

Uma Aplicação do Teorema dos Resíduos

Miguel Moreira
Escola Superior de Tecnologia de Setúbal
SAM

José Vieira Antunes
Instituto Tecnológico e Nuclear
LDA

Heitor Pina
Instituto Superior Técnico
DEM

15 de Outubro de 1998*

Resumo

O movimento rotativo de um rotor numa região confinada determina o escoamento do fluido envolvente e o desenvolvimento de forças de interação fluido-estrutura, cujo conhecimento é essencial na previsão do comportamento dinâmico deste sistema. A determinação explícita das forças referidas a partir das equações de Navier-Stokes conduz à necessidade de resolução de integrais definidos do tipo,

$$G_k^{ij}(H, X, Y) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^i \theta \cos^j \theta}{(H - X \cos \theta - Y \sin \theta)^k} d\theta,$$

em que H , X , e Y são constantes tais que $X^2 + Y^2 < H^2$ e i, j e k são parâmetros inteiros que podem variar entre zero e quatro.

A aplicação de uma forma particular do teorema dos resíduos da análise complexa constitui a solução natural do problema anterior, concretizada recorrendo ao auxílio de um manipulador simbólico para fazer face à extensão das manipulações algébricas necessárias.

1 Introdução

1.1 Formulação do Problema

Consideremos as forças resultantes do escoamento de fluido na região anular representada na figura 1, determinado pela rotação Ω do veio circular interno de raio R . A determinação destas forças (também designadas fluido-elásticas) é essencial no estudo do comportamento vibratório dos veios e rotores de equipamentos rotativos em geral. Em Antunes *et al.* [1], por

*Comunicação apresentada nas Jornadas de Aplicações da Matemática no Centro de Matemática do ISEL

exemplo, pode encontrar-se uma completa discussão teórica e a motivação para o estudo deste assunto.

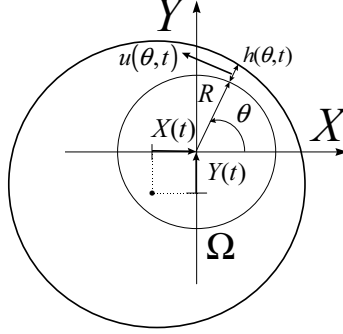


Figura 1: Geometria do escoamento

No apêndice B faz-se referência ao significado da simbologia utilizada. De referir que a *folga* $h(\theta, t)$, representada na figura indicada, pode ser bem aproximada recorrendo à seguinte equação,

$$h(\theta, t) = H - X(t) \cos \theta - Y(t) \sin \theta, \quad (1)$$

em que X e Y representam factores associados à excentricidade do sistema (posição do centro do veio interior) e H representa a folga que existiria se a excentricidade instantânea referida fosse nula. Naturalmente e para que o veio interior não entre em contacto com a superfície do *estator* supõe-se que, $X(t)^2 + Y(t)^2 < H^2$.

As equações de conservação da massa e do momento que permitem modelar (simplificadamente) o escoamento referido são (ver Antunes *et al.* [1]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (hu)}{\partial \theta} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial (hu^2)}{\partial \theta} \right\} + \tau + \frac{h}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (3)$$

em que $u(\theta, t)$ representa uma velocidade tangencial do fluído (valor médio na folga) e $\tau(\theta, t)$ as tensões de natureza dissipativa. Estas últimas podem ser descritas recorrendo à formulação semi-empírica

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \tau_r(u) + \tau_s(u) \\ &= -\frac{1}{2}\rho f (\Omega R - u)^2 + \frac{1}{2}\rho f u^2 \\ &= \rho f \Omega R u - \frac{1}{2}\rho f \Omega^2 R^2 \end{aligned} \quad (4)$$

onde f representa um apropriado coeficiente de fricção.

