

# **ENCURVADURA E VIBRAÇÃO DE PERFIS DE AÇO ENFORMADOS A FRIO: MODELAÇÃO DE SECÇÕES COM DOBRAS**

**Flávio José Rosa Pereira**

**Mestrado em Engenharia Civil  
Área de Especialização: Estruturas  
Dissertação**

## **ORIENTADORES:**

Professor Doutor Rui Alexandre da Silva Bebiano  
Professor Especialista Paulo Jorge Cunha Mendonça

**Janeiro de 2016**

**Dissertação submetida no Instituto Politécnico de Setúbal**



**ENCURVADURA E VIBRAÇÃO DE PERFIS DE AÇO ENFORMADOS A FRIO:  
MODELAÇÃO DE SECÇÕES COM DOBRAS**

Mestrado em Engenharia Civil

**DECLARAÇÃO DE AUTORIA DO TRABALHO**

Declaro ser o autor deste trabalho, que é original e inédito. Autores e trabalhos consultados estão devidamente citados no texto e constam da listagem de referências incluída.

Flávio José Rosa Pereira

---

(assinatura)

**DIREITOS DE COPIA OU COPYRIGHT**

© **Copyright:** Flávio José Rosa Pereira

O Instituto Politécnico de Setúbal tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicitar este trabalho através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, de o divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



*“A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo”.*

*(Albert Einstein)*



## **AGRADECIMENTOS**

Quero agradecer a todos os que a diferentes níveis contribuíram para a conclusão desta dissertação. Pois tal não teria sido realizado sem o apoio e dedicação de todas as pessoas e entidades que, de uma ou de outra forma, intervieram nesta etapa da minha vida.

Ao Professor Rui Bebiano, meu professor e orientador científico, pela partilha de conhecimentos e pela incansável disponibilidade no sentido de esclarecer as várias questões que foram surgindo, pelo apoio prestado na cedência de material e informação. Agradeço-lhe a oportunidade e experiência que foi realizar este trabalho consigo.

À minha querida Ângela e filha Flávia Pereira, quero agradecer pela paciência, apoio e incentivo que me transmitiram, não só na realização deste trabalho, mas durante todos estes anos que nunca deixaram de acreditar em mim e que me serviram de motivação para ultrapassar mais esta etapa na minha vida.

Ao Professor Paulo Mendonça, meu co-orientador científico, pela disponibilidade em esclarecer dúvidas bem como no melhoramento do texto.

Ao Engenheiro André Martins, aluno de doutoramento do Instituto Superior Técnico, pela sua disponibilidade em me auxiliar em alguns aspetos relativos à programação em Visual Basic.

A todos os professores da ESTBarreiro/IPS que ao longo destes seis anos contribuíram para a minha formação, agradeço profundamente o sentido crítico que contribuiu bastante para o meu crescimento académico e pessoal.



## RESUMO

A presente dissertação reporta um trabalho académico no âmbito do qual se desenvolveu uma aplicação informática, intitulada “*Rounded Corners 1.0*”, que facilita a modelação geométrica de secções transversais que contenham dobras circulares – o que constitui uma situação comum no caso dos perfis enformados a frio, por exemplo.

A aplicação foi desenvolvida na linguagem Visual Basic 6, usando o ambiente de desenvolvimento Visual Studio 2013, e contém um interface gráfico *user-friendly* que permite uma fácil e intuitiva introdução dos parâmetros, permitindo a modelação automática de secções em forma de “L”, “C”, “Z” ou “RHS”. Os *inputs* são os parâmetros geométricos (i) da secção transversal e (ii) das dobras (o raio de curvatura  $R$  e o número de segmentos da aproximação  $N$ ), sendo o *output* um ficheiro de dados (coordenadas de nós, etc.) formatado de acordo com as especificações do programa GBTUL – exportando-se assim os dados para este último, pode prosseguir-se para a análise estrutural propriamente dita (de encurvadura ou de vibração).

Deduziram-se, e implementaram-se na aplicação, fórmulas matemáticas gerais que permitem determinar as coordenadas dos nós dos segmentos de aproximação de dobras, com várias possíveis orientações. Após o desenvolvimento, a aplicação foi testada com sucesso. Por fim, utilizou-se a mesma em algumas pequenas análises de encurvadura e vibração de perfis de aço enformados a frio, tendo os resultados obtidos sido comparados com valores fornecidos por (i) fórmulas analíticas, (ii) artigos científicos e (iii) o programa CUFSM 4.05.

O programa, cujo interface foi escrito convenientemente com instruções em Inglês, será disponibilizado gratuitamente no site <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>. Ficará assim à disposição da comunidade técnica e científica e espera-se que seja útil para a investigação nesta área.

**PALAVRAS-CHAVE:** Perfis de Aço Enformados a Frio, Interseções em Dobra, Deformação Local e Distorcional, Análise Encurvadura, Análise de Vibração, Programa GBTUL.



## ABSTRACT

This dissertation reports an academic work under which it was developed a computer application entitled "*Rounded Corners 1.0*", which facilitates the geometric modeling of cross-sections containing circular folds – a fairly common situation in the case of cold formed members

The application was written in Visual Basic 6 language, using Visual Studio 2013 development platform, and contains a *user-friendly* graphical interface which allows easy and intuitive introduction of input parameters, allowing the automatic modeling of "L", "C", "Z" or "RHS" sections. The inputs are the geometrical parameters defining (i) cross-section geometry and (ii) its folds (the curvature radius  $R$  and the number of segments  $N$  of the approximation), while the output is a data file (coordinates of nodes, etc.) formatted according to the specifications of GBTUL program – the structural analysis itself (buckling or vibration) is performed by the latter, after importing the data from that file.

General mathematical formulae, for determining the coordinates of the approximation segment nodes of quadrants with possible orientations, are derived and implemented on the code. After development, the application has been successfully tested. Finally, the application was used in a few buckling and vibration analyses of cold-formed steel columns and the results obtained were compared with values provided by (i) analytical formulae, (ii) results in scientific literature, and (iii) (buckling) estimates provided by the CUFSM 4.05 program.

The program, its interface having conveniently been written in English, will be made available as freeware on the website <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>. It will thus be available to the scientific and technical community and is expected to be useful for research in this area.

**KEYWORDS:** Cold Formed Steel Members, Rounded Corners, Local and Distortional Deformation, Buckling Analysis, Vibration Analysis, GBTUL Program.



## ÍNDICE GERAL

AGRADECIMENTOS	III
RESUMO	V
ABSTRACT	VII
ÍNDICE GERAL	IX
LISTA DE ABREVIATURAS	XV
LISTA DE VARIÁVEIS	XV
<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1 O AÇO LEVE	1
1.1.1 GENERALIDADES	1
1.1.2 PROCESSO DE FABRICO	3
1.2 O PROGRAMA “GBTUL”	4
1.3 OBJETIVOS	6
1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	8
<b>2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA</b>	<b>9</b>
<b>3. DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO</b>	<b>13</b>
“ROUNDED CORNERS 1.0”	13
3.1 DESCRIÇÃO GERAL	13
3.2 DESCRIÇÃO DO INTERFACE GRÁFICO	13
3.3 CÓDIGO DA APLICAÇÃO	17
<b>4. TESTE DA APLICAÇÃO</b>	<b>19</b>
4.1 GENERALIDADES	19
4.2 ESTUDO DOS PARÂMETROS R E N – SECÇÃO “L”	21
4.3 GEOMETRIAS DAS 4 SECÇÕES – “L”, “C”, “Z” E “RHS”	22

<b>5. ESTUDOS E APLICAÇÕES</b>	<b>23</b>
5.1 GENERALIDADES	23
5.2 CONVERGÊNCIA DE SECÇÃO QUADRADA PARA SECÇÃO CIRCULAR	24
5.3 COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DE ÁDÁNY E BEREGSZÁSZI.	29
5.4 ANÁLISE DE ENCURVADURA – COMPARAÇÃO COM O SOFTWARE CUFSM 4.05	32
5.5 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO	34
<b>6. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS</b>	<b>37</b>
6.1 CONCLUSÕES	37
6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	38
<b>ANEXO I</b>	<b>41</b>
CÓDIGO DA APLICAÇÃO INFORMÁTICA	41
<b>ANEXO II</b>	<b>49</b>
DIAGRAMAS DE PARTICIPAÇÃO MODAL	49

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Processos de fabrico de perfis em aço leve: (a) quinagem e (b) perfilagem [Fonte: <a href="http://mavigrade.pt/Servico_Corte_Quinagem.html">http://mavigrade.pt/Servico_Corte_Quinagem.html</a> consulta em 22.09.2015].	4
Figura 2 - GBTUL: Estrutura da GUI (paralelismo com o procedimento sequencial da GBT).	5
Figura 3 - Aspectos dos 4 separadores do programa GBTUL: (a) Análise da Secção, (b) Seleção Modal, (c) Análise da Barra, (d) Solução.	7
Figura 4– Intersecção de 2 paredes perpendiculares: (a) reta; (b) por via de dobra circular de raio R.	9
Figura 5 – Aproximação de uma dobra à realidade.	10
Figura 6 – Andamento da interação de N segmentos de reta em uma dobra.	11
Figura 7 – Identificação dos quadrantes.	11
Figura 8 - – Determinação das coordenadas dos nós numa secção em Z: cantos percorridos em sentido horário (2 e 3) e em sentido anti-horário (4 e 5).	12
Figura 9 – Interface da aplicação – janela inicial.	14
Figura 10 – As duas regiões em que se divide a janela principal: (a) “Cross-Section Models” e (b) “Rounded Corners Modelling”.	15
Figura 11 – Os 4 separadores/templates: secções (a) em “L”, (b) em “C”, (c) em “Z” e (iv) em “RHS”	16
Figura 12– Caixa de diálogo indicando que o ficheiro de outputs foi criado com sucesso....	17
Figura 13 – Exemplo ilustrativo (C120x90x20x1, R = 5 [mm])	19
Figura 14 – Exportação dos dados para o programa GBTUL: (a) ficheiro GBTUL_inputs.csv e (b) janela 1 do GBTUL.	20
Figura 15 – Secção L10x10x1 com R = 5: Aproximações da dobra com (a) N = 1, (b) N = 2, (c) N = 4, (d) N = 8.	21
Figura 16 – Secção L10x10x1 com N = 8: Dobras com raio de curvatura (a) R = 0.5, (b) R = 2, (c) R = 5, (d) R = 8.	21
Figura 17 – Geometrias das secções com R = 5 (e N = 5): (a) “L”, (b) “C”, (c) “Z” e (d) “RHS”.	22
Figura 18 – Geometrias das secções com R = 10 (e N = 5): (a) “L”, (b) “C”, (c) “Z” e (d) “RHS”.	22
Figura 19 – Geometria da secção “RHS” 50 × 50 × 1 mm, com dobras de raio R.	24



## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de  $a_j$ ,  $b_j$  e  $\theta_j$  para os 4 quadrantes do plano  $Y - Z$ ..... 11

Tabela 2 – Comparação entre os valores de  $P_{cr}$  obtidos com o GBTUL e com as fórmulas . 29



## SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### LISTA DE ABREVIATURAS

- CFS** – Cold-Formed Steel”  
**CUFSM** – “Cornell University Finite Strip Method” (acrónimo)  
**DEC** – Departamento de Engenharia Civil  
**ESTB** – Escola Superior de Tecnologia do Barreiro  
**GBTUL** – “Generalised Beam Theory at the University of Lisbon” (acrónimo)  
**IPS** – Instituto Politécnico de Setúbal  
**LSF** – Light Steel Framing  
**MEFC** – Método dos Elementos Finitos de Casca  
**MFF** – Método das Faixas Finitas

### LISTA DE VARIÁVEIS

- $A_c$  – Área da secção circular  
 $A_q$  – Área da secção quadrada  
 $a_j$  – Parâmetro dependente da orientação da dobra (direção Y)  
 $b_j$  – Parâmetro dependente da orientação da dobra (direção Z)  
 $B$  – Largura da secção  
 $d$  – Altura dos reforços  
 $E$  – Módulo de elasticidade do material  
 $H$  – Altura da secção  
 $K$  – Coeficiente de encurvadura  
 $L$  – Comprimento da barra  
 $N$  – Número segmentos de reta de aproximação da dobra  
 $R$  – Raio da dobra  
 $t_N$  – Espessura  
 $P_b$  – Carga de encurvadura

- $P_{cr}$  – Carga Critica
- $\delta_E$  – Variação percentual da carga de encurvadura (em relação a  $R = 0$ )
- $\delta_V$  – Variação percentual da frequência de vibração (em relação a  $R = 0$ )
- $\theta_j$  – Parâmetro dependente da orientação da dobra
- $\omega_f$  – Frequência angular de vibração
- $\nu$  – Coeficiente de Poisson
- $\rho$  – Massa volúmica do material

# 1. INTRODUÇÃO

No mundo da construção os engenheiros têm sido desafiados ao longo dos tempos a conceber estruturas cada vez mais esbeltas, leves, resistentes e duráveis, por forma a minimizar custos e melhorar a eficiência estrutural e estética dos edifícios. Neste âmbito, destaca-se o material aço como o mais vantajoso em diversas soluções estruturais.

## 1.1 O AÇO LEVE

### 1.1.1 GENERALIDADES

Designa-se genericamente por ‘Aço Leve’<sup>1</sup> a solução construtiva, tipicamente aplicável em moradias ou pequenos edifícios, que envolve um sistema estrutural baseado em perfis de aço enformados a frio [e.g., Silvestre et al., 2013 e Hancock, 1998]. Mais concretamente, estes perfis são dispostos paralelamente – interligando-se por canais (nas extremidades) e eventuais elementos de contraventamento – formando assim painéis estruturais planos, ou secções modulares de estruturas planas, os quais são ensamblados para constituir as paredes e lajes dos pisos, num processo de construção expedito e simples, dispensando o recurso a grua, ou a meios elevatórios pesados. Este tipo de conceção estrutural, já bastante usual em países como os EUA, a Austrália ou os países nórdicos da Europa, tem vindo a conhecer, nos últimos anos, uma crescente aplicação em Portugal (e.g.: [Silvestre, 2011]), prevendo-se uma quota de mercado cada vez mais relevante.

Os montantes e vigas utilizados nas estruturas em aço leve são fabricados a partir de chapa de aço galvanizado por imersão em zinco quente. Depois a chapa é moldada a frio na forma desejada. Na origem dos processos de enformação a frio está a grande ductilidade do aço, a qual permite obter, a partir de chapas de espessura bastante reduzida<sup>2</sup>, perfis e painéis estruturais com elevada eficiência estrutural (i.e., relação resistência/peso), pois é através do processo de moldagem que as chapas de aço vão adquirir a resistência necessária para poderem ser usadas como elemento estrutural [Gaspar, 2013]. Através deste processo é possível obter uma grande versatilidade de fabrico (viabilizando a produção, de uma forma económica, elementos estruturais com uma vasta gama de geometrias) [Fena, 2011].

---

<sup>1</sup> Outras designações habituais são “Aço Enformado a Frio”, ou anglo-saxónicas “*Light Steel Framing*” (LSF) ou “*Cold-Formed Steel*” (CSA).

<sup>2</sup> Para moldar ou dobrar, sem aquecer a chapa, esta deverá possuir uma baixa espessura, tipicamente entre os 0,3mm e os 6mm de espessura.

Genericamente, algumas das principais vantagens da construção em Aço Leve são as seguintes [Silvestre et al., 2013]:

- Prazo de Execução: a possibilidade de pré-fabricar em grande escala os elementos estruturais (perfis e painéis) e o seu reduzido peso, facilita o transporte, montagem e desmontagem da estrutura. Por outro lado, a utilização de técnicas fáceis e rápidas, como sistemas de fixação mecânica, utilização de argamassas de secagem rápida, entre outras, diminuem consideravelmente a mão-de-obra e conseqüentemente, o tempo necessário para a conclusão dos trabalhos.
- Economia Construtiva: no sistema de construção de edifícios em aço leve, são utilizadas evoluídas técnicas construtivas que permitem não só reduzir os tempos de construção, mas também diminuir os custos associados à mão-de-obra. Com este sistema, os perfis e vigas são pré-fabricados e recorrendo a sistemas de construção modulares segundo as medidas necessárias evitando assim desperdícios de material, para além de que é ainda possível a reutilização dos componentes estruturais.
- Desempenho Térmico e Acústico: uma habitação construída em aço leve é constituída por uma pintura impermeável, argamassa polimérica, placas de poliestireno extrudido, lâ-de-rocha e gesso cartonado, tais materiais permitem que a habitação fique completamente isolada do exterior tanto a nível térmico, como acústico. Tendo em conta as propriedades de condutividade térmica dos materiais e comparando uma habitação convencional construída em betão e alvenaria com uma habitação em aço leve, verifica-se que seria necessário possuir paredes de tijolo com 86cm de espessura, para desta forma se obter o mesmo nível de isolamento de uma habitação em aço leve com uma parede isolada com lâ-de-rocha de cerca de 5cm de espessura [Silvestre et al., 2013]. Relativamente ao desempenho acústico, como já se referiu anteriormente, neste tipo de construções são utilizadas diversas camadas, constituídas por materiais de diferentes densidades, conferindo um melhor isolamento acústico da habitação.
- Segurança Sísmica: as construções metálicas são francamente mais dúcteis do que as de betão, sendo desta forma a sua utilização aconselhada em zonas sísmicas. Esta ductilidade é proveniente do comportamento mecânico do aço e o carácter dissipativo das ligações aparafusadas contudo, estes perfis metálicos apresentam pequenas espessuras, permitindo a ocorrência de deformação local das secções quando submetidas a esforços significativos. Ainda assim, o sistema construtivo em aço leve apresenta níveis de forças sísmicas na estrutura francamente inferiores quando comparado com estruturas de betão armado, devido aos materiais utilizados que de têm menor massa e menor rigidez.
- Reabilitação Estrutural: o sistema construtivo em aço leve é bastante interessante em aplicações de reabilitação de estruturas. Isto porque, o aço é um material bastante versátil e transportável, o que permite construir novas estruturas sobre outras, sem que para isso se vejam aumentados os esforços da estrutura já existente.

- **Sustentabilidade:** Numa construção a sustentabilidade prende-se diretamente com o tipo de materiais a serem utilizados e o seu ciclo de vida, que vai desde a construção, exploração até à sua demolição. As construções em aço leve são uma grande mais-valia, pois no seu reaproveitamento o aço é um material bastante ecológico na medida que os seus componentes podem ser desmantelados e reciclados ou reutilizados. Por outro lado, possibilitam uma solução de construção com menores pontes térmicas, logo com consumos energéticos reduzidos. Os resíduos de construção resumem-se a alguns desperdícios, contrariamente às construções tradicionais (e.g., em alvenaria). Para além destes fatores, utiliza um consumo de água desprezável (“construção seca”), tonando-se também deste modo ecológica e amiga do ambiente.

Contudo é importante também referir algumas desvantagens do aço leve, tais como:

- **Corrosão:** o aço necessita ser protegido contra a corrosão por meio da galvanização. O esquema de proteção usualmente utilizado nos perfis em aço leve é a classe Z275, que corresponde em aplicar duas camadas de zinco (uma em cada face da chapa) com uma densidade relativa de 275 g/m<sup>2</sup>, ou seja, cada camada com cerca de 0,02 mm de espessura de zinco.
- **Resistência ao fogo:** sendo constituído por chapas de espessuras relativamente pequenas, o aço leve resulta vulnerável às temperaturas elevadas (i.e. acima de 350° a 500°), perdendo significativamente rigidez e resistência. Como consequência, obtêm-se cargas mais baixas para os modos de instabilidade globais e locais.

