

## Álgebra, pensamento algébrico e tecnologias

### Trabalhar com equações e funções como domínios relacionados

#### A Álgebra e as TIC nos documentos de orientação curricular

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar, NCTM (2007), publicados na versão original em inglês, em 2000 e recentemente traduzidos e editados pela Associação de Professores de Matemática, pretendem proporcionar uma 'orientação' e uma 'visão' global para a Matemática escolar, em que "as Normas descrevem os conteúdos e processos matemáticos que os alunos deverão aprender".

Na Norma relativa à Álgebra, aponta-se que "compreender padrões, relações e funções, constituem aspectos críticos do raciocínio algébrico" e, embora ideias e relações matemáticas complexas se possam exprimir através de notação simbólica, esta construção surge a partir de muitas experiências dos alunos com números, desde os primeiros anos.

O mesmo documento reconhece, no *Princípio da Tecnologia*, que a possibilidade que os alunos têm de explorar e analisar muitos exemplos e diferentes formas de representação, constitui um desafio a colocarem e explorarem conjecturas, processos que não ocorrem tão facilmente em situações de trabalho tradicionais de lápis e papel.

O mesmo documento refere que a aprendizagem dos alunos pode beneficiar muito da tecnologia, através, por exemplo, da observação de variações em valores dependentes por alteração das regras ou fórmulas numa folha de cálculo. Claro que estas possibilidades só serão aproveitadas no contexto de tarefas e desafios apropriados feitos pelo professor e de discussões que este conduza na sala de aula.

Na mesma linha, o livro *Teaching and Learning Mathematics — Pre-Kindergarten Through Middle School*, indica um conjunto de objectivos e actividades que devem fazer parte da formação matemática em Álgebra de todos os alunos, desde os graus K-2 até ao 6-8. Aí sugere-se que actividades como, visualizar relações numéricas através da análise de tabelas, procurar todas as combinações possíveis que respeitam uma determinada condição, que passa por constituir uma lista organizada de forma sistemática e não aleatoriamente e estender e generalizar o raciocínio proporcional com vista a tomar uma decisão, constituem aspectos importantes do trabalho preparatório algébrico (Sheffield e Cruikshank, 2005).

Em Portugal, também o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em Dezembro de 2007, propõe nas orientações metodológicas gerais que os alunos devem ser confrontados com uma variedade de representações das ideias matemáticas e serem capazes de passar informação de uma forma de representação para outra (Ponte et al., 2007). A grande diferença com os programas anteriores é considerar a Álgebra como uma forma de pensamento matemático: o pensamento algébrico. Este, de acordo com Pon-

te (2006), respeita ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação, incluindo, portanto, a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e com as funções, de manipular símbolos e ter 'sentido do símbolo', um conceito atribuído a Arcavi.

É neste sentido que defende, no domínio da Álgebra, a folha de cálculo como "um recurso tecnológico importante no desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que permite realizar com rapidez experiências com números e pôr em evidência relações numéricas". Também no 3º ciclo, reconhece que essa ferramenta constitui um "bom recurso para apoiar os alunos no estabelecimento de relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos, na realização de tarefas de exploração e investigação e na resolução de problemas".

De um modo geral, as tendências actuais expressas nos documentos de orientação curricular nacionais e internacionais convergem na valorização da tecnologia, oferecendo múltiplas representações e facilitando a transição entre elas, permitindo a interactividade com objectos matemáticos e uma melhor visualização dos conceitos, incentivando a colocação de conjecturas.

#### A Álgebra e as TIC nalguns estudos de investigação

A investigação recente reconhece que, a interactividade e dinamicidade que a tecnologia trouxe, mudaram as perspectivas sobre a forma como o ensino e a aprendizagem de conceitos como expressões e variáveis, podem ser vistos.

Após algum domínio das linguagens de programação, no final da década de 80, começou a dar-se atenção à relevância das múltiplas representações no ensino da Álgebra, identificando-se as folhas de cálculo como facilitadoras de uma abordagem não-*standard* das notações algébricas.

Num estudo recente de Ferrara, Pratt & Robutti (2006), referindo o uso da tecnologia no ensino e aprendizagem de expressões e variáveis, as autoras reconhecem tendências da investigação que colocam a "ênfase na aprendizagem dos estudantes e nas múltiplas visões dos conceitos através de múltiplas representações".

Relativamente à tecnologia no ensino e aprendizagem das funções, as mesmas autoras constatarem que, no currículo tradicional, o trabalho algébrico começou por ter o foco na resolução de equações simples e paralelamente emergiu uma linha em que a "simbolização esconde não um único valor mas uma variável ou parâmetro, que representam um conjunto de valores num domínio ou contra-domínio", que conduz ao estudo das funções e gráficos, considerado por vários autores como precursor do estudo do cálculo.

