



ESCOLA NAVAL

la science du bien faire



Cálculo da Posição pelo Método de Sumner

João Tomás Ramalho Pires Trigo

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Ciências
Militares Navais, na especialidade de Marinha



Alfeite

2024



ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Cálculo da Posição pelo Método de Sumner

João Tomás Ramalho Pires Trigo

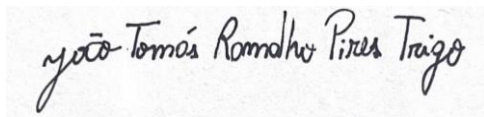
Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de
Marinha

Orientação de: CMG Costa Canas

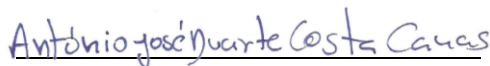
Coorientação de: Prof. Teresa Sousa

O Aluno mestrado

O Orientador



ASPOF Pires Trigo



CMG Costa Canas

Alfeite
2024

Dedico a tese à minha família.

Agradecimentos

A realização desta dissertação não teria sido possível sem o apoio e a orientação de muitas pessoas às quais sou profundamente grato.

Em primeiro lugar, gostaria de expressar a minha sincera gratidão ao orientador Capitão-de-Mar-e-Guerra António Costa Canas pela sua orientação incansável, apoio constante e valiosas sugestões ao longo deste trabalho. O imenso conhecimento do Sr. Comandante e a sua disponibilidade sem igual para ajudar constantemente durante todo o percurso foram os pilares para a realização deste estudo.

Agradeço também com enorme gratidão à coorientadora e minha professora Teresa Maria Sousa, que contribuiu para minha formação académica durante todo o percurso na Escola Naval e garantiu que a componente matemática deste projeto estivesse exímia. E sempre que houve oportunidade para acrescentar positivamente noutras matérias inerentes à elaboração da dissertação, a professora Teresa foi sempre um auxílio.

Gostaria de estender os meus agradecimentos à minha família, nomeadamente à minha mãe Eulália de Jesus Pires Ramalho, ao meu pai José Alberto Monteiro Pires Trigo, ao meu irmão Martim José Ramalho Pires Trigo, à minha irmã Cláudia Isabel Caixeiro Água-mel e à minha avó Cesaltina Teles Pires Ramalho.

Aos meus amigos e camaradas de curso mais próximos pelo companheirismo e momentos de descontração que tornaram esta jornada mais leve e agradável. A nossa amizade e colaboração foram essenciais para superar os desafios ao longo do caminho. Um agradecimento especial à minha namorada Catarina Varela Pardelha, que foi sempre o meu braço direito.

Finalmente, gostaria de expressar a minha gratidão a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização desta dissertação. Embora não possa nomear todos individualmente, saibam que cada gesto de apoio, cada palavra de encorajamento e cada conselho foram profundamente apreciados.

A todos, o meu sincero obrigado.

Resumo

A navegação astronómica ao longo dos séculos apresentou sempre desafios no que toca à determinação precisa da posição de um navio em alto-mar. Em 1837, Thomas Sumner, um capitão de um navio americano, desenvolveu um método inovador para determinar a posição de um navio através de técnicas no âmbito da navegação astronómica nunca antes utilizadas. O seu método ficou conhecido como método de Sumner.

Este método revolucionou a navegação na época ao introduzir novos conceitos astronómicos que futuramente viriam a ser úteis para a descoberta de novos métodos. Um desses conceitos foi a descoberta de uma nova linha de posição, a reta altura, que irá ser abordada com detalhe neste estudo.

Esta dissertação explora processos históricos e teóricos que conduziram ao desenvolvimento do método e posteriormente analisa-se a componente prática do método. Esta componente é composta pela aplicação prática do método de Sumner com valores retirados de observações reais através do sextante, aquando de duas navegações efetuadas. Este estudo tem como objetivo aferir a viabilidade do método comparando os valores calculados com as posições GPS (Global Positioning System) obtidas no momento das observações.

Palavras-chave: Método de Sumner, Reta altura, latitude pela passagem meridiana, longitude pelo cronómetro.

Abstract

Astronomical navigation over the centuries has always presented challenges when it comes to accurately determining a ship's position on the high seas. In 1837, Thomas Sumner, an American ship captain, developed an innovative method for determining a ship's position using previously unused astronomical navigation techniques. His method became known as Sumner's method.

This method revolutionized navigation at the time by introducing new astronomical concepts that would later be useful for discovering new methods. One of these concepts was the discovery of a new position line, the straight height, and will be covered in detail in this study.

This dissertation explores historical and theoretical processes that led to the development of the method and subsequently analyzes the practical component of the method. This component is composed of the practical application of the Sumner method with values taken from real observations using the sextant, during two navigations carried out. The aim of this study is to assess the viability of the method by comparing the calculated values with the GPS (Global Positioning System) positions obtained at the time of the observations.

Keywords: Sumner's method, straight height, latitude by meridian passage, longitude by chronometer.

Índice

Introdução	1
1. Determinação da Latitude	3
1.1. Contextualização histórica	3
1.2. Instrumentos de navegação	5
1.3. Cálculo pela passagem meridiana	9
2. Determinação da Longitude	17
2.1. Contextualização histórica	17
2.2. Cálculo da hora verdadeira.....	20
2.3. Cálculo da hora média.....	25
2.4. Cálculo pelo cronómetro	29
3. Método de Sumner	31
3.1. Contextualização histórica	31
3.2. Introdução ao método.....	33
3.3. Problema I do método de Sumner.....	35
3.4. Problema II do método de Sumner.....	38
4. Aplicação Prática do Método de Sumner.....	45
4.1. Introdução.....	45
4.2. Processo de cálculo	46
4.3. Análise de resultados.....	50
Conclusão.....	53
Bibliografia	55

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1: Quadrante	5
Figura 1-2: Astrolábio Náutico.	6
Figura 1-3: Quadrante de Davis	7
Figura 1-4: Reprodução de um sextante do século XVII.....	8
Figura 1-5: Reprodução de um octante do século XVII.	9
Figura 1-6: Observador e Sol no mesmo hemisfério.	11
Figura 1-7: Observador e Sol em hemisférios opostos	12
Figura 1-8: Exemplo de cálculo da latitude	14
Figura 2-1: Esfera celeste para representação do cálculo do ângulo horário.....	21
Figura 2-2: Exemplo de cálculo do ângulo horário.	24
Figura 2-3: Movimento aparente de translação do Sol na elíptica.....	26
Figura 2-4: Movimento de translação da Terra em torno do Sol	26
Figura 2-5: Amostra de página de um Almanaque Náutico de 1839.	28
Figura 2-6: Exemplo de cálculo da longitude pelo cronómetro.....	30
Figura 3-1 - Linha de posição astronómica, calculada por Sumner.....	32
Figura 3-2: Problema 1 do cálculo da posição pelo método de Sumner.....	36
Figura 3-3: Continuação do problema 1 do cálculo da posição pelo método de Sumner.	37
Figura 3-4: Enunciado do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.	39
Figura 3-5: Continuação do enunciado do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner	39
Figura 3-6: Resolução do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.	40
Figura 3-7: Continuação da resolução do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner	41
Figura 3-8: Resolução final do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.....	42
Figura 3-9 - Cruzamento de duas retas de altura, calculadas pelo método de Sumner	43