### 1.1.2 PROCESSO DE FABRICO

Os perfis de aço leve são obtidos através da dobragem (ou enformagem) de chapas de espessura constante (entre 0.5 e 5mm) à temperatura ambiente – daí a designação de “enformados a frio”, em oposição aos perfis laminados a quente. Os dois principais processos de dobragem são os seguintes (e.g., Rhodes 1991):

- **Quinagem (“Press-Braking”):** A chapa é colocada entre uma prensa e uma cunha (quinadora), ambas em forma de “V”, e a penetração da primeira sobre a segunda leva à dobragem da chapa com um ângulo de abertura similar (ver Figura 1(a)).
- **Perfilagem (“Rolling”):** A chapa desloca-se através de uma sequência de pares de rolos que lhe aplicam as sucessivas dobras e conferem a forma final do perfil (ver Figura 1(b)).

As várias etapas de qualquer destes processos levam à dobragem da chapa em várias paredes, formando um perfil de parede fina. As dobras resultantes, que terão sempre um maior ou menor raio de curvatura, estão na origem do âmbito deste trabalho.



Figura 1 - Processos de fabrico de perfis em aço leve: (a) quinagem e (b) perfilagem [Fonte: [http://mavigrade.pt/Servico\\_Corte\\_Quinagem.html](http://mavigrade.pt/Servico_Corte_Quinagem.html) consulta em 22.09.2015].

## 1.2 O PROGRAMA “GBTUL”

Procurando contribuir para a utilização e desenvolvimento (investigação científica) desta vantajosa solução construtiva, um grupo de investigadores do Instituto Superior Técnico desenvolveu, e disponibilizou *online* como freeware [Bebiano, 2013a], um programa de cálculo automático que executa análises de encurvadura e de vibração de perfis de parede fina genéricos. Esse programa, que se designa por GBTUL (acrónimo de “GBT at the Technical University of Lisbon”), implementa uma formulação da Teoria Generalizada de Vigas (“GBT”, da designação inglesa “*Generalized Beam Theory*”), uma teoria de peças lineares de parede fina que (i) contabiliza a deformação local/distorcional da secção transversal e (ii) fornece uma representação da solução (modo de encurvadura/vibração) baseada em contribuições de modos de deformação da secção transversal, com significado físico (e.g.: [Bebiano, 2013b]).

O programa envolve uma interface gráfica (GUI) cuja estrutura pretende fazer um paralelismo com a própria Teoria Generalizada de Vigas (ver Figura 2): Para fazer uma análise, o utilizador passa por uma sequência de quatro separadores, onde cada um se refere a uma das quatro principais etapas de uma análise estrutural feita através da GBT. De seguida faz-se uma breve descrição de cada um desses quatro separadores, os quais são representados na Figura 3:

- **Separador 1 (Análise da Secção):** Aqui, o utilizador fornece os *inputs* para a análise da secção, nomeadamente as propriedades do(s) material(is) e os dados da geometria da secção transversal (ver Figura 3(a)).
- **Separador 2 (Seleção Modal):** Aqui, o programa fornece representações gráficas dos modos de deformação da secção (calculados a partir dos dados fornecidos no separador anterior) e permite que o utilizador faça uma seleção daqueles que pretende incluir na solução do problema estrutural em questão (ver Figura 3(b)).

- **Separador 3 (Análise da Barra):** Neste ponto, o utilizador fornece os *inputs* relativos (i) ao(s) comprimento(s), (ii) às condições de apoio, (iii) ao carregamento, (iv) à discretização longitudinal<sup>3</sup> e (v) ao tipo de análise a efetuar, que pode ser de encurvadura ou vibração (ver Figura 3(c)).
- **Separador 4 (Solução):** Aqui, o programa fornece os resultados finais da análise, que se dividem essencialmente em (i) curvas de encurvadura/vibração<sup>4</sup> e (ii) configurações deformadas, 2D ou 3D, dos modos de encurvadura ou vibração (ver Figura 3(d)).

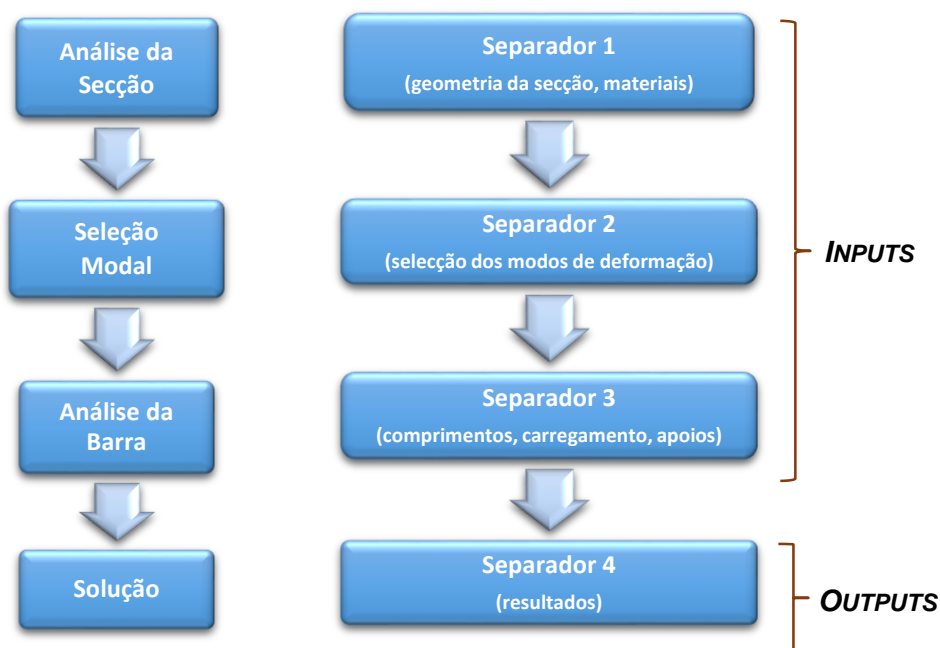


Figura 2 - GBTUL: Estrutura da GUI (paralelismo com o procedimento sequencial da GBT).

Entre muitas outras funcionalidades, a versão mais recente do programa disponibiliza *templates* para facilitar a introdução dos *inputs* relativos a secções transversais com geometrias mais comuns, tais como “C”, “U”, “L”, RHS, etc. Porém, em todos esses casos, as ligações entre paredes (e.g., alma-banzo) são modeladas em ângulo reto, não sendo possível considerar diretamente o efeito de uma dobra. Na ausência de um *template* específico, os dados necessários para definir uma tal geometria no programa, obrigaria o utilizador a efetuar alguns cálculos preliminares algo fastidiosos – teria de proceder à aproximação das dobras em vários troços retos e calcular as coordenadas das respetivas extremidades. Assim, seria vantajoso dispor-se de uma ferramenta auxiliar que, dadas as dimensões da secção (incluindo os raios de dobragem), automatizasse o cálculo dos *inputs* a fornecer ao programa GBTUL, para este realizar a análise.

<sup>3</sup> A barra pode ser discretizada em “elementos finitos de GBT”, que são elementos finitos de barra cujos graus de liberdade são os valores dos deslocamentos modais nas extremidades [Bebiano, 2010].

<sup>4</sup> I.e., curvas  $P_i - L$  ou  $\omega_i - L$ , onde  $P_i$  e  $\omega_i$  são a carga de bifurcação ou frequência natural de vibração correspondentes ao  $i$ -ésimo modo de encurvadura ou vibração.

### 1.3 OBJETIVOS

Os trabalhos realizados no âmbito desta dissertação têm como principal objetivo responder à limitação referida anteriormente, criando uma aplicação informática que forneça ao programa GBTUL os dados da geometria de uma secção com cantos arredondados (dobras).

A aplicação informática, que foi programada em Visual Basic, recebe como *inputs* as dimensões da secção transversal – incluindo (i) os raios de dobragem e (ii) o número de segmentos a serem considerados na aproximação – e, calculando automaticamente as coordenadas dos nós (i.e., dos segmentos de parede que aproximam a dobra), fornece um output que pode ser importado pelo programa GBTUL, com o qual se pode proceder a uma análise de encurvadura ou vibração.

A aplicação desenvolvida tem uma interface gráfica e permite a análise de secções com geometrias “L”, “C”, “Z”, e “RHS”. Os *inputs* são (i) as dimensões relevantes da secção em questão (altura da alma, largura dos banzos, espessuras, etc.), (ii) os raios das dobras e (iii) o número de segmentos considerados na aproximação dos troços retos, podendo-se assim controlar a aproximação da curvatura. Quanto aos *outputs*, consistem em ficheiros do tipo “*comma separated values*” (.csv), reconhecidos pelo Microsoft Excel, contendo os dados fornecidos diretamente ao programa GBTUL – impressos, obviamente, no formato deste último – para a análise estrutural.

Após o seu desenvolvimento, a aplicação é testada e utilizada em análises de encurvadura, que comprovam o seu bom funcionamento e a sua utilidade prática.

Para além dos dois objetivos “específicos” descritos acima, também se pretendeu realizar um estudo geral do tema em questão – o “Aço Leve” – e adquirir experiência e boas práticas ao nível da programação para fins de engenharia.

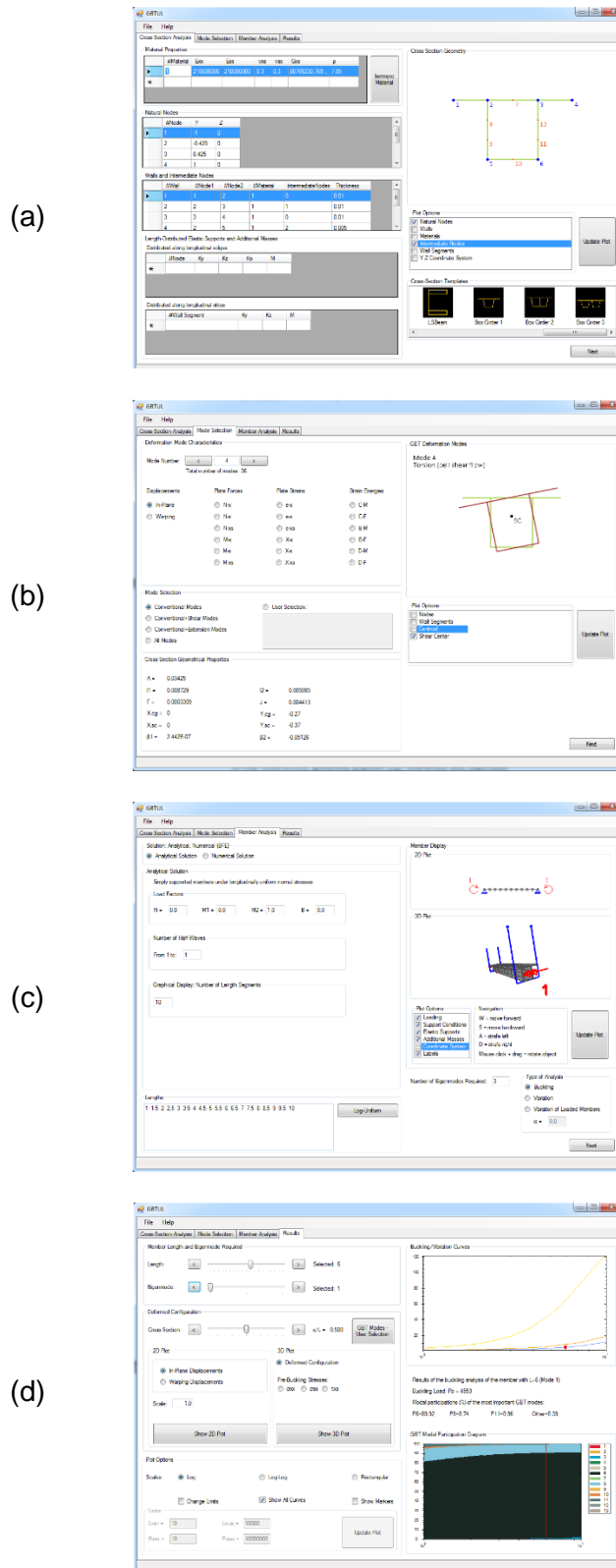


Figura 3 - Aspectos dos quatro separadores do programa GBTUL: (a) Análise da Secção, (b) Seleção Modal, (c) Análise da Barra, (d) Solução.

## 1.4 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação encontra-se dividida em seis capítulos, onde estão organizados os conhecimentos, desenvolvimento de um programa, aplicação do programa, a análise de resultados e as conclusões.

No capítulo 1 faz-se uma breve introdução ao tema da dissertação, apresentando-se a motivação e objetivos a alcançar. Resume-se um estudo sobre o “Aço Leve”, através do qual se adquiriu um conhecimento geral acerca dessa solução estrutural e dos principais aspetos teóricos e práticos considerados.

No capítulo 2 apresenta-se a formulação matemática subjacente ao problema. Trata-se da aproximação de um quarto de círculo (uma dobra) através de segmentos de reta, e do cálculo das coordenadas dos respetivos nós.

No capítulo 3 é apresentada a aplicação desenvolvida. Ilustra-se a interface gráfica, descrevendo-se os seus detalhes e refere-se as ideias de programação adotadas.

No capítulo 4 procede-se ao teste da aplicação. Fazem-se alguns testes básicos, incluindo a variação dos parâmetros básicos das dobras ( $N$  e  $R$ )<sup>5</sup> e a obtenção de exemplos de geometrias dos quatro tipos de secção (“L”, “C”, “Z”, “RHS”) com dobras.

No capítulo 5 ilustra-se a aplicação prática do programa, nomeadamente da sua utilização em conjunto com o programa GBTUL. Efetuam-se algumas análises de encurvadura e vibração, sendo os resultados discutidos/interpretados mecanicamente e comparados com resultados similares obtidos, (i) por fórmulas analíticas na literatura científica ou, (ii) por via do programa de cálculo automático CUFSM.

No capítulo 6 apresentam-se algumas conclusões sobre o trabalho efetuado, e sugerem-se algumas linhas de trabalho que poderão constituir possíveis desenvolvimentos futuros.

Finalmente, em Anexo é apresentado integralmente o código da aplicação (escrito na linguagem de programação Visual Basic 6), bem como alguns diagramas de participação modal referentes a análises efetuadas com o programa GBTUL no Capítulo 5.

---

<sup>5</sup>  $N$  corresponde ao número de segmentos a analisar para um quarto de círculo e  $R$  ao raio do círculo.

## 2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta secção aborda-se o problema matemático da aproximação de um quarto de círculo, de raio  $R$ , por intermédio de segmentos de reta idênticos. Deduz-se uma expressão analítica geral – válida para qualquer orientação do quarto de círculo e para qualquer número  $N$  de segmentos – que fornece as coordenadas dos nós (extremidades dos segmentos) e é eficientemente aplicável no contexto da programação.

Considere-se a porção de secção transversal de barra de parede fina representada na Figura 4(a), em que duas paredes perpendiculares (neste caso, horizontal e vertical) convergem para um nó, cujas coordenadas num dado referencial  $Y - Z$  são  $(\bar{Y}, \bar{Z})$ . Na Figura 4(b), representa-se a forma dessa mesma intersecção quando feita por via de uma dobra, perfazendo um quarto de círculo cujo raio é  $R$  e as coordenadas do vértice são  $(\bar{Y} - R, \bar{Z} - R)$ .

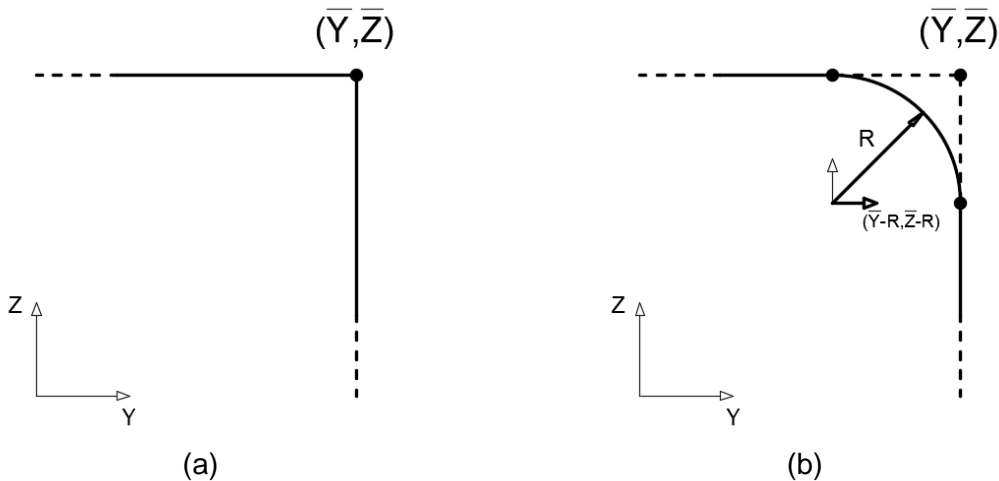


Figura 4 – Intersecção de 2 paredes perpendiculares: (a) reta; (b) por via de dobra circular de raio  $R$ .

Considere-se, agora, a aproximação de um quarto de círculo através de  $N$  segmentos de reta, sequenciais e de igual comprimento, cujos  $N + 1$  nós se situam sobre o arco. Cada um desses segmentos é a corda de um arco cuja amplitude vale  $\pi/(2N)$ <sup>6</sup>. Por outro lado, como mostra a Figura 5, ângulo (em radianos) que o segmento que une o vértice ao nó  $i$  faz com o eixo  $Y$  vale:

$$\theta_i = \frac{(i-1)\pi}{N} \quad (1)$$

onde se deve notar que para  $i = 1$  o ângulo vale 0 e para  $i = N + 1$  o ângulo vale  $\pi/2$ .

<sup>6</sup> Ou, por outras palavras, a  $N$ -ésima parte de um ângulo reto ( $\pi/2$ ).

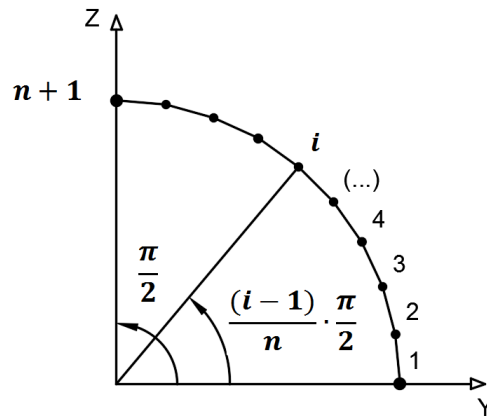


Figura 5 – Aproximação de uma dobra por via de  $N$  segmentos de reta

Assim, é fácil deduzir que as coordenadas do nó  $i$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) são dadas por:

$$Y_i = \bar{Y} - R + R \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

$$Z_i = \bar{Z} - R + R \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

ou então, colocando o raio ( $R$ ) em evidência:

$$Y_i = \bar{Y} + \left[-1 + \cos\left(\frac{(i-1)\pi}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] R \quad (4)$$

$$Z_i = \bar{Z} + \left[-1 + \sin\left(\frac{(i-1)\pi}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] R \quad (5)$$

A Figura 6 ilustra a aplicação da fórmula anterior, mostrando a aproximação de um quarto de círculo ( $\bar{Y} = \bar{Z} = 2$ ,  $R = 1$ ), para  $N = 1, 2, 4, 8$  – torna-se evidente que à medida que  $N$  aumenta a sequência de segmentos se vai confundindo com o arco.