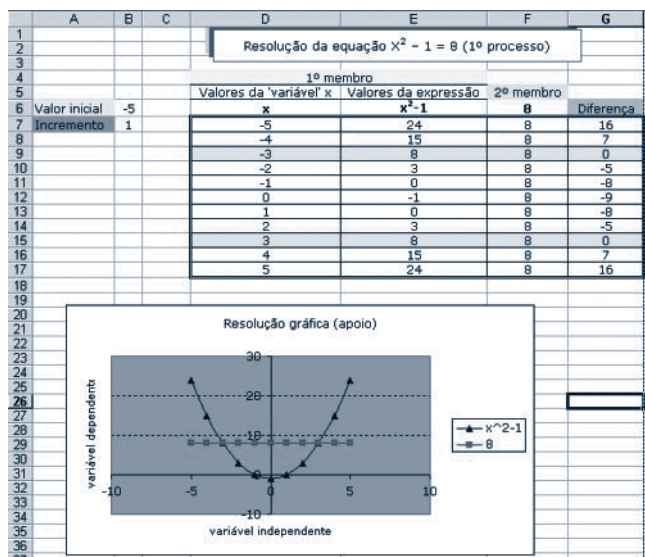


Figura 1

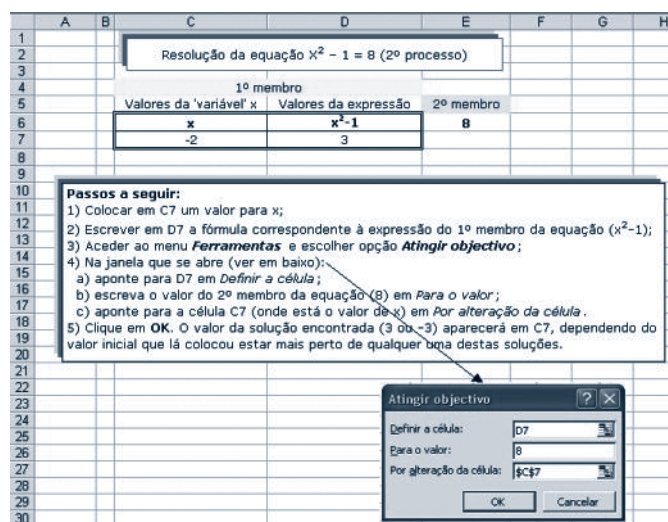


Figura 2

Também parece existir evidência de que o potencial oferecido pela tecnologia de permitir a interligação entre múltiplas representações, pode facilitar a ocorrência e construção de conexões mentais. Por exemplo, de acordo com Ferrara, Pratt & Robutti (2006), um objectivo pedagógico abrangente é ajudar as crianças a conectar dois domínios diferentes, como resolver equações e trabalhar com funções e este trabalho sobre funções baseado na tecnologia parece trazer recompensas ao nível da compreensão das equações.

### Conectar dois domínios da álgebra e usar múltiplas representações

Foi a partir desta ideia de conectar dois domínios, o das equações e o das funções, que pensei em abordar a resolução de uma equação com uma folha de cálculo, usando dois processos diferentes, e recorrendo ao *applet Árvores algébricas* (em português) do site do Instituto Freudenthal (em <http://www.fi.uu.nl/en/pt/>), tentando usar as diferentes potencialidades associadas a estas ferramentas.

Tomando como exemplo a equação  $x^2 - 1 = 8$  (que pode surgir da modelação de um qualquer problema de palavras), na folha de cálculo optei por um 1º processo em que a partir de um valor inicial para  $x$  e de um incremento, ambos definidos pelo utilizador, criei quatro colunas (figura 1): a primeira, (D), com um conjunto de valores para a variável  $x$  (calculados a partir das condições iniciais definidas); a coluna (E), correspondente ao 1º membro da equação, função da primeira coluna, com os valores calculados na expressão  $x^2 - 1$ ; a terceira (F) com a constante 8, correspondente ao 2º membro da equação; e a última (G), facultativa, com a diferença entre os correspondentes valores das colunas (E-F).

Na linha (ou linhas, no caso da existência de mais do que uma solução) em que o 1º membro for igual ao 2º membro, encontramos na coluna D as soluções da equação (-3 e 3, neste caso), que são simultaneamente as abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções definidas, respectivamente, pela expressão  $x^2 - 1$  e pela constante 8.

Alguma investigação, como a referida por Yerushalmy e Chazan (2003), sugere que, em particular as folhas de cálculo e as calculadoras gráficas, têm por objectivo reduzir a carga cognitiva de interacção com aspectos do simbolismo matemático e valorizam a aprendizagem de exemplos em várias representações ligadas (gráficos e tabelas). Estes autores referem que "os estudantes que usam a folha de cálculo desta forma estão trabalhando analiticamente, por oposição a sinteticamente, raciocinando com uma incógnita para a tornar conhecida", o que representa um processo bem diferente do usual envolvendo a resolução de uma equação.