Introdução

Ao longo da história, os navegadores enfrentaram o desafio de determinar com rigor a posição no vasto oceano. As técnicas de navegação astronómica ainda não estavam aprimoradas o suficiente no início do século XIX, e esta questão era considerada um problema por resolver na área da navegação. Thomas Sumner, levou parte da sua vida a contribuir para os estudos da navegação astronómica e principalmente a tentar encontrar uma solução eficaz para o cálculo da posição no mar. O seu método de cálculo da posição foi desenvolvido em 1837 e será alvo estudo nesta dissertação em todos os quatro capítulos em que irá ser abordado.

Nos primeiros dois capítulos trata-se da determinação da latitude e longitude e estes têm como objetivo contextualizar e fornecer a base para uma melhor compreensão do capítulo seguinte, referente à explicação do método de Sumner. Tanto no primeiro capítulo como no segundo serão apresentados exemplos de cálculos reais da época em que eram praticados, em termos de processo de cálculo, identicamente pelo próprio Thomas Sumner.

O primeiro capítulo centra-se principalmente no detalhe histórico e matemático da latitude. Quando foi que a latitude começou a ser usada de forma fiável na navegação, quais os instrumentos que possibilitavam a obtenção da mesma, como era o processo de cálculo matemático da latitude e a evolução do mesmo ao longo dos séculos são alguns dos aspetos que irão ser abordados no primeiro capítulo.

O segundo capítulo, referente à determinação da longitude, terá o mesmo cariz de conteúdo abordado no primeiro capítulo. Porém, este estende-se na componente matemática, pois o grau de complexidade do processo de cálculo da longitude é superior ao da latitude.

O terceiro capítulo começará com uma abordagem histórica e introdutória do método, e de seguida dar-se-á início à explicação do método de Sumner através de exemplos reais provenientes do livro que o próprio autor elaborou.

Por último, o quarto capítulo é composto pela aplicação prática do método. Este capítulo visa responder ao objetivo principal deste projeto, que é testar a viabilidade do

cálculo da posição pelo método de Sumner. Por fim, serão apresentadas as conclusões deste estudo e espera-se poder aferir-se a viabilidade do método de cálculo da posição geográfica.

Para atingir o objetivo proposto, a metodologia adotada inclui uma análise matemática que visa a comparação dos valores obtidos através do Excel no método de Sumner, com valores reais e fidedignos GPS previamente registados, aquando das observações a navegar.

O objetivo secundário prende-se com encontrar e analisar explicações face a alguns dos resultados que podem divergir do padrão de viabilidade.

Em suma, esta dissertação visa proporcionar uma compreensão teórica e prática sobre o tema do cálculo da posição pelo método de Sumner e contribuir para os estudos na vertente da navegação astronómica.

1. Determinação da Latitude

1.1. Contextualização histórica

Começou no século XV a significativa evolução da arte de navegar pelos corpos celestes, pois a partir dessa data começaram a efetuar-se cálculos exatos da latitude. Ainda assim, é de referir que vários historiadores defendem que já no século XIV se navegava astronomicamente pelo mar mediterrâneo. Para alguns destes historiadores, a navegação astronómica também existia antes do século XV, porém os processos de cálculo eram expeditos e sem evidência matemática, como por exemplo um trecho dos *Mirabilia Descripta* de Jourdain de Séverac, onde se encontra uma referência à data de 1330 como cálculo da altura da estrela polar com os dedos ¹. As evidências escritas também nos levam a crer que os primeiros instrumentos para medir a altura dos astros (Quadrante e Astrolábio) apenas começaram a ser utilizados no final do século XV e início do século XVI, como Colombo, João Faras ou Duarte Pacheco Pereira mencionaram com frequência em observações de latitudes feitas a bordo ².

Portanto, cronologicamente, o primeiro processo utilizado para calcular a latitude baseava-se na observação da altura da estrela Polar. A estrela Polar tem a particularidade de se encontrar muito próxima do polo norte celeste. Se estivesse exatamente sobre o polo, a sua altura coincidia com a latitude do observador. Como se encontra ligeiramente afastada, basta aplicar uma pequena correção, positiva ou negativa, à altura observada para encontrar o valor da latitude. O valor dessa correção depende da posição da estrela no movimento circular que descreve em torno do polo.

Mas a estrela Polar só é visível no hemisfério norte. O astro que se pode observar sempre em ambos os hemisférios é o Sol. Foram desenvolvidos processos que envolveram ao longo dos anos diferentes instrumentos e técnicas utilizados para calcular a latitude a partir da altura máxima que o Sol atinge no seu movimento diurno; esta altura ocorre quando o Sol passa no meridiano do observador. Foram igualmente desenvolvidos

¹ Albuquerque, «A Navegação astronómica», 4–5.

² *Ibidem*, 8–9.

processos para cálculo da latitude observando outras estrelas, mas aquele que mais se usava era o da passagem meridiana do Sol ³.

No entanto, não existia apenas o método da passagem meridiana para o cálculo da latitude, surgiram os métodos por extrameridianas como alternativa ao uso do método da passagem meridiana do Sol. Estes novos métodos foram desenvolvidos com o intuito de ser possível calcular a latitude fora do momento da passagem meridiana, poderia ser uma medida necessária caso por exemplo o céu estivesse coberto de nuvens e não fosse possível visualizar o sol no momento da passagem meridiana.

Durante a época dos Descobrimentos Portugueses, cujo início remonta à data de 1415, ano em que os portugueses conquistaram Ceuta, e até princípios do século XVI, os pilotos apenas conheciam um método para o cálculo da latitude através do Sol que tinha como base a observação deste astro na sua passagem meridiana. Pedro Nunes, no século XVI, na obra *Tratado da Esfera*, com o objetivo de resolver a limitação da visibilidade, descreve um método mecânico de determinação da latitude por observação de alturas extrameridianas do Sol⁴.