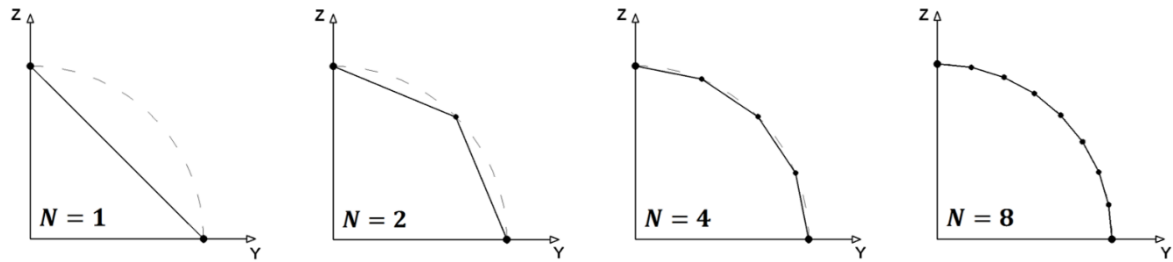


Figura 6 – Andamento da interação de N segmentos de reta em uma dobra

As expressões acima foram deduzidas para o quarto de círculo representado na Figura 4(a), o qual está orientado de uma determinada forma: se a origem do referencial  $Y - Z$  for o vértice, então o arco desenvolve-se no quadrante I ( $Y > 0$  e  $Z > 0$ ). Se a orientação for outra – ver Figura 7 – a fórmula anterior pode ser escrita de uma forma mais geral:

$$Y_i = \bar{Y} + \left[ a_j + \cos \left( \frac{(i-1)\pi}{N} + \theta_j \right) \right] R \quad (6)$$

$$Z_i = \bar{Z} + \left[ b_j + \sin \left( \frac{(i-1)\pi}{N} + \theta_j \right) \right] R \quad (7)$$

onde  $j$  é o índice do quadrante em questão ( $j \in \{1, \dots, 4\}$ ) e  $a_j$ ,  $b_j$  e  $\theta_j$  são parâmetros cujos valores (em função de  $j$ ) são dados na Tabela 1.

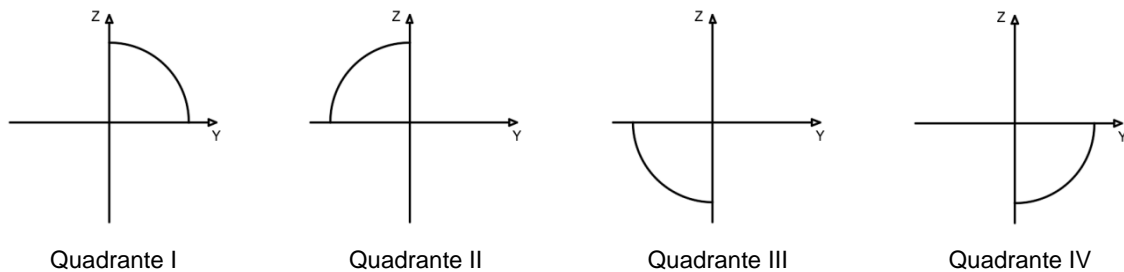


Figura 7 – Identificação dos quadrantes.

Tabela 1 - Valores de  $a_j$ ,  $b_j$  e  $\theta_j$  para os 4 quadrantes do plano  $Y - Z$

Quadrante				
	I	II	III	IV
$a_j$	-1	1	1	-1
$b_j$	-1	-1	1	1
$\theta_j$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$

Finalmente, importa referir que nalguns casos pode ser útil determinar as coordenadas dos nós em sentido *horário*, quando as expressões anteriores presumem um percurso em sentido *anti-horário* (Figura 5). Um exemplo, relevante para este trabalho, é o da secção em “Z”, cuja determinação sequencial dos nós leva a que alguns cantos sejam aproximados em sentido horário e outros em sentido anti-horário, como se vê na Figura 8. Para determinar as coordenadas dos nós em sentido *horário*, basta usar as expressões modificadas:

$$Y_i = \bar{Y} + \left[ a_j - \cos \left( \frac{(i-1)\pi}{2} + \theta_j + \frac{\pi}{2} \right) \right] R \quad (8)$$

$$Z_i = \bar{Z} + \left[ b_j - \sin \left( \frac{(i-1)\pi}{2} + \theta_j + \frac{\pi}{2} \right) \right] R \quad (9)$$

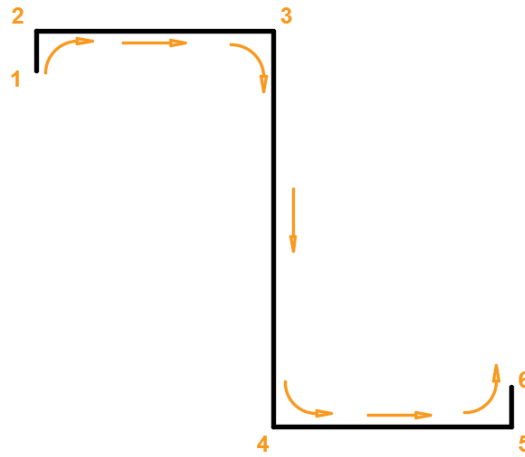


Figura 8 – Determinação das coordenadas dos nós numa secção em Z: cantos percorridos em sentido horário (2 e 3) e em sentido anti-horário (4 e 5).

As expressões (6)–(7), ou (8)–(9), permitem determinar as coordenadas das extremidades dos segmentos envolvidos na aproximação do quarto de círculo de uma forma que é prática e deve ser implementada num programa, pois é geral. Os parâmetros  $a_j$ ,  $b_j$  e  $\theta_j$  são constantes, podendo ser gravados, logo ao início, em vetores. Assim, para calcular as coordenadas para a aproximação de uma dobra, é necessário (i) considerar as coordenadas do nó  $(\bar{Y}, \bar{Z})$ , (ii) o quadrante em questão ( $j$ ), (iii) o sentido do percurso e, claro, (iv) os parâmetros essenciais ( $N$  e  $R$ ).

## 3. DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO “ROUNDED CORNERS 1.0”

### 3.1 DESCRIÇÃO GERAL

Com vista a cumprir os objetivos propostos, foi desenvolvida uma aplicação informática, a qual recebe, como *inputs*, os dados geométricos da secção transversal (incluindo as dobras) e devolve, como *output*, um ficheiro com as coordenadas dos nós dos segmentos de parede.

A aplicação informática, que foi intitulada “*Rounded Corners 1.0*”, foi desenvolvida através de uma plataforma, Visual Studio 2013, que constitui uma ferramenta de desenvolvimento de *software* na linguagem de programação Visual Basic 6.0. A escolha deste tipo de linguagem de programação foi um dos requisitos principais a considerar, não só pela possibilidade de desenvolver toda a sua estrutura dedicada ao sistema operativo mais utilizado, o Windows, através de *Windows Forms Application*, mas também por ser viável em gerar um documento compatível ao programa que serve como base deste projeto, GBTUL. Foi assim possível construir uma aplicação com uma interface bastante simples de forma a facilitar a sua utilização por parte do operador.

A aplicação permite o tratamento de 4 tipos de secção transversal: (i) secção de cantoneira (L) (ii) secção em C, (iii) secção em Z e (iv) secção fechada retangular de parede fina (RHS). Para além das dimensões da secção escolhida, o utilizador fornece os valores do raio de curvatura ( $R$ ) e o número de segmentos para a aproximação ( $N$ ) das dobras – o programa transforma todos os cantos retos da secção em dobras, usando as equações (6)-(9) para calcular as coordenadas dos nós.

### 3.2 DESCRIÇÃO DO INTERFACE GRÁFICO

Como é sabido, o interface gráfico de uma aplicação é a estrutura que permite ao utilizador a interação, através de elementos gráficos como ícones e indicadores visuais, com os dispositivos digitais. O *interface* gráfico deve ser projetado seguindo um padrão, com o objetivo de ser um projeto totalmente ergonómico perante a ótica do utilizador, transmitindo ao mesmo o total controlo das suas ações. De seguida vai ser apresentado através de ilustrações representativas, de forma pormenorizada, todos os quadros e itens da Aplicação “*Rounded Corners 1.0*”.

Ao abrir-se a aplicação, é apresentada a janela padrão (ver Figura 9), onde já se encontra selecionada, por *default*, uma secção geométrica (“L”).

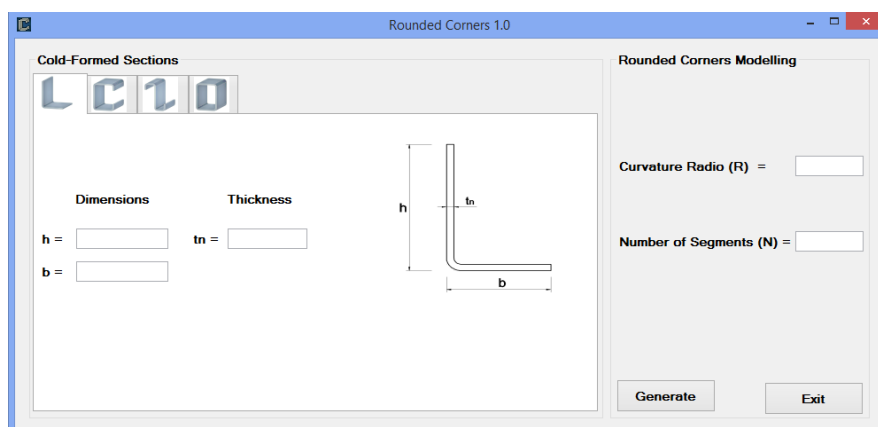


Figura 9 – Interface da aplicação – janela inicial

A janela principal é dividida em 2 regiões principais (Figura 10):

- Cold Formed Sections: Grupo de quatro separadores, correspondendo cada um a uma secção (“L”, “C”, “Z”, “RHS”), onde é possível introduzir os dados da geometria (dimensões e espessura) da secção pretendida – ver Figura 10(a).
- Rounded Corners Modelling: Caixas de texto onde é possível definir o raio ( $R$ ) e o número de segmentos ( $N$ ), parâmetros que definem a modelação das dobras da secção – ver Figura 10(b). Inclui também os botões “Generate”, de execução da aplicação, e “Exit”, para encerrá-la.

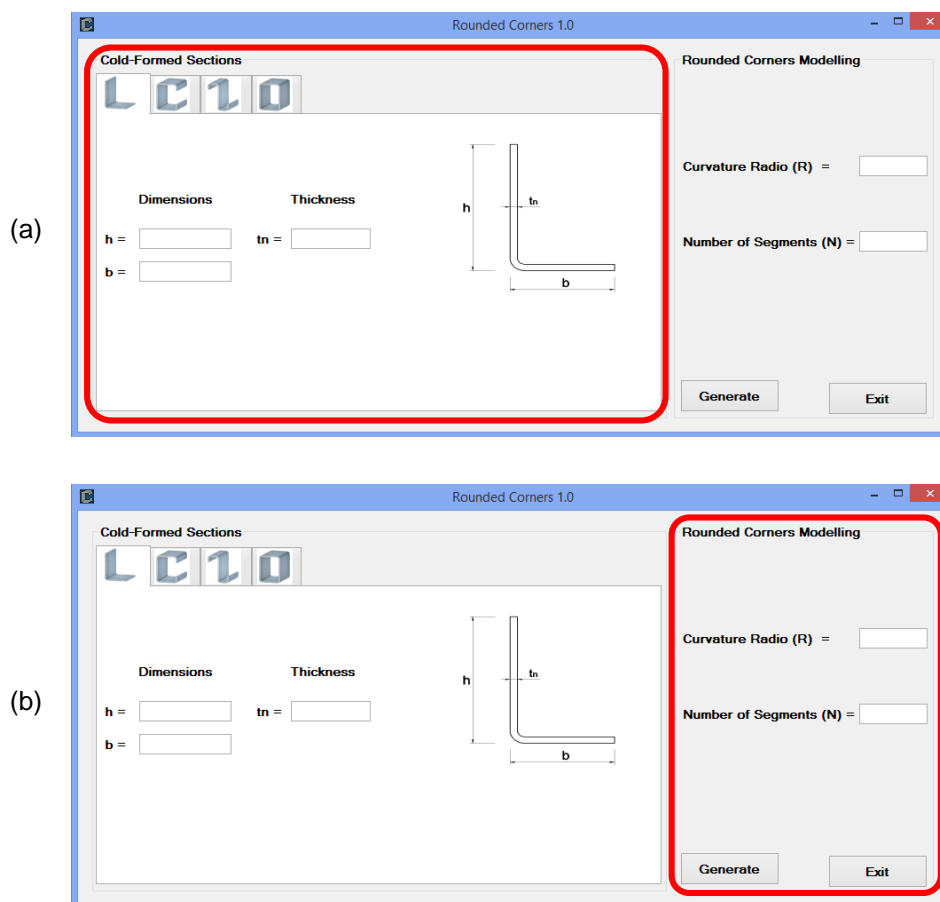






Figura 10 – As duas regiões em que se divide a janela principal: (a) “Cross-Section Models” e (b) “Rounded Corners Modelling”.

Conforme se referiu, o grupo “*Cold Formed Sections*” encontra-se dividido em quatro separadores (Figura 11), orientando o utilizador a seleccionar o tipo de secção que pretende realizar a análise geométrica:

-  Secção em “L” – Figura 11(a).
-  Secção em “C” – Figura 11(b).
-  Secção em “Z” – Figura 11(c).
-  Secção em “RHS” – Figura 11(d).

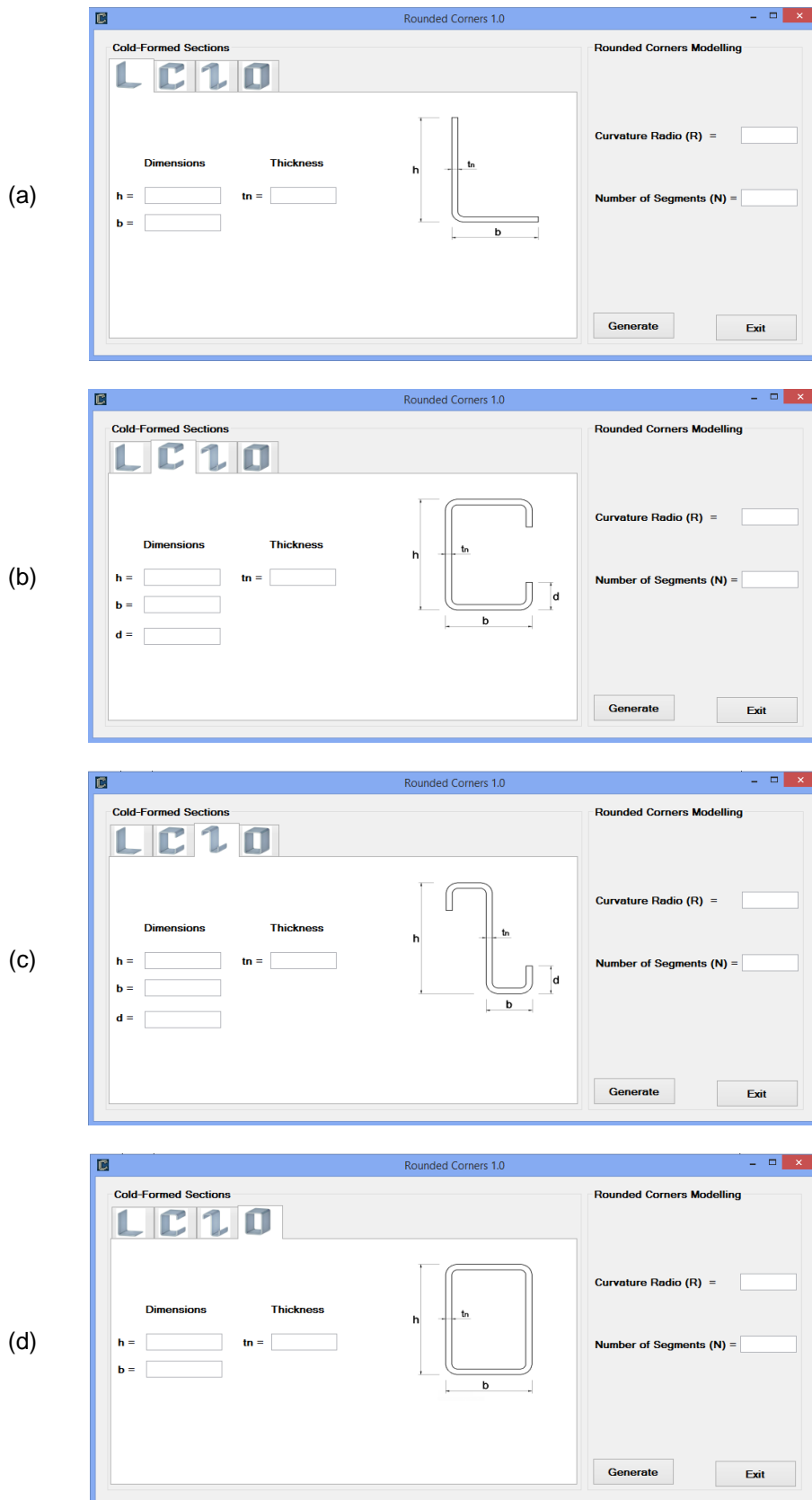


Figura 11 – Os 4 separadores/templates: secções (a) em “L”, (b) em “C”, (c) em “Z” e (iv) em “RHS”

Dentro de cada tipo de separador, é possível visualizar um pormenor técnico da secção a ser estudada, o que auxilia a compreender a aplicação das suas dimensões. Para as 4 geometrias é pedida a altura ( $h$ ), a largura ( $b$ ) e a espessura da chapa ( $tn$ ). Para as secções em “C” e em “Z” é necessário mais um *input*: a largura dos reforços ( $d$ ).

Como o *input* relativo às dobras ( $R$  e  $N$ ) é único, todas as dobras se caracterizarão por esses parâmetros. As suas diferentes orientações são consideradas, pois para cada caso especifica-se o quadrante em questão e usam-se os correspondentes parâmetros da Tabela 1.

Quando se clica em “Generate” a aplicação usa os *inputs* do separador que estiver ativo nesse momento<sup>7</sup> e calcula as coordenadas, que são guardadas no ficheiro “\GBTUL\_inputs.csv”, que é gravado na mesma pasta onde se encontra o executável da aplicação. Caso a execução corra bem e o ficheiro seja criado com sucesso, é exibida a caixa de diálogo representada na Figura 12 para confirmar isso mesmo.