Este trabalho baseia-se num método que podemos designar de 'tentativa e erro' sistemático, ou seja, num conjunto de cálculos que se vão realizando em sequência, ao mesmo tempo que se observa a relação entre as 'entradas' e as respectivas 'saídas', libertando o estudante de manipular uma equação para encontrar a solução. Esta visão, partilhada por Yerushalmy e Chazan (2003), identifica-se com o 1º processo de resolução da equação, aqui apresentado na figura 1.

Relativamente ao 2º processo, como é ilustrado na figura 2, trata-se de usar uma opção (*Atingir objectivo*) do menu *Ferramentas* da folha de cálculo, para 'obrigar ou forçar' uma expressão a tomar determinado valor e aí a ferramenta funciona como uma 'caixa negra', usando os seus algoritmos internos para realizar esse cálculo e nos devolver a solução. Mas como nos devolverá, neste caso, as duas soluções? Ex-

perimente iniciar o uso da função *Atingir objectivo* com um valor de  $x$  (em C7) positivo. Que solução obtém? E se o valor em C7 for negativo, por exemplo,  $-1$ ? Qual a solução que obtém?

Estas são algumas das questões a ter em conta quando se trabalha com uma folha de cálculo, onde o 1º processo, analítico e de tentativa e erro sistemático, se apoia claramente nas múltiplas representações, neste caso, tabulares e gráficas, a par de se visualizarem as soluções da equação (as 'ditas' incógnitas) entre um conjunto de valores numéricos que se geram e variam realmente (valores que assume a 'dita' variável). Na realidade, o que temos são duas funções cujos valores de  $x$  variam livremente dentro do respectivo domínio. Só quando lhe introduzimos a restrição, neste caso, de serem iguais, condicionamos as variáveis a assumirem determinado(s) valor(es).

Finalmente o uso do *applet Árvores algébricas*, dá-nos uma aproximação às expressões simbólicas que traduzem a relação, através de um processo de construção de um modelo, com o auxílio de etiquetas de entrada/saída e de etiquetas/operadores que exige um conhecimento sobre as prioridades das operações, ao mesmo tempo que nos permite pedir uma tabela de valores para cada uma das expressões/funções e ligá-las a um gráfico onde se identificam com facilidade os pontos de intersecção, cujas abcissas correspondem, à semelhança do que aconteceu na folha de cálculo (1º processo), às soluções da equação do 2º grau,  $x^2 - 1 = 8$  (ver figura 3).

Este é apenas mais um exemplo de que não basta identificar o conteúdo, neste caso, a resolução de equações. Precisamos de seleccionar os objectivos que queremos atingir, a natureza das tarefas de aprendizagem a propor, as estratégias a desenvolver e os momentos de interacção a privilegiar, tendo em conta as potencialidades e limitações da tecnologia a usar. A opção por uma tecnologia ou por um determinado processo dentro de cada uma delas, não é neutro e conduz-nos a uma abordagem diferente da álgebra, que poderá estar mais ou menos próxima daquilo a que se chama no novo Programa da Matemática do Ensino Básico, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Mais uma vez, a natureza das tarefas, a mediação da ferramenta tecnológica e o importante papel do professor, constituem factores críticos na aprendizagem dos alunos.

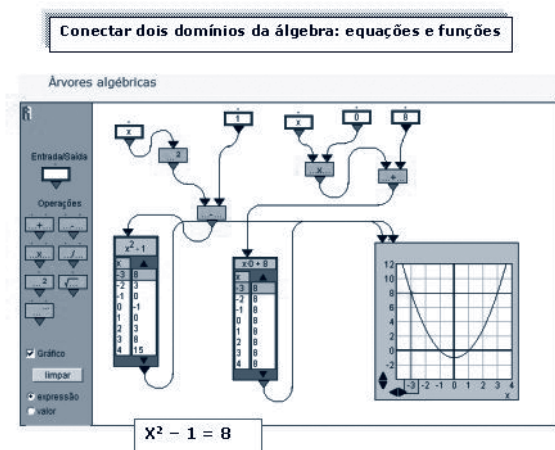


Figura 3

### Bibliografia

- Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237–273). Roterdão: Sense.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em inglês publicado em 2000).
- Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale. (Org.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5–27). Lisboa: SPCE.
- Ponte et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Consultado em <http://sitio.dgicd.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf>, em 1 de Março de 2008.
- Sheffield, L. e Cruikshank, D. (2005). *Teaching and Learning Mathematics — Pre-Kindergarten Through Middle School*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Yerushalmy, M. e Chazan, D. (2003). Flux in School Algebra: Curricular Change, Graphing Technology, and Research on Student Learning and Teacher Knowledge. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 725–755). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

José Duarte

Escola Superior de Educação de Setúbal