Foram vários os métodos que surgiram ao longo do tempo, mas crê-se que Pedro Nunes, em 1537, tenha sido o primeiro a dar início ao estudo do cálculo da latitude por extrameridianas. Por exemplo, outro método que havia sucedido ao de Pedro Nunes foi o de Padre Valentim Estancel, muitas vezes com o intuito de procurar contornar os cálculos matemáticos analíticos para facilitar a sua aplicação, visto que este tipo de cálculos por extrameridianas era muito moroso e complexo, mas tirando a tentativa de simplificar os processos não houve uma significativa evolução nos processos matemáticos. Foi então quando Cornelis Douwes, em 1740, contribuiu para o progresso dos estudos nesta vertente astronómica, e revolucionou o conceito da obtenção da latitude por extrameridianas. Deve-se ao facto do método de Douwes ter trabalhado o seu método acompanhado do uso de funções logarítmicas, e isto acarretou uma maior eficácia e simplicidade ao efetuar cálculos associados à trigonometria esférica utilizada na resolução do triângulo de

³ Canas, «Tabelas de Navegação Astronómica Usadas em Portugal no Início do Século XX».

⁴ Pires, «Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol, Evolução Histórica do Processo», 1.

posição. Tendo como base o método de Douwes e também a valência dos logaritmos, muitos outros autores apresentaram os seus métodos para resolver este problema o melhor possível e a navegação astronómica acabou por evoluir em todas as vertentes graças a estas descobertas, e o método de Sumner não é exceção⁵.

1.2. Instrumentos de navegação

Para o cálculo da latitude é imprescindível um instrumento que consiga medir com rigor a altura de um astro relativo ao horizonte do observador. Na época dos descobrimentos, e nos séculos que se seguiram, os marinheiros portugueses usaram essencialmente três instrumentos para medir alturas: quadrante, astrolábio e balestilha. No século XVIII surgiram instrumentos muito mais rigorosos, primeiro o octante e depois o sextante, que ainda se usa nos nossos dias

O Quadrante, instrumento de navegação bastante usado pelos portugueses no século XV com o propósito de medir os graus da altura do astro, caracterizava-se por ter um quarto de círculo feito de madeira ou latão. Tornou-se amplamente utilizado para navegação por volta de 1450, embora o seu uso possa ser testemunhado pelo menos desde 1200.



Figura 1-1: Quadrante.

Fonte: <https://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm>

⁵ Queirós, «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário», 13.

O Astrolábio Náutico, composto por uma simples escala circular marcada em graus, era confiável e fácil de usar sob as condições frequentemente adversas a bordo das expedições marítimas da época e devido a estas razões o astrolábio foi popular por mais de 200 anos na comunidade marítima.

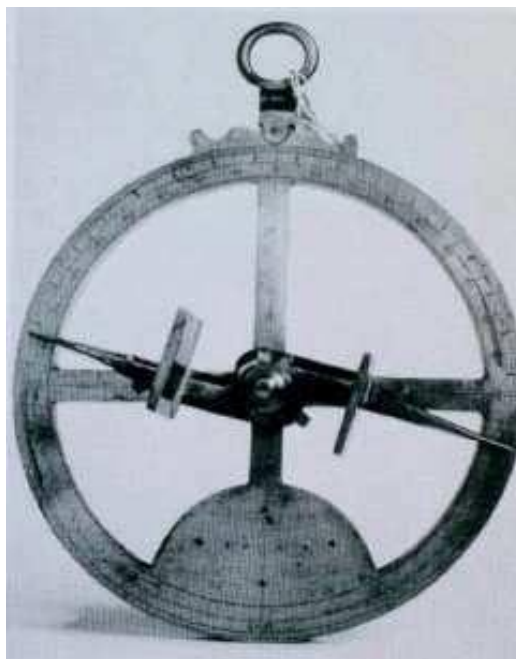


Figura 1-2: Astrolábio Náutico.

Fonte: <https://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm>

Também surgiu ao longo dos séculos outro tipo de instrumentos que visavam o aprimorar das técnicas e a otimização da medição. Passando a citar como exemplo outro tipo de quadrantes, um dos instrumentos mais populares do século XVII, foi o quadrante de Davis ou “back-staff”, devido a ser de visão traseira. John Davis concebeu este instrumento durante a sua viagem em busca da Passagem do Noroeste, conhecida hoje como estreito de Davis, que se situa entre a Gronelândia e Nunavut (Canadá). O seu quadrante está descrito na sua obra *Seaman’s Secrets*, publicada em 1595.



Figura 1-3: Quadrante de Davis.

Fonte: <https://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm>

O maior problema com os instrumentos de visão traseira é que era difícil, senão impossível, avistar a lua, os planetas ou as estrelas. Tendo em conta esta limitação, a partir do final dos anos 1600 e início dos anos 1700, os fabricantes de instrumentos de navegação astronómica estavam a mudar o foco da produção para sistemas óticos baseados em espelhos e prismas que poderiam ser usados para observar os corpos celestes noturnos.

Os responsáveis pelo desenvolvimento que marcaram esta etapa dos instrumentos astronómicos foram John Hadley, na Inglaterra, e Thomas Godfrey, um vidraceiro da Filadélfia, por volta de 1731, independentemente um do outro, mas quase em simultâneo. A ideia fundamental seria usar dois espelhos para fazer um instrumento duplamente refletor – o precursor do sextante moderno⁶.

O sextante moderno, ainda atualmente usado na navegação astronómica, pode medir um ângulo em qualquer plano. Tem também a vantagem de ser bastante mais preciso do que os antecessores instrumentos astronómicos e, em contraste com o Quadrante e o Astrolábio, era capaz de medir não só em graus, mas também em minutos ⁷.

⁶ Ifland, «The History of the Sextant».

⁷ The Royal Museums Greenwich, «<https://www.rmg.co.uk/stories/topics/what-mariners-astrolabe>».



Figura 1-4: Reprodução de um sextante do século XVII.

Fonte: <https://www.lojademuseudemarinha.pt/pt/sextante-de-lat-o-com-caixa.html>

O octante, embora fosse mais preciso que o Astrolábio e que o Quadrante, não era tão vantajoso como o sextante e este era usado para observações mais expeditas que não exigiam tanta precisão. O sextante também tinha a capacidade de medir ângulos de até 120 graus e poderia por exemplo ser útil para realizar observações de distâncias lunares, que por sua vez eram medições necessárias para calcular a longitude pelo método das distâncias lunares.

Outra diferença significativa do Octante para o Sextante é que este não tinha luneta, como se pode verificar através das figuras 1.4 e 1.5.