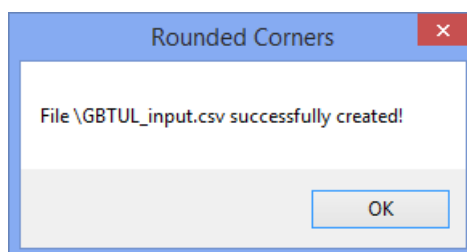


Figura 12 – Caixa de diálogo indicando que o ficheiro de outputs foi criado com sucesso

Finalmente, é de notar que, seguindo o mesmo “espírito” do programa GBTUL, as dimensões podem ser dadas em qualquer unidade ( $m$ ,  $cm$ ,  $mm$ ), desde que se use a mesma unidade em todos os *inputs* – os outputs virão nessa mesma unidade.

### 3.3 CÓDIGO DA APLICAÇÃO

O código da aplicação, que tem cerca de 400 linhas de extensão, é (por conveniência) apresentado integralmente em Anexo. Nesta secção faz-se apenas referência a alguns conceitos de programação aplicados na escrita do código:

- (i) Simplicidade: A simplicidade torna a realização da programação mais fiável, clarividente e sequencial. Tomando em conta este fator procurou-se desenvolver um código que, apesar de não ser bastante extenso, inibe a possibilidade de serem cometidos vários erros de programação. Por exemplo, em vez de se calcularem as coordenadas dos nós usando as equações (2) - (3), estas últimas foram trabalhadas até às formas finais (6) - (9), que – por serem mais gerais – possibilitam uma implementação computacional mais simples e sucinta.

<sup>7</sup> Evita-se assim a ambiguidade, caso o utilizador introduza dados em mais do que um separador.

- (ii) Comentários: Estes tipos de apontamentos são sempre bastante uteis para a progressão do código de programação, nomeadamente para o registo e identificação do significado das variáveis usadas e da função de cada conjunto de instruções. Permitem ao programador não só organizar metodicamente o código aquando da escrita inicial, como também orientar-se/relembrar-se, caso seja necessário modificar ou expandi-lo algum tempo mais tarde. Constituem também uma boa ajuda, no caso de algum outro programador vir a trabalhar nesse código
  
- (iii) Indentações: As indentações conferem ao código um aspeto visual mais atraente e permitem uma leitura mais rápida e clara do mesmo. Assim, procedeu-se à indentação do parágrafo sempre que se escreveu código dentro de uma sub-rotina, ou de instruções como os casos, *loops* e condições.

## 4. TESTE DA APLICAÇÃO

### 4.1 GENERALIDADES

Depois de ser desenvolvido, qualquer programa deve ser testado – sobretudo quando se destina a ser utilizado por um número possivelmente elevado de utilizadores, como é o caso do programa desenvolvido neste trabalho. Assim, o objetivo deste capítulo é apresentar um conjunto abrangente de testes que demonstram que a aplicação funciona bem.

Conforme explicado no capítulo anterior, a aplicação *Rounded Corners* recebe como *inputs* as dimensões da secção e os parâmetros que definem as dobras ( $R$ ,  $N$  – iguais para todas as dobras) e devolve, num ficheiro.csv, os dados (coordenadas dos nós e alinhamento das paredes) com o formato específico do programa GBTUL. Por exemplo, para uma secção em C – com as dimensões  $h = 120$ ,  $b = 90$ ,  $d = 20$ ,  $t = 1.0$ ,  $R = 5$  e com a aproximação das dobras por  $N = 5$  segmentos – representa-se na Figura 13 os dados a introduzir no programa *Rounded Corners*. Ao correr-se o programa, este cria o ficheiro GBTUL\_inputs.csv, representado na Figura 14(a), e os seus dados devem ser transferidos, por “Copy e Pasté”, para as tabelas de *inputs* “Natural Nodes”<sup>8</sup> e “Walls and Intermediate Nodes” da janela 1 do programa GBTUL representada na Figura 14(b).

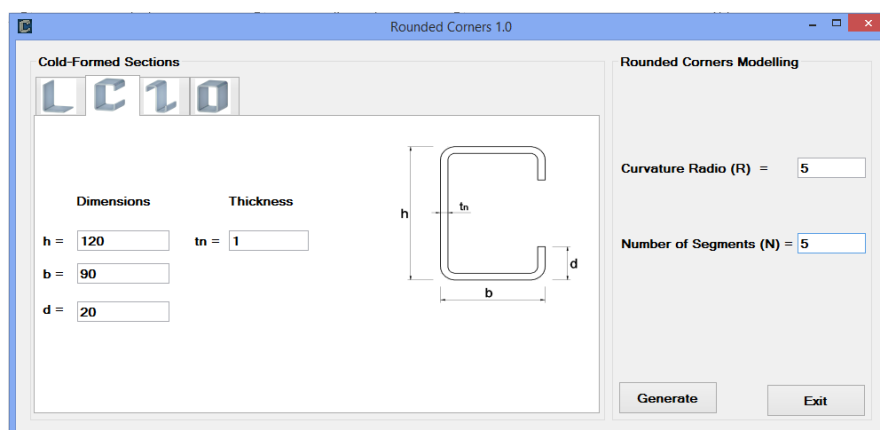


Figura 13 – Exemplo ilustrativo (C120x90x20x1,  $R = 5$  [mm])

<sup>8</sup> Refira-se que os  $N + 1$  nós associados às extremidades dos segmentos que aproximam as dobras são nós naturais (“Natural Nodes”).

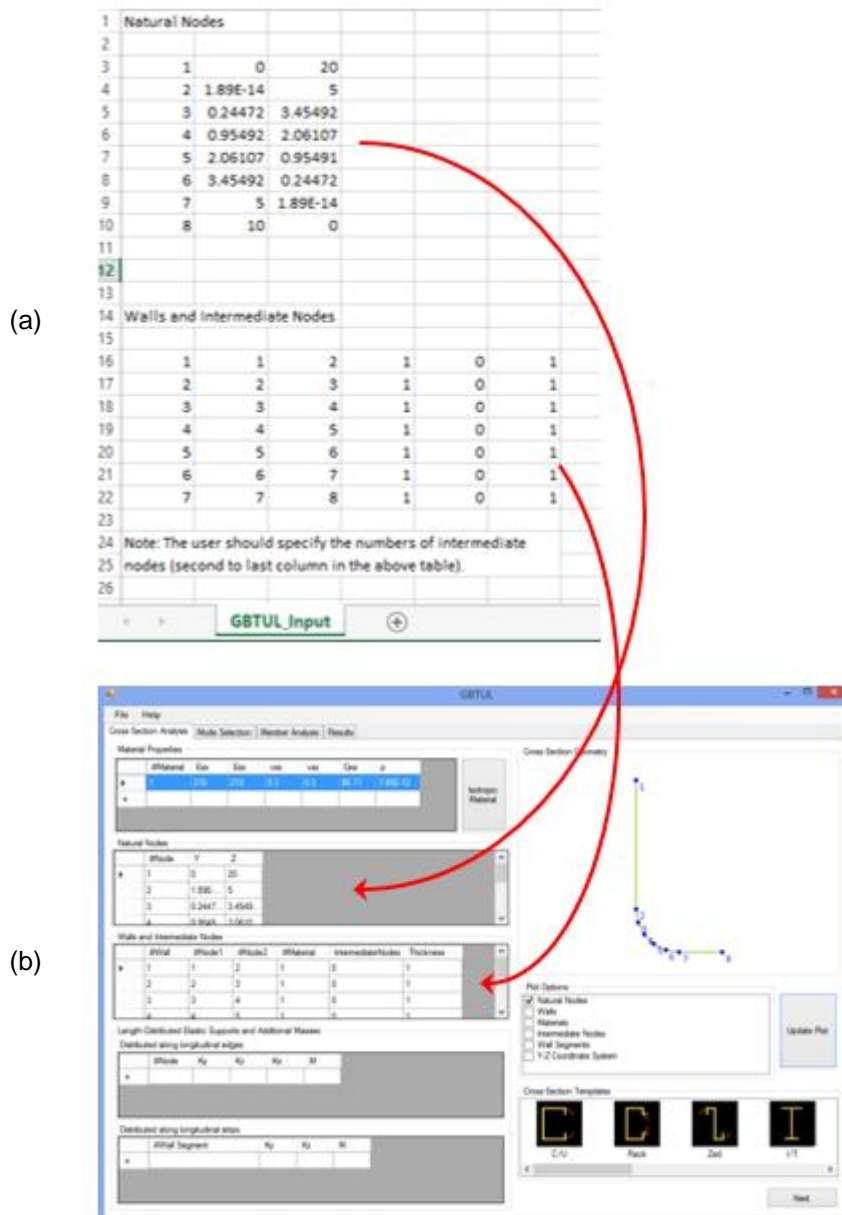


Figura 14 – Exportação dos dados para o programa GBTUL: (a) ficheiro GBTUL\_inputs.csv e (b) janela 1 do programa GBTUL.

Neste capítulo faz-se um conjunto de testes à aplicação, que demonstram o seu correto funcionamento tanto em termos (i) da aceitação de diferentes combinações dos parâmetros das dobras ( $R$  e  $N$ ), como (ii) da representação dos quatro diferentes tipos de geometria de secção.

## 4.2 ESTUDO DOS PARÂMETROS R E N – SECÇÃO “L”

Testa-se aqui a correta aceitação e tratamento, por parte do programa, de vários valores dos parâmetros das dobras: o raio  $R$  e o número de segmentos da aproximação  $N$ . Foi considerada uma secção “L” simétrica com as dimensões  $h = b = 10$  e  $t = 1$ .

Na Figura 15 mostra-se a representação gráfica da secção – fornecida pelo programa GBTUL (i.e., após correr a aplicação *Rounded Corners* e importar os dados do respetivo ficheiro) – para  $R = 5$  e 4 valores do número de segmentos:  $N = 1$  (Figura 15(a)),  $N = 2$  (Figura 15(b)),  $N = 4$  (Figura 15(c)) e  $N = 8$  (Figura 15(d)). A observação das figuras mostra a evolução esperada: à medida que  $N$  aumenta, os segmentos da aproximação vão-se confundindo com uma dobra em quarto de círculo – para  $N = 8$  praticamente nem se distinguem. Pode-se ver, também que a numeração dos nós resulta sequencial.

Por outro lado, na Figura 16 mantém-se o mesmo número de segmentos  $N = 8$ , e considera-se diferentes valores do raio da dobra:  $R = 0.5$  (Figura 16(a)),  $R = 2$  (Figura 16(b)),  $R = 5$  (Figura 16(c)) e  $R = 8$  (Figura 16(d)). Pode-se observar que, como esperado, a dobra cresce à medida que se aumenta o raio, mantendo-se o nível da aproximação da mesma (que depende apenas de  $N$ ). Note-se que, para  $R = 8$ , a dobra praticamente já se confunde com a totalidade da secção, “sobrando” apenas dois troços retos de largura 2.

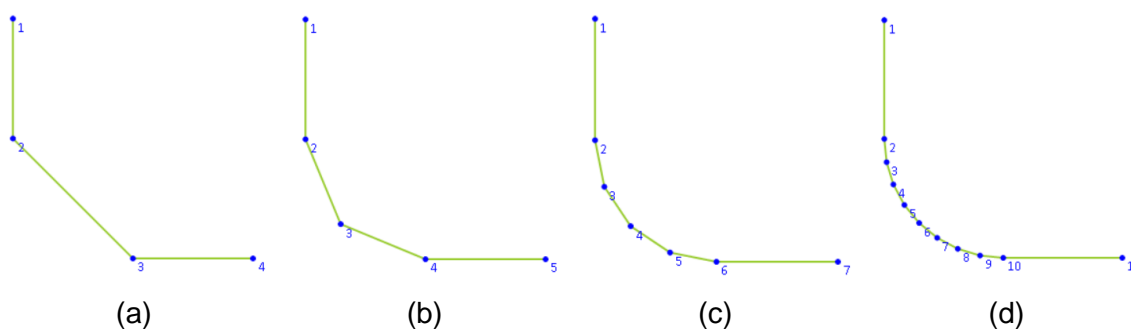


Figura 15 – Secção  $L10 \times 10 \times 1$  com  $R = 5$ : Aproximações da dobra com (a)  $N = 1$ , (b)  $N = 2$ , (c)  $N = 4$ , (d)  $N = 8$ .

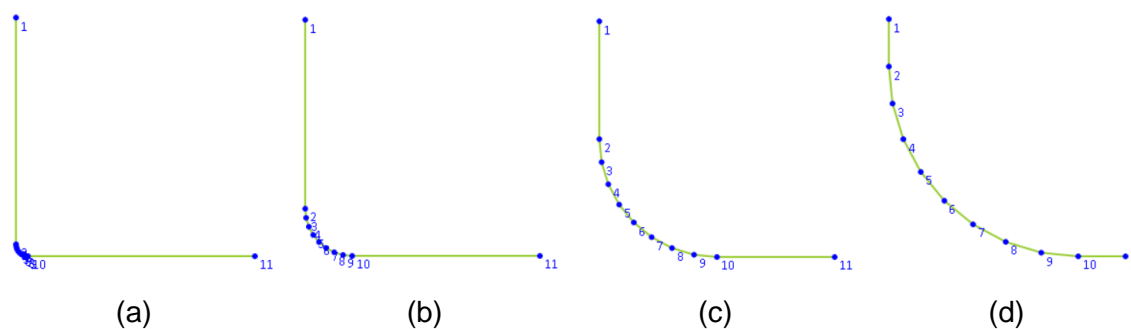


Figura 16 – Secção  $L10 \times 10 \times 1$  com  $N = 8$ : Dobras com raio (a)  $R = 0.5$ , (b)  $R = 2$ , (c)  $R = 5$ , (d)  $R = 8$ .

### 4.3 GEOMETRIAS DAS 4 SECÇÕES – “L”, “C”, “Z” E “RHS”

Na secção anterior o estudo incidiu apenas na secção “L”, desta forma, procede-se em seguida o teste da aplicação relativamente às quatro geometrias.

Para este teste utiliza-se a aceitação e tratamento de dados com os valores e parâmetros geométricos: igualmente para as quatro secções,  $h = 100$ ,  $b = 60$ ,  $d = 15$  (quando aplicável),  $t = 1$  e um valor fixo de segmentos por dobra de  $N = 5$ .

Na Figura 17, mostram-se as representações, obtidas pelo programa GBTUL, das quatro secções para  $R = 5$  – “L” (Figura 17(a)), “C” (Figura 17(b)), “Z” (Figura 17(c)) e “RHS” (Figura 17(d)). É possível verificar que, para todas as secções, as dobras são traçadas corretamente, com as suas devidas orientações. Como era esperado, pode-se observar também que a numeração dos nós resulta de forma sequencial em ambos os sentidos à formação da dobra.

Finalmente, na Figura 18, representam-se as mesmas secções, com as mesmas dimensões, mas com dobras com raio de curvatura maior, nomeadamente  $R = 10$ . Como se pode verificar, em todas as secções as dobras são corretamente representadas. É de notar que as dimensões da secção (em particular, a largura dos reforços das secções “C” e “Z”) comprometem o valor máximo que se pode considerar para o raio.

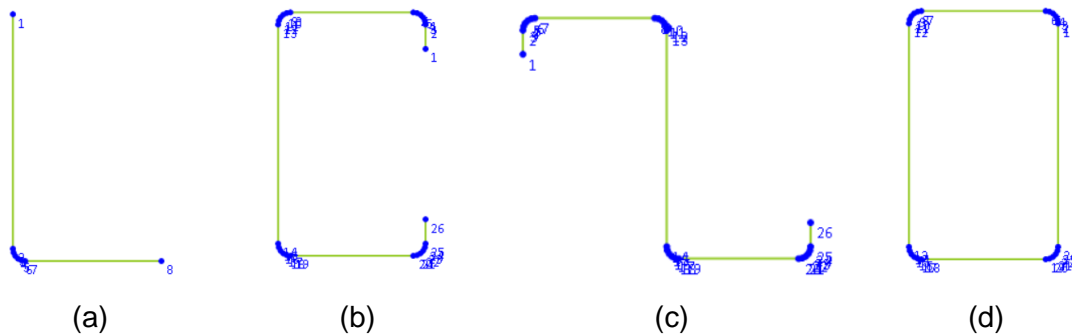


Figura 17 – Geometrias das secções com  $R = 5$  (e  $N = 5$ ): (a) “L”, (b) “C”, (c) “Z” e (d) “RHS”.

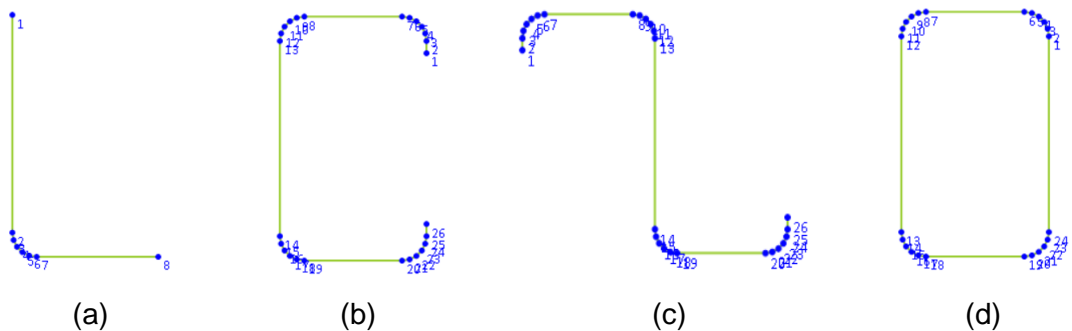


Figura 18 – Geometrias das secções com  $R = 10$  (e  $N = 5$ ): (a) “L”, (b) “C”, (c) “Z” e (d) “RHS”.

## 5. ESTUDOS E APLICAÇÕES

### 5.1 GENERALIDADES

O programa desenvolvido, “*Rounded Corners 1.0*”, foi testado com sucesso no capítulo anterior. No presente capítulo é ilustrada a sua aplicação no contexto de situações concretas. Assim, em conjunto com o programa GBTUL 2.0, aborda-se vários problemas estruturais envolvendo barras com secção de parede fina com dobras, mostrando-se assim a sua aplicabilidade tanto para o projeto como no contexto de trabalhos de investigação.

As análises efetuadas no programa GBTUL, que foi brevemente descrito na secção 2.1, têm as seguintes características gerais:

- (i) As barras são colunas de Euler, ou seja, barras simplesmente apoiadas sujeitas a esforço axial uniforme.
- (ii) Consideraram-se, para a secção transversal, todos os modos de deformação de Vlasov<sup>9</sup>, incluindo [e.g., Silvestre, 2005 e Bebiano, 2010]:
  - a. Modos Globais – os modos clássicos da “Resistência de Materiais” (alongamento, flexão e torção), que envolvem deslocamentos de corpo rígido da secção como um todo;
  - b. Modos Distorcionais – modos que envolvem deslocamentos de alguns dos nós naturais da secção, bem como o aparecimento de curvaturas de flexão transversal nas paredes;
  - c. Modos Locais (ou Locais-de-Placa) – modos que envolvem curvaturas de flexão transversal nas paredes, sem haver deslocamentos dos nós naturais.
- (iii) Foram realizadas por via da *Solução Analítica*, i.e., cada modo de estabilidade ou de vibração foi aproximado longitudinalmente por via de uma função sinusoidal. O número de semi-ondas da solução pode ser especificado pelo utilizador ou determinado automaticamente pelo programa. O recurso à *Solução Numérica*, que envolveria a discretização longitudinal da barra em *elementos finitos de GBT* seria necessário para outras condições de apoio e/ou de carregamento.