Observe-se que reescrevendo a equação da continuidade (2) como, $\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial \theta} = -\frac{R}{h} \frac{\partial h}{\partial t}$ deduz-se,

$$u(\theta, t) = \frac{R}{h} \left(- \int \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right) d\theta \right) = \frac{R \left(\dot{X} \sin \theta - \dot{Y} \cos \theta + C \right)}{H - X \cos \theta - Y \sin \theta}, \quad (5)$$

tendo em conta (1). De assinalar a presença da constante de integração, $C(t)$, na expressão da velocidade (5), assim obtida.

1.2 Determinação das Forças Fluido-elásticas

Denotando por $F_X(t)$ e $F_Y(t)$ as componentes segundo X e Y da força resultante que o fluido exerce no rotor, pode mostrar-se que

$$F_X(t) = -LR \int_0^{2\pi} p(\theta, t) \cos \theta d\theta = LR \int_0^{2\pi} \frac{\partial p(\theta, t)}{\partial \theta} \sin \theta d\theta, \quad (6)$$

$$F_Y(t) = -LR \int_0^{2\pi} p(\theta, t) \sin \theta d\theta = -LR \int_0^{2\pi} \frac{\partial p(\theta, t)}{\partial \theta} \cos \theta d\theta, \quad (7)$$

em que R e L representam o raio e o comprimento do rotor. Assim, integrando entre 0 e 2π , as seguintes formas equivalentes da equação (3),

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} \sin \theta = \left\{ \rho \left\{ R \frac{\partial(hu)}{h\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{h\partial \theta} \right\} + R \frac{\tau(u)}{h} \right\} \sin \theta, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} \cos \theta = \left\{ \rho \left\{ R \frac{\partial(hu)}{h\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{h\partial \theta} \right\} + R \frac{\tau(u)}{h} \right\} \cos \theta, \quad (9)$$

deduz-se,

$$F_X(t) = -\rho R^2 L \int_0^{2\pi} \frac{\partial(hu)}{h\partial t} \sin \theta d\theta - \rho RL \int_0^{2\pi} \frac{\partial(hu^2)}{h\partial \theta} \sin \theta d\theta \quad (10)$$

$$- R^2 L \int_0^{2\pi} \frac{\tau(u)}{h} \sin \theta d\theta,$$

$$F_Y(t) = \rho R^2 L \int_0^{2\pi} \frac{\partial(hu)}{h\partial t} \cos \theta d\theta + \rho RL \int_0^{2\pi} \frac{\partial(hu^2)}{h\partial \theta} \cos \theta d\theta \quad (11)$$

$$+ R^2 L \int_0^{2\pi} \frac{\tau(u)}{h} \cos \theta d\theta.$$

Tendo em conta a expressão conhecida da velocidade (5), facilmente se verifica que cada um dos integrais definidos representados nas equações (10) e (11), pode ser descrito com base em integrais definidos elementares do tipo,

$$G_k^{ij}(H, X, Y) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^i \theta \cos^j \theta}{(H - X \cos \theta - Y \sin \theta)^k} d\theta, \quad 0 \leq i, j, k \leq 4. \quad (12)$$

A título de exemplo apresentamos a representação de um dos integrais definidos indicados:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\partial(hu^2)}{h\partial\theta} \sin\theta d\theta &= 2R^2 \left(\left((\dot{X})^2 - (\dot{Y})^2 \right) G_2^{21} + 2\dot{X}\dot{Y} G_2^{30} \right) \\
&+ 2R^2 \left(-\dot{X}\dot{Y} G_2^{10} + C \left(\dot{X} G_2^{11} + \dot{Y} G_2^{20} \right) \right) \\
&- R^2 \left(\left(\dot{X} \right)^2 X G_3^{40} + X \left(\dot{Y} \right)^2 G_3^{22} - 2X \dot{X}\dot{Y} G_3^{31} \right) \\
&- R^2 \left(C^2 X G_3^{20} + 2CX \left(\dot{X} G_3^{30} - \dot{Y} G_3^{21} \right) \right) \\
&- R^2 \left(-\left(\dot{X} \right)^2 Y G_3^{31} - Y \left(\dot{Y} \right)^2 G_3^{13} + 2\dot{X} Y \dot{Y} G_3^{22} \right) \\
&- R^2 \left(-C^2 Y G_3^{11} - 2CY \left(\dot{X} G_3^{21} - \dot{Y} G_3^{12} \right) \right).
\end{aligned}$$