Figura 1-5: Reprodução de um octante do século XVII.

Fonte: <https://www.lojademuseudemarinha.pt/pt/octante.html>

1.3. Cálculo pela passagem meridiana

O procedimento de cálculo sempre foi considerado simples. A latitude (φ) obtinha-se através de uma simples adição ou subtração envolvendo a distância zenital (ζ) e a declinação do Sol (δ), sendo que a primeira é o complemento da altura do Sol ($\zeta = 90 - a$) e a segunda é a coordenada de declinação do Sol, ou seja, a distância angular desde o equador até ao astro. A declinação varia ao longo do ano e na época dos descobrimentos o valor da declinação podia ser consultado em tabelas elaboradas pelos astrónomos. Atualmente estes valores encontram-se tabelados no Almanaque náutico ⁸.

Tomaremos como exemplo uma das citações do *Livro de Marinharia João de Lisboa*, que descreve a simplicidade do cálculo da Latitude:

⁸ Canas, «Tabelas de Navegação Astronómica Usadas em Portugal no Início dos Séculos XX», 3.

“Sendo o Sol entre mim e a linha, ajuntarás altura com a declinação e, tudo junto, isso estarei da linha equinocial ⁹, de qualquer banda que andar ¹⁰. ” Figura 1.6

“Sendo a linha entre mim e o Sol, tirarei a declinação da altura e, o que ficar, isso estou da linha equinocial, de qualquer banda que andar ¹¹. ” Figura 1.7

Na figura 1.6 está demonstrada a situação em que o Sol se encontra entre o Equador e a projeção do observador no globo, ou seja, entre o zénite e o equador. Portanto, a latitude será a soma da distância zenital e da declinação do Sol sobre o Equador, uma vez que estão no mesmo hemisfério.

Na figura 1.7 tem-se que o observador e o Sol se situam em hemisférios opostos, logo, a distância zenital será desde o zénite do observador até ao equador e desde o equador até ao Astro. A distância do equador até ao Sol, que nada mais é do que a declinação do Sol, precisa de ser subtraída da distância zenital para poder ser calculada a latitude.

⁹ Lisboa, «Livro de Marinharia», 93. O Sol encontra-se entre o observador e o equador, logo, estão ambos no mesmo hemisfério. A latitude é igual à soma da declinação com a distância zenital.

¹⁰ *Ibidem*, 93. Tanto se aplica no hemisfério norte como no sul.

¹¹ *Ibidem*, 93. No caso de o observador e o Sol estarem em hemisférios diferentes, ou seja, o equador estar entre o observador e o Sol, retira-se a declinação do valor da distância zenital e obtém-se a latitude.

As seguintes figuras ilustram a descrição supramencionada:

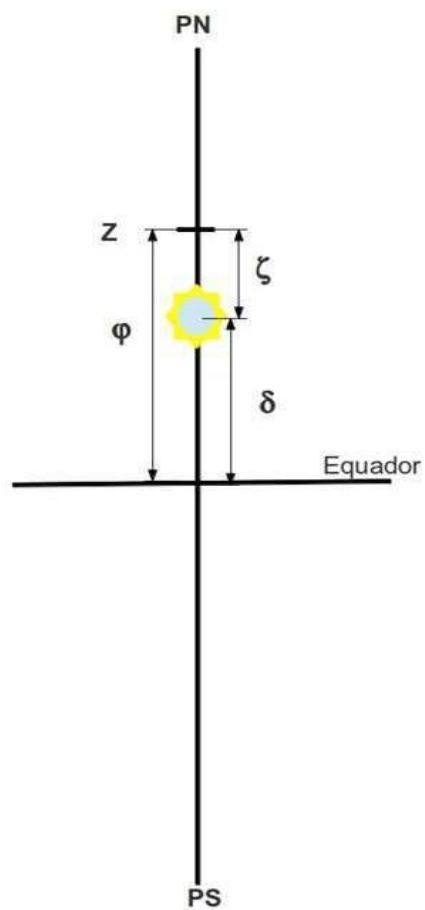


Figura 1-6: Observador e Sol no mesmo hemisfério.

Fonte: Imagem do Autor.

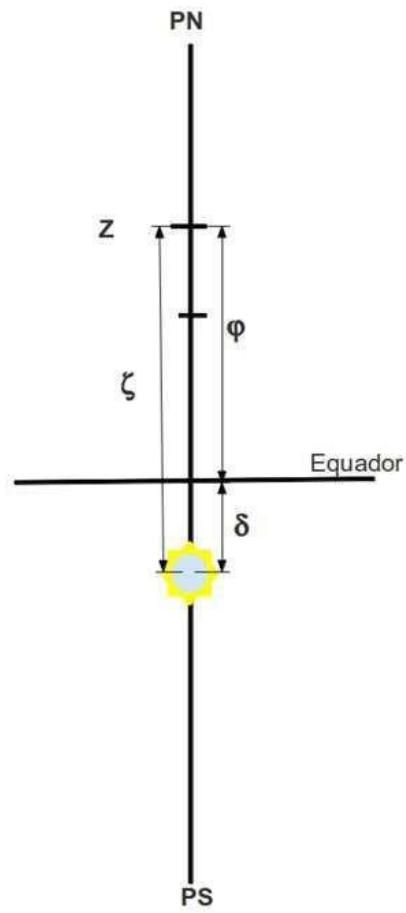


Figura 1-7: Observador e Sol em hemisférios opostos.

Fonte: Imagem do Autor.

Legenda da notação das figuras 1.6 e 1.7:

PN – Pólo Norte.

PS – Pólo Sul.

ζ – Distância Zenital.

φ – Latitude.

δ – Declinação.

Z – Zénite do observador.

Estas são apenas duas das situações possíveis da posição relativa do Sol, observador e equador. Existem mais possibilidades de cálculo, mas todas elas se baseiam no processo mencionado. Um exemplo de uma outra situação distinta das referidas, seria o Sol estar acima do zénite do observador no mesmo hemisfério, neste caso a declinação seria maior que a distância zenital, mas o processo de cálculo permanecia simples, tratando-se meramente de uma subtração entre a declinação e a distância zenital para encontrar a latitude.

O método que Sumner usava para calcular a latitude está descrito e explicado no manual de Bowditch, e como se pode constatar na figura com o exemplo de cálculo da latitude do próprio manual, o método é exatamente o mesmo à época mencionada do excerto retirado do livro de João de Lisboa, tendo apenas os instrumentos para tirar alturas do Sol sofrido uma evolução. A partir desta observação também se pode concluir que o cálculo da latitude permaneceu inalterado, eficiente e relativamente fácil de ser calculado durante os vários séculos, porém a evolução dos instrumentos acarretou mudanças no cálculo da latitude a níveis de correção da altura, como veremos no exemplo da figura 1.8.