<sup>9</sup> I.e., os modos que respeitam esta hipótese, segundo a qual a distorção no plano médio é nula.

## 5.2 CONVERGÊNCIA DE SECÇÃO QUADRADA PARA SECÇÃO CIRCULAR

Apresentam-se aqui os resultados de um estudo sobre o comportamento de estabilidade de uma coluna de aço ( $E = 210GPa$ ,  $\nu = 0.3$ ), com  $L = 200mm$ , e com secção transversal quadrada (“SHS”<sup>10</sup>) – i.e., uma secção “RHS” com  $b = h = 50mm$ ,  $t = 1mm$ , como ilustra a Figura 19. Para o raio de curvatura das dobras, consideraram-se os valores  $R = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24\}mm$ . Note-se que (i) para o primeiro caso ( $R = 0$ ) se tem uma secção quadrada regular (de cantos retos) e (ii) para o último ( $R = 24mm$ ) se tem uma secção praticamente circular de raio  $r \approx 25mm$ .

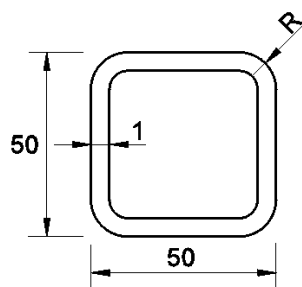


Figura 19 – Geometria da secção “SHS”  $50 \times 50 \times 1$  [mm], com dobras de raio  $R$ .

Na Figura 20 apresentam-se as curvas que representam a evolução dos valores da carga crítica,  $P_{cr}$ , com o raio da dobra,  $R$ , e considerando  $N = 3$ . As duas curvas correspondem às situações em que se consideram na solução (i) apenas os modos de Vlasov e (ii) os modos de Vlasov juntamente com os modos de Extensão Transversal (i.e., modos que envolvem deformações de extensão das paredes na sua direcção transversal). Na Figura 22 ilustra-se a evolução, com  $R$ , das configurações dos modos de encurvadura para cada uma das situações referidas anteriormente. Finalmente, na Figura 21 representam-se as curvas  $P_{cr}$  vs.  $R$  desta vez para (i)  $N = 3$  e (ii)  $N = 5$ . Destas figuras, pode-se concluir que:

- (i) O valor da carga crítica  $P_{cr}$  aumenta, com alguma irregularidade, à medida que aumenta  $R$  (Figura 20). Quando se consideram os modos de Extensão Transversal, os valores são um pouco mais baixos – começa-se a notar a diferença para  $R > 12mm$  – chegando as diferenças percentuais<sup>11</sup> a cerca de 6%.
- (ii) A forma do modo crítico de instabilidade muda à medida que  $R$  aumenta (Figura 22). Até  $R < 4mm$  mantém-se semelhante ao modo da secção quadrada perfeita ( $R = 0$ ), um modo de encurvadura local com 4 semi-ondas longitudinais. Para  $4 \leq R \leq 6mm$  o modo passa a ter apenas 3 semi-ondas, e para  $8 \leq R \leq 15mm$  passa a ter 5 ou mais semi-ondas. Para  $R \geq 18mm$ , com a secção já muito próxima da forma circular, o modo muda completamente, aproximando-se de um modo assimétrico de uma só semi-onda longitudinal. Quando se inclui os modos de Extensão Transversal verifica-se que, em geral, as configurações mantêm a mesma evolução – a única exceção verifica-se para  $R = 6mm$ .

<sup>10</sup> Square Hollow Section.

<sup>11</sup> A diferença percentual de  $A$  em relação a  $B$  é dada por  $\delta = (A - B)/B \times 100\%$ .

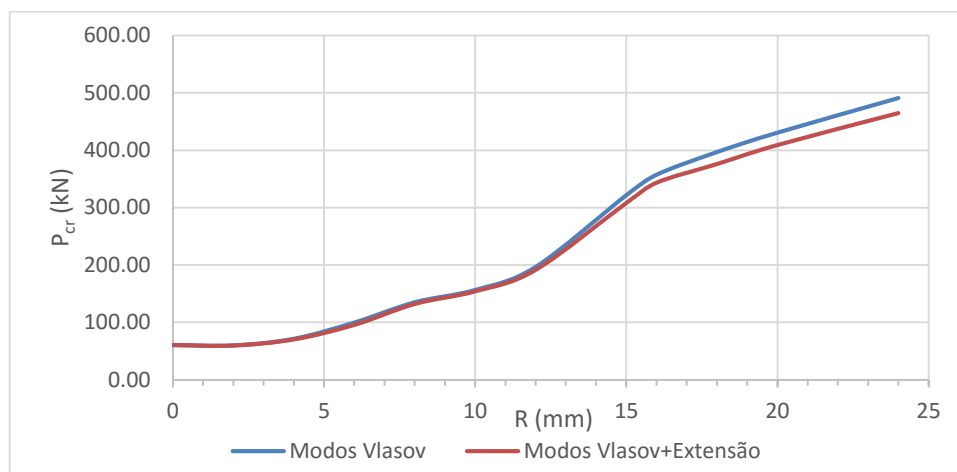


Figura 20 – Curvas de  $P_{cr}$  vs.  $R$  da coluna com secção SHS ( $N = 3$ )

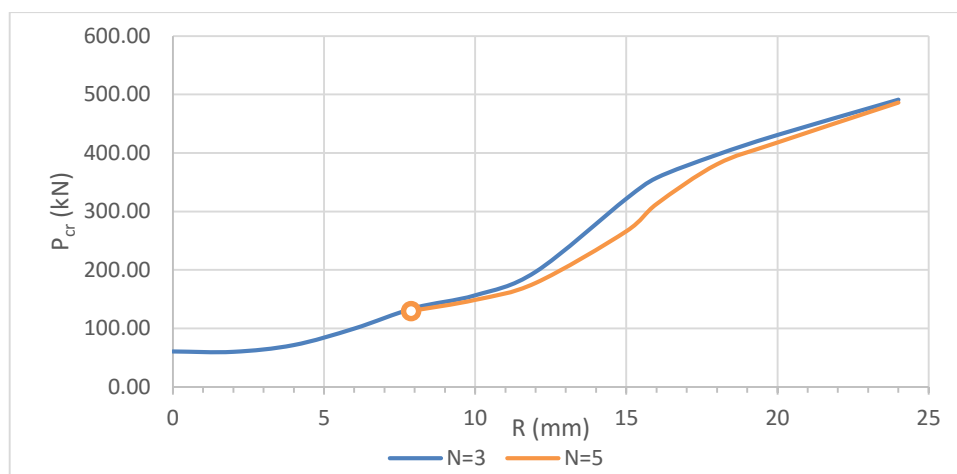


Figura 21 – Curvas de  $P_{cr}$  vs.  $R$  da coluna com secção SHS

- (iii) Como mostra a Figura 21, quando se aumenta o número de segmentos da aproximação da dobra para  $N = 5$ , os valores de  $P_{cr}$  diminuem, sobretudo para  $10 \leq R \leq 20\text{mm}$  – a diferença máxima obtém-se para  $R = 15\text{mm}$  e é de 17%. O facto curioso de se verificarem as maiores diferenças para a gama intermédia de raios sugere que para essas situações – em que a secção, claramente, já não é “nem um quadrado nem um círculo” – o modo de encurvadura é mais sensível às características da dobra. É de notar também que, para  $R < 8\text{mm}$  o programa GBTUL não completou a execução. Este fato pode estar relacionado com algum erro numérico, em virtude de se ter paredes muito largas (banzos e alma) adjacentes a outras muito estreitas (segmentos de aproximação) – esse limite é assinalado na Figura 21 por um círculo.

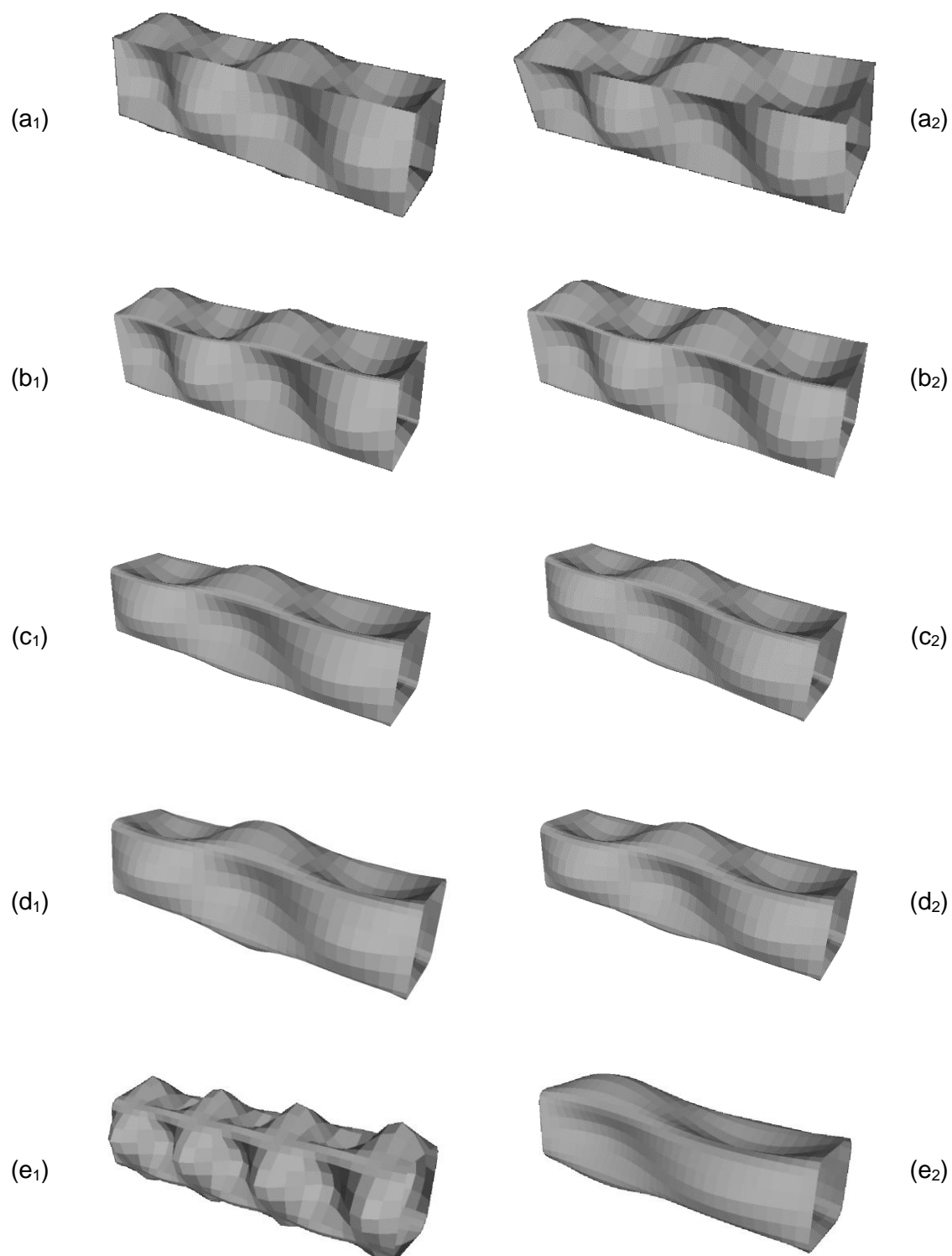


Figura 22 – Configurações dos modos críticos de encurvadura, para secções com (a<sub>1</sub>)  $R = 0$ , (b<sub>1</sub>)  $R = 2$ , (c<sub>1</sub>)  $R = 4$  (d<sub>1</sub>)  $R = 6$ , (e<sub>1</sub>)  $R = 8$ , (f<sub>1</sub>)  $R = 10$ , (g<sub>1</sub>)  $R = 12$ , (h<sub>1</sub>)  $R = 15$ , (i<sub>1</sub>)  $R = 18$ , (j<sub>1</sub>)  $R = 24$  [mm]; Modos de Vlasov (esquerda) e Modos de Vlasov + Extensão Transversal (direita).

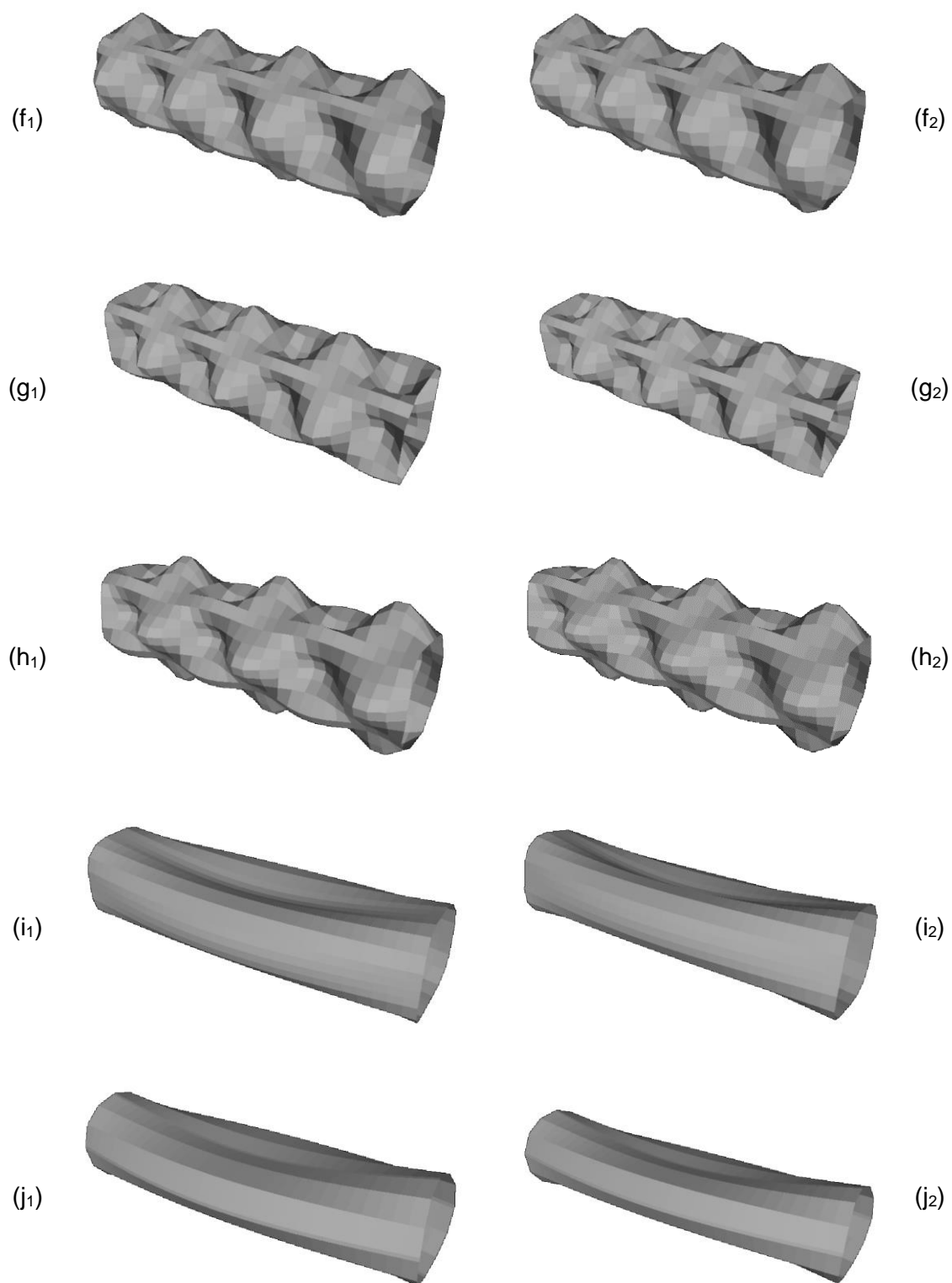


Figura 22 (Continuação) – Configurações dos modos críticos de encurvadura, para secções com (a<sub>1</sub>)  $R = 0$ , (b<sub>1</sub>)  $R = 2$ , (c<sub>1</sub>)  $R = 4$  (d<sub>1</sub>)  $R = 6$ , (e<sub>1</sub>)  $R = 8$ , (f<sub>1</sub>)  $R = 10$ , (g<sub>1</sub>)  $R = 12$ , (h<sub>1</sub>)  $R = 15$ , (i<sub>1</sub>)  $R = 18$ , (j<sub>1</sub>)  $R = 24$  [mm]; Modos de Vlasov (esquerda) e Modos de Vlasov + Extensão Transversal (direita).

- (iv) Os valores de  $P_{cr}$  obtidos para as duas situações extremas,  $R = 0$  e  $R = 24mm$ , podem agora ser comparados com os valores dados por fórmulas analíticas bem conhecidas [e.g., Reis e Camotim, 2012]. No caso da secção quadrada ( $R = 0$ ), no modo local crítico cada parede comporta-se como se fosse uma placa simplesmente apoiada nos 4 bordos, sujeita a compressão axial uniforme, pelo que a sua tensão crítica pode ser estimada por:

$$\sigma_{cr} = K \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (10)$$

onde podemos usar  $K \approx 4$ , já que o comprimento da placa (e da coluna) é suficientemente maior do que a largura ( $L = 4b$ ). No que respeita à secção quase circular ( $R = 24$ ), pode-se utilizar a expressão que dá a tensão crítica de um cilindro à compressão uniforme<sup>12</sup>:

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{Et}{R} \quad (11)$$

As cargas críticas podem ser obtidas multiplicando cada tensão pela respetiva área da secção transversal, dada para cada caso por

$$A_q = 4bt = 200mm^2 \quad (12)$$

$$A_c = 2\pi r t = 157.08mm^2 \quad (13)$$

A comparação entre os valores obtidos pelo programa GBTUL (para modos convencionais e  $N = 3$ ) e os fornecidos pelas equações (10)-(13) é feita na Tabela 2. Dá para ver que os resultados estão (i) em perfeito acordo no caso da secção quadrada, mas (ii) divergem no caso da secção circular, onde os resultados obtidos com o GBTUL são bastante inferiores ( $\delta = -38.52\%$ ) – neste último caso, a diferença pode ser explicada pelo fato de a formulação da GBT implementada no programa GBTUL não incluir algumas componentes de deformação associadas ao comportamento de casca.

<sup>12</sup> Note-se que o parâmetro de Batdorf desta coluna vale  $Z = 1526.3$ , pelo que não se classifica como uma “casca curta” ( $Z \leq 2.85$ ) [Reis e Camotim, 2012].

