se identificam relações numéricas e geométricas, que favorecem conexões entre os vários domínios do conhecimento matemático.

Na minha opinião, momentos de formação que permitam a exploração de tarefas e reflexão conjunta, com ou sem recurso à supervisão colaborativa, favorecem o desenvolvimento profissional, onde se estabelecem relações entre a natureza das tarefas e a melhoria das aprendizagens dos alunos, nomeadamente ao nível do desenvolvimento de capacidades transversais. O impacto positivo desta oficina de formação trouxe uma clarificação e uma melhoria na aquisição de conhecimentos, que afetarão necessariamente as dinâmicas em sala de aula e a mudança nas práticas letivas.

Capítulo

4

PERCURSOS NA SERRA

NO TRILHO DE RETAS, RACIONAIS E OUTROS QUE TAIS

Ana Abreu

Anabela Alves

Escola Básica Dr. António Augusto Louro - Seixal

1. ESCOLHA DA TAREFA

Quando participámos na formação do Projeto Reason os nossos alunos eram todos do quinto ano de escolaridade e já possuíam alguma familiaridade com a exploração de tarefas a pares ou em pequeno grupo. Eram na generalidade alunos participativos que aderiam muito bem a todas as propostas e desafios que lhes eram colocados.

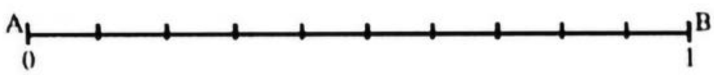
A escolha da tarefa a aplicar, não foi fácil. Queríamos uma tarefa que se encaixasse no conteúdo matemático que estávamos a trabalhar naquele momento, e, das várias propostas que nos foram apresentadas na formação, não havia nenhuma que preenchesse este requisito. A partir daqui, começou a nossa busca pela tarefa *ideal*, aquela que promovesse o raciocínio, que potenciasse o efetivo envolvimento dos alunos e simultaneamente trabalhasse os números racionais (preferencialmente na sua representação na forma de fração). Depois de muito pesquisar e analisar, a nossa escolha recaiu sobre a tarefa *Percurso na serra*[1], uma vez que, pensámos nós, seria uma tarefa promotora do raciocínio e encaixava na perfeição na nossa planificação.

PERCURSO NA SERRA[1]

A turma do João organizou um percurso pedestre na Serra da Arrábida, representado na figura por [AB].

A Maria parou para descansar depois de ter feito $\frac{4}{10}$ do percurso, a Joana parou ao fim de $\frac{2}{5}$, o Francisco ao fim de $\frac{3}{5}$ e os restantes elementos da turma ao fim de $\frac{7}{10}$ do percurso.

Assinala no segmento [AB] abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



Sabendo que o percurso era de 5 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido $\frac{5}{6}$ do percurso feito pelo Francisco quando parou. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João?

[1]Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2015). Exercícios, problemas e explorações: Perspetivas de professoras num estudo de aula. *Quadrante, XXIV*(2), 11-134.

Para nós era claro que esta tarefa permitia trabalhar a localização de números racionais na reta numérica; comparar números racionais; relacionar frações equivalentes; conceber e aplicar estratégias de resolução de problemas; avaliar a plausibilidade dos resultados; compreender e construir explicações e justificações e exprimir, oralmente e por escrito, raciocínios matemáticos.

Pensámos que esta tarefa teria um grau de dificuldade elevado, tendo em conta que era a primeira vez que os alunos seriam confrontados com a representação de números racionais na reta numérica. Com este pressuposto, era fundamental que o professor fosse um agente desbloqueador do processo, acompanhando o desenrolar da tarefa de uma forma muito próxima, questionando e orientando.

Após a realização da tarefa nas primeiras turmas, e das dificuldades sentidas pelos alunos na segunda questão, sentimos necessidade de a reformular, tal como iremos ver mais à frente.

2. PLANIFICAÇÃO

Planificámos a exploração da tarefa atendendo aos seguintes aspetos que consideramos essenciais: os objetivos que pretendíamos que os alunos atingissem, a estrutura da aula e qual o papel dos alunos e do professor nos três momentos que consideramos fundamentais: o primeiro momento, onde é apresentada a tarefa, o momento de exploração da tarefa por parte dos alunos (a pares ou em pequeno grupo) e, finalmente, o momento de discussão coletiva da tarefa que, regra geral, termina com uma síntese final.

Concordando com o que salientam Mata-Pereira et al. (2017), considerámos dois aspetos fundamentais, o estabelecimento de um ambiente de comunicação na sala de aula capaz de favorecer a participação e reflexão por parte dos alunos e a escolha das tarefas. Por isso, durante a planificação, focámos a nossa atenção na previsão das estratégias que os alunos poderiam usar, nas dificuldades que poderiam revelar em cada uma das questões que lhes foram colocadas, bem como em possíveis formas/ações para as ultrapassar.

Relativamente ao momento de concretização da tarefa, estruturamos a aula da seguinte forma:

Apresentação da tarefa

Um aluno lê e explica aos colegas o contexto apresentado.

A professora, para se certificar que todos compreenderam, pede a outro aluno que explique.

Como a tarefa tem três questões, vão ler-se todas e só depois é que começam a trabalhar a pares ou pequenos grupos.

A professora solicita que registem a forma como pensaram na folha de papel.

Exploração da tarefa

A professora circulará pelos diferentes grupos apropriando-se quer das estratégias que os alunos estão a usar quer das dificuldades que estão a revelar tentando, relativamente às dificuldades, ajudar os alunos a superá-las, colocando questões e/ou dando sugestões.

Discussão da tarefa

Após selecionar os grupos que vão partilhar as estratégias, a professora convida-os a explicarem aos colegas a forma como pensaram.

A discussão ocorrerá questão a questão.

A síntese será realizada no final da aula pelos alunos em interação com a professora.

Tal como referimos no ponto anterior, esta era a primeira vez que os alunos se confrontavam com a representação de racionais na reta numérica pelo que poderiam revelar dificuldade em perceber que o segmento de reta dado está dividido em dez partes iguais e que cada parte corresponderia a uma décima, em estabelecer relação entre quintos e décimos e entre as partes e o todo. Para ajudar a ultrapassar estas dificuldades que os alunos poderiam vir a ter, pensámos questionar e até recorrer a alguns esquemas, de forma a poder apoiá-los. Por exemplo, pensámos em questões como:

- Em quantas partes está dividida a reta?
- A quanto corresponde o todo? Se está dividida em dez partes, a quanto corresponde cada parte?
- Se a Joana percorreu dois quintos do percurso em quantas partes está agora dividido o percurso? O todo corresponde a quantos quintos?
- Um quinto quantos décimos é que são?

Em algumas situações, poderia haver necessidade de se recorrer ao desenho de outro segmento de reta debaixo do que estava desenhado, mas dividido em quintos, para que conseguissem relacionar mais facilmente quintos com décimos. Por isso, pensámos que poderíamos avançar esta sugestão aos grupos que estivessem com dificuldades em relacionar décimos e quintos.

Relativamente à segunda questão, previmos essencialmente que os alunos poderiam revelar dificuldades em relacionar e distinguir as partes do percurso realizadas com o número de quilómetros. Mais uma vez o nosso papel seria o de os questionar no sentido de a conseguirem ultrapassar. Algumas das questões que previmos e que foram efetivamente colocadas foram:

- O percurso todo a quantos quilómetros corresponde? Em quantas partes está dividida a reta? Então a quantos quilómetros corresponde cada parte?
- Quando é que a Joana parou? Que parte do percurso já tinha feito? Do início até ao local onde a Joana parou quantos quilómetros serão?

Poderia ainda ser vantajoso recorrer à reta numérica dupla, onde na parte de cima, colocariam as partes do percurso e na debaixo o número de quilómetros correspondente. Por isso, pensámos sugerir esta possibilidade aos alunos que estivessem com dificuldades na correspondência entre o percurso e os quilómetros percorridos.

No que concerne à terceira questão, considerámos que os alunos poderiam revelar dificuldades em perceber que o todo agora passa a corresponder ao percurso feito pelo A16 pelo que seria necessário questioná-los no sentido de se interrogarem sobre esta questão:

- O todo agora corresponde a quê? Se o João percorreu cinco sextos do percurso feito pelo Francisco, quanto é o todo?
- Que parte do percurso ainda falta ao João percorrer para chegar ao Francisco?
- Quantos quilómetros percorreu o Francisco? Quantos quilómetros percorreu o João?

3. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS TRÊS MOMENTOS DA AULA

3.1. Apresentação da tarefa

A tarefa foi explorada em seis turmas do 5.º ano, três de cada uma de nós. Em três turmas foi explorada no mesmo dia, uma versão da tarefa em que a totalidade do percurso era de 4 km e no dia seguinte uma outra versão em que se considerava a totalidade do percurso era de 5 km. A descrição e análise que a seguir apresentamos refere-se à aula da primeira autora deste texto, professora Ana, e em que se explorou a segunda versão da tarefa.

Tal como previsto, a tarefa foi lida por um aluno, que a explicou por palavras suas. Posteriormente Ana (PA) questionou os alunos para perceber se todos a tinham compreendida. O diálogo seguinte ilustra as explicações dadas por uma aluna (A1), quando Ana lhe pede que indique o que é para fazer, mostrando a relativa facilidade com que a maioria dos alunos compreendeu a tarefa proposta:

PA - O que é que é para fazer?
A1 – Para assinalar, no segmento, por ordem as frações.
PA – Quantos quilómetros tem o percurso?
A1 – 5 km.
PA - Do A até ao B, representa quantos quilómetros?
A1 – 5 km.

Um aspeto em que também insistimos sempre diz respeito ao pedido que é feito aos alunos para não apagarem os registos que forem fazendo. Contudo, os alunos tendem a não seguir esta indicação e verifica-se muitas vezes que um número significativo tem dificuldade em cumprir com esta solicitação.

3.2. Exploração da tarefa

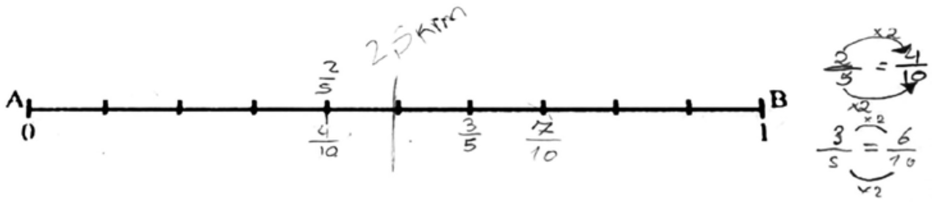
Durante a exploração da tarefa por parte dos alunos fomos circulando pela sala, acompanhando as resoluções que iam sendo propostas e colocando questões ou dando sugestões com o objetivo de 'desbloquear' os que não conseguiam avançar. Simultaneamente, íamos observando as estratégias que iam surgindo de modo a selecioná-las e ordená-las para serem apresentadas no momento da discussão final da tarefa em grande grupo/turma.

Relativamente ao primeiro desafio, que consistia em localizar na reta numérica as frações que correspondiam às paragens que tinham sido feitas, os alunos utilizaram essencialmente duas estratégias.

Numa delas (Figura 1) os alunos transformaram as frações com denominador 5 em frações equivalentes com denominador 10. Como segmento de reta estava dividido em 10 partes, localizaram os pontos e concluíram que a Maria e a Joana tinham parado exatamente no mesmo local. Ao multiplicarem o denominador e o numerador das frações por 2 concluíram que as frações eram equivalentes.

Figura 1

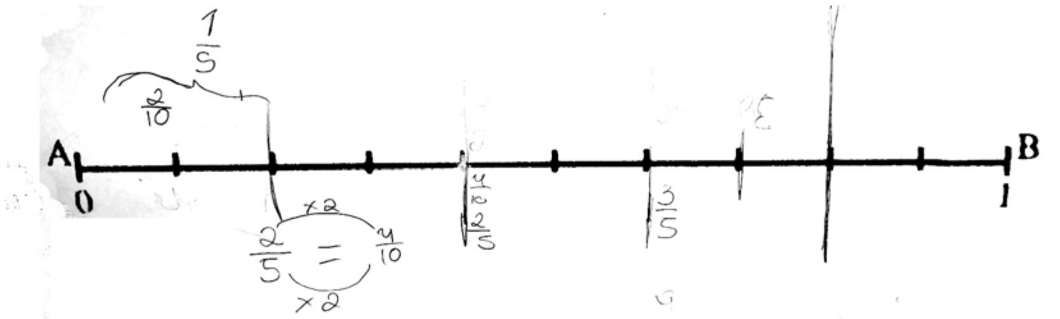
Estratégia que recorre ao uso de frações decimais



Na outra estratégia (Figura 2), os alunos recorrem à equivalência entre quintos e décimos, concluindo que cada quinto correspondia a 2/10.

Figura 2

Estratégia que recorre à divisão da reta numérica em 5 partes



O segundo desafio era o de descobrir quantos quilómetros tinham sido feitos pelas amigas quando pararam para descansar.

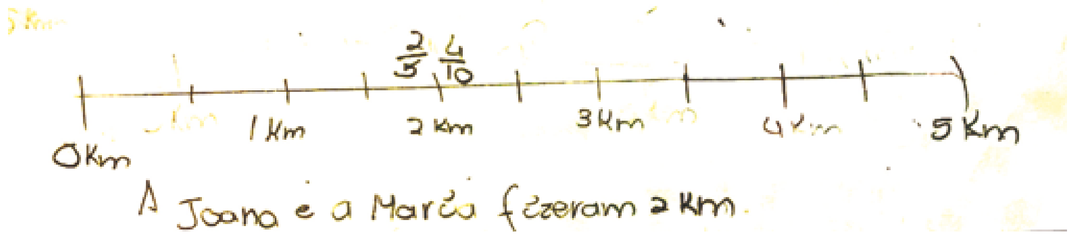
> Sabendo que o percurso era de 5 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

Tendo em conta a questão anterior, os alunos já sabiam que as amigas se encontravam no mesmo local, mas ainda não sabiam a quantos quilómetros é que esse local correspondia. Tal como se mostra na transcrição e no registo escrito que apresenta (Figura 3) o aluno A2 percebe que pode usar a divisão da reta em 5 e em 10 partes iguais indicando que 4/10 correspondem a 2 km. Posiciona corretamente 2/5 e 4/10, embora oralmente indique que *dois quintos é metade de quatro décimos*, referindo-se, provavelmente, à relação entre o numerador e o denominador das frações e não à relação entre 2/10 e 1/5.

> **A2** – A Maria fez 2 km ... Temos de dividir isto em 5. Ela fez quatro décimos, então ela faz 2 km. Dois quintos é metade de quatro décimos. Temos de dividir 10 por 5 que vai dar 2. A Maria fez 2 km.