EXAMPLE I.

Suppose that, at the end of the sea day, June 21, 1836, in the longitude of 60° W., the meridian altitude of the sun's lower limb, bearing south, was found by a fore observation to be $40^{\circ} 6'$; required the latitude, supposing the correction of the observed altitude for parallax, dip, and semidiameter, to be twelve miles.

Observed altitude.....	$40^{\circ} 06'$
Par., dip, and semidiam. ...add	12
Sum	$40 18$
Refractionsubtract	1
True altitude	$40 17$
Subtract from	$90 00$
True zenith distance.....	$49 43$ N.
Sun's declination, Table IV. ...	$23 28$ N.
Latitude	$73 11$ N.

Figura 1-8: Exemplo de cálculo da latitude.

Fonte: Bowditch, *The New American Practical Navigator* 1837, 167.

Transcreveu-se o exemplo diretamente da figura 1.8:

Supondo que, no final do “dia de mar” 21 de junho de 1836, na longitude 60° W, a altura do limbo inferior do Sol, cujo azimute é sul, obtida por observação foi de $40^{\circ}6'$. É pedida a latitude, sendo as respectivas correções de paralaxe, depressão e semidiâmetro de 12 milhas.

No retângulo superior estão os cálculos correspondentes à correção da altura observada, dos $40^{\circ}06'$ somaram-se 12 minutos da paralaxe, depressão e semidiâmetro e de seguida subtraiu-se 1 minuto, resultando na altura verdadeira de $40^{\circ}17'$. Como se pretende obter a distância zenital para o cálculo da latitude subtraiu-se $90 - 40^{\circ}17'$.

No retângulo inferior observa-se a semelhança em relação ao processo de João de Lisboa. Tendo a distância zenital ($49^{\circ}43'N$) e a declinação do Sol ($23^{\circ}28'N$) apenas se efetuou a soma destas 2, sendo a latitude $73^{\circ}11'N$ ¹².

¹² Bowditch, «The New American Practical Navigator», 1837, 167.

2. Determinação da Longitude

2.1. Contextualização histórica

A partir do final do século XVIII e ao longo do século seguinte surgiram numerosos avanços na vertente da navegação astronómica. Por exemplo, a latitude era regularmente determinada no mar com um grau de precisão aceitável desde o final do século XV, já a obtenção da longitude só se tornou possível a partir da segunda metade do século XVIII. Esta diferença temporal deve-se a vários fatores que acabaram por limitar o processo de evolução da mesma, e irão ser abordados neste capítulo.

Primeiramente, para determinar a longitude, eram necessários instrumentos consideravelmente mais rigorosos do que aqueles utilizados para a latitude e os processos de cálculo eram bastante mais complexos. Esta complexidade matemática resultou no desenvolvimento de numerosas tabelas logarítmicas de modo a auxiliar e facilitar os cálculos matemáticos, que não eram necessárias para a latitude, mas eram indispensáveis para a longitude ¹³.

É possível determinar a longitude através de uma relação direta da respetiva coordenada com o tempo. Existem outras formas de calcular a longitude, visto que é uma coordenada terrestre: pode ser calculada também por triangulação, porém este tipo de cálculo não é relevante para a dissertação e sim os cálculos através do tempo. Para compreender o conceito de tempo neste tipo de método para calcular a longitude, há que primeiramente adquirir a básica noção de como o movimento da Terra atua sobre a variável temporal. É sabido que a Terra realiza uma rotação em torno do seu eixo em cerca de 24 horas, e este movimento de rotação serve de referência para o conceito de tempo, sendo a unidade básica do tempo o dia, subdividido em horas, minutos e segundos.

E tem-se como conceito astronómico que o meio-dia verdadeiro é quando marca as 12 horas, pois coincide exatamente com o instante em que o Sol passa no meridiano de um determinado lugar em que esteja localizado o observador. Quando o Sol passa num determinado meridiano, significa que já percorreu os lugares que estão a Este, logo, já foi meio-dia antes, e ainda irá passar nos que estão a Oeste; então, nestes a hora ainda é inferior ao meio-dia verdadeiro (12 horas). E a diferença entre as horas locais de dois

¹³ Canas, «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal. Contributo de Monteiro da Rocha», 31.

meridianos será mais discrepante se estes estiverem mais afastados, numa proporção de 15 graus por cada hora e atingido o limite máximo de diferença horária aos 180 graus.¹⁴

Tendo em conta a referida relação entre longitude e tempo, pode conhecer-se a diferença de longitude entre dois lugares, apenas se for possível determinar a diferença entre as respetivas horas locais. Para que seja possível, existem essencialmente duas formas de obtenção. Uma delas é dispor de um relógio muito rigoroso a bordo, que seja acertado pela hora de um dado meridiano de referência, e que permite “conservar” (face a fatores externos como por exemplo pressão atmosférica, humidade e temperatura) essa hora a bordo, de modo a ser possível compará-la com a hora dos diferentes locais onde o navio tenha passado. A outra possibilidade consiste em observar um fenómeno astronómico. Para usar estes métodos astronómicos é necessário que sejam reunidas duas condições: que seja conhecida com rigor a hora de ocorrência desse fenómeno num determinado meridiano de referência e que o fenómeno seja visível simultaneamente em diversos locais significativamente afastados entre si.

Um exemplo de fenómeno astronómico nestas condições é, por exemplo, um eclipse, embora estes ocorram com uma frequência muito baixa, não tendo, portanto, a devida utilidade para uma necessária utilização frequente na navegação. Outro método astronómico para determinar a longitude consiste no seu cálculo através das distâncias lunares, e também é pertinente mencioná-lo neste capítulo, juntamente com o método do cronómetro ¹⁵.

Ao longo do século XVIII desenvolveram-se em simultâneo (e a partir da mesma altura) dois métodos: distâncias lunares e cronómetro.

Existe uma diferença significativa entre ambos, principalmente em termos de complexidade algorítmica. O método das distâncias lunares exigia a realização de operações bastante complexas, que até mesmo por um observador com elevada experiência em cálculos matemáticos podiam demorar várias horas para serem concluídas ¹⁶.

Embora o cálculo da longitude pelas distâncias lunares apresentasse dificuldades em termos de cálculos matemáticos, este foi inicialmente o método preferido. Os

¹⁴ *Ibidem*, 33.

¹⁵ *Ibidem*, 33–34.