Tabela 2 – Comparação entre os valores de  $P_{cr}$  obtidos com o GBTUL e com as fórmulas

Secção	$P_{cr}$ (kN)		$\delta$ (%)
	GBTUL	Fórmulas	
Quadrada ( $R = 0$ )	60.75	60.74	0.02%
Circular ( $R = 24$ )	490.94	798.58	-38.52%

### 5.3 COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS DE ÁDÁNY E BEREGSZÁSZI.

Faz-se agora uma comparação entre os resultados obtidos através do GBTUL e os reportados num artigo muito recente de Ádány e Beregszászi (2015), que analisaram colunas de Euler com a secção em “C” representada na Figura 23 e para uma gama de comprimentos  $10 \leq L \leq 10000\text{mm}$ . As propriedades consideradas para o material foram  $E = 205\text{GPa}$  e  $\nu = 0$ . As dobras, com  $R = 4\text{mm}$ , foram modeladas nesse trabalho de diversas formas:

- (i) Aproximação da dobra diretamente por faixas finitas.
- (ii) Modelação como “dobra rígida”, em que esta é tratada como uma coluna-viga de Euler-Bernoulli, com secção indeformável (o eixo é considerado no local onde seria a intersecção do canto reto).
- (iii) Modelação como “dobra elástica”, que combina os resultados de um modelo de cantos retos com a abordagem (i), obtendo-se assim indiretamente a resposta elástica da dobra. Trata-se de uma ideia original, discutida e testada pela primeira vez no referido trabalho.

O tipo de modelação referido em (i) é em tudo equivalente àquele que se tem vindo a levar a cabo aqui, embora no âmbito da Teoria Generalizada de Vigas. Por isso, pretende-se aqui reproduzir os resultados apresentados nesse artigo.

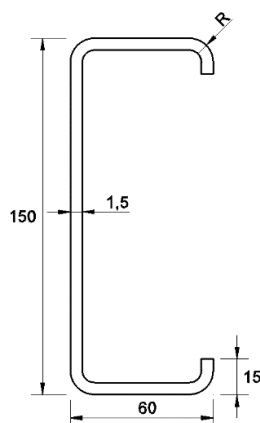


Figura 23 – Geometria da secção “C”  $150 \times 60 \times 15 \times 1.5$  [mm], com dobras de raio  $R = 4\text{mm}$ .

Na Figura 24, que diz respeito a secções com cantos retos ( $R = 0$ ), representam-se as curvas de encurvadura  $P_b$  vs.  $L$  – que representam os modos de bifurcação que envolvem 1 semi-onda longitudinal<sup>13</sup> (não sendo, por isso, necessariamente os modos críticos) – correspondentes a resultados reportados por Ádány e Beregszászi (Figura 24(a)) e obtidos através do GBTUL (Figura 24(b)). Ambas as Figuras contêm quatro curvas, consoante o tipo de modos de deformação considerados: (i) todos os modos, globais, distorcionais e locais (“all” ou “L+D+G”), (ii) só com modos globais (“G”), (iii) só com modos distorcionais (“D”) e (iv) só com modos locais (“L”) – assim, cada curva representa as cargas críticas associadas a modos de bifurcação desse tipo (com 1 semi-onda). As Figuras 25(a)-(b) apresentam os mesmos resultados, mas para secções com dobras e  $R = 4mm$ . Fazem-se os seguintes comentários:

- (i) As curvas com todos os modos (“L+D+G”), que são envolventes inferiores das outras, apresentam o andamento típico relativo a uma barra com secção em “C” [Hancock, 1998]: para comprimentos menores ( $L \leq 400mm$ ) apresenta um mínimo local associado a modos locais, para gamas intermédias ( $400 \leq L \leq 1400mm$ ) surge um outro mínimo local associado a modos distorcionais e, finalmente, para comprimentos maiores ( $L \geq 1400mm$ )  $P_b$  apresenta o decaimento hiperbólico associado à encurvadura segundo modos globais (flexão ou flexão-torção).
- (ii) Comparando as Figuras 24 e 25 nota-se que a consideração das dobras ( $R = 4mm$ ) não conduz a grandes diferenças nos resultados (embora este assunto seja melhor analisado na secção seguinte). Qualitativamente, nota-se que se deu uma grande mudança na curva relativa aos modos distorcionais (“D”), que agora se “expande” para comprimentos menores. No fundo, é como se os modos de encurvadura inicialmente classificados como locais, passassem agora (com as dobras) a ser classificados como distorcionais – no entanto, estes modos “distorcionais” envolvem deslocamentos axiais apenas ao nível dos segmentos que aproximam as dobras, sendo praticamente equivalentes a modos locais.
- (iii) A comparação entre as curvas dos dois gráficos constantes das Figuras 24 e 25 mostra que há um perfeito acordo entre os resultados obtidos por Ádány e Beregszászi e os fornecidos pelo GBTUL. Valida-se assim, novamente e agora para uma gama alargada de comprimentos e naturezas de modos de encurvadura, o bom funcionamento desta técnica, implementada pelos programas *Rounded Corners* e GBTUL.

<sup>13</sup> No programa GBTUL, o input relativo ao número de semi-ondas da função sinusoidal é introduzido na Janela 3, na entrada “Number of Halfwaves: From 1 to \_”.

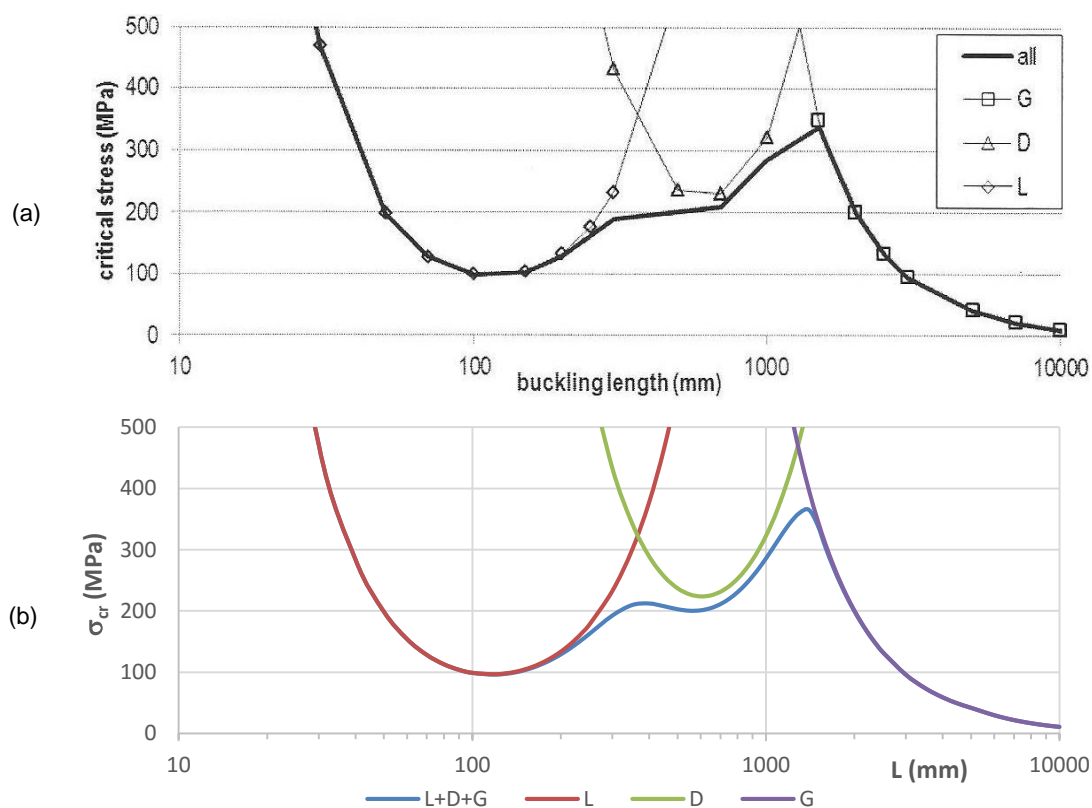


Figura 24 – Curvas  $P_b$  vs.  $L$  com cantos retos ( $R = 0$ ): (a) Ádány *et al.* (2015) e (b) GBTUL.

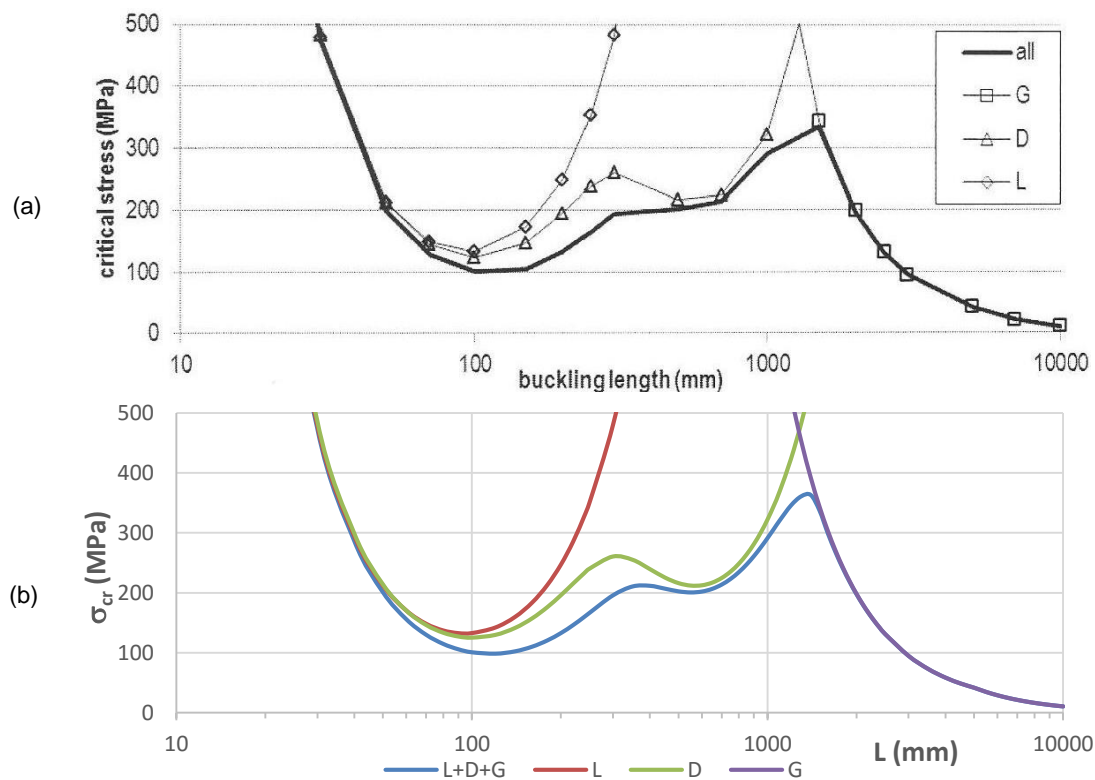


Figura 25 – Curvas  $P_b$  vs.  $L$  com dobras ( $R = 4$  mm): (a) Ádány *et al.* (2015) e (b) GBTUL.

#### 5.4 ANÁLISE DE ENCURVADURA – COMPARAÇÃO COM O SOFTWARE CUFM 4.05

Agora, vai-se utilizar a mesma secção transversal em “C” usada anteriormente (Figura 23) num estudo para avaliar o efeito da dobra (nomeadamente, do valor do raio) na carga de bifurcação da coluna – consideram-se as situações de  $R = 0$  (cantos retos), 4, 6, 8, 10, 12mm. Em todos os casos, as dobras foram aproximadas com  $N = 3$ . Embora aqui se restrinja a discussão essencialmente aos valores da carga de bifurcação, apresentam-se na Figura 34 do Anexo II os diagramas de participação modal, que fornecem informação acerca das naturezas mecânicas dos modos de deformação.

Na Figura 26 apresentam-se as curvas de encurvadura, com todos os modos (Globais, Distorcionais e Locais), para os vários valores do raio. Note-se que, de um modo geral, as várias curvas seguem o mesmo andamento. A Figura 27 permite quantificar, em termos relativos, o impacto do raio das dobras nas cargas de bifurcação – as curvas mostram o andamento do parâmetro  $\delta_E$ , dado por:

$$\delta_E = \frac{P_{b,R} - P_{b,0}}{P_{b,0}} \times 100\% \quad (14)$$

onde  $P_{b,0}$  e  $P_{b,R}$  são (para um dado comprimento) as cargas de bifurcação associadas a  $R = 0$  e ao valor de  $R$  em consideração. A observação das curvas mostra que a influência das dobras varia consoante o comprimento:

- (i) Para os comprimentos associados ao mínimo local ( $40 \leq L \leq 350mm$ ) verifica-se um aumento de  $P_b$  que atinge, p.e., 8.5% para  $R = 8mm$  e 22.5% para  $R = 12mm$ . Uma possível explicação para este aumento pode residir no facto de a dobra reduzir a largura da alma, que é o elemento que despoleta a encurvadura local desta secção. De facto, quando a largura da alma diminui, a carga crítica aumenta significativamente (ver equação 10).
- (ii) Para os comprimentos maiores ( $L \geq 1400mm$ ), onde reina a instabilidade global, a influência da dobra faz baixar o valor de carga de bifurcação – para  $R = 12mm$  a descida é de cerca de 11% para a encurvadura lateral e de 15% para a encurvadura por flexão (a identificação das naturezas modais com os comprimentos pode ser feita através da Figura 34(f), no Anexo II). Nota-se também, que as descidas relativas são quase independentes de  $L$  (curvas horizontais). A razão para estas diminuições pode ter a ver com o facto de as dobras reduzirem o valor das propriedades geométricas associadas à rigidez da secção – e.g., para  $R = 12mm$  o momento de inércia menor é cerca de 16.5% inferior ao da secção com  $R = 0$ .

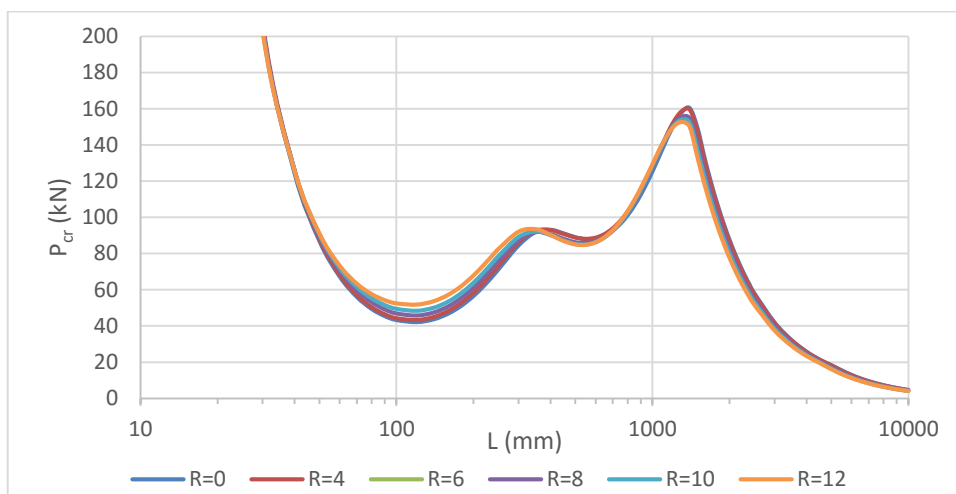


Figura 26 – Curvas  $P_b$  vs.  $L$  com dobras ( $R = 0, 4, 6, 8, 10, 12$  [mm]).

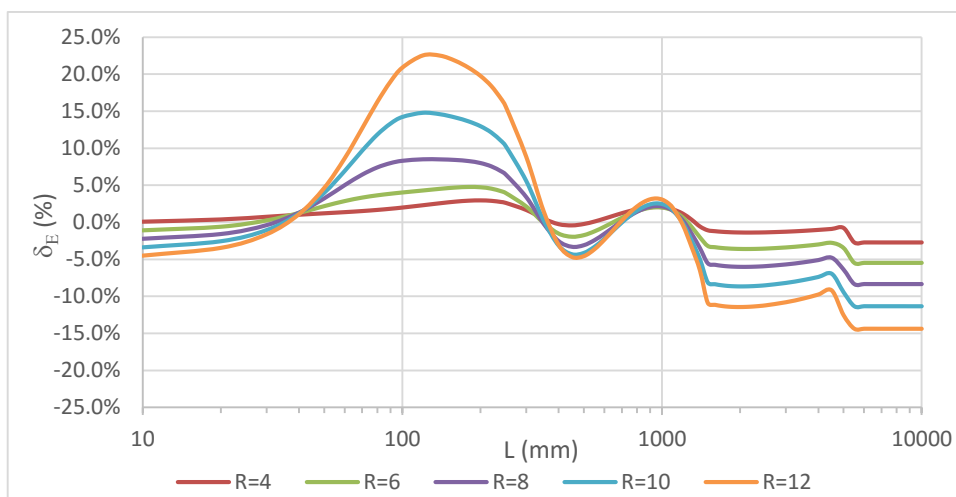


Figura 27 – Curvas de influência das dobras ( $R = 4, 6, 8, 10, 12$  [mm]) na carga de bifurcação.

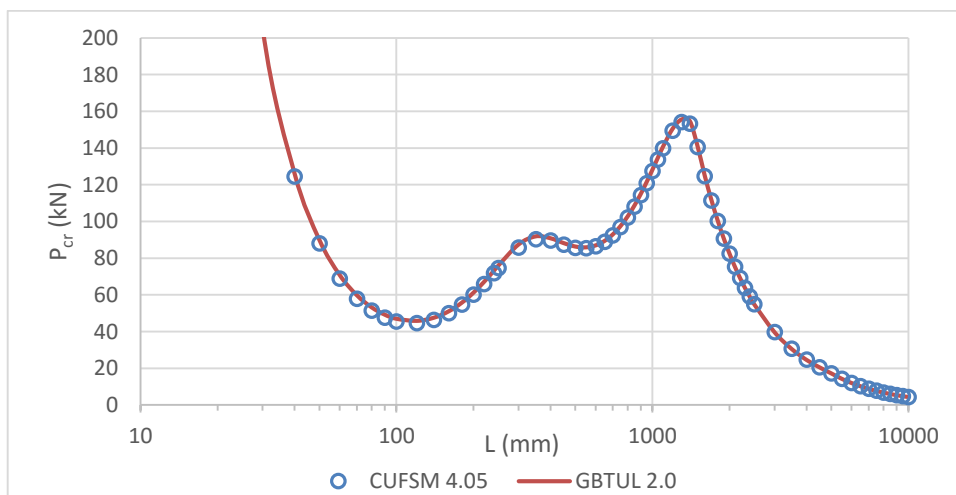


Figura 28 – Curvas  $P_b$  vs.  $L$  com dobras ( $R = 8$  mm): valores fornecidos pelos programas CUFSM e GBTUL.

- (iii) Para os comprimentos associados aos modos distorcionais, verificam-se descidas pouco pronunciadas, sempre inferiores a 5%. Assim, a influência das dobras aqui poderá corresponder a uma situação intermédia entre as duas anteriores.

Finalmente, a Figura 28 permite comparar os resultados obtidos pelos programas GBTUL e CUFMS 4.05 [Li e Schafer, 2010], um programa desenvolvido nos EUA e que implementa o Método das Faixas Finitas (MFF). Os valores coincidem bastante bem, sendo a diferença máxima igual a  $-3.5\%$ .