Torna-se assim claro que a obtenção de expressões analíticas que descrevam $F_X(t)$ e $F_Y(t)$ está dependente do cálculo dos integrais definidos do tipo (12) em função dos parâmetros H , X e Y .

Refira-se que o seu cálculo recorrendo às técnicas da análise real dependente da computação prévia das primitivas envolvidas não é uma tarefa fácil, conduzindo frequentemente a expressões muito pesadas.

2 A aplicação do Teorema dos Resíduos

O procedimento natural para calcular estes integrais definidos (12) consiste na utilização do resultado elementar (consequência do teorema dos resíduos) da análise complexa (proposição 2.1) que seguidamente se expõe.

Proposição 2.1 *Seja $R(x, y)$ uma função racional em x e y cujo denominador não se anula na circunferência centrada na origem e de raio unitário. Então*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi i \sum [\text{resíduos de } f(z) \text{ no interior de } D] \quad (13)$$

em que

$$f(z) = \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz} \quad (14)$$

e D representa o interior do círculo unitário centrado na origem.

Demonstração. Consultar Marsden [2], pg 302, por exemplo. ■

Pode encontrar-se também em Marsden [2] a definição dos conceitos de *resíduo*, *polo* e *ordem de um polo* de utilização necessária. A proposição 2.2 apresenta um resultado a partir do qual se torna possível a determinação de resíduos associados a polos de ordem arbitrária.

Proposição 2.2 *Suponha-se que f tem um polo de ordem k em z_0 . Então*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Phi^{(k-1)}(z)}{(k-1)!},$$

em que $\Phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$.

Demonstração. Consultar Marsden [2], pg 272. ■

2.1 Exemplo de Aplicação

Ilustremos a aplicação destes resultados no cálculo de

$$G_3^{00}(H, X, Y) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(H - X \cos \theta - Y \sin \theta)^3} d\theta,$$

supondo naturalmente que $H > 0$ e $X^2 + Y^2 < H^2$.

1. Começemos por determinar a função $f(z)$ nos termos da proposição 2.1,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)}{iz} \\ &= \frac{1}{iz \left(H - X \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - Y \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^3} \\ &= \frac{-8z^2}{i \left((X - iY)z^2 - 2Hz + X + iY\right)^3} \\ &= \frac{-8z^2}{i(X - iY)^3 (z - z_1)^3 (z - z_2)^3}, \end{aligned}$$

em que

$$z_1 = \frac{1}{(X - iY)} \left(H + \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2}\right)$$

e

$$z_2 = \frac{1}{(X - iY)} \left(H - \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2}\right)$$

são polos de ordem 3.

2. Repare-se que z_2 é o único polo que se localiza no interior do círculo unitário. Calculemos então o resíduo de f em z_2 com base na proposição 2.2. Seja,

$$\Phi(z) = \frac{-8z^2}{i(X - iY)^3 (z - z_1)^3},$$

então

$$\operatorname{Res}(f; z_2) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow z_2} \Phi''(z).$$

Concluindo-se,

$$\text{Res}(f; z_2) = i \frac{-16z_2^2 - 16z_1^2 - 64z_1z_2}{2(X - iY)^3 (z_1 - z_2)^5}.$$

3. Substituindo em (13) e simplificando obtemos finalmente o resultado desejado:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(H - X \cos \theta - Y \sin \theta)^3} d\theta &= \pi \frac{16z_2^2 + 16z_1^2 + 64z_1z_2}{(X - iY)^3 (z_1 - z_2)^5} \\ &= \frac{\pi (2H^2 + X^2 + Y^2)}{(\sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^5}. \end{aligned} \quad (15)$$

3 Conclusões

No apêndice A podem encontrar-se os integrais definidos do tipo G_k^{ij} calculados pela via apresentada.