¹⁶ *Ibidem*, 31.

cronómetros da época, no que toca à relojoaria, eram instrumentos de alta precisão, porém a sua produção com o devido rigor era difícil e economicamente dispendiosa. Consequentemente, os preços desses cronómetros no mercado estavam fora do poder de aquisição da média dos navegantes, tornando-os ainda pouco acessíveis para a maioria da comunidade marítima ¹⁷.

O propósito de medir a distância angular entre a Lua e outro astro para determinar a longitude reside no facto de a lua ter um movimento próprio, em torno da Terra, que dura aproximadamente um mês, movendo-se no céu a uma velocidade diferente da que se movem os restantes corpos celestes. Essa diferença de velocidades é de pouco mais de meio grau por hora aproximadamente, logo, a distância entre a Lua e os restantes astros vai-se alterando com uma determinada celeridade que é possível ser medida ¹⁸.

O processo de determinação da longitude pelo cronómetro era indubitavelmente o mais rigoroso, e a partir de finais do século XVIII foi acompanhado de um desenvolvimento crescente, e durante todo o século XX era o único método em que os navegadores poderiam de forma prática e realista depositar o seu conhecimento de navegação e experiência matemática para obter a longitude. Tal só foi possível graças ao trabalho de um carpinteiro inglês, John Harrison, que durante toda a sua vida contruiu vários cronómetros que mantinham uma marcha regular, fundamental para preservar a hora do meridiano de referência. Antes da invenção de Harrison, outros eruditos da época defenderam este tipo de ideia, mas propondo relógios de areia, de rodas, de água ou de pêndulos. Porém, devido a questões de natureza técnica e prática, este tipo de relógios não eram os mais adequados para a resolução do problema, e o desempenho atingido pelos mesmos não era o desejado¹⁹.

Ter conhecimento de uma hora que correspondesse a um meridiano de referência foi sempre a principal dificuldade para resolver o problema da longitude. O método das distâncias lunares e do cronómetro, apesar de serem diferentes na sua complexidade de processo, ambos tinham a mesma finalidade, que era obter com rigor a hora do meridiano de referência de Greenwich.

¹⁷ *Ibidem*, 34.

¹⁸ *Ibidem*, 34.

¹⁹ *Ibidem*, 32.

Sumner tinha a possibilidade de ter um cronómetro a bordo e, como será demonstrado em exemplos de cálculo, era a este método que recorria para calcular a longitude. Porém, o método das distâncias lunares poderia sempre ser útil ou necessário como método alternativo para o cálculo da longitude.

Como para qualquer método de cálculo de longitude, é necessária a comparação horária acima referida e teria primeiramente de se descobrir a hora verdadeira e posteriormente a hora média para efetuar a comparação com o meridiano de referência. No subcapítulo seguinte segue-se a explicação do cálculo da hora verdadeira e média.

2.2. Cálculo da hora verdadeira

O subcapítulo sobre o cálculo da hora verdadeira irá ser explicado com base na bibliografia de Cotter, seguindo os passos do processo de cálculo do referido autor. Cotter começa esta parte resumindo algumas considerações a ter em conta no processo, sendo pertinente mencionar a necessidade de se conhecer a latitude para determinar a longitude. Passa-se a citar transcrição de um texto onde é referido pelo próprio:

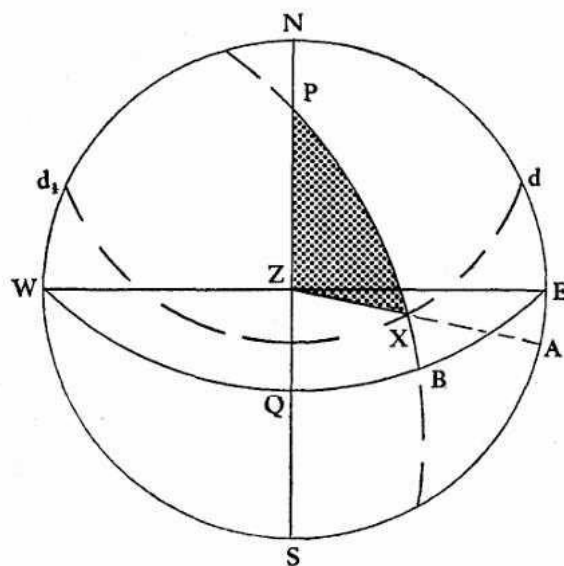
"Finding longitude by means of a chronometer requires knowledge of the observer's latitude and certain astronomical data in order to define the observed object's celestial position at the time of the observation. The exact error and daily rate of the chronometer must also be known." ²⁰

Para além da latitude, e como mencionado na última frase do texto, é necessário também ter conhecimento do erro do cronómetro e da marcha do cronómetro (Rate of going); este aspeto será abordado com detalhe no subcapítulo 2.4.

Antes de passar à explicação do processo, é pertinente mencionar que as letras que Cotter usa para identificar alguns elementos do triângulo não são as que se usam normalmente na simbologia náutica e astronómica. Por exemplo, a latitude representa-se normalmente por " ϕ ", Cotter usa " l "; a declinação costuma representar-se por " δ ", e o autor usa " d ". Neste subcapítulo, diferente dos restantes, irá ser usada a notação de Cotter.

²⁰ Cotter, «A History of Nautical Astronomy», 243.

Arco PX = Distância polar de X = $(90 \pm d)$



Fonte: Cotter, 244

O círculo na figura 2.1 representa o horizonte celeste de um observador cujo zênite está projetado no plano do horizonte em Z. As letras N, E, S e W são as projeções cardeais dos pontos do horizonte celeste. P é a projeção do polo celeste e WQE da linha equinocial.

dd1 é a projeção do paralelo de declinação na qual um objeto observado, denominado de X na figura está localizado. NZS é a projeção do meridiano celeste. ZXA é a projeção do círculo vertical que passa por X, e PXB é o círculo horário que passa por X ²¹.

O arco PX é $(90 + d)$ ou $(90 - d)$ dependendo se a latitude e a declinação têm diferentes ou equivalentes valores respetivamente.

Se os três lados do triângulo esférico PZX são conhecidos, é simples de calcular o ângulo ZPX. Este ângulo, que representa o ângulo horário do astro, corresponde ao tempo decorrido desde, ou que falta para a passagem meridiana. ²²

Se o astro observado for o Sol, o ângulo P mede o intervalo de tempo para o meio-dia verdadeiro, logo, se conhecermos P, também conhecemos a hora verdadeira do local (Hvl). Aplicando a equação de tempo a esta hora, obtemos a hora média do local (Hml).