## 5.5 ANÁLISE DE VIBRAÇÃO

Faz-se agora uma aplicação à análise de vibração livre (obtenção das frequências naturais e respetivos modos de vibração). Analisa-se o impacto do raio das dobras sobre os valores da frequência angular fundamental de vibração da coluna,  $\omega_f$ , que tem as mesmas condições referidas na secção anterior ( $N = 3.$ ), incluindo os mesmos valores de  $R$ . Considerou-se para a massa volúmica do aço  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

A Figura 29 apresenta as curvas de vibração ( $\omega_f$  vs  $L$ ) das colunas. Como o gráfico está em escala bi-logarítmica, mal se consegue distinguir as várias curvas (mesmo com um pormenor de zoom). A Figura 30 permite avaliar com maior clareza o impacto relativo das dobras nas colunas com os vários valores de  $R$ , através do parâmetro

$$\delta_V = \frac{\omega_{f.R} - \omega_{f.0}}{\omega_{f.0}} \times 100\% \quad (15)$$

o qual tem, para o caso da vibração, o mesmo significado de  $\delta_E$ . Verifica-se que os gráficos têm algumas semelhanças com os da Figura 27 – para modos de vibração locais, verifica-se um aumento de  $\omega_f$  que pode ir até cerca de 15% (para  $R = 12\text{mm}$ ); para modos locais volta a verificar-se uma redução, desta vez sempre inferior a 5%. Porém, verifica-se uma notável diferença para o caso dos modos distorcionais pois, ao contrário de  $P_b$ , os valores da frequência natural não diminuem, até sobem ligeiramente (menos do que no caso dos modos locais).

Finalmente, na Figura 31 apresenta-se, para  $R = 8\text{mm}$ , uma comparação entre os valores fornecidos pelo GBTUL e os que resultam da fórmula [Silvestre, 2005]

$$\omega_f = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P_b}{\rho A}} \quad (16)$$

onde  $P_b$  é a carga de encurvadura, com 1 semi-onda, para esforço axial uniforme, i.e., os valores já determinados e apresentados na secção anterior. Verifica-se que a coincidência das duas estimativas é total, já que as diferenças são inferiores a 0.1% em toda a gama de comprimentos.

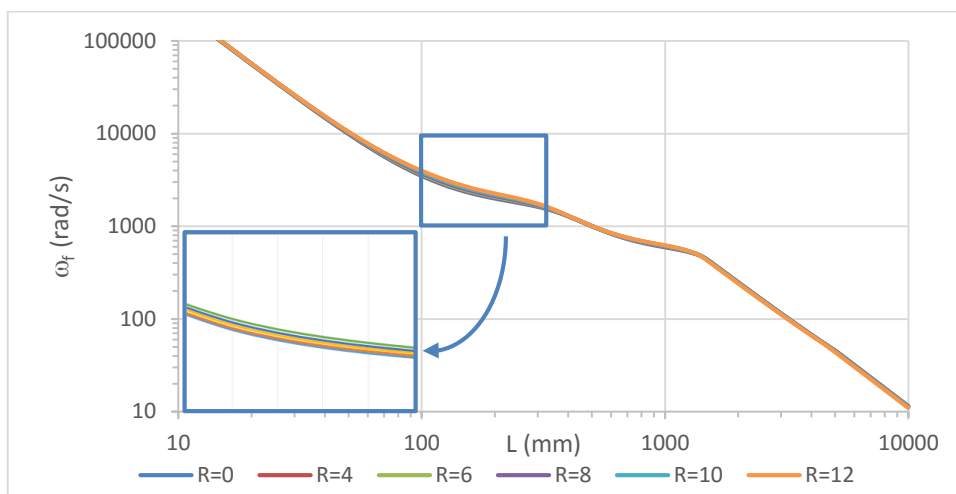


Figura 29 – Curvas  $\omega_f$  vs.  $L$  com dobras ( $R = 0, 4, 6, 8, 10, 12$  [mm]).

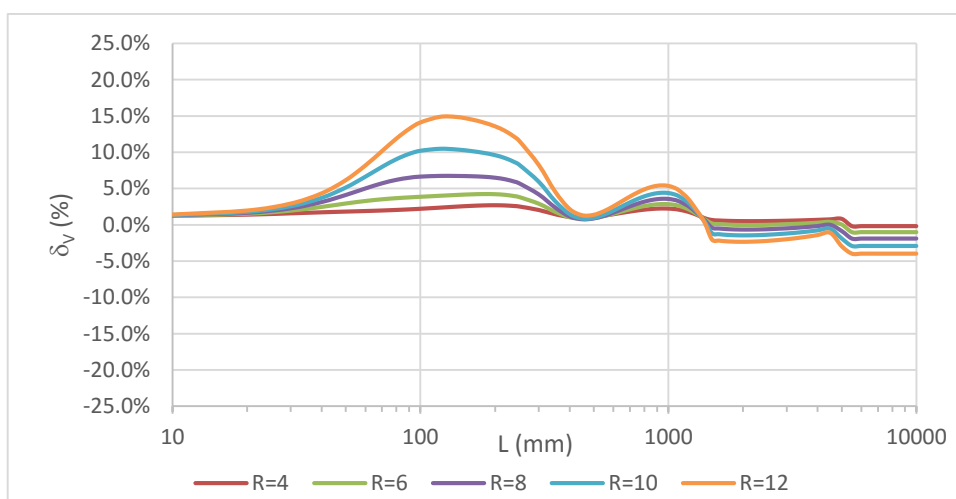


Figura 30 – Curvas de influência das dobras ( $R = 4, 6, 8, 10, 12$  [mm]) na carga de bifurcação.

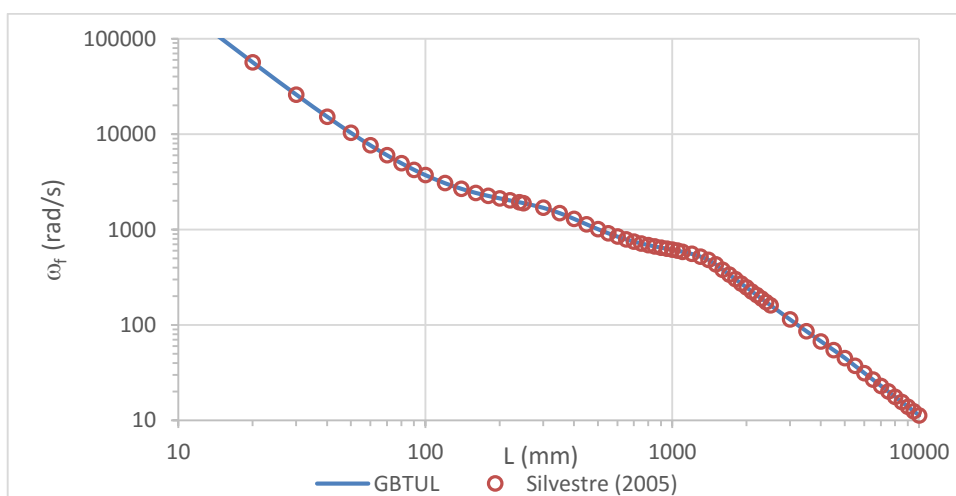


Figura 31 – Curvas  $\omega_f$  vs.  $L$  com dobras ( $R = 8$  mm): comparação com os valores da Equação (16).

Finalmente, na Figura 32 procurou-se comparar os efeitos das dobras na encurvadura e na vibração, através dos gráficos da razão entre os parâmetros,  $|\delta_E/\delta_V|$  vs  $L$ . Como se pode verificar, o gráfico resultou bastante confuso e com muita variabilidade, pelo que não é fácil extrair conclusões. Apenas na gama correspondente aos modos locais há alguma estabilidade, indicando que o aumento de  $P_b$  é 1 a 1.5 vezes superior ao correspondente aumento de  $\omega_f$ .

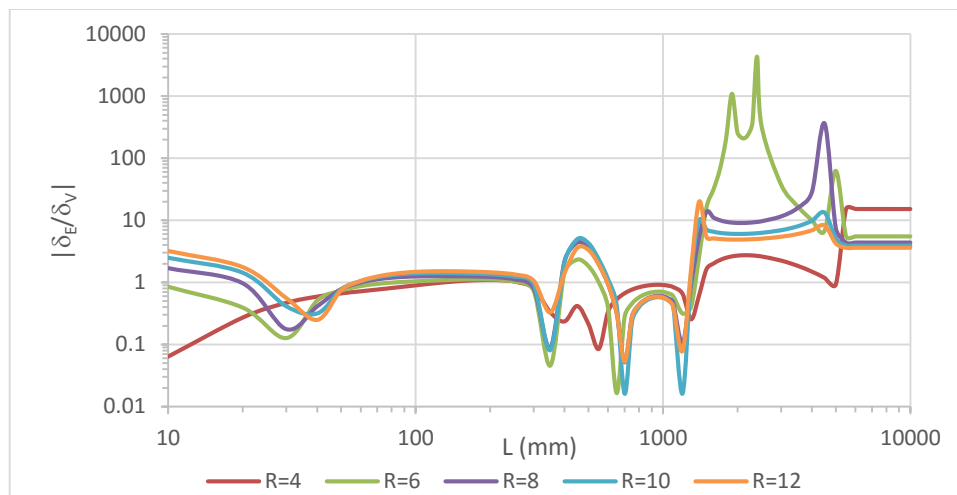


Figura 32 – Comparação entre os efeitos das dobras na encurvadura e na vibração: curvas  $|\delta_E/\delta_V|$  vs  $L$ .

## 6. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Apresentam-se aqui algumas conclusões sobre este trabalho e apresentam-se alguns desenvolvimentos futuros possíveis.

### 6.1 CONCLUSÕES

Desenvolveu-se e testou-se um programa, chamado “*Rounded Corners 1.0*”, para modelar facilmente geometrias de secções transversais de parede fina – com secções “L”, “C”, “Z” ou “RHS” – contendo dobras circulares (em quarto de círculo). O programa (i) recebe como *inputs* os parâmetros que definem a geometria da secção e das dobras (incluindo o raio,  $R$ , e o número de segmentos de reta usados na aproximação,  $N$ ) e (ii) fornece como output um ficheiro com as coordenadas dos nós, pronto a ser importado pelo programa GBTUL – ou apto a ser adaptado aos requisitos de qualquer outro programa de cálculo automático.

O programa desenvolvido foi utilizado, servindo *inputs* ao programa GBTUL, no contexto de várias análises de estabilidade e vibração de uma coluna simplesmente apoiada sujeita a compressão axial uniforme. Os resultados obtidos foram brevemente discutidos e comparados com outros resultados fornecidos por (i) fórmulas analíticas, (ii) artigos científicos e (iii) o programa CUFSM 4.05 – concluiu-se que, com a exceção de uma coluna com secção (quase) circular, todos os resultados foram validados. Concluiu-se também que em alguns casos (quando o valor de  $N$  é alto) o programa GBTUL pode não executar corretamente, devido a algum problema numérico. Finalmente, concluiu-se que genericamente a influência da dobra faz (i) aumentar  $P_b$  e  $\omega_f$  para os modos locais, (ii) diminuir  $P_b$  e  $\omega_f$  para os modos globais (sobretudo de flexão), sendo o efeito menos claro para os modos distorcionais.

O programa está disponível gratuitamente no website [www.civil.ist.utl.pt/gbt](http://www.civil.ist.utl.pt/gbt), onde também se pode fazer o download gratuito do programa GBTUL. Espera-se que possa ser utilizado em atividades de investigação nesta área.

## 6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Os desenvolvimentos futuros que se sugerem deste trabalho podem dividir-se em duas vertentes principais:

- (i) Aplicação do programa à Investigação. O programa desenvolvido, que foi disponibilizado do *website* mencionado anteriormente, pode agora ser livremente usado por investigadores que pretendam fazer investigação na área da análise de perfis enformados a frio com a Teoria Generalizada de Vigas – em particular, trabalhos que visem explorar a modelação dos cantos em dobra e dos seus efeitos no comportamento estrutural.
- (ii) Desenvolvimento de novas versões do programa. Uma vez que este trabalho produziu um programa de cálculo automático, um desenvolvimento lógico consistiria em desenvolver uma segunda versão - “*Rounded Corners 2.0*”- com âmbito de aplicação expandido – dada a profusão de formas de secções para perfis enformados a frio não faltariam possibilidades. Essa segunda versão poderia, p.e., modelar tipologias de secção igualmente comuns, tais como a secção “*Rack*” (Figura 33(a)). Outra possibilidade seria a consideração de secções com reforços internos, tal como a secção “*Sigma*” (Figura 33(b)) – note-se que este caso apresenta o desafio adicional de se ter de adaptar a formulação matemática (Capítulo 2) à situação de dobras com ângulos de abertura variáveis, não sendo de  $90^\circ$ .

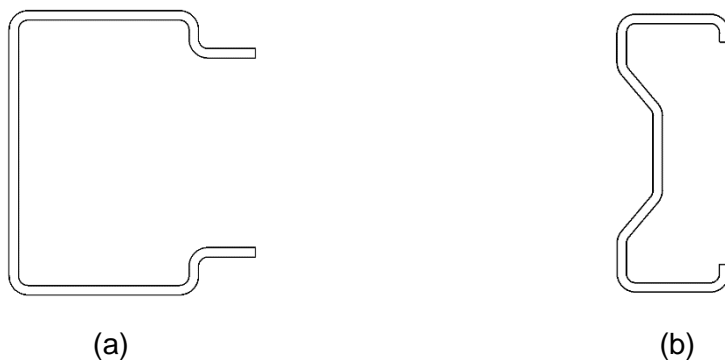


Figura 33 – Expansão do âmbito de aplicação do programa “*Rounded Corners*”: Secções (a) “*Rack*” e (b) “*Sigma*”.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ádány S. e Beregszászi Z. (2015). "Modal decomposition for thin-walled members with rounded corners: An extension to cFSM by using elastic corner elements", Eighth International Conference on Advances in Steel Structures (ICASS'2015 – Lisboa, 22-24/julho), Camotim et al (eds.), Lisboa. (artigo completo em CD-Rom)
- Bebiano R. (2010). "Stability and Dynamics of Thin-Walled Members: Application of the Generalised Beam Theory", Tese de Doutoramento em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico (IST/UTL), Lisboa.
- Bebiano R., Camotim D., Gonçalves R. e Silvestre N. (2013a). "GBTUL – GBT Buckling and Vibration Analysis of Thin-Walled Members", Instituto Superior Técnico (IST/UTL), 2013. Disponível como freeware em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt>.
- Bebiano R., Gonçalves R. e Camotim D. (2013b). "O programa GBTUL 2.0 – uma ferramenta para a análise de estabilidade e de vibração de barras de parede fina", IX Congresso Nacional de Construção Metálica e Mista (IX CMM – Porto, Portugal, 24-25/10), Simões da Silva L., Silvestre N. e Santos F. (Eds.), CMM – Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista, II-747 – II-754.
- Fena R. (2011). "Interação entre Instabilidade Local e Distorcional em Colunas de Aço Enformadas a Frio de Secção em "Hat", Tese de Mestrado em Engenharia Civil, Instituto Superior Técnico, Lisboa.
- Gaspar, A. (2013). "Construção de Edifícios de Habitação em Light Steel Framing – Alternativa viável à Construção Tradicional", Tese de Mestrado em Arquitetura, Faculdade de Comunicação, Arquitetura, Artes e Tecnologias da Informação, Universidade Lusófona do Porto, Porto.
- Hancock G. J. (1998). "Design of Cold-Formed Steel Structures" (3rd ed.), Australian Institute of Steel Construction (AISC), Sydney.
- Li Z. e Schafer B.W. (2010) "Buckling analysis of cold-formed steel members with general boundary conditions using CUFSM: conventional and constrained finite strip methods". Proceedings of the 20th Intl. Spec. Conf. on Cold-Formed Steel Structures, St. Louis, EUA, Novembro, 2010.
- Reis A. e Camotim D. (2012). "Estabilidade e Dimensionamento de Estruturas" (1ª Ed.), Edições Orion, Amadora.

Rhodes J. (1991). “Design of Cold-Formed Steel Members”, Elsevier, New York.

Schafer B. (2013). CUFSM 4.05 – Elastic Buckling Analysis of Thin-Walled Members with General End Boundary Conditions, Johns Hopkins University, Baltimore, EUA. Disponível como freeware em [www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/](http://www.ce.jhu.edu/bschafer/cufsm/).

Silvestre, N. (2005). “Teoria Generalizada de Vigas: Formulações, Implementação Numérica e Aplicações”, Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Lisboa.

Silvestre N. (ED.) (2011). “Projeto de Estruturas em Aço-leve”, Folhas do curso, Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista (CMM), Coimbra.

Silvestre N., Pires J. e Santos A. (2013). “Manual de Conceção de Estruturas e Edifícios em LSF – Light Steel Framing”. Lamas A. (ed.), CMM – Associação Portuguesa de Construção Metálica e Mista, Mem Martins.

# ANEXO I

## CÓDIGO DA APLICAÇÃO INFORMÁTICA

Apresenta-se aqui, integralmente, a transcrição do código da aplicação *Rounded Corners 1.0*, a qual foi desenvolvido na linguagem Visual Basic 6.

```

IMPORTS SYSTEM.MATH
IMPORTS SYSTEM.IO

PUBLIC CLASS FRM_MAE

PRIVATE SUB BTN_LOAD_CLICK(BYVAL SENDER AS SYSTEM.OBJECT, BYVAL E AS SYSTEM.EVENTARGS) HANDLES BTN_LOAD.CLICK

'LISTA DE VARIÁVEIS
DIM TIPOSECCAO AS STRING 'TIPO DE SECÇÃO (L, C, Z OU R)
'-----

DIM R AS SINGLE 'RAIO DE CURVATURA
DIM N AS INTEGER 'NUMERO DE SEGMENTOS
'-----

DIM NNOS AS INTEGER 'NUMERO TOTAL DE NÓS DA SECÇÃO (COM OS CANTOS APROXIMADOS)
DIM NNWALS AS INTEGER 'NUMERO TOTAL DE PAREDES DA SECÇÃO (COM OS CANTOS APROXIMADOS)
DIM COORDS(,) AS SINGLE 'MATRIZ COM AS COORDENADAS Y E Z - COORDS(NÓS, EIXO)
DIM YQ, ZQ AS SINGLE 'COORDENADAS (Y,Z) DO NÓ APROXIMADO PELO QUADRANTE
DIM NA AS INTEGER 'NÚMERO DE NÓS JÁ CALCULADOS
'-----

DIM AJ(4), BJ(4) AS INTEGER 'PARÂMETROS DO QUADRANTE
DIM OJ(4) AS SINGLE 'PARÂMETROS DO QUADRANTE (ÂNGULO TETA)
DIM PI AS DOUBLE 'PI=3.1416...
'-----

DIM I, J AS INTEGER 'ÍNDICE DE NÓ (I) E ÍNDICE DE QUADRANTE (J)
'-----

DIM FICHEIRO AS STRING = APPLICATION.STARTUPPATH & "\\GBTUL_INPUT.CSV" 'NOME DO FICHEIRO (.TXT) ONDE SE GRAVAM OS RESULTADOS
DIM COORDS_W() AS STRING 'VETOR DE COORDENADAS
DIM WALLS_W() AS STRING 'VETOR COM A INFORMAÇÃO DAS PAREDES
DIM C1, C2, N1, N2, TW AS STRING 'VARIÁVEIS AUXILIARES
DIM ROW AS INTEGER 'VARIÁVEL AUXILIAR
'-----
    
```

```

'
' INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS
'
' TIPOSECCAO-----
TIPOSECCAO = "L"
IF TABCONTROL1.SELECTEDINDEX = 0 THEN
  TIPOSECCAO = "L"
ELSEIF TABCONTROL1.SELECTEDINDEX = 1 THEN
  TIPOSECCAO = "C"
ELSEIF TABCONTROL1.SELECTEDINDEX = 2 THEN
  TIPOSECCAO = "Z"
ELSEIF TABCONTROL1.SELECTEDINDEX = 3 THEN
  TIPOSECCAO = "R"
END IF

' R E N -----
R = TXT_RATIO.TEXT
N = TXT_SEGMENTS.TEXT

' AJ() -----
AJ(1) = -1
AJ(2) = 1
AJ(3) = 1
AJ(4) = -1

' BJ() -----
BJ(1) = -1
BJ(2) = -1
BJ(3) = 1
BJ(4) = 1

' OJ() -----
PI = SYSTEM.MATH.PI
OJ(1) = 0
OJ(2) = PI / 2
OJ(3) = PI
OJ(4) = 3 * PI / 2

'-----
' CÁLCULO DOS DADOS

IF TIPOSECCAO = "L" THEN '-----
  ' VARIÁVEIS ESPECÍFICAS -----
  DIM H_L, B_L, T_L AS SINGLE
  H_L = TXT_H_L.TEXT
  B_L = TXT_B_L.TEXT
  T_L = TXT_TN_L.TEXT

  ' NÚMERO DE NÓS -----
  NNOS = 2 + (N + 1)
  REDIM COORDS(NNOS, 2)

  ' CÁLCULO DAS COORDENADAS-----
  ' NÓ 1 -----
  COORDS(1, 1) = 0
  COORDS(1, 2) = H_L
  NA = 1
  ' QUADRANTE DE NNÓS 2 -----