De referir que a metodologia referida se bem que conceptualmente simples exige a realização de computações algébricas extensas e pesadas que só puderam ser facilmente ultrapassadas com o recurso a um manipulador simbólico.

Este trabalho reforça a ideia da importância de se considerar na formação do Engenheiro uma sólida preparação matemática (nomeadamente e em particular o conhecimento de alguns resultados elementares da análise complexa) e a familiaridade na utilização das ferramentas computacionais de manipulação simbólica actualmente disponíveis.

Referências

- [1] Antunes, J., Axisa, F. and Grunenwald, T., *Dynamics of rotors immersed in eccentric annular flow. Part1:Theory*, Journal of Fluid and Structures (1996), 10, 893-918.
- [2] Marsden, J. E. and Hoffman, M. J., *Basic Complex Analysis*, Second Edition, Freeman, 1987.

A Integrais Azimutais

$$G_1^{00} = \frac{2\pi}{\sqrt{H^2 - X^2 - Y^2}} \quad (16)$$

$$G_1^{01} = \begin{cases} 0 & \text{se } X = Y = 0 \\ 2\pi X \frac{H - \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2}}{(X^2 + Y^2)\sqrt{H^2 - X^2 - Y^2}} & \text{c.c.} \end{cases} \quad (17)$$

$$G_1^{10} = \begin{cases} 0 & \text{se } X = Y = 0 \\ 2\pi Y \frac{H - \sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(X^2 + Y^2)\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (18)$$

$$G_1^{11} = \begin{cases} 0 & \text{se } X = Y = 0 \\ -2\pi Y X \frac{X^2 + Y^2 - 2H^2 + 2\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}H}{(X^2 + Y^2)^2\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (19)$$

$$G_1^{20} = \begin{cases} \frac{\pi}{H} & \text{se } X = Y = 0 \\ 2\pi \frac{X^2(X^2 + Y^2) - H^2(X^2 - Y^2) + H(X^2 - Y^2)\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(X^2 + Y^2)^2\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (20)$$

$$G_1^{02} = G_1^{00} - G_1^{20} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{H} & \text{se } X = Y = 0, \\ 2\pi \frac{X^2 Y^2 + Y^4 + H^2 X^2 - H^2 Y^2 - H\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}X^2 + H\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}Y^2}{(X^2 + Y^2)^2\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (21)$$

$$G_2^{00} = 2\pi H \frac{\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(H^2 - X^2 - Y^2)^2} \quad (22)$$

$$G_2^{01} = 2\pi X \frac{\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(H^2 - X^2 - Y^2)^2} \quad (23)$$

$$G_2^{10} = 2\pi Y \frac{\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(H^2 - X^2 - Y^2)^2} \quad (24)$$

$$G_2^{20} = \begin{cases} \frac{\pi}{H^2} & \text{se } X = Y = 0 \\ 2\pi \frac{(HY^2(Y^2 + X^2) + (H^2(X^2 - Y^2) - X^4 + Y^4)(H - \sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}))}{(X^2 + Y^2)^2(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^3}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (25)$$

$$G_2^{02} = G_2^{00} - G_2^{20} \quad (26)$$

$$G_2^{11} = \begin{cases} 0 & \text{se } X = Y = 0 \\ 2\pi XY \frac{H(-2H^2 + 3(X^2 + Y^2)) + 2(H^2 - Y^2 - X^2)\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)}}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^3(X^2 + Y^2)^2}, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (27)$$

$$G_2^{30} = 2\pi Y \frac{-3\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}X^2-3HX^2-2HY^2+3\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}H^2+3H^3}{(\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3 (H+\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3} \quad (28)$$