Figura 3

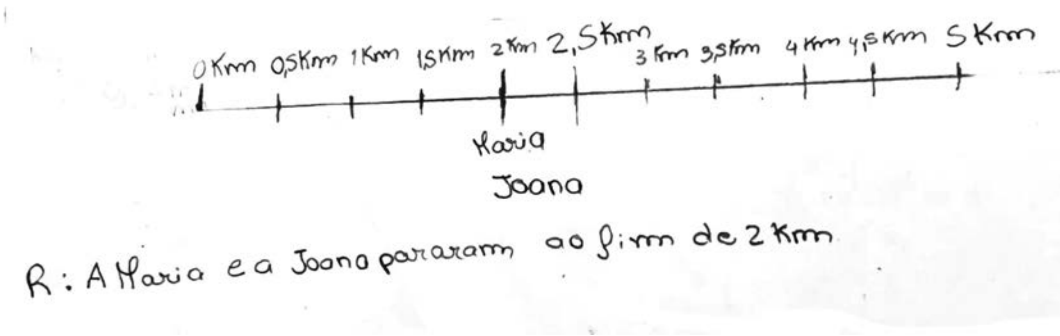
Resolução de A2, questão 2



Outros alunos, tal como aconteceu com a aluna A3 (Figura 4), não explicitam a relação entre 2/10 e 1/5 nem posicionam estes números na reta, registando diretamente as distâncias na reta dividida em 10 e 5 partes iguais.

Figura 4

Resolução de A3, questão 2



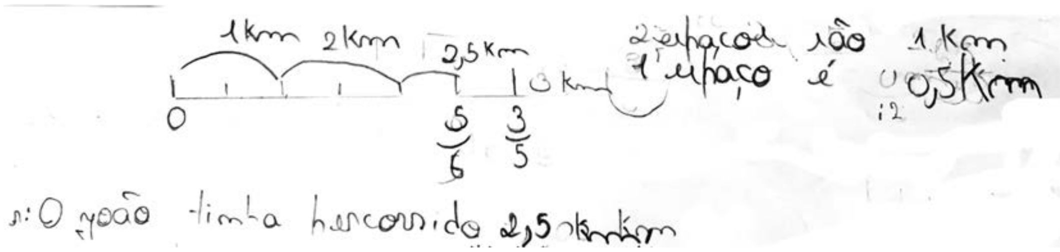
O terceiro desafio suscitou dúvidas à maior parte dos alunos, uma vez que, tal como havíamos previsto, houve inicialmente alguma dificuldade em compreender que o percurso feito pelo Francisco correspondia ao todo e em relacionar sextos com décimos ou quintos.

> O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido $\frac{5}{6}$ do percurso feito pelo Francisco quando parou. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João?

O grupo de A4, A5 e A6 (Figura 5) depois de escrever e apagar vários registos, apresenta uma resolução em que apenas se considera o novo todo, ou seja, o percurso feito por Francisco assinalando que ele corresponde a 3 km. A partir daí dividem o percurso em partes iguais, indicando a correspondência entre as marcações na reta e a distância.

Figura 5

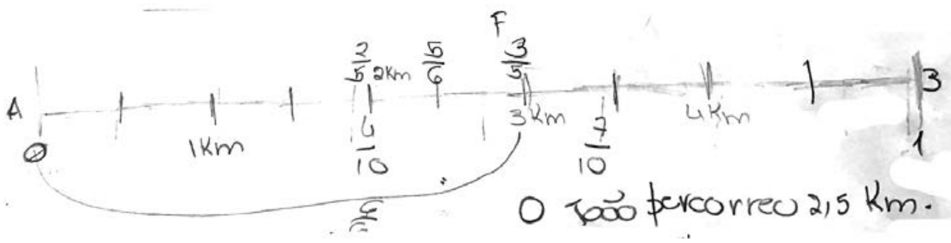
Resolução de A4, A5 e A6, pergunta 3



Um outro grupo (Figura 6), percebeu a partir das questões anteriores que três quintos do percurso correspondiam a 3 km, marcando essa distância na reta, fazendo então a divisão deste percurso em sextos. Depois pensou que se seis sextos equivalem a 3 km, cinco sextos correspondem a 2,5 km.

Figura 6

Resolução de A7, A8 e A9



A estratégia utilizada por este grupo foi a de fazer corresponder cada sexto a uma distância, neste caso dois sextos a 1 km, como se verifica no diálogo entre a professora Ana e o grupo:

A7 - Temos de dividir 10 por 5. Dois quintos é 1 km. Se for 5 km a dividir por 2, dá 2,5 km por isso não pode. É 1,5 km. Dois quintos é 2,5 km.

PA - Como é que estão a pensar?

A8 - Dividimos a reta numérica em cinco porque são só 5 km. Dá 2, ou seja, a cada dois [traços] é 1 km. Vimos que a Maria fez 2 km e a Joana fez 1,5 km.

A8 - Sim, dá. Assim, o João fez 1,5 km. Temos de dividir isto por 10. ( )

Globalmente os alunos mostraram gostar de explorar a tarefa, durante todo o tempo demonstraram grande adesão e entusiasmo a este tipo de trabalho realizado a pares ou em pequeno grupo.

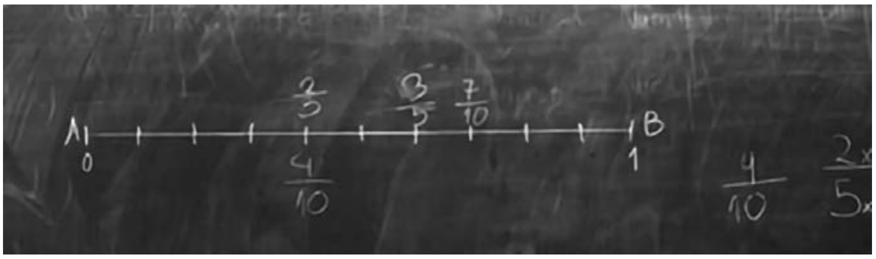
3.3. Discussão da tarefa

O último momento da aula foi dedicado à discussão coletiva da tarefa. Optámos pela escolha da apresentação de duas estratégias, que pela nossa observação enquanto circulávamos pela sala, também foram usadas pelos outros grupos.

O grupo formado por A10, A11 e A12, registou no quadro a sua resolução (Figura 7).

Figura 7

Resolução de A10, A11 e A12



Este grupo foi explicando oralmente como pensou:

A10 - Aqui escrevemos as frações que vamos assinalar na reta. Aqui como são 10 partes, então vamos colocar as frações. Aqui temos 2/5, mas como o percurso todo é 10, não podemos assinalar 2/5. Temos de multiplicar por um número que dê 10, que é o 2. Então 2/5 representa 4/10. No caso do 3/5 temos de multiplicar por 2 e fica 6/10.

PA - Quando multiplicaram as frações por 2, chegaram a que conclusão?

A10 - Que são equivalentes.

O grupo formado por A13, A14 e A15 (Figura 8) apresentou como estratégia a divisão da reta numérica em 5 partes, concluindo que cada quinto correspondia a 2/10.

Explicaram a sua resolução da seguinte forma:

PA - Vocês em vez de terem a fração equivalente, iam fazendo o quê?

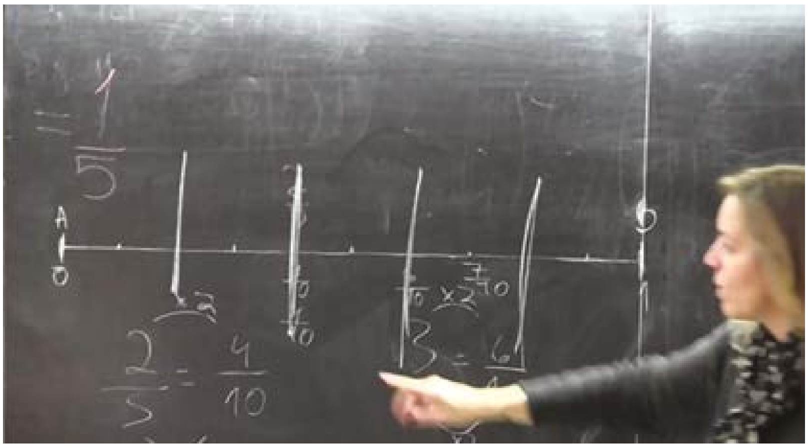
A14 - Dividindo a reta numérica em cinco partes.

PA - E o que acontecia no primeiro traço?

A14 - Ficava 1/5, que é igual a 2/10.

Figura 8

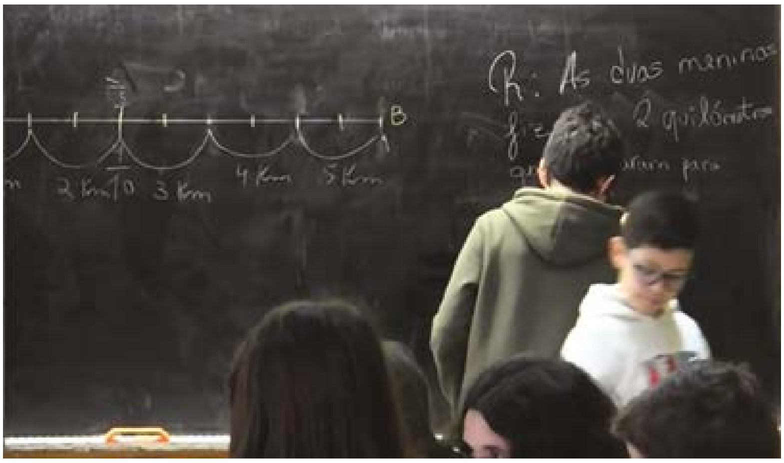
Resolução de A13, A14 e A15



O grupo formado por A16, A17 e A18 registou no quadro a sua resolução da 2.ª questão (Figura 9).

Figura 9

Resolução de A16, A17 e A18



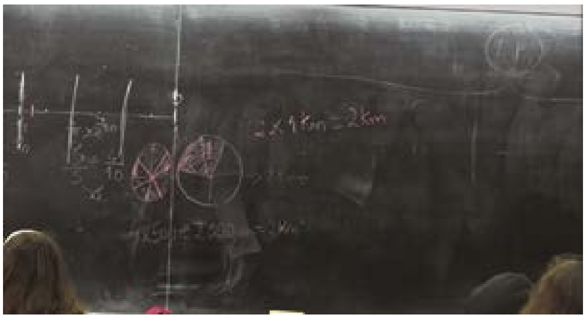
O aluno A17 explicou aos colegas:

> **A17** – Como quatro décimos é equivalente a 2/5, a Maria e a Joana andaram a mesma coisa. Como aqui diz 5 km, nós fizemos 2 traços igual a 1 Km. Como elas andaram 4/10 do percurso, então fizeram 2 km.

Durante a partilha da estratégia utilizada pelo grupo de A19, A20 e A21 (Figura 10), surgiu a seguinte discussão:

Figura 10

Resolução de A19, A20 e A21



A19 - Nós dividimos uma circunferência em cinco partes iguais e como a Joana percorreu 3/5, nós pintámos 2. Ou seja, cada parte vale 1/5. Depois percebemos que a Joana andou 2 km. Para a Maria dividimos a circunferência em 5 e pintamos 4, ou seja, a Maria andou 4 km.

PA - O que é que podes concluir?

A22 - Eu acho que está errado, porque se na reta as duas tinham andando 4/10, aqui também têm de andar os mesmos quilómetros.

PA - Então o que é que não está bem aqui?

A22 - A Maria e a Joana andaram o mesmo então tinham de arranjar uma forma de dizer isso. Em vez da Maria andar 4 km, ela andou 500 metros.

PA - Então aqui ela dividiu isto em 5, então cada pedacinho vale quanto?

A22 – Vale 1 km.

PA – Mas eu acho que a Maria andou 4/10 e a Joana 2/5. Portanto, aqui a Maria andou 4/10 que é igual a 2/5 e a Joana andou igualmente 2/5. Então o que é que está diferente de uma representação para a outra?

A23 – Deviam ter dividido em 10 partes.

PA – E aqui pintariam?

A23 – 4.

PA - Aqui quando dividiram em 5 e cada pedaço vale 1 km, ali quando dividiram em 10, quanto é que vale cada pedacinho?

A24 – No que está dividido em 5 cada parte vale 1 km e no que está dividido em 10, cada 2 pedacinhos é 1 km.

PA - Que são quantos metros?

A24 – 500 m.

PA - Então aqui tinha de dividir em quanto?

A19 – Em 10 partes.

PA - Então aqui temos 1 km que dá 2 pedaços. E ali? Cada décimo vale quanto?

A19 – 500 m.

PA - E quatro pedaços de 500m?

A19 – 2 km.

Nota-se claramente nesta transcrição o interesse da turma pela discussão da tarefa. Embora ela se foque na apresentação de um grupo, a verdade é que se identifica uma forte interação entre o grupo que está a apresentar e os alunos que estão a assistir, nomeadamente através das intervenções de A22, A23 e A24, que, inclusivamente, detetam o erro que existe numa parte da estratégia partilhada.

A discussão final da tarefa, apesar de rica, aconteceu de forma lenta, pelo que não foi possível discutir a 3.ª questão nem realizar a síntese final.

4. REFLEXÃO

Constatámos que a escolha de tarefas matemáticas que promovam o raciocínio, podem, e devem, permitir o uso de estratégias de resolução diferentes, que potenciem os alunos a discutirem os diferentes caminhos e até a descobrirem/partilharem outros processos de raciocínio. Esta constatação foi bastante óbvia quando analisámos a tarefa aqui descrita, uma vez que, além de não ter sido fácil a escolha da mesma, assim que a aplicámos, pensámos que devia ser alterada.

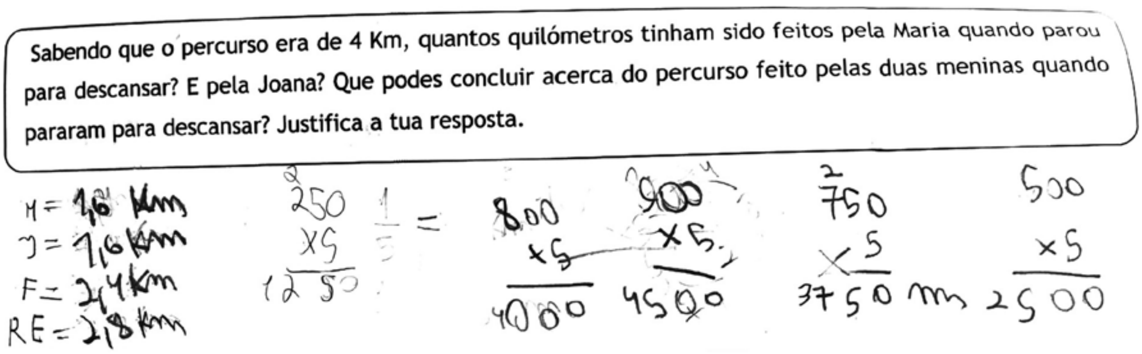
4.1. Adaptação da tarefa

Quando propusemos a tarefa às primeiras turmas, sendo o percurso original de 4 km, deparámo-nos com imensas dificuldades, pois poucos foram os grupos que conseguiram descobrir quantos quilómetros tinham sido feitos pelas duas amigas. Os poucos grupos que o conseguiram, necessitaram de muita ajuda nossa, propondo questões e dando sugestões, para ajudar a desbloquear as dificuldades.