E se registarmos a hora do cronómetro, no momento da observação, conhecemos a hora média de Greenwich (Hmg) em que a mesma foi realizada. Comparando esta com a Hml, obtemos a longitude do seguinte modo:

$$Longitude = Hmg \sim Hml. \text{ }^{23}$$

Conhecidos os três lados do triângulo esférico, a seguinte fórmula serve para calcular o ângulo no polo, para posteriormente ser possível calcular a hora verdadeira:

$$\cos P = \frac{\cos z + \sin l \cdot \sin d}{\cos l \cdot \cos d}$$

Esta fórmula trigonométrica marcou o início da trilha para a obtenção do cálculo da longitude, no entanto esta não é possível ser resolvida através de operações logarítmicas tornando-se demasiado complexa para calcular a variável "P".

Esta limitação conduziu à necessidade de adaptar esta fórmula para poder ser resolvida através dos logaritmos.

²¹ *Ibidem*, 243.

²² *Ibidem*, 244.

²³ *Ibidem*, 245.

Após diversas transformações da fórmula, o Oficial da Marinha Francesa Jean Charles de Borda (1733-1799) publicou uma outra, em 1787, na sua obra *On the Reflecting Circle*. O método de Borda para encontrar o ângulo no polo tornou-se popular na primeira metade do século XIX e foi ainda adaptada por Henry Raper para o uso da função semiverso²⁴.

$$\text{hav } \theta = \frac{1}{2} ; \text{vers } \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

Sendo que, $\cos \theta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$

Portanto, $\text{hav } \theta = \sin^2 \frac{\theta}{2}$

Logo, $\text{hav } P = \sqrt{\sec l \cdot \csc PX \cdot \cos s \cdot \sin(s - a)}$

Raper forneceu posteriormente uma tabela de logaritmos, que denominou de "Table of Log Sine Squares". Era possível resolver o ângulo no polo através deste método, porém havia a desvantagem de que eram necessárias cinco tabelas diferentes de logaritmos de funções trigonométricas.

O uso da função senovero, a partir de finais do século XVII, veio facilitar os cálculos de navegação astronômica:

$$\text{vers } P = \frac{\text{vers } ZX - \text{vers } (PX \pm PX)}{\sin PZ \cdot \sin PX}$$

A quantidade $PX \pm PX$ é equivalente à distância zenital, portanto poderá ser substituído por MZD ("Meridian Zenith Distance"):

$$\text{vers } P = \frac{\text{vers } ZX - \text{vers } (MZD)}{\sin PZ \cdot \sin PX}$$

A partir daqui tem-se que:

$$\begin{aligned} \text{vers } ZX - \text{vers } MZD &= (1 - \cos ZX) - (1 - \cos MZD) = \cos MZD - \cos ZX \\ &= \sin \text{mer. alt} - \sin \text{alt} \end{aligned}$$

Logo,

²⁴ Novamente, a notação usada será a original de Cotter: A função semiverso, designa-se em inglês por haversine (hav) e a função senovero, designa-se em inglês por versine (vers).

$$\text{vers } P = (\text{sen mer. alt} - \sin a) \cdot \sec l \cdot \sec d$$

Ou:

$$\text{vers } P = (\text{sen mer. alt} - \sin a) \cdot \sec d \cdot \csc co l$$

Nevil Maskelyne teve este raciocínio como base para a realização das suas tabelas com os logaritmos de senoverso, referido muitas vezes em exemplos de cálculo como "Log Risings".

Segue-se um exemplo que ilustra a solução da longitude por Maskelyne, e que também é utilizado por Sumner no cálculo da hora verdadeira:

Example: Sun's declination $22^{\circ} 23\frac{1}{2}'$ N. Latitude $34^{\circ} 55'$ N.
Corrected altitude $36^{\circ} 59\frac{3}{4}'$. Find the Sun's meridian distance.

Dec.	$22^{\circ} 23\frac{1}{2}'$ N.	→ log sec	0.03405	
Co-lat.	$55^{\circ} 05'$	→ log cosec	0.08619	
Mer. alt.	$77^{\circ} 28\frac{1}{2}'$			→ nat. sin 97620
Cor'd. alt.	$36^{\circ} 59\frac{3}{4}'$			→ nat. sin 60176
			4.57338	→ log diff. 37444
			<u>Log rising 4.69363</u>	
			<u>Mer. dist. 3 hrs. 58 mins. 23 secs.</u>	

Figura 2-2: Exemplo de cálculo do ângulo horário.

Fonte: Cotter, 248

Os passos seguidos por Maskelyne são os seguintes: após conhecida a declinação do Sol, a latitude e a altura verdadeira do astro, calcula-se o complemento da latitude. Somando este valor com a declinação, obtém-se o valor da altura na passagem meridiana para aquele dia. A partir de uma tabela de funções trigonométricas retira-se o valor dos senos da altura meridiana e da altura observada e efetua-se a subtração de um pelo outro. Procura-se o logaritmo do resultado, que se soma com os logaritmos da secante da declinação e da cossecante do complemento da latitude. O resultado final é o logaritmo do

"Log Rising", e para encontrar o valor correspondente a horas, minutos e segundos basta procurar na tabela destinada à consulta dos "Log Rising"²⁵.

2.3. Cálculo da hora média

É importante primeiramente distinguir que existem dois tipos de horas: são estas a hora média ("mean time") e a hora verdadeira ("apparent time"). A hora média é a hora que está exibida através do cronómetro, e a hora solar verdadeira é calculada em função do movimento de rotação aparente do sol, o qual não é regular. Um dia solar verdadeiro corresponde ao intervalo de tempo decorrido entre duas passagens meridianas consecutiva do Sol, num determinado meridiano.

O tempo verdadeiro é medido pelo movimento do Sol, ou seja, a hora verdadeira é o arco do equador compreendido entre o meridiano inferior do lugar e o do Sol, contado no sentido de Leste para Oeste, de 0 a 24h.

Trabalhar com o tempo verdadeiro significa uma desvantagem para os cálculos de navegação astronómica por não ser uniforme ao longo do ano. A velocidade com que o meridiano do Sol verdadeiro se desloca em relação ao meridiano de um determinado observador é proveniente da velocidade de rotação da esfera celeste e também do movimento do meridiano do astro devido ao seu deslocamento ao longo da elíptica. Relativamente ao movimento da elítica, este não é uniforme devido a duas razões²⁶:

- O deslocamento do Sol na elíptica, devido à sua inclinação sobre o equador, produz maior alteração no angulo sideral próximo dos solstícios do que próximo dos equinócios.

²⁵ Cotter, 248.

²⁶ Gameiro, «Astronomia Náutica», 55.