```

```

J = 3
YQ = 0
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'NÓ 3 -----
COORDS(NA + 1, 1) = B_L
COORDS(NA + 1, 2) = 0
'
'-----
'ORGANIZAÇÃO DOS OUTPUTS PARA O GBTUL
'COORDENADAS DOS NÓS
REDIM COORDS_W(NNOS)
FOR ROW = 1 TO NNOS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    C1 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 1))
    C2 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 2))
    COORDS_W(ROW) = N1 & "," & C1 & "," & C2
NEXT
'INFORMAÇÃO DAS PAREDES
NWALS = NNOS - 1
REDIM WALLS_W(NWALS)
FOR ROW = 1 TO NWALS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    N2 = CONVERT.TOSTRING(ROW + 1)
    TW = CONVERT.TOSTRING(T_L)
    WALLS_W(ROW) = N1 & "," & N1 & "," & N2 & ",1,0," & TW
NEXT
'
'
ELSEIF TIPOSECCAO = "C" THEN '-----
'VARIÁVEIS ESPECÍFICAS -----
DIM H_C, B_C, D_C, T_C AS SINGLE
H_C = TXT_H_C.TEXT
B_C = TXT_B_C.TEXT
D_C = TXT_D_C.TEXT
T_C = TXT_TN_C.TEXT

'NÚMERO DE NÓS -----
NNOS = 2 + 4 * (N + 1)
REDIM COORDS(NNOS, 2)

'CÁLCULO DAS COORDENADAS-----
'NÓ 1 -----
COORDS(1, 1) = B_C
COORDS(1, 2) = H_C - D_C
NA = 1
'QUADRANTE DE NNÓS 2 -----
J = 1
YQ = B_C
ZQ = H_C
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT

```

```

NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 3 -----
J = 2
YQ = 0
ZQ = H_C
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 4 -----
J = 3
YQ = 0
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 5 -----
J = 4
YQ = B_C
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'NÓ 6 -----
COORDS(NA + 1, 1) = B_C
COORDS(NA + 1, 2) = D_C
'
'-----
'ORGANIZAÇÃO DOS OUTPUTS PARA O GBTUL
'COORDENADAS DOS NÓS
REDIM COORDS_W(NNOS)
FOR ROW = 1 TO NNOS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    C1 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 1))
    C2 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 2))
    COORDS_W(ROW) = N1 & "," & C1 & "," & C2
NEXT
'INFORMAÇÃO DAS PAREDES
NWALS = NNOS - 1
REDIM WALLS_W(NWALS)
FOR ROW = 1 TO NWALS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    N2 = CONVERT.TOSTRING(ROW + 1)
    TW = CONVERT.TOSTRING(T_C)
    WALLS_W(ROW) = N1 & "," & N1 & "," & N2 & ",1,0," & TW
NEXT
'
'
ELSEIF TIPOSECCAO = "Z" THEN '-----
'VARIÁVEIS ESPECÍFICAS -----
DIM H_Z, B_Z, D_Z, T_Z AS SINGLE
H_Z = TXT_H_Z.TEXT
B_Z = TXT_B_Z.TEXT

```

```

D_Z = TXT_D_Z.TEXT
T_Z = TXT_TN_Z.TEXT

'NÚMERO DE NÓS -----
NNOS = 2 + 4 * (N + 1)
REDIM COORDS(NNOS, 2)

'CÁLCULO DAS COORDENADAS-----
'NÓ 1 -----
COORDS(1, 1) = -B_Z
COORDS(1, 2) = H_Z - D_Z
NA = 1
'QUADRANTE DE NNÓS 2 ----- SENTIDO HORÁRIO!
J = 2
YQ = -B_Z
ZQ = H_Z
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS(-(I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J) + PI / 2)) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN(-(I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J) + PI / 2)) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 3 ----- SENTIDO HORÁRIO!
J = 1
YQ = 0
ZQ = H_Z
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS(-(I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J) + PI / 2)) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN(-(I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J) + PI / 2)) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 4 -----
J = 3
YQ = 0
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 5 -----
J = 4
YQ = B_Z
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
    COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
    COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'NÓ 6 -----
COORDS(NA + 1, 1) = B_Z
COORDS(NA + 1, 2) = D_Z
'
'-----
'ORGANIZAÇÃO DOS OUTPUTS PARA O GBTUL
'COORDENADAS DOS NÓS
REDIM COORDS_W(NNOS)
FOR ROW = 1 TO NNOS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    C1 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 1))

```

```

C2 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 2))
COORDS_W(ROW) = N1 & "," & C1 & "," & C2
NEXT
'INFORMAÇÃO DAS PAREDES
NWALS = NNOS - 1
REDIM WALLS_W(NWALS)
FOR ROW = 1 TO NWALS
N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
N2 = CONVERT.TOSTRING(ROW + 1)
TW = CONVERT.TOSTRING(T_Z)
WALLS_W(ROW) = N1 & "," & N1 & "," & N2 & ",1,0," & TW
NEXT
'
'
'
ELSEIF TIPOSECCAO = "R" THEN '-----
'VARIÁVEIS ESPECÍFICAS -----
DIM H_O, B_O, T_O AS SINGLE
H_O = TXT_H_O.TEXT
B_O = TXT_B_O.TEXT
T_O = TXT_TN_O.TEXT

'NÚMERO DE NÓS -----
NNOS = 4 * (N + 1)
REDIM COORDS(NNOS, 2)

'QUADRANTE DE NNÓS 1 -----
NA = 0
J = 1
YQ = B_O
ZQ = H_O
FOR I = 1 TO N + 1
COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 2 -----
J = 2
YQ = 0
ZQ = H_O
FOR I = 1 TO N + 1
COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 3 -----
J = 3
YQ = 0
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1
COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
NA = NA + (N + 1)
'QUADRANTE DE NNÓS 4 -----
J = 4
YQ = B_O
ZQ = 0
FOR I = 1 TO N + 1

```

```

COORDS(I + NA, 1) = YQ + (AJ(J) + COS((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
COORDS(I + NA, 2) = ZQ + (BJ(J) + SIN((I - 1.0) / N * PI / 2 + OJ(J))) * R
NEXT
'
'-----
'ORGANIZAÇÃO DOS OUTPUTS PARA O GBTUL
'COORDENADAS DOS NÓS
REDIM COORDS_W(NNOS)
FOR ROW = 1 TO NNOS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    C1 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 1))
    C2 = CONVERT.TOSTRING(COORDS(ROW, 2))
    COORDS_W(ROW) = N1 & "," & C1 & "," & C2
NEXT
'INFORMAÇÃO DAS PAREDES (DIFERENTE!)
NWALS = NNOS
REDIM WALLS_W(NWALS)
FOR ROW = 1 TO NWALS
    N1 = CONVERT.TOSTRING(ROW)
    IF ROW < NWALS THEN
        N2 = CONVERT.TOSTRING(ROW + 1)
    ELSE
        N2 = "1"
    END IF
    TW = CONVERT.TOSTRING(T_0)
    WALLS_W(ROW) = N1 & "," & N1 & "," & N2 & ",1,0," & TW
NEXT
END IF
'
'-----
'PUBLICAÇÃO DOS RESULTADOS NO FICHEIRO "\GBTUL_INPUTS.CSV"
'
FILEOPEN(1, FICHEIRO, OPENMODE.OUTPUT)
'COORDENADAS DOS NÓS
WRITELINE(1, "NATURAL NODES")
WRITELINE(1)
FOR ROW = 1 TO NNOS
    PRINTLINE(1, COORDS_W(ROW))
NEXT
WRITELINE(1)
WRITELINE(1)
WRITELINE(1)
'INFORMAÇÃO DAS PAREDES
WRITELINE(1, "WALLS AND INTERMEDIATE NODES")
WRITELINE(1)
FOR ROW = 1 TO NWALS
    PRINTLINE(1, WALLS_W(ROW))
NEXT
WRITELINE(1)
WRITELINE(1, "NOTE: THE USER SHOULD SPECIFY THE NUMBERS OF INTERMEDIATE NODES (SECOND TO LAST COLUMN IN THE ABOVE TABLE).")
FILECLOSE(1)

MsgBox("FILE \GBTUL_INPUT.CSV SUCCESSFULLY CREATED!")

END SUB

```

```
'-----  
'-----  
'-----  
PRIVATE SUB GROUPBOX2_ENTER(BYVAL SENDER AS SYSTEM.OBJECT, BYVAL E AS SYSTEM.EVENTARGS) HANDLES  
GROUP  
    BOX2.ENTER  
END SUB  
'-----  
'-----  
'-----  
PRIVATE SUB BTN_EXIT_CLICK(BYVAL SENDER AS SYSTEM.OBJECT, BYVAL E AS SYSTEM.EVENTARGS) HANDLES  
BTN_EXIT.CLICK  
    ME.CLOSE()  
END SUB  
  
END CLASS
```

## ANEXO II

### DIAGRAMAS DE PARTICIPAÇÃO MODAL

Apresentam-se aqui os diagramas de participação modal relativos às análises de encurvadura (Figura 34) e de vibração (Figura 35) de colunas de Euler com a secção em “C” representada na Figura 23. Os diagramas correspondem às análises efetuadas nas secções 5.3 e 5.4, cada qual correspondendo a um dos valores de  $R$  adotados.

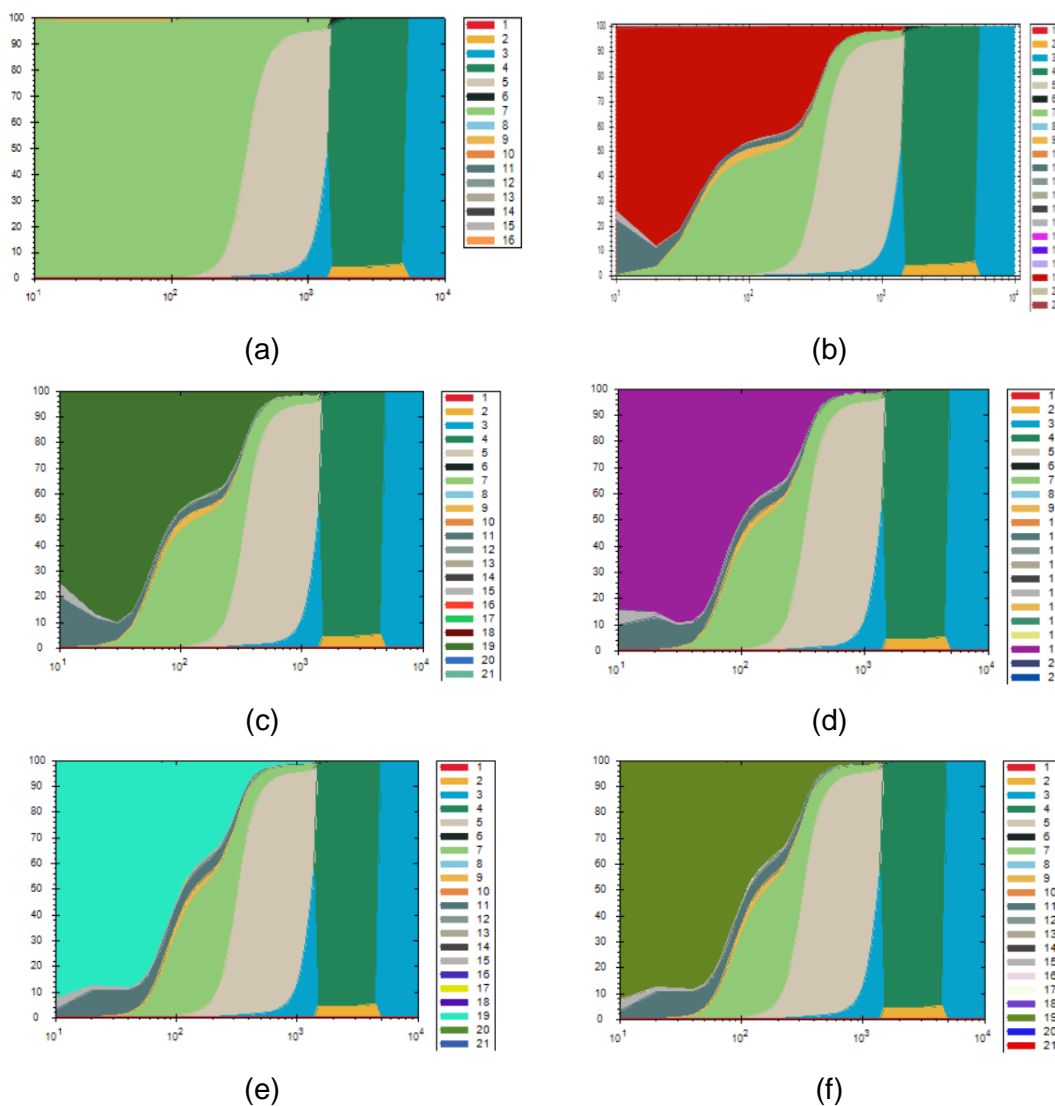


Figura 34 – Modos críticos de encurvadura: Evolução do diagrama de participação modal para: (a)  $R = 0$ , (b)  $R = 4$ , (c)  $R = 6$ , (d)  $R = 8$ , (e)  $R = 10$  e (f)  $R = 12$  [mm].

Salienta-se que o fator de participação modal de um determinado modo da GBT,  $P_i$ , é uma métrica da importância desse modo na configuração deformada da barra (e.g., um modo de encurvadura, ou de vibração). Embora haja outras definições, mais clássicas, no programa GBTUL este fator é quantificado dado por [Bebiano et al. (2013)]

$$P_i = \frac{U_i}{\sum_k U_k} \quad (17)$$

onde  $U_i$  representa a energia de deformação (linear) associada a esse modo e o denominador representa a energia de deformação total associada à configuração deformada da barra.

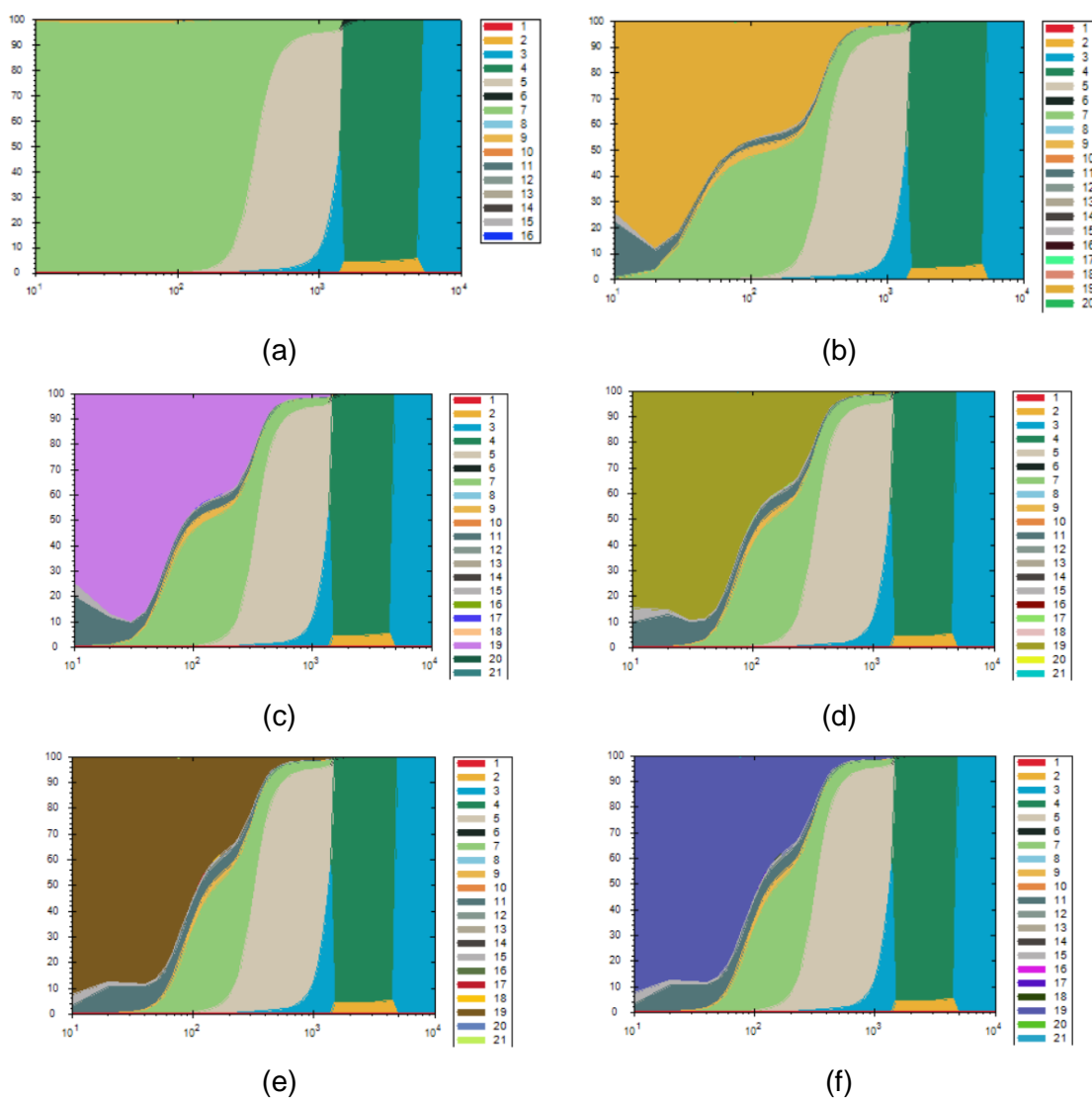


Figura 35 – Modos fundamentais de vibração: Evolução do diagrama de participação modal para: (a)  $R = 0$ , (b)  $R = 4$ , (c)  $R = 6$ , (d)  $R = 8$ , (e)  $R = 10$  e (f)  $R = 12$  [mm].