Na figura 11 pode observar-se a produção de um desses grupos conseguida ao fim de muito tempo, após várias tentativas e de muito usar a borracha.

Figura 11

Resolução de um grupo para a distância de 4 Km



Sabendo que o percurso era de 4 Km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

M = 1,6 Km
J = 1,6 Km
F = 2,4 Km
RE = 2,8 Km

250 × 5 = 1250
800 × 5 = 4000
900 × 5 = 4500
750 × 5 = 3750 m
500 × 5 = 2500

Parece-nos que a conclusão a que chegaram foi obtida através de várias tentativas, nomeadamente multiplicando o 5, que corresponderia a um quinto, por vários valores até chegarem a 4000 m. Percebemos, por esta e outras produções, que os alunos estavam a revelar muitas dificuldades em resolver a tarefa, e, numa tentativa de tornar a tarefa mais simples, resolvemos alterar o número de quilómetros de 4 para 5. Só mais tarde nos apercebemos que pelo facto de o termos feito, para além de a termos simplificado demasiado, retiramos potencialidades que a tarefa tinha, nomeadamente ao nível das diferentes representações que os alunos poderiam usar bem como ao uso de diferentes processos de raciocínio.

Como ilustrámos nas resoluções analisadas anteriormente, as relações numéricas usadas pelos alunos, relação entre quintos e décimos e de dobro, eram simples não constituindo um significativo desafio cognitivo para eles. No entanto, talvez isso tenha facilitado a apresentação de justificações, mesmo quando tal não era explicitamente pedido.

Depois de explorar as duas versões da tarefa, concluímos que não deveríamos ter simplificado a tarefa passando de um percurso de 4 km para 5 km uma vez que o nível de desafio cognitivo baixa significativamente, não permitindo a análise de relações numéricas mais complexas e desafiantes. Ainda que revelem dificuldades, o nosso papel será, como sempre, o de os ajudar a ultrapassá-las. E, neste caso, já nos podemos socorrer da experiência que tivemos para apoiar os alunos de modo mais adequado e fundamentado.

4.2. Discussão da tarefa

Parece-nos evidente que o recurso a tarefas que promovam o raciocínio e a discussão coletiva, potencia nos alunos diferentes formas de pensar, estimulam a comunicação matemática e possibilitam a aquisição de ferramentas e capacidades importantes para que as aprendizagens sejam, conforme desejamos, verdadeiramente significativas.

Durante a discussão pudemos verificar que apesar da exploração de tarefas que fazemos habitualmente com os nossos alunos, estes revelam muita dificuldade em justificar raciocínios, quer oralmente quer por escrito, no entanto foi evidente que os alunos que estavam a assistir à partilha das estratégias, estavam atentos e a interagir com os grupos que as estavam a apresentar.

Tentamos sempre valorizar a participação de todos com reforços positivos, motivando-os para a partilha e aprendizagem. Verificámos em todas as aulas que cinquenta minutos foram manifestamente insuficientes para que fosse possível fazer a síntese do trabalho desenvolvido. Ainda assim, do pouco tempo que restou para a discussão coletiva, houve a oportunidade de consolidar alguns conceitos tais como: a localização de pontos na reta numérica, a noção de fração equivalente e a comparação de frações com denominadores iguais e diferentes.

Em jeito de conclusão, temos plena consciência e a convicção de que devemos continuar a proporcionar aos nossos alunos a possibilidade de explorarem tarefas ricas e desafiantes, que promovam, não só a capacidade de usarem múltiplas representações, bem como a capacidade de raciocínio e comunicação matemática.

Capítulo

5

A PLANIFICAÇÃO DE UMA TAREFA CENTRADA NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo procuro refletir sobre a importância da planificação enquanto instrumento que permite ao professor preparar a condução, em sala de aula, de tarefas matemáticas desafiantes, que tenham como objetivo desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. No âmbito da formação integrada no Projeto Reason, na qual fui formanda, apliquei a tarefa "V mágico", na minha turma de 3.º ano de escolaridade. Considerando as potencialidades da tarefa e os desafios inerentes à sua exploração em sala de aula, considerei a importância da sua planificação à qual dei particular atenção. De modo a refletir sobre a forma de como essa planificação permitiu uma condução mais apropriada da tarefa, apresento alguns excertos da planificação e de momentos da exploração da tarefa em sala de aula e procuro refletir sobre a importância de aspetos da planificação, tais como a antecipação das resoluções e dificuldades dos alunos e do questionamento do professor.

2. A TAREFA

De entre as tarefas exploradas na formação, selecionei o "V mágico" porque considerei que o seu grau de desafio era adequado para os alunos da turma e que a mesma era um contexto propício para formular, testar e justificar conjeturas e formular generalizações, processos importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Considerei ainda que a tarefa permitia mobilizar os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, nomeadamente no que respeita ao reconhecimento de regularidades numéricas e à paridade dos números, e poderia ser usada para promover a progressão desses conhecimentos, nomeadamente no que concerne ao reconhecimento de regularidades que envolvem a adição de números pares e de números ímpares, aspetos ainda não trabalhados formalmente com a turma.

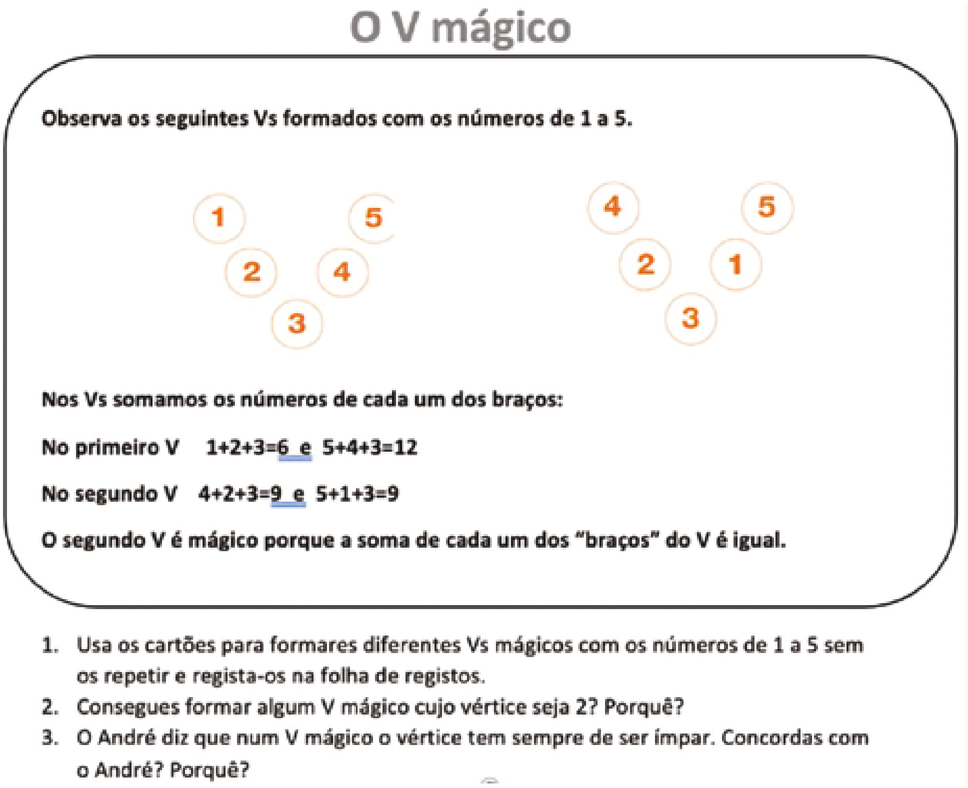
Desta forma, na planificação da tarefa identifiquei os seguintes objetivos:

- Formular, testar e justificar conjeturas;
- Reconhecer regularidades e propriedades numéricas;
- Formular generalizações.

Apesar da proposta inicial da tarefa (Figura 1) apresentar um enunciado um pouco mais dirigido, com três questões orientadoras, considerei mais desafiante para os alunos apresentar a tarefa de uma forma mais aberta, não referindo, por exemplo, a definição do que era considerado um "V mágico" e conduzindo os alunos ao reconhecimento das diferenças entre os dois Vs apresentados. Também não coloquei diretamente as questões 2 e 3 apresentadas no enunciado, relativas às possibilidades de considerar diferentes números no vértice do V mágico, considerando que a exploração livre dos diferentes Vs mágicos conduziria os alunos à formulação dessas conjeturas.

Figura 1

Enunciado da tarefa como proposto na formação


O V mágico

Observa os seguintes Vs formados com os números de 1 a 5.

1 5 2 4 3 — 4 5 2 1 3

Nos Vs somamos os números de cada um dos braços:

No primeiro V 1+2+3=6 e 5+4+3=12

No segundo V 4+2+3=9 e 5+1+3=9

O segundo V é mágico porque a soma de cada um dos "braços" do V é igual.

1. Usa os cartões para formares diferentes Vs mágicos com os números de 1 a 5 sem os repetir e regista-os na folha de registos.
2. Consegues formar algum V mágico cujo vértice seja 2? Porquê?
3. O André diz que num V mágico o vértice tem sempre de ser ímpar. Concordas com o André? Porquê?

Para além dessa adaptação da tarefa, considerei ainda uma extensão[1], apresentando a tarefa em duas partes distintas – Parte I e Parte II. Na parte I (Figura 2) pretendia explorar os dois Vs apresentados no enunciado, os quais envolviam os números consecutivos de 1 a 5, sendo três números ímpares e dois números pares.

Figura 2

Apresentação da parte I da tarefa

[1]Adaptada de: Bragg, L., Loong, E., Widjaja, W., Vale, C., & Herbert, S. (2015). Promoting reasoning through the Magic V task. *Australian Primary Mathematics Classroom, 20*(2), 10–14.

A parte II foi apresentada oralmente, propondo a formação de Vs mágicos usando também cinco números consecutivos, mas de 2 a 6, ou seja, onde três números são pares e dois ímpares.

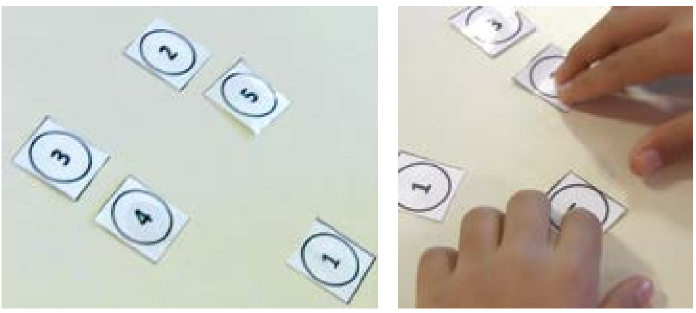
3. A PLANIFICAÇÃO E A CONDUÇÃO DE UMA AULA PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Na aplicação da tarefa em sala de aula segui uma metodologia de natureza exploratória, optando por um modelo de quatro fases diferentes: apresentação da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens, considerando esta última apenas no final da parte II da tarefa com o objetivo de evidenciar os conhecimentos matemáticos trabalhados ao longo da tarefa. Com a intencionalidade de conduzir os alunos às aprendizagens esperadas, nomeadamente no que respeita aos processos de raciocínio matemáticos já referidos, estruturei a planificação da tarefa de forma muito detalhada e de acordo com as diferentes fases referidas.

Para a exploração da tarefa considerei recursos adequados aos diferentes momentos da aula, com a intencionalidade de facilitar a emergência dos processos de conjeturar, testar e justificar essas conjeturas e de surgirem as primeiras generalizações. Assim, para os momentos de trabalho autónomo, distribuí cartões com os números (Figura 3) relativos a cada parte da tarefa e folhas de registo com os Vs desenhados e espaços em branco para os alunos registarem os números. A distribuição desses recursos nos momentos do trabalho autónomo tinha como intencionalidade que os alunos manipulassem os cartões e, a pares, confirmassem ou refutassem as conjeturas que pudessem surgir informalmente.

Figura 3

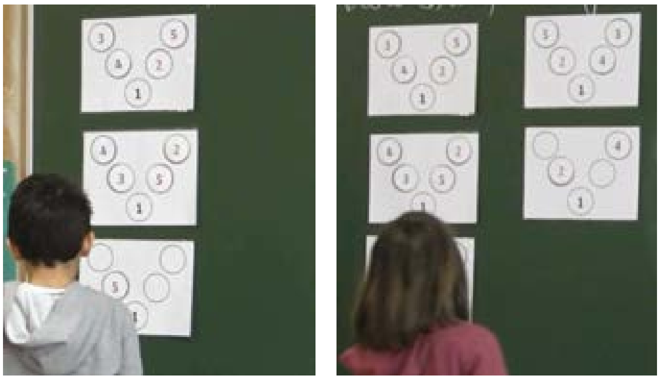
Cartões com os números distribuídos aos alunos



Para os momentos de exploração coletiva utilizei o projetor, o quadro preto e cartões com os números de 1 a 5 em tamanho grande, de forma a permitir a apropriação pelo coletivo da turma do que estava a ser explorado. Os cartões com os números de 1 a 5 em tamanho grande (Figura 4) permitiram replicar o que os pares tinham feito no momento de trabalho autónomo, movendo os cartões e alterando as posições dos mesmos, e, em simultâneo, a sua utilização conduziu a turma à necessidade de organizar essa exploração de forma a poder aferir se havia Vs repetidos ou em falta.

Figura 4

Cartões com os números, em tamanho grande, usados no momento de discussão coletiva



Nos pontos seguintes descrevo os principais momentos da aula e a sua planificação prévia, salientando a importância de uma previsão detalhada e, também, da necessária flexibilidade para fazer as adaptações decorrentes do que vai surgindo na ação.