$$G_2^{03} = 2\pi X \frac{-3\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}Y^2-3HY^2-2HX^2+3\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}H^2+3H^3}{(\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3 (H+\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3} \quad (29)$$

$$G_2^{12} = G_2^{10} - G_2^{30} \quad (30)$$

$$G_2^{21} = G_2^{01} - G_2^{03} \quad (31)$$

$$G_3^{00} = (2H^2 + X^2 + Y^2) \frac{\pi}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^5} \quad (32)$$

$$G_3^{20} = \pi \frac{H^2 - X^2 + 2Y^2}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^5} \quad (33)$$

$$G_3^{02} = G_3^{00} - G_3^{20} \quad (34)$$

$$G_3^{11} = \pi \frac{3XY}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^5} \quad (35)$$

$$G_3^{10} = 3\pi \frac{HY}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^5} \quad (36)$$

$$G_3^{01} = 3\pi \frac{HX}{(\sqrt{(H^2 - X^2 - Y^2)})^5} \quad (37)$$

$$G_3^{30} = \pi Y \frac{(9H^4+9\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}(H^3-X^2H)-4H^2Y^2-15H^2X^2-2Y^4+4Y^2X^2+6X^4)}{(\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^5 (H+\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3} \quad (38)$$

$$G_3^{12} = G_3^{10} - G_3^{30} \quad (39)$$

$$G_3^{03} = \pi X \frac{(9H^4+9\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)}(H^3-Y^2H)-4H^2X^2-15H^2Y^2-2X^4+4Y^2X^2+6Y^4)}{(\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^5 (H+\sqrt{(H^2-X^2-Y^2)})^3} \quad (40)$$

$$G_3^{21} = G_3^{01} - G_3^{03} \quad (41)$$

$$G_3^{40} = 3\pi \frac{(2H^6 - 5H^4X^2 + 4H^2X^4 - X^6 + 3H^4Y^2 - 6H^2X^2Y^2 + 3X^4Y^2 - 4H^2Y^4 + 4X^2Y^4)}{(\sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^5 (H + \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^4} + 3\pi \frac{2H(H^4 - 2H^2X^2 + X^4 + 2H^2Y^2 - 2X^2Y^2 - Y^4)}{(H^2 - X^2 - Y^2)^2 (H + \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^4} \quad (42)$$

$$G_3^{04} = G_3^{00} - 2G_3^{20} + G_3^{40} \quad (43)$$

$$G_3^{22} = G_3^{20} - G_3^{40} \quad (44)$$

$$G_3^{31} = 3\pi XY \frac{3X^4 + X^2Y^2 - 7H^2X^2 - 2Y^4 - H^2Y^2 + 4H^4}{(H + \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^4 (\sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^5} + 3\pi XY \frac{4H(H^2 - X^2)}{(H + \sqrt{H^2 - X^2 - Y^2})^4 (H^2 - X^2 - Y^2)^2} \quad (45)$$

$$G_3^{13} = G_3^{11} - G_3^{31} \quad (46)$$

B Simbologia Utilizada

$C(t)$ – Constante (dependente do tempo) associada à integração da equação da continuidade;

f – Coeficiente de fricção na parede do rotor/parede do estator;

$F_X(t), F_Y(t)$ – Forças fluidoelásticas;

$h(\theta, t)$ – Folga local;

L – Comprimento mergulhado do veio (rotor);

$p(\theta, t)$ – Pressão azimutal;

R – Raio do veio (rotor) imerso;

t – Tempo;

$u(\theta, t)$ – Velocidade tangencial local;

$X(t), Y(t)$ – Posição do veio (rotor);

θ – Ângulo azimutal;

ρ – Massa volúmica do fluido;

$\tau(u)$ – Tensão de corte total (como função de u);

$\tau_r(u)$ – Tensão de corte na parede do rotor (como função de u);

$\tau_s(u)$ – Tensão de corte na parede do estator (como função de u);

Ω – Velocidade angular do rotor;

μ – Viscosidade dinâmica do fluido em escoamento;