3.1. Desafio inicial: construir Vs mágicos usando os números 1, 2, 3, 4 e 5

No momento de apresentação da tarefa projetei as imagens dos dois Vs, um mágico outro não, (Figura 2) e pretendia que, em diálogo com os alunos, estes reconhecessem as semelhanças e diferenças entre os Vs e que, dessa forma, fosse introduzido o V mágico. Assim, na planificação desta fase da aula, considerei que o lançamento da tarefa deveria permitir a sua apropriação por parte dos alunos, mobilizando-os para a resolução do desafio e permitindo que todos compreendessem o que era pedido. Considerando a importância de os alunos reconhecerem as diferenças entre os dois Vs apresentados e de identificarem as razões que permitiam considerar um mágico e outro não, antecipei na planificação eventuais dificuldades em perceber as diferenças entre os dois Vs. Desta forma, para esta parte da aula, incluí três colunas na planificação, uma relativa à minha ação de forma a conduzir os alunos à exploração esperada, outra relativa à antecipação de possíveis ações dos alunos e, uma última coluna, com uma possível reação da minha parte a algumas das ações dos alunos que foram antecipadas (Figura 5).

Figura 5

Excerto da planificação do momento da apresentação da Parte I da tarefa

ii. Em seguida, questiona os alunos, conduzindo-os a identificar semelhanças e diferenças entre os 2 Vs:

Ação da professora: Questionamento	**Ação dos alunos:** Espera-se que os alunos…
– O que está no quadro? – Que figuras formam os números?	– Identifiquem a forma dos Vs
– São iguais os dois Vs? Ou são diferentes? – O que é igual? – O que é diferente?	– Reconheçam que nos Vs estão os números de 1 a 5 – Reconheçam que alguns números estão na mesma posição (3, 5 e 2) e outros em diferentes posições (1 e 4). – Reconheçam que os números 1, 3 e 5 são números ímpares e os números 2 e 4 são números pares

iii. Caso não surja, por parte dos alunos, a tentativa de adicionar os números, a professora propõe outra forma de olhar para os "Vs.

Ação da professora:	**Ação dos alunos:**	**Reação da professora:**
– Temos estado a pensar nos números isoladamente. Mas, e se adicionarmos esses números que estão nos "Vs", o que será que acontece?	– Adicionam todos e dizem que dá 15.	
– E podemos adicionar de outra forma?	1. Podem adicionar 3 números de um braço e dois do outro 2. Podem adicionar 2 números de cada braço, ignorando o que está no vértice: No 1.º V um lado dá 3 e outro dá 9 No 2.º V cada lado dá 6	1. Continua a questionar se não pode haver outra forma de adicionar 2. Propõe adicionem também o número que está no vértice, conduzindo os alunos a verificarem que no 2.º V isso não altera o facto de a soma de cada lado ser igual
– Refere que o 2.º V é especial e que se chama "V mágico"	1. Questionam porquê 2. Referem que é mágico porque ambos os braços dão a mesma soma.	1. Questiona a turma perguntando se alguém sabe o porquê

No decurso deste momento da aula, rapidamente os alunos referiram que, em ambos os Vs estavam os mesmos números, identificando quais mantinham a sua posição e quais os que mudavam de posição (o 1 e o 4). Na continuidade do questionamento sobre o que identificavam nos Vs, a observação de um aluno direcionou a turma para a adição dos números envolvidos, como se pode verificar no excerto seguinte.

A1 – A soma dos dois números.

Professora (PC) – O que é que isso quer dizer, a soma dos dois números?

A1 – Fazes o resultado do 1, 2, 3, 4, 5 e depois o outro vai ter o mesmo resultado. E fazes duas vezes esse resultado.

PC – O A1 está a dizer-nos que podemos olhar para os V de outra forma, em vez de olharmos para os números isolados, podemos fazer o quê, com os números dos V?

Vários alunos – Contas.

PC – Contas. Que contas?

A2 – Contas de mais.
PC – Então e o A1 disse qualquer coisa sobre como adicionar os números...
A1 – Se adicionasse o 1, 2, 3, 4 e 5, o outro teria o mesmo resultado.
PC – Como é que tu sabes?
Vários alunos – Porque têm os mesmos números.
A1 – Só que estão trocados e depois é fazer duas vezes esse número.

A primeira ação que eu tinha prevista na planificação para a condução deste momento não chegou a ser necessária porque o aluno A1 fez referência à soma dos números dos Vs. No entanto, a constatação de que a soma dos números adicionados nos dois Vs seria a mesma não permitiria aos alunos reconhecer que o segundo V era mágico. Durante mais algum tempo os alunos foram referindo outras formas de adicionar os números nos Vs, mas sem olharem para a adição dos números de cada braço em separado. Por isso, senti necessidade de apresentar essa proposta, sugerindo que separassem os dois braços dos Vs. A partir desta sugestão, uma aluna explica a forma como se podiam adicionar os números em cada braço dos Vs.

A6 – Se dividirmos o V fica o 4 e o 2 de um lado e o 5 e o 1 do outro. No caso do primeiro V fica o 2 mais 1 de um lado e o cinco mais quatro do outro.
PC – Quanto é que fica?
A1 – Cinco mais quatro é nove e dois mais um é três.
PC – E do outro lado?
A2 – Seis e seis. Já percebi, professora! Vai dar o mesmo número na soma.

Este excerto mostra que, através desta condução do diálogo, os alunos fizeram o que tinha antecipado na planificação: adicionar dois números de cada braço, ignorando o que está no vértice. Considerando a importância do número colocado no vértice para que o V seja mágico, senti necessidade de conduzir os alunos nesse sentido, tal como tinha previsto na planificação (Figura 5).

PC – E se eu quiser adicionar o três como é que faço? Se fizer cinco mais um mais três dá?
Vários alunos – Nove.
PC – E quatro mais dois mais três?
Vários alunos – Nove.
PC – E no primeiro V? Isso verifica-se?
Alguns alunos – Não.
PC – Um mais dois mais três é seis e cinco mais quatro mais três é doze. Não é igual. Assim, temos que o segundo V é o V mágico. Porquê?
A3 – Porque dá o mesmo resultado, ou seja, a soma dos dois braços do V é igual.

Apresentando o segundo V como V mágico, propus aos alunos que, com os mesmos números, descobrissem outros Vs mágicos, em trabalho autónomo a pares. Nesse momento distribui, pelos pares de alunos, os cartões com os números de 1 a 5 e as folhas de registo.

Para a fase do trabalho autónomo dos alunos, na planificação, antecipei que, durante a descoberta de outros Vs mágicos, os alunos pudessem começar a formular as primeiras conjeturas. Na antecipação dessas conjeturas considerei a possibilidade de os alunos criarem outros Vs mágicos, mas sem reconhecerem ainda a forma de como a paridade dos números poderia condicionar a construção desses Vs mágicos. São exemplos dessas antecipações as seguintes:

- Não podemos juntar os números maiores num braço para conseguirmos a mesma soma nos dois braços;
- Podemos trocar os números do braço direito com o braço esquerdo e já obtemos outro V mágico;
- Podemos trocar os números dentro de cada braço e já obtemos diferentes Vs mágicos.

Também antecipa conjeturas que envolvem esses conhecimentos:

- Com os números 2 e 4 nos vértices não conseguimos formar Vs mágicos;
- Se juntarmos só números pares num braço, a soma vai ser par e se juntarmos só números ímpares num braço a soma vai ser par, se juntarmos um par com um ímpar a soma vai ser ímpar.

Para essas possíveis conjeturas, antecipei também possíveis questões a colocar para permitir aos alunos testarem essas conjeturas, tais como: "O que está a acontecer?; O que concluis?; E porque acontece/não acontece?; Mostra porque dizes isso". Também antecipei questões para que os alunos justificassem as suas conjeturas, por exemplo: "E porque será assim? Então que números podemos colocar nos vértices para obter Vs mágicos? Esses números são pares ou ímpares? Então o que podemos concluir? Como sabes isso?".

Tal como previsto na planificação desta fase da aula, neste momento diferentes alunos começaram a formular as suas conjeturas. O excerto seguinte mostra como um par de alunos constatou que não podia formar Vs mágicos colocando os números pares no vértice, que a mesma conjetura foi formulada a partir da tentativa e erro na construção dos diferentes Vs mágicos e que não conseguem ainda justificar essa conjetura.

PC – Então descobriram o quê?
A4 – Que não dá para pôr números pares nos vértices.
PC – Porquê? Já descobriram a razão?

A4 e A5 – Não.

PC – Então como é que descobriram?

A5 – Porque estivemos a tentar fazer com os números pares nos vértices e não dá.

PC – E isso significa o quê? Que números podem estar no vértice?

A5 – O 1, o 3 e o 5.

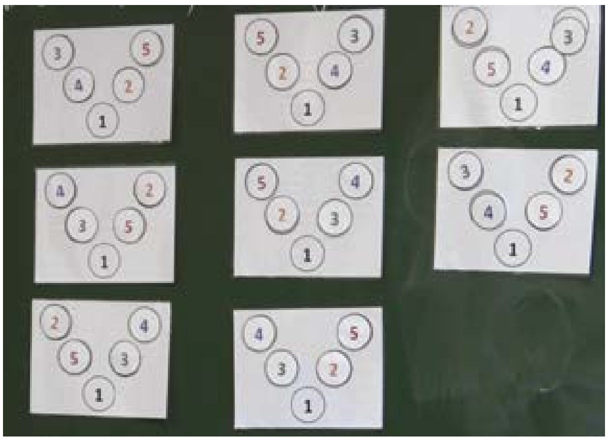
PC – Ok, uma boa descoberta. Era interessante descobrir porque é que não podem lá estar o 2 e o 4.

Na planificação do momento de discussão coletiva considerei que diferentes pares pudessem apresentar os Vs mágicos descobertos. Para além disso, antecipei a necessidade de levar os alunos a perceberem se tinham todos os V mágicos possíveis e de como os conduzir a verificarem se tinham, de facto, todos os possíveis. Na planificação antecipei também que, caso não surgisse a ideia por parte dos alunos, deveria propor a organização a partir dos números que estão nos vértices. Todas estas ações previstas tinham como primeiro objetivo que os alunos identificassem a particularidade dos números usados nos vértices dos Vs mágicos e, de forma organizada e estruturada, descobrissem que são possíveis 24 Vs mágicos.

Assim, seguindo esta orientação, neste momento da aula os alunos foram construindo todos os Vs mágicos possíveis colocando o 1 no vértice (Figura 6). Depois, conduzi os alunos a verificarem se tinham todos e como podiam descobrir isso, observando os que tinham os mesmos números nos braços, mas em posições diferentes. Ainda nesse momento, questionei sobre quantos Vs mágicos conseguiam obter com o 1 no vértice e, perante a constatação de que seriam possíveis 8, facilmente os alunos intuíram que conseguiriam obter, na totalidade, 24 Vs mágicos, considerando que apenas os podiam formar com os três números ímpares nos vértices.

Figura 6

Sistematização da descoberta dos 8 Vs mágicos possíveis com o 1 no vértice



3.2. Novo desafio: construir Vs mágicos usando os números 2, 3, 4, 5 e 6

Na planificação desta parte da aula previ que, no momento de trabalho autónomo realizado a pares, os alunos poderiam, por exemplo, começar por colocar números ímpares nos vértices, sugestionados pela parte I da tarefa, verificando, em seguida, que não formariam Vs mágicos. Previ ainda a necessidade de os alunos reconhecerem as diferenças relativamente a estes novos números, identificando que aqui tinham três pares e dois ímpares. Antecipei também que os alunos pudessem usar as regularidades identificadas na primeira parte da tarefa para mais facilmente concluírem que deveriam colocar um número par no vértice para que cada braço ficasse com um número par e um número ímpar.

Tal como previsto na planificação, os alunos começaram a formular as suas novas conjeturas alicerçadas naquelas que usaram na primeira parte da tarefa. Por exemplo, num dos pares, um aluno refere "Acho que descobrimos uma nova regra. Só é possível fazer Vs com números pares no vértice".

No excerto seguinte, as alunas compararam com a regularidade identificada na parte I da tarefa e referiram mesmo que nestes novos números, há mais pares do que ímpares.

A7 – Eu acho que desta vez não dá com números ímpares.
PC – Porquê?
A7 – Porque vai do dois ao seis e há mais pares do que ímpares.
A8 – Seis mais três é nove e cinco mais quatro é nove mais o vértice, onze. São iguais.

Também o excerto seguinte mostra como os alunos usaram as regularidades encontradas anteriormente para formular novas conjeturas, comparando os números relativamente à sua paridade — "No caso anterior, tínhamos [três] números ímpares e não podíamos pôr pares nos vértices. E neste caso, tínhamos três números pares e não podiam ter vértices ímpares". De facto, esta comparação permitiu a este par de alunos usar as propriedades relativas à adição de números pares e de números ímpares para justificar a conjetura e conduzir à generalização.

A4 – Descobri que o 3 e o 5 não podem estar no vértice porque são números ímpares.
A5 – No caso anterior, tínhamos números ímpares e não podíamos pôr pares nos vértices. E neste caso, tínhamos três números pares e não podiam ter vértices ímpares.
PC – Porquê?

A5 – Tiro o número dois e agora tenho quatro números. Vou somar um par e um ímpar para ver se dão resultados iguais. Vou juntar o três e o seis que dá 9 e o cinco mais quatro que dá 9.

PC – Por que é que somo par e ímpar e não dois pares?

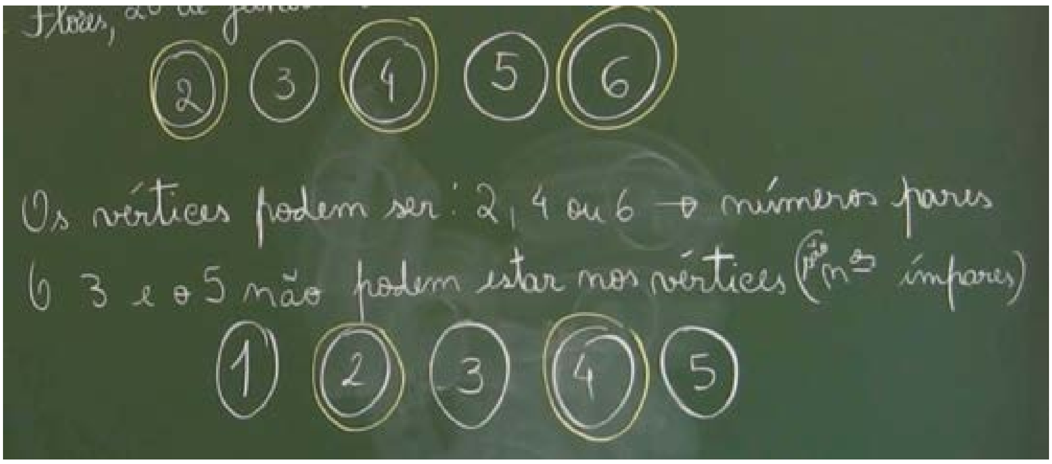
A5 – Porque ímpar com par dá ímpar e par com par dá par. A estratégia é somar o maior par com o menor ímpar e o maior ímpar com o menor par.

Na planificação da discussão coletiva desta segunda parte da tarefa, considerei que os pares deveriam apresentar as suas conclusões, dando exemplos sempre que necessários, mas sem apresentar exaustivamente os Vs mágicos criados. Nesta fase da planificação considerei que seria importante focar os alunos na razão pela qual, com estes novos números, apenas os números pares poderiam ser colocados nos vértices para obter Vs mágicos.

Assim, neste momento da aula, comecei por propor que comparassem os números usados na parte I – números de 1 a 5 – com os usados na parte II – números de 2 a 6. Registei no quadro preto estes últimos números e perguntei o que descobriram de novo nesta parte da tarefa. A esta questão os alunos responderam que os vértices aqui teriam de ser o 2, o 4 ou o 6, ou seja, os números pares, e registei essa conclusão. Depois conduzi os alunos a referirem os primeiros números explorados e a recordarem que, com esses números, apenas podiam estar nos vértices os números ímpares. Nesta altura, um dos alunos disse "Eu acho que é porque tem mais números pares", referindo-se aos números usados na parte II da tarefa. Nessa altura, registei os números de 1 a 5, e contornei os números pares, validando a conjetura formulada pelo aluno (Figura 7).

Figura 7

Registo no quadro do momento da discussão coletiva da Parte II



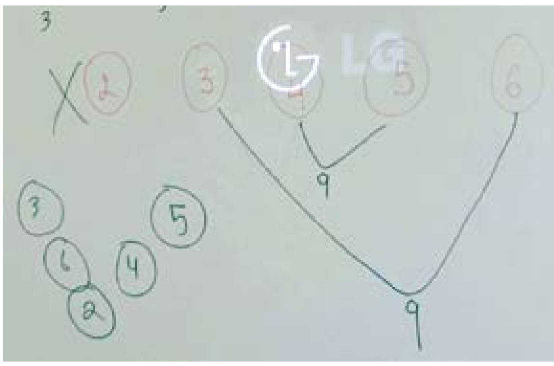
Em seguida, questionei a turma sobre o porquê de tal acontecer. Tal como já referido, durante a fase de trabalho autónomo da tarefa, tanto na parte I como na parte II, alguns alunos já se tinham questionado sobre o porquê de num caso só usarem números ímpares nos vértices e noutro caso só os números pares. Apesar de conseguirem com facilidade formular e validar essa conjetura, os alunos não conseguiam ainda justificá-la. Então, tal como previsto na planificação da tarefa, coloquei a questão de várias formas, tais como: "Mas porque é que isso acontece? Porque é que o facto de termos essas diferenças entre os números pares e ímpares faz com que as regras para formar os Vs mágicos também sejam diferentes?", mas os alunos não conseguiram responder. Então, uma aluna refere o seguinte:

A6 – Porque o 1 e o 5 são ímpares.
PC – Estás a falar daquele caso? (apontando para os números 1, 2, 3, 4 e 5 registados no quadro).
A6 – Sim. E o 2 e o 6 são pares.
PC – O 1 e o 5 são ímpares e o 2 e o 6 são pares... ela está a falar dos que estão nas pontas. E o que é que isso me ajuda a pensar quando adiciono os lados dos Vs?
A1 – Isso dá para ser uma estratégia.
PC – Então?
A1 – Imagina nós temos mais números pares, tiramos um número par e depois vemos se os outros dão o resultado igual e colocamos esse que tiramos no vértice.

Nesse momento, pedi a este aluno para ir explicar essa ideia ao quadro. O aluno explicou que se tirar o 2 para o colocar no vértice, adiciona os outros números de forma a poder ficar a mesma soma em cada braço do V. Durante este processo, retificando um engano, referiu que tem sempre de juntar o maior com o menor, em cada lado, ou que não pode juntar os dois maiores e os dois menores.

Figura 8

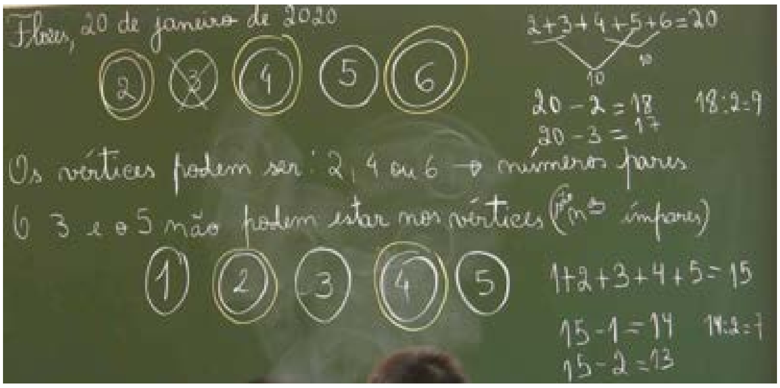
Apresentação, feita pelo A1, de um exemplo do que tinha referido oralmente



Com a intenção de levar os alunos a perceberem que, retirando o valor do vértice, a soma dos restantes números tinha de ser divisível por dois para que pudesse distribuir-se igualmente em cada braço, retomei a ideia de adicionar todos os números que já tinha sido avançada por um aluno, mas à qual não tinha dado seguimento. Assim, juntamente com os alunos, no quadro registei as operações: 2+3+4+5+6=20 e 1+2+3+4+5=15. Em seguida, em conjunto com os alunos subtraí, em cada caso, um dos números pares e um dos números ímpares, procurando demonstrar que quando o resultado dessa subtração é um número par, ou seja, divisível por 2, podemos formar um V mágico.

Figura 9

Registo no quadro do momento final da discussão coletiva da Parte II



Como se pode verificar pelo excerto da planificação apresentado na Figura 10, estas explorações tinham sido antecipadas por mim. No entanto, na aula foi claro que nem todos os alunos se tinham apropriado igualmente dessas mesmas conclusões. Constatando este facto, optei por não insistir na exploração de todos os casos, considerando que, para aqueles alunos, naquele momento, essa exploração não seria adequada.

Figura 10

Excerto da planificação referente ao momento de discussão coletiva da Parte II da tarefa

Na discussão coletiva, os alunos poderão constatar que:

Número do vértice	2	4	6
Soma de cada braço	3+4+5+6=18 18:2=9 9+**2**=11 11	2+3+5+6=16 16:2=8 8+**4**=12 12	2+3+4+5=14 14:2=7 7+**6**=13 13

Deverá ainda ficar evidente a razão porque só podem ficar os números 2, 4 e 6 nos vértices:
- Se colocarmos um número ímpar no vértice, um braço ficará sempre com dois pares (p+p=p) e o outro com um ímpar e um par (i+p=i), o que resulta em somas diferentes.
Se colocarmos um número par no vértice, cada braço ficará com um par e um ímpar.

Podem ainda verificar que 2+3+4+5+6=20 e:
20—2=18; 18:2=9
20—3=17; não é divisível por 2
20—4=16; 16:2=6
20—5=15; não é divisível por 2
20—6=14; 14:2=7
Concluindo que no vértice só podem estar os números 2, 4 e 6.

3.3. Desafio final: sistematizar as aprendizagens

Para a fase de sistematização das aprendizagens, considerei que deveria conduzir os alunos a focarem-se na adição envolvendo a paridade dos números, procurando que estes generalizassem as descobertas efetuadas com os números particulares usados na tarefa. Assim, projetei igualdades envolvendo a adição e a paridade de números, mas sem usar números particulares e apenas a referência a "par" e "ímpar", pretendendo que os alunos generalizassem essas regras para quaisquer números pares ou ímpares.

Figura 11

Momento de sistematização das aprendizagens

Completa com as palavras "par" ou "ímpar"

- par+ímpar+ímpar= par
- ímpar+ímpar+ímpar= ímpar
- par+par+ímpar=____
- ímpar+ímpar+ímpar+ímpar=____
- ímpar+ímpar+ímpar+ímpar+ímpar=____
- par+ímpar+ímpar+ímpar+ímpar=____

No coletivo, questionei os alunos sobre a forma de completar as igualdades. Inicialmente os alunos apresentaram exemplos com números particulares, mas solicitei que indicassem as regras para quaisquer números pares ou ímpares. O excerto seguinte é ilustrativo desse momento.

> **PC** – Se nós pensarmos em números vai dar par a primeira, mas e se eu não pensar em números?
> **A3** – Porque par mais ímpar dá ímpar e ímpar mais ímpar é par.
> **PC** – E a segunda?
> **Vários alunos** – Ímpar.
> **PC** – Porquê?
> **A9** – Porque ímpar mais ímpar dá par e par mais ímpar é ímpar.

Explorei ainda com a turma a relação entre o número de parcelas envolvidas e a paridade da soma, ainda que de um modo muito informal. Por exemplo para a adição de quatro parcelas de números ímpares, um aluno referiu que a soma é par "porque é quatro vezes ímpar e quatro é par". Com esta sistematização, pretendia que os alunos generalizem, no coletivo da turma, as regularidades relativamente à adição de números pares e de números ímpares.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A planificação de uma tarefa que pretenda desenvolver nos alunos o raciocínio matemático tem, necessariamente, de prever os momentos em que é propício mobilizar os alunos para formularem conjeturas, as testarem e as justificarem e também os momentos propícios para a formulação de generalizações. Tal como apresentado ao longo deste capítulo, a exploração da tarefa em sala de aula foi ancorada por uma planificação que contemplava todos os momentos da aula e a forma como os mesmos podiam ser conduzidos, antecipando também possíveis resoluções e dificuldades dos alunos e formas de reação que considerei que seriam mais apropriadas. Naturalmente que a aula não seguiu exatamente o que estava planificado e a planificação aqui não é encarada como um guião a respeitar fielmente. A planificação permitiu, no entanto, pensar na melhor forma de aplicar a tarefa, exigindo que, para tal, a tarefa fosse inicialmente resolvida por mim da forma de como esperaria que os meus alunos o fizessem, identificando dificuldades e potencialidades para a concretização dos objetivos de aprendizagem que tinham sido previstos. Através do conhecimento que tenho dos alunos, foi possível antecipar as suas reações, resoluções, dificuldades e, desta forma, preparar-me atempadamente para a melhor forma de os levar a ultrapassarem essas dificuldades e a progredirem nos seus conhecimentos. Mas uma sala de aula e, nomeadamente, uma sala de aula onde se segue uma metodologia de natureza exploratória, é um organismo vivo, onde não é possível prever todos os acontecimentos e onde acontecem imensas situações que exigem reações muito rápidas e a tomada de decisões constante sobre diferentes aspetos, tais como os relativos à gestão da aula e aqueles que se relacionam diretamente com a condução das aprendizagens matemáticas. Considero, assim, que o que torna uma planificação útil não é o facto de ela descrever uma aula que acontecerá exatamente dessa forma, como se de um guião se tratasse. O que torna uma planificação útil é porque ela prepara melhor o professor para o imprevisto dessa aula, habilitando-o a tomar decisões que possam ser mais adequadas do que tomaria se não antecipasse os múltiplos cenários possíveis.

Naturalmente que a escolha das tarefas é igualmente importante. A tarefa do V mágico aqui apresentada caracteriza-se pela sua natureza desafiante que, embora exigente, permite a todos os alunos apropriarem-se dela e resolverem-na de acordo com os seus conhecimentos e capacidades e ao seu ritmo. Assim, nesta aula houve diferentes desempenhos dos alunos, como, aliás, é natural acontecer em todas as aulas. Mas todos os alunos se envolveram na tarefa, todos os alunos descobriram vários Vs mágicos, todos os alunos compreenderam que números "funcionavam" no vértice e identificaram-nos de acordo com a sua paridade; mas, naturalmente, menos alunos conseguiram formular conjeturas sobre o porquê de isso acontecer ou estabelecer estratégias eficazes que permitissem construir os Vs mágicos possíveis de forma mais organizada e estruturada.

Para a condução da aula e para que todos os alunos desempenhassem uma atividade produtiva e ativa na tarefa, os recursos utilizados também se revelaram importantes. Assim, a apresentação dos números em pequenos cartões permitiu aos alunos moverem-nos, trocarem as suas posições e refinarem as suas estratégias para descobrir outros Vs mágicos. Por outro lado, as folhas de registo também se verificaram importantes, mas, no decurso da aula, revelaram-se insuficientes para todos os Vs mágicos que os alunos iam descobrindo, tendo sido necessário fotocopiar mais folhas de registo. Este facto poderia ter sido contemplado na planificação e tal não ocorreu. Também os recursos utilizados nos momentos coletivos com toda a turma se revelaram eficazes. A projeção dos primeiros Vs permitiu a discussão com toda a turma, a utilização de cartões maiores com os números permitiu descobrir os oito Vs mágicos possíveis para o mesmo vértice e o quadro preto e a forma como a informação foi nele organizada também se revelou eficaz.

Concluindo, a exploração de tarefas desafiantes em sala de aula, através metodologias exploratórias que envolvam ativamente os alunos, beneficia de planificações também elas estruturadas nesse sentido e igualmente desafiantes, nomeadamente no que respeita à exigência que coloca ao professor para antecipar e prever o maior número possível de acontecimentos que poderão ocorrer no organismo vivo que é uma aula e de preparar a sua ação para esses desafios.

Capítulo

6

OS SACOS DE BERLINDES

UMA TAREFA PROMOTORA DE DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Maria Teresa Ramos
Agrupamento de Escolas de Boa Água

1. INTRODUÇÃO

A participação na formação *Promover o raciocínio matemático dos alunos dos anos iniciais* foi uma experiência muito enriquecedora por abordar um tema fulcral no âmbito da Matemática e pela sua atualidade, uma vez que o desenvolvimento desta capacidade matemática transversal contribui diretamente para o desenvolvimento de uma das áreas de competência enunciada no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória* (PASEO) (Martins et al., 2018).

Os objetivos desta oficina de formação consistiam em levar os professores a aprofundar o seu conhecimento matemático e didático sobre o significado de raciocínio matemático e os processos a ele associados, bem como desenvolver a capacidade de selecionar, adaptar e conceber tarefas matemáticas promotoras de desenvolvimento do raciocínio e de planificar a sua realização e discussão. A proposta de trabalho apresentada para a concretização deste objetivo possibilitou uma análise de tarefas, de discussão construtiva e de partilha muito ricas a que acresce ainda o valor acrescentado que resultou deste trabalho, ao ser aplicado efetivamente à experiência de ensino.

No nosso quotidiano de professores, por mais que planifiquemos adequadamente as tarefas que propomos aos alunos, nunca conseguimos prever de uma forma tão exaustiva as várias possíveis estratégias de resolução, as dificuldades com que os alunos se deparam e as nossas formas de os ajudar a ultrapassá-las. O facto de planificar em conjunto e, sempre que possível, participar e coadjuvar os colegas[1], deu-nos uma visão muito mais abrangente, o que nos possibilitou compreender como os diferentes contextos e ações do professor podem determinar nos alunos estratégias de resolução distintas e consequentemente diferentes aprendizagens.

Neste texto, procurarei traduzir a minha experiência em torno da planificação da tarefa "Os sacos de berlindes", que selecionei para o primeiro momento "Levar à prática", do desenrolar da aula em que a propus aos alunos e foi por eles explorada, assim como da minha reflexão final sobre a minha prática, referindo aspetos a melhorar, aspetos a reter e desafios futuros.

2. A ESCOLHA DA TAREFA

Na oficina de formação foram-nos apresentadas várias tarefas, todas elas de grande potencial na promoção do desenvolvimento do raciocínio matemático.

[1]Colocando em prática este princípio, na aula que irá ser descrita participaram uma das formadoras, a Professora Joana Brocardo (PJ) e uma colega do meu grupo, também formanda desta oficina.

No entanto, não optei por nenhuma porque apenas duas abordavam conteúdos que se enquadravam na sequência de aprendizagens planificada para a turma e uma delas já tinha sido trabalhada com eles no final do ano letivo anterior. As restantes surgiriam muito descontextualizadas no projeto que a turma estava a desenvolver e fora do percurso de ensino estabelecido, o que não seria de todo aconselhável pois, como refere Ponte (2005), é importante que haja diversificação de tarefas, mas mais do que tarefas isoladas, o professor tem de organizar sequências de tarefas que proporcionem um percurso de aprendizagem cœrente que permita aos alunos atingir os objetivos de aprendizagem previstos.

Claro que poderia ter optado pela tarefa *Chupa-chupas*, mas foi trabalhada numa das sessões de formação e já havia vários colegas que a tinham escolhido. Pensei então que seria mais enriquecedor procurar outra tarefa, de modo a aumentar o nosso portefólio de tarefas da formação, pelo que iniciei uma breve pesquisa, tendo presente os *Princípios para elaboração de tarefas para promover o raciocínio matemático dos alunos*[2] trabalhados numa das sessões iniciais da formação.

Como a turma estava envolvida num projeto designado *Viagem às nossas origens* e o trabalho que estava a ser desenvolvido em Matemática relacionava-se com o estudo das características dos números naturais e a descoberta de regularidades em conjuntos de números, números estes selecionados a partir de datas importantes para os alunos, nomeadamente de nascimento de familiares e de acontecimentos marcantes, optei por procurar tarefas que permitissem fomentar aprendizagens nesse tema. Nas aulas anteriores a turma estava a trabalhar os múltiplos e divisores de um número natural, a identificação de números primos e compostos e, a propósito de um conjunto de números colocados numa pirâmide numérica, tinha sido levantada a questão da forma como os números pares e ímpares se "comportavam" nas várias operações. Recordando ainda alguns bons conselhos e ensinamentos dos tempos do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos (PFCM), decidi "ganhar tempo" e, em vez de criar de raiz uma tarefa, apostei em recuperar a tarefa Os *sacos de berlindes*, incluída na brochura *A Experiência matemática no Ensino Básico* (Boavida et al., 2008) com a qual já tinha trabalhado em 2010/2011 e que tinha suscitado bons momentos de aprendizagem, não especificamente ao nível da aquisição de novos conhecimentos sobre as propriedades dos números naturais, mas acima de tudo na mobilização desses conhecimentos. Esta tarefa, conforme referido na referida brochura, permite destacar as potencialidades do raciocínio dedutivo enquanto processo de provar a consistência lógica de

2 Resumidamente apresentados no capítulo 1.

certas descobertas, com base em factos aceites como verdadeiros. Para além disso, é aparentemente uma tarefa muito acessível aos alunos, assente num contexto plausível, motivadora, porque coloca um desafio aceitável que leva os alunos a envolverem-se na sua exploração e permite que desenvolvam a sua autonomia, autoconfiança e o espírito de colaboração. Tendo em conta as características dos alunos, uma turma com vinte e cinco alunos (doze raparigas e treze rapazes), incluindo dois alunos com necessidades específicas de educação, com uma média de idades de 11 anos, com dificuldades de concentração, reduzida autonomia, alguns problemas de relacionamento interpessoal e grandes dificuldades na explicação e justificação das estratégias seguidas e dos seus processos de raciocínio, pareceu-me ser a tarefa ideal.

Por último, analisei ainda a tarefa para verificar se cumpria os requisitos definidos para a promoção do raciocínio matemático dos alunos, tendo constatado que para a resolver os alunos iriam exemplificar, após o que seriam levados a refletir sobre os seus processos de raciocínio, uma vez que não conseguiriam dar uma resposta à questão indicada. Colocados com a dificuldade em obter uma forma correta de responder ao pedido, os alunos procurariam justificar com base na cœrência lógica e com recurso a exemplos genéricos.

3. A PLANIFICAÇÃO - CUIDADOS A TER PARA NÃO "MATAR" A TAREFA

Numa abordagem exploratória da matemática em que se promove o desenvolvimento de capacidades transversais, os papéis do professor e do aluno alteram-se: o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem (Ponte, 2005) e é através da sua atividade que os alunos fazem aprendizagens significativas. No entanto, engana-se quem pensa que o trabalho do professor é mais reduzido, uma vez que é bem mais difícil encaminhar, fornecer ferramentas, incentivar, desafiar, estando em segundo plano, do que assumir um papel central fornecendo toda a informação.

Para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático nos alunos é fundamental ter como ponto de partida boas tarefas. Todavia, isso não é suficiente! É preciso ter em atenção o modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula. Daí a necessidade de uma planificação cuidada que permita enriquecer a oportunidade de aprendizagem sem comprometer as suas potencialidades.

Tendo em conta a idade dos alunos, o seu perfil, o nível de escolaridade e as características da tarefa, bem como a necessidade de promover uma discussão coletiva que culminasse com a sistematização das propriedades dos números que levavam à impossibilidade de uma resposta positiva ao desafio proposto, decidi que a tarefa deveria ser trabalhada em dois tempos seguidos de aula, correspondendo a 100 minutos. Este tempo permitiria estruturar uma aula em três etapas: apresentação da tarefa, sua exploração em trabalho de grupo autónomo e apresentação de resultados com discussão coletiva.

Respeitando o projeto educativo da escola e a forma preferencial com que trabalho, optei por manter os alunos organizados em seis grupos de quatro/cinco alunos, de modo a assegurar alguma heterogeneidade. O enunciado da tarefa (Figura 1) seria colocado em folhas individuais, para que cada aluno pudesse fazer os seus registos individuais e disponibilizada uma folha para registo do trabalho desenvolvido em grupo, onde seriam explicitadas as estratégias de resolução e as conclusões a que chegariam, evidenciando os processos de raciocínio envolvidos.

Figura 1

A tarefa

Adaptado de "A Experiência matemática no Ensino Básico, 2008, pp. 96"

A tarefa seria apresentada aos alunos como um desafio que deveriam resolver, recorrendo a uma forma de trabalho organizada, devendo cada aluno começar por fazer uma leitura silenciosa para se concentrar no trabalho. Após a leitura silenciosa e para garantir que todos compreendiam o que era pedido, seria pedido a dois ou três alunos que explicassem por palavras suas a interpretação que fizessem do enunciado.

Na segunda etapa da aula, enquanto os alunos trabalhassem em grupo a professora iria acompanhando o seu trabalho, encorajando-os na sua exploração, mas procurando não dar pistas para a concretização da tarefa. Foi previsto que, naturalmente, numa primeira fase, os alunos escolhessem dez berlindes ao acaso, adicionando os seus valores para encontrar o total pretendido, e que, após algumas tentativas, começassem a constatar que não é fácil obter 37. Certamente começará a surgir a dúvida: será possível chegar a 37 com dez berlindes? Ou será impossível obter esta soma? E porquê? Conforme referido por Boavida et al. (2008), nesta fase, poderá ser vantajoso, por um lado, o professor incentivar os alunos a focarem-se nos números que forem encontrando quando tiram dez berlindes e a analisarem se haverá alguma característica comum a todos eles. Por outro lado, questioná-los sobre o número de berlindes que tiram quando obtêm o resultado 37 e levá-los a refletir porque é que, nesses casos, o conseguem e no primeiro não.

Este questionamento tem como objetivo conduzir os alunos a intuir que o facto de não conseguirem obter a soma 37 poderá estar relacionado com o número de berlindes a tirar dos sacos e com as características dos números que eles contêm: todos estes números são ímpares, ao adicionar dois números ímpares, obtém-se um número par e adicionando um número par de números ímpares a soma continuará a ser sempre um número par. Se cada dois números ímpares adicionados dão uma soma par e se a adição de números pares também é par, nunca será possível obter 37 com dez berlindes, porque 37 é um número ímpar.

Para apoiar o trabalho de monitorização da exploração da tarefa, foi ainda elaborada uma grelha (Figura 2) na qual se irão registar os processos de resolução dos vários grupos de alunos, para posteriormente se ir selecionando e sequenciando, tendo em vista a orquestração da discussão coletiva.

Se, em algum grupo, os alunos avançarem com muitas exemplificações, mas tiverem dificuldade em organizar o seu trabalho, em descobrir as particularidades dos números e não conseguirem formular conjeturas ou apresentar justificações, a professora desafiá-los-á a avançar na sua exploração, propondo-lhes a análise de respostas dadas por outros alunos, p.e. a resolução de Tomás e Matilde – material de apoio já existente, elaborado a partir de anteriores resoluções da tarefa (Figura 3).

Figura 2

Grelha de registo do trabalho autónomo dos alunos

GRELHA DE OBSERVAÇÃO DIRETA - MATEMÁTICA

G	N.º	Nome	Processos de resolução							Seleção	Sequência	Conexões
			Exemplificar		Justificar/generalizar							
			N.º par de berlindes	N.º ímpar de berlindes	Todos os números são ímpares	Adição de 2 n.ºs ímpares é um n.º par	Adição de n.ºs pares é n.º par e 37 é ímpar					
1												
2												
3												

Figura 3

Resoluções de alunos para análise e desbloqueio da ação3

Resolução de Ricardo e Helena

Fizemos muitas experiências. Por exemplo:
34 = 7+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (10 números)
36 = 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1 (10 números)
38 = 1+1+1+3+3+5+5+5+7+7 (10 números)
37 = 5+5+5+5+5+5+3+3+1 (9 números)
37 = 5+5+5+5+5+7+1+1+3 (9 números)
37 = 5+5+5+5+5+3+3+3+1+1+1 (11 números)
37 = 7+7+7+7+1+1+1+1+1+1+1+1+1 (13 números)
Não conseguimos chegar a 37 com 10 números. O problema não se pode resolver.

Resolução de Tomás e Matilde

Primeiro fizemos experiências e não conseguimos. Depois olhámos melhor para os números dos sacos e descobrimos que eram todos ímpares.
Sabemos que se somarmos dois números ímpares quaisquer vamos obter sempre um número par, como, por exemplo, 9 + 7 = 16.
Portanto, se tivermos uma combinação par de números ímpares, obtemos sempre como resposta um número par, como, por exemplo, 7 + 1 + 5 + 9 = 22.
É impossível obter 37 a partir de 10 números ímpares porque 10 é um número par e 37 é um número ímpar.

3 *In* Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico – ESE de Setúbal. 2010/2011.

Resolução de João e Inês

Podemos obter 37 usando uma combinação de nove números, mas para usar dez números, tínhamos que separar um desses nove números noutros dois dos que já estão nos sacos. Mas é impossível separá-lo em exatamente dois números dos sacos, porque todos os números dos sacos são ímpares.

Na etapa de discussão coletiva das resoluções dos alunos e sistematização dos resultados, alguns grupos de alunos serão convidados a fazerem a partilha da sua resolução e do modo como pensaram. Esta sequência será definida com base nos registos de observação do trabalho dos alunos, podendo iniciar-se com um grupo em que os alunos apenas tenham exemplificado – estratégia mais simples, sem justificações – ao qual se seguirão grupos que apresentem justificações matemáticas. É importante que sejam estabelecidas conexões entre as resoluções, podendo, se necessário, usar-se os exemplos de resolução acima referidos.

Poderão ser colocadas as seguintes questões aos alunos:

- Que semelhanças encontram nas vossas resoluções?
- Qual vos parece mais completa e porquê?
- Como podem garantir que esta regularidade não se verifica apenas com estes números ímpares?

Com o objetivo de aprofundar as ideias matemáticas em jogo nesta tarefa, poderão ser lançadas possíveis extensões, nomeadamente pedindo-lhes que alterem o enunciado de modo que seja possível responder à questão, ou seja obter soma 37 com dez berlindes.

4. A AULA - PONDO EM PRÁTICA

4.1. Lançar o desafio

No início da aula foi necessário resolver algumas questões logísticas, nomeadamente a recolha de documentos e a informação dos cargos atribuídos a cada aluno dentro do seu grupo. Como a forma de trabalho da turma era em grupo, fora decidido, no início do ano, que cada aluno desempenharia rotativamente um cargo (regente/coordenador, porta-voz, redator/secretário, responsável de material/moderador), pelo que foi necessário indicar as alterações, uma vez que era dia de rotação. De seguida, procedeu-se ao registo da data e do sumário, no quadro e nos cadernos dos alunos – uma prática antiga, mas que ajuda a manter o caderno organizado para que seja mais fácil de utilizar, quando é necessário consultar, para esclarecer dúvidas ou estudar.

E chegou o momento decisivo de apresentar a tarefa! Comecei por entregar a cada responsável pelo material os enunciados, para serem distribuídos pelos elementos do grupo e colados nos seus cadernos diários, bem como a folha para registo das resoluções e decisões resultantes do seu trabalho. Foram dados uns minutos para que os alunos lessem em silêncio, de modo a criar um ambiente mais sereno que favorecesse a sua concentração na exploração da tarefa dada. Para garantir que todos compreendiam bem a tarefa, pedi a alguns alunos que explicassem por palavras suas o que tinham lido, reformulando as suas frases e solicitando a colegas que clarificassem alguns pontos. Convidei-os a resolver a tarefa, recordando-lhes a importância de o fazer de forma organizada. Considero que o cuidado com que apresentamos uma tarefa aos alunos dá o mote ao trabalho futuro: o professor tem de se esforçar por garantir que eles compreendem bem o que é para fazer, a forma como o devem fazer e uma indicação do tempo que têm para o fazer.

PT – Alguém é capaz de explicar o que leu?

A1 – Que devemos tirar os berlindes de forma que a soma dê 37.

A2 – Em cada saco de berlindes, tem o número 1, 3, 5 e 7 e temos de tirar 10 para dar 37.

PT – Eu fiquei com uma dúvida. Em cada saco há berlindes com o número 1, 3, 5 e 7?

A3 – Não. Há um saco com um número de berlindes com o número 1, há um saco com um número de berlindes com o número 3, há um saco com um número de berlindes com o número 5 e há um saco com um número de berlindes com o número 7.

PT – Não há é quantidade (de berlindes), podem tirar os que quiserem, ou seja, podem tirar todos do mesmo saco, de dois sacos ou de todos os sacos. Não há regras nessa parte. Agora vão partilhar em grupo como é que conseguem resolver este problema da forma mais organizada possível.

4.2. Mãos à obra

Esclarecidas todas as dúvidas, era hora de iniciar o trabalho autónomo. Em todos os grupos os alunos envolveram-se rapidamente na procura de uma solução e todos, sem exceção, começaram por seguir uma estratégia de exemplificação, tal como esperado. Alguns alunos, com mais fragilidades no cálculo, nomeadamente um aluno com necessidades de educação específicas, recorreram à calculadora, o que foi permitido visto que dessa forma podiam acompanhar os colegas e o objetivo da tarefa não se prendia com a fluência no cálculo. O entusiasmo era evidente e rapidamente se ouviram frases como a seguinte: «Encontrei! Quatro "setes" e três "três". Quatro vezes sete é vinte e oito, mais três é trinta e um, mais três é trinta e quatro, mais três é trinta e sete.» Mas apenas tinham usado sete berlindes!

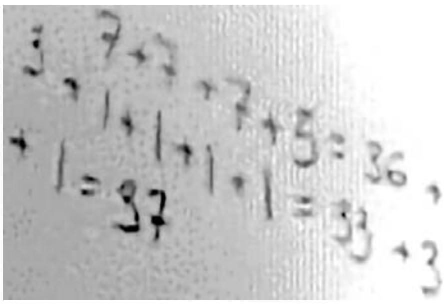
Durante esta fase da aula, procurei ir monitorizando o trabalho autónomo dos grupos de alunos, para me aperceber das estratégias que iam emergindo, para corrigir erros que fossem surgindo, para os questionar, levando-os a refletir e para os desafiar a procurar formas de ultrapassar os obstáculos com que se iam deparando.

PT – Então, nesse caso, quantos berlindes tinhas? Isso deu 37.
Alunos – 7.
PT – Com 7 berlindes tu conseguiste. Cumprimos a regra?
Alunos – Sim.
PT – Cumprimos a regra?
Alunos – Não. Ainda estamos à procura de outra forma.
PT – Por que é que falhou?
Alunos – Só tirou 7 berlindes.
PT – Então temos de acrescentar 3 berlindes. Como é que pensaram? (...) Tens 10 berlindes, mas só deu 32. (...) se ali com 7 dava 37, vocês precisam de pôr berlindes com números maiores ou mais pequenos?
Alunos – Números maiores.
PT – Força! Experimenta com números maiores.

Embora não sendo relevante para as aprendizagens subjacentes a esta tarefa, um dos aspetos que me preocupa sempre muito é a dificuldade dos alunos no pensamento relacional, traduzida na forma de encarar o significado do sinal "igual" como cálculo ou sequências de cálculos a efetuar – As famosas "contas em comboio" (ver Figura 4 e o relato explicitado em seguida, que ocorreu noutro grupo). Procuro que os alunos compreendam estes erros e os corrijam, recorrendo ao exemplo visual de uma balança de pratos em equilíbrio.

Figura 4

Registo com evidência de dificuldades na compreensão do significado do sinal "igual"



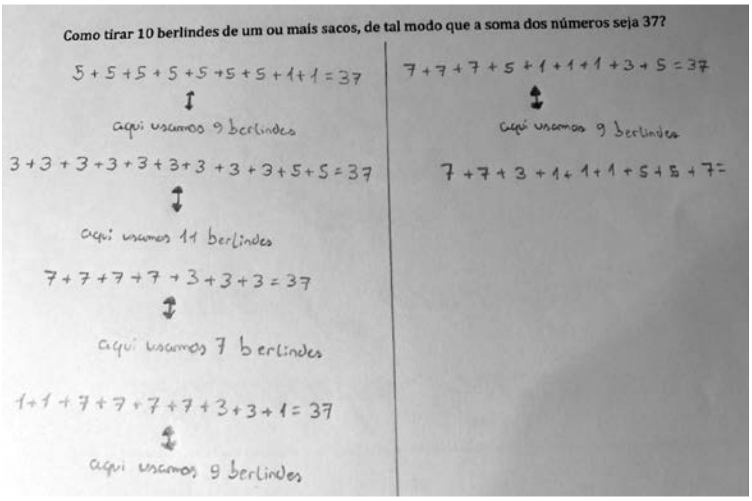
PT – Já percebi. Tu fizeste 10 + 10 + 10. Só não percebi por que é que fizeste essa conta a seguir a isto.
10 + 10 + 10 dá 30, não dá 30 + 7. Esquecemo-nos da balança, não é? Então vamos fazer aqui uma paragem, e acrescentar 30 + 7. Isso de fazer o sinal de igual e acrescentar coisas não vai dar igual.

Depois de passar por todos os grupos, conclui que emergiram essencialmente duas estratégias:

- Em alguns grupos os alunos procuravam garantir que a soma desse sempre 37 e começaram a aperceber- se que o número de berlindes usados era sempre 7, 9 ou 11 (Figura 5).

Figura 5

Registos de um grupo (3) que garantiu sempre que a soma fosse 37


Como tirar 10 berlindes de um ou mais sacos, de tal modo que a soma dos números seja 37?

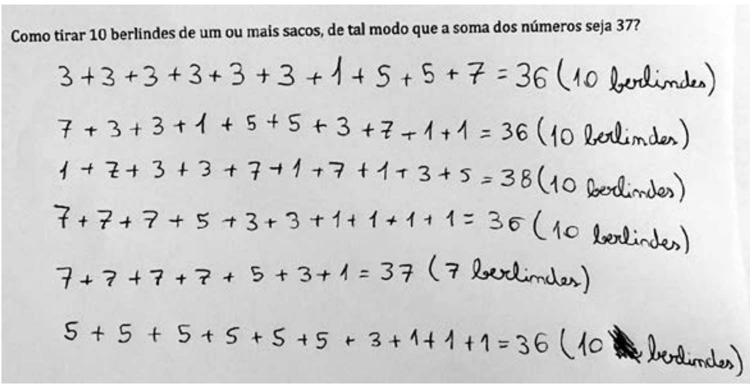
5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 = 37
aqui usamos 9 berlindes
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 5 + 5 = 37
aqui usamos 11 berlindes
7 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3 + 3 = 37
aqui usamos 7 berlindes
1 + 1 + 7 + 7 + 7 + 7 + 3 + 3 + 1 = 37
aqui usamos 9 berlindes

7 + 7 + 7 + 5 + 1 + 1 + 1 + 3 + 5 = 37
aqui usamos 9 berlindes
7 + 7 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 5 + 5 + 7 =

- Noutros grupos, os alunos procuravam que o número de berlindes fosse sempre 10. E nesse caso nunca conseguiam obter soma 37 (Figura 6).

Figura 6

Registos de um grupo (6) em que a preocupação foi tirar sempre 10 berlindes


Como tirar 10 berlindes de um ou mais sacos, de tal modo que a soma dos números seja 37?

3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 5 + 5 + 7 = 36 (10 berlindes)
7 + 3 + 3 + 1 + 5 + 5 + 3 + 7 + 1 + 1 = 36 (10 berlindes)
1 + 7 + 3 + 3 + 7 + 1 + 7 + 1 + 3 + 5 = 38 (10 berlindes)
7 + 7 + 7 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36 (10 berlindes)
7 + 7 + 7 + 7 + 5 + 3 + 1 = 37 (7 berlindes)
5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 = 36 (10 berlindes)

Passado poucos minutos, os alunos começaram a perceber que obter soma 37 com 10 berlindes retirados daqueles sacos não era tão fácil como pensavam... seria impossível? O problema só tinha duas condições, mas estas não se cumpriam simultaneamente. Esta perceção começa a ser evidente nos diálogos do grupo 4 e do grupo 3:

Grupo 4

A2 – 5 vezes 6 igual a 30. Já temos o 30, só tiramos o berlinde de 7 e dá 37.

A4 – Mas têm que ser 10 berlindes! Temos que arranjar maneira de fazer isto com 10 berlindes... olha, olha vê só esta: 3 mais 3, 6, mais 1, 7. Só aí já adicionamos mais dois berlindes. Aí fica 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... fica nove. Espera aí...

Grupo 3

PT – Quais são os números que podes usar? São só os que estão aí. Como é que cumpres a regra?

A5 – Só posso tirar 10.

PT – Pensem lá um bocadinho, vocês têm aí conjuntos de 9, então se conseguissem baixar um número num dos berlindes, já podiam por o berlinde a seguir.

A3 – É isso que estou a atentar fazer!

PT – E consegues? Usas os mesmos números, mas só mudas 1. Muda lá um, para ver se consegues pôr dois berlindes no lugar de um.

A3 – Tiro o 5 e ponho 3 + 1 + 1.

PT – Então, mas assim já estás a pôr a mais...
Pensa bem no que estás a fazer. Estavas a dividir o de 5 em dois berlindes, consegues por 3 e o que é que te sobra?

A3 – 2.

PT – 2. Mas o 2 não está no saco e porquê?

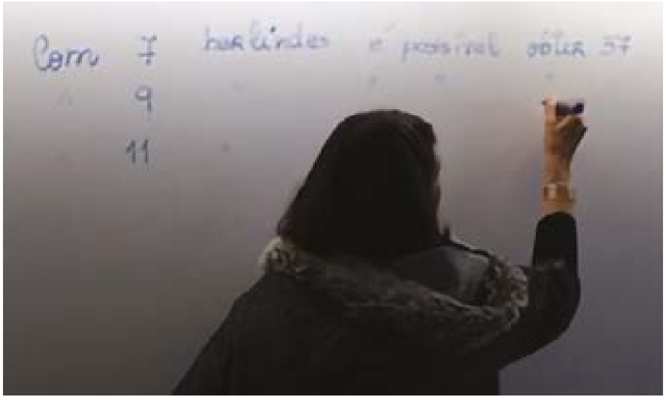
Neste diálogo procurei guiar os alunos para que conseguissem descobrir o caminho para a explicação.

4.3. Parar um pouco para arrumar ideias

Neste momento considerei indispensável fazer o ponto da situação, para organizar um pouco as descobertas dos alunos e para que começassem a focar-se na análise dos números envolvidos e nas suas propriedades. Era necessário que mobilizassem conhecimentos anteriormente adquiridos, para conseguirem justificar o facto de com 10 berlindes com números ímpares não conseguirem obter 37. Para tal, precisariam de começar a recorrer a exemplos genéricos (verificando que a soma de vários conjuntos de dois números ímpares era sempre um número par) e a compreender a consistência lógica destes resultados.

Figura 7

Ponto da situação – o que já sabemos!



4.4. Mais um pouco de trabalho exploratório

Após esta paragem, em todos os grupos, começaram a aceitar que não era possível responder afirmativamente à questão colocada na tarefa. O mais difícil era explicar porquê. Assim, o questionamento das professoras tornou-se essencial para os ajudar a refletir e a generalizar alguns factos, p.e. que todos os números a adicionar eram ímpares, que a adição de dois números ímpares é um número par, mas que apesar da adição de três números ímpares ser um número ímpar, isso não seria possível no problema dado, porque era preciso tirar dez berlindes, um número par de berlindes.

Apresento dois diálogos que ocorreram nos grupos 4 e 3, em que a importância deste questionamento é bem visível e desafia os alunos a irem mais além:

Grupo 4

PJ – Conta lá o que é que estás a perceber.

A4 – Os números que estão todos aqui são todos números ímpares e estão-nos a pedir para tirar um número par, 10 berlindes, para dar um número ímpar, o 37. (...)

PJ – Então neste caso ...

A4 – Pelo que percebi tira-se 10 berlindes que é um número par e que isto é logicamente impossível.

PJ – Eu percebo o que estás a dizer porque foste para a multiplicação, mas a soma de três números podem ser números ímpares. Ou seja, podes tirar um 1 e um 3, mas a soma deles dá 4, não é?

A2 – Temos de somar números pares ...

A4 – Depois par mais ímpar é ímpar.

PJ – Mas vocês estão a pensar muito bem.

A4 – 1 + 7 é 8. 1 + 3 é 4. 1 + 5 é 6. 3 + 7 é 10. Espera aí ...

Grupo 3

PJ – O que é que queres dizer com "todos os números ímpares"?

A3 – Quando somamos dois números ímpares, o resultado vai ser sempre um número par. Por exemplo, 3 + 3, dá 6 que é par.

PJ – Mas aqui não estavam a pedir só dois, pois não? Estávamos a pedir quantos?

A6 – 10.

PJ – Tens toda a razão, só quero ver se conseguem avançar um bocadinho mais. Por que é que têm de ser números ímpares?

Nem todos os grupos se encontravam na mesma fase do trabalho, mas já todos tinham explorado suficientemente a tarefa para perceber que não haveria forma de obter soma 37 com dez berlindes contendo só números ímpares. Considerei então que estava na altura de passar para a terceira etapa da aula – a discussão coletiva, pois a partilha das diferentes descobertas feitas por cada grupo e a discussão acerca dos porquês, permitiria que mais facilmente os alunos avançassem no raciocínio dedutivo com a elaboração de uma justificação.

4.5. O desafio final – partilhar ideias para ir mais além

Com base nos breves registos colocados na grelha preparada para a monitorização do trabalho autónomo dos alunos, decidi que não seria vantajoso que todos os grupos apresentassem as suas descobertas, dado que os grupos 2 e 5, para além de aceitarem a impossibilidade de uma resposta favorável ao problema, pouco tinham avançado na explicação dos motivos para tal e encontravam-se ainda sem identificar as propriedades dos números envolvidos que iriam permitir dar a justificação. Esta prática já era habitual e os alunos sabiam que nem sempre todos apresentavam o trabalho, todavia, todos podiam participar oralmente e completar as respostas dos colegas que estavam a apresentar. Ponderei se seria vantajoso esperar um pouco e mostrar-lhes as resoluções de outros alunos, material que tinha preparado para esta eventualidade, mas optei por avançar para as apresentações do trabalho dos colegas que eram em tudo semelhantes e muito mais significativas.

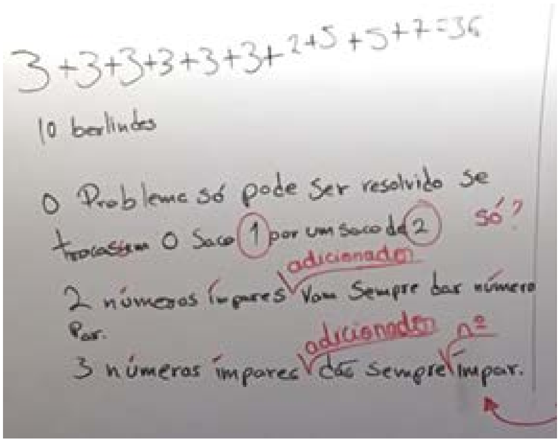
Assim, procurei sequenciar as apresentações dos restantes grupos da forma planificada, ou seja, procurando que o grupo seguinte fosse completando as respostas dos anteriores. Esta decisão não é fácil, pois o professor não consegue acompanhar todo o trabalho dos alunos, mas há que decidir na hora e avançar.

Neste momento, um dos cuidados a ter para que a discussão resulte em aprendizagens efetivas é garantir que todos os alunos terminam as outras atividades e se concentram "no palco das operações" – nos colegas que estão a fazer a apresentação, se envolvem e apreendem o seu conteúdo.

Pedi aos elementos do grupo 6 que apresentassem o seu trabalho, pois este grupo tinha utilizado uma estratégia um pouco diferente da que fora usada pelos restantes grupos, preocupando-se essencialmente em garantir que se tiravam dez berlindes dos sacos, o que se traduziu sempre numa soma par. Curiosamente, embora sem conseguir justificar completamente os motivos desta resposta, avançaram autonomamente com uma sugestão de alteração do enunciado que permitisse resolver o problema:

Figura 8

Registo e relato da apresentação do grupo 6



Grupo 6

Alunos – A primeira coisa que tentámos fazer foi resolver o problema com uma soma consecutiva.

PJ – Quanto é que deu?

Alunos – 36. Mas depois começámos a pensar e percebemos que não dava de nenhuma forma.

PT – Quantos berlindes usaram?

Alunos – 10 berlindes. Depois pensámos que o problema só podia ser resolvido se trocássemos o número de berlindes ou se trocássemos os berlindes do saco do 1 pelo saco do 2.

PT – Por que é que vocês fizeram isso?

Alunos – Porque dois números ímpares vão sempre dar um número par. Porque 3 + 3 é seis.

PT – Todos concordam?

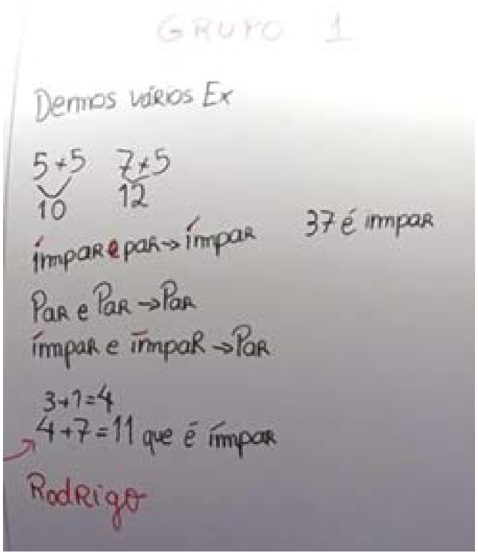
Alunos – Sim. E número ímpar e número par dá sempre ímpar.

PT – Dois números ímpares dão par, três números ímpares dão ímpar e número par com número ímpar, dá ímpar. Só queria salientar uma coisa muito simples: O problema só poderia ser resolvido se se trocasse o saco com 1 pelo saco com 2? Só neste caso? Não podia trocar, por exemplo, o 3 pelo 4?...

O segundo grupo a apresentar recorreu a uma estratégia um pouco diferente, salientando que a soma de dois números ímpares era um número par e que precisavam de um número par e de outro ímpar para obter o número 37 que é ímpar.

Figura 9

Registo e relato da apresentação do grupo 1



Grupo 1

Alunos – Descobrimos que os números eram todos ímpares e assim ia sempre dar um número par, porque ímpar com ímpar dá par.

PT – Faz a do cinco mais cinco para os colegas perceberem.

Aluno – Cinco mais cinco dá 10. Sete mais cinco é 12.

PT – E o que é que concluíram?

Aluno – Ímpar mais par é ímpar… é esta a frase que define, porque 37 é ímpar. Para ser o resultado temos de somar um par com ímpar, porque par com ímpar dá ímpar, ímpar com ímpar dá par e par com par dá par.

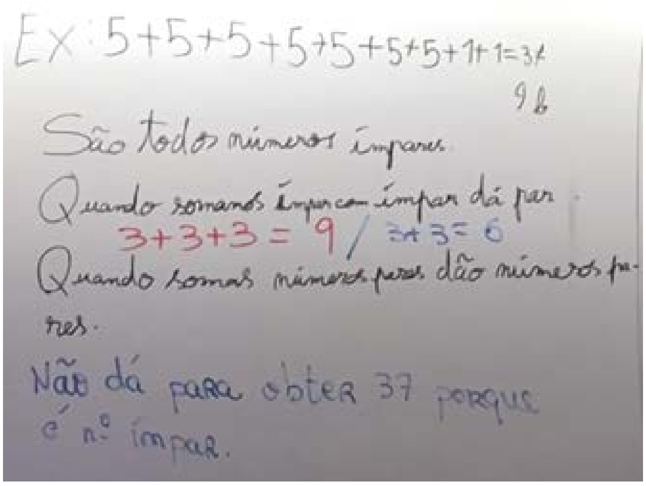
PT – Só conseguias se tivesses um par e um ímpar.

Na expressão "é esta a frase que define" está bem patente que perceberam como poderiam obter 37, mas não conseguiram concluir a justificação e explicar que para tal os números ímpares teriam de estar em número ímpar. Nesta altura, outro aluno entreviu e relacionou as resoluções dos dois grupos, esclarecendo que como "ímpar mais ímpar dá par e par mais par dá par" com 10 berlindes não conseguiam obter o 37 pois, para tal, era preciso existir um número par para com um número ímpar "ter um valor que é ímpar (37)".

Com as apresentações dos restantes dois grupos ficou claro que só conseguiriam obter número ímpar (37) com a adição de números ímpares um número ímpar de vezes.

Figura 10

Registo e relato da apresentação do grupo 3



Grupo 3

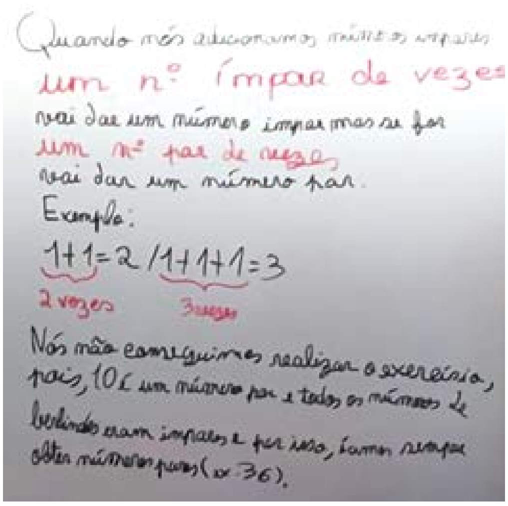
A6 – dois números ímpares dá um número par e (...) três números ímpares dá um número ímpar.

Alunos – Não dá fazer o número 37 porque quando somas números ímpares dá números pares e quando somas números pares dá números pares e o 37 é um número ímpar.

O último grupo a apresentar o seu trabalho acabou por fazer uma síntese de todas as resoluções, encadeando com cœrência os factos relativos às propriedades dos números que impediam a resolução do problema.

Figura 11

Registo e relato da apresentação do grupo 4



Grupo 4

A4 – A razão para não dar com 10 é porque quando juntamos um número ímpar um número de vezes ímpar é que vai dar um número ímpar.

A2 – Serviu para sabermos que, como temos de ter 10 berlindes e 10 é um número par e só temos números ímpares, não vai dar porque só vamos obter números pares.

(...)

Alunos – Se fizer 1+1 é 2, mas se fizer o dois mais o ímpar tinha ...

PT – Tinhas de ter mais uma vez para dar ímpar, como é número par de vezes, nunca dava ímpar.

Por fim, pedi aos alunos que analisassem as várias resoluções, referissem o que era comum a todas e sugerissem uma alteração do enunciado para que o problema deixasse de ser impossível:

PT – O que é que temos em comum em todas as resoluções?

Alunos – Que aquele específico problema, da maneira que estava formado, era impossível sem se modificar.

PT – Boa! Como é que vocês o modificavam para que fosse possível?
Alunos – Fazendo um número par.
PT – Como assim?
Alunos – Trocar um número ímpar por um número acima ou abaixo.

5. A REFLEXÃO – UM TEMPO DE CRESCIMENTO PARA A PROFESSORA

A aula terminou e com ela um dos momentos mais ricos do trabalho do professor. Mas é nesta altura que se inicia uma nova etapa: uma etapa de reflexão para seleção do que correu bem e deve ser incrementado em práticas futuras e de análise construtiva, com vista a melhorar o que não foi tão positivo. Irei centrar esta minha reflexão essencialmente em dois aspetos: a tarefa e a professora.

Em relação à tarefa, concluo, sem margem para dúvidas, que tem grande potencial para promover processos de raciocínio, muito concretamente de exemplificação, numa fase inicial e de justificação, com base na cœrência lógica, com recurso a exemplos genéricos e a contræxemplos e ainda, em associação, o pensamento crítico. Saliento ainda que esta tarefa foi muito importante, porque despertou os alunos para situações em que o problema apresentado não tem solução. Por norma, os alunos partem do pressuposto que todas as tarefas têm solução e que esta é única. Era algo que não lhes passava pela cabeça... se a professora apresenta um problema então há uma solução!

Se a importância de ter uma tarefa com qualidade para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é essencial, também o professor desempenha um papel preponderante no acompanhamento e monitorização do trabalho autónomo dos alunos, durante a realização das mesmas e na condução das discussões coletivas subsequentes. Embora numa visão socio construtivista da aprendizagem se pretenda que o aluno desempenhe o papel central, nunca se pode excluir a intervenção, mesmo que de forma indireta, do professor. É este que coloca as perguntas adequadas, estimula a participação de todos e cria o ambiente propício à reflexão e à aprendizagem. De acordo com Ponte (2005), os momentos de discussão constituem oportunidades fundamentais para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento e é o professor que rege e orquestra essa discussão, devendo fazer o seu planeamento com o maior cuidado. Neste aspeto, procurei inspirar-me nas cinco práticas-chave para orquestrar discussões matemáticas produtivas propostas por Stein et al. (2008): a antecipação das resoluções dos alunos; a monitorização na fase de exploração; a seleção de determinadas resoluções a serem apresentadas; a sequenciação das apresentações e o apoio no estabelecimento de conexões matemáticas entre as diferentes resoluções e entre estas e os objetivos definidos para a aula.

Como o objetivo primordial da aula era promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos decidi elencar também algumas ações que considerei terem contribuído para a concretização desse objetivo:

- na apresentação da tarefa, a criação de um ambiente calmo e o apoio à interpretação do enunciado, que permitiu aos alunos concentrarem-se na tarefa e sentirem-se motivados para o trabalho;
- durante o trabalho autónomo dos alunos o apelo à organização e o acompanhamento pautado por questões que estimulavam a persistência e sugeriam caminhos, como por exemplo:

  "Registem todas as vossas tentativas e não apaguem, para que possam ver as tentativas que já fizeram!"

  "Se com 9 berlindes conseguiram talvez possam dividir o número de um berlinde para colocar 2 berlindes"

  "Dizem que números ímpares adicionados com números ímpares dá sempre número par, mas se eu fizer 3+3+3=9 é ímpar..."
- a sistematização ou "ponto da situação" durante o processo de resolução, que guiou um pouco mais o trabalho dos alunos, permitindo uma melhor gestão do tempo:

  "Observem bem os números, pensem nas suas características e procurem as suas regularidades";
- o registo dos processos de resolução dos alunos, que permitiu selecionar e sequenciar rapidamente os grupos que fariam a partilha na fase de discussão coletiva;
- o questionamento, durante a fase de discussão coletiva, convidando-os a partilhar as descobertas feitas, apoiando as suas explicações, encaminhando-os e desafiando-os a fazerem deduções com base em conhecimentos que já possuíam e mantendo-os envolvidos na resolução da tarefa.

Com alguma apreensão apercebi-me que, nas discussões coletivas, devo ter mais cuidado para não acentuar aspetos que, embora importantes, podem desviar a atenção dos alunos do que é essencial na aula e fazer com que esta perca ritmo. É importante ter rigor na linguagem utilizada, mas a correção da linguagem não deve ser mais importante do que o significado do que se está a dizer. Por outro lado, redizer as frases dos alunos, corrigindo-as ou completando-as é uma mais-valia, pois leva-os a aperceberem-se dessa linguagem mais correta sem grande dispêndio de tempo.

Outros aspetos positivos a referir são a motivação associada a atividades exploratórias e ao trabalho colaborativo, fomentado neste tipo de aulas em três fases, bem como a solicitação feita aos alunos para que alterem o enunciado o que pode permitir a explicitação do raciocínio demonstrado aquando da exploração da tarefa.

Por último, não posso deixar de referir que a participação nesta formação, inserida no projeto REASON, clarificou conceitos, permitiu aprofundar conhecimentos, promoveu a minha capacidade de planificação e aplicação de tarefas desta natureza, incrementou o trabalho colaborativo entre docentes, em suma, melhorou a minha prática letiva.

6. REFERÊNCIAS

Boavida, A. M., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimental, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Martins, G. O., Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V., Acosta Carrillo , J. L., Ucha, L. M., Encarnação, M., Horta, M. J., Calçada, M. T., Nery, R. V., Rodrigues, S. V. (2018). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória (PASEO).* Ministério da Educação. Homologado pelo Despacho n.º 6478/2017, de 26 de julho. https://dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Projeto_Autonomia_e_Flexibilidade/perfil_dos_alunos.pdf

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricula*r (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning* , 10(4), 313-340.

FICHA TÉCNICA

TÍTULO
Desenvolver o Raciocínio Matemático dos Alunos: Práticas e Desafios

ORGANIZADORES
Catarina Delgado
Joana Brocardo
Fátima Mendes

COMPOSIÇÃO GRÁFICA E PAGINAÇÃO
Mário Baía

TIPO DE SUPORTE
Digital

DETALHE DO SUPORTE
E-book

EDIÇÃO
1.ª edição

EDITOR
Instituto Politécnico de Setúbal

CLASSIFICAÇÃO TEMÁTICA (área em que se insere)
Educação Matemática

ISBN
978-989-53236-7-8

MARÇO 2022

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Projeto IC&DT – AAC n.º 02/SAICT/2017 e PTDC/CED-EDG/28022/2017

U LISBOA Universidade de Lisboa

ie Instituto de Educação

POLITÉCNICO DE LISBOA ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA

IPS Instituto Politécnico de Setúbal Escola Superior de Educação

REASON

IPS Instituto Politécnico de Setúbal

Escola Superior de Educação