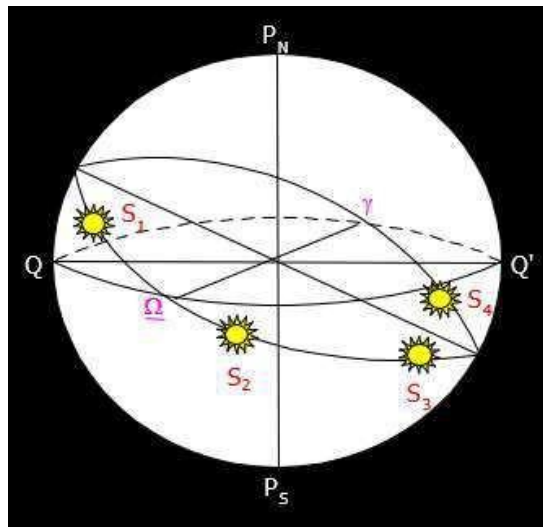


Figura 2-3: Movimento aparente de translação do Sol na elíptica.

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/segunda-lei-kepler.htm>

- A velocidade do Sol na elíptica não é constante (Segunda lei de Kepler), como se pode constatar na figura. Nos momentos em que a Terra se situa mais próxima do sol (Perigeu), a sua velocidade de translação aumenta ligeiramente, resultando em dias maiores, e vice-versa para o apogeu.

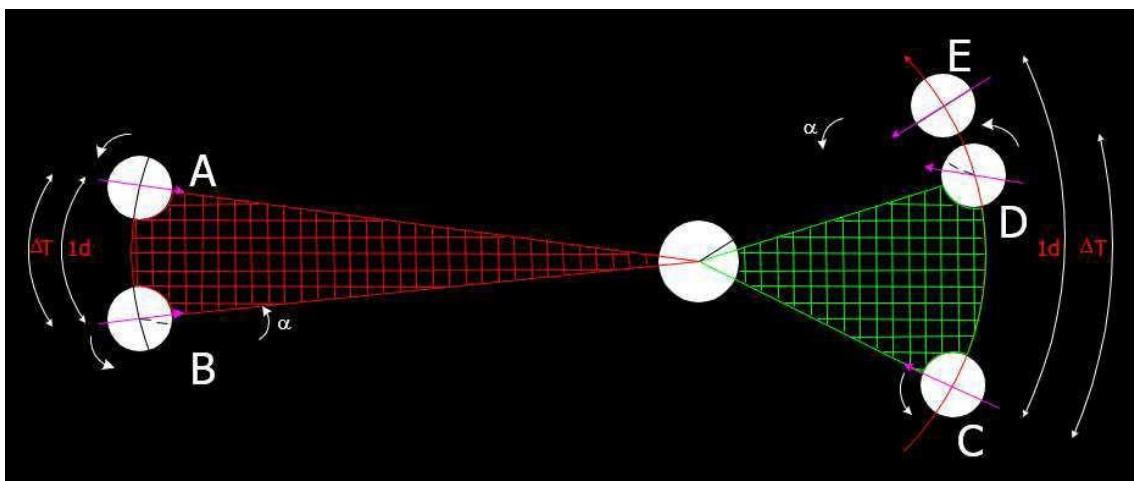


Figura 2-4: Movimento de translação da Terra em torno do Sol.

Fonte: <https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/segunda-lei-kepler.htm>

Durante o Verão, um dia solar verdadeiro demora um intervalo de tempo Δt a ser completado (de A para B).

De acordo com a Segunda lei de Kepler, o raio vetor demorará, durante o Inverno, um mesmo intervalo de tempo Δt a percorrer uma mesma área (de C para D).

Considerando a velocidade angular de rotação da Terra como constante, podemos concluir que se de A para B o meridiano do observador rodou um ângulo $= 360^\circ + \alpha$, o mesmo se verificará de C para D, uma vez que Δt se mantém.

Ou seja, o dia solar verdadeiro será completado, no segundo caso, depois de expirado Δt , algures numa posição E.

Este inconveniente fez dar origem a um astro imaginário denominado de "Sol médio" pelo qual já é possível trabalhar com unidades temporais de forma uniforme. O sol médio percorre o equador com uma velocidade uniforme. Porém, apenas é possível obter a hora do Sol médio quando aplicada a equação do tempo, que nada mais é do que a diferença entre os ângulos siderais do sol verdadeiro e do sol médio²⁷:

$$Eq = \odot m AS - \odot v AS \Leftrightarrow Eq = \odot m h - \odot v \Leftrightarrow h = Hml - Hvl$$

A equação do tempo anula-se quatro vezes por ano e atinge o valor máximo de 16 minutos e meio.

Atualmente os Almanques já têm integradas todas as horas corrigidas com a equação do tempo, mas antigamente tinha de se efetuar esta correção separadamente. Passa-se a mostrar um exemplo de um Almanaque Náutico de 1839, cuja equação do tempo se situa numa coluna à parte:

²⁷ Gameiro, 57.

82

NOVEMBER, 1839.

I.

AT APPARENT NOON.

Day of the Week.	Day of the Month.	THE SUN'S										MEAN TIME.		THE MOON'S			
		Apparent Rt. Ascen.			Diff. for 1 h.	Apparent Declination.			Diff. for 1 h.	Semidi- ameter.	Equation of Time, to be sub. fm. Apparent Time.	Diff. for 1 h.	Age.	Meri- dian Pas- sage.			
		h	m	s	s	°	'	"	"	'	"	m	s	s	d	h	m
Fri.	1	14	24	3.62	9.8	S.14	19	0.8	48.1	16	8.7	16	15.32	0.050	24.9	21	0
Sat.	2	14	27	58.98	9.8	14	38	15.6	47.5	16	9.0	16	16.51	0.015	25.9	21	40
Sun.	3	14	31	55.16	9.9	14	57	16.3	46.9	16	9.3	16	16.88	0.019	26.9	22	20

Figura 2-5: Amostra de página de um Almanaque Náutico de 1839.

Fonte: <https://books.google.co.uk/books?id=wwQNAAAQAAJ&pg=PR1&hl=pt-PT#v=onepage&q&f=false>

O melhor instante para determinar a altura do Sol para o cálculo da hora verdadeira é quando a altura do Sol varia mais rapidamente, ou seja, quando o azimute do Sol está próximo do azimute Leste ou Oeste. De seguida devemos somar o semidiâmetro, subtrair a depressão e a refração da Tab. XIII, após estas correções teremos a altura verdadeira. Relativamente à refração, é necessário ter em conta que se o astro estiver muito próximo do horizonte os maiores níveis de refração irão influenciar negativamente no rigor dos cálculos, portanto o ideal é registar a altura quando o astro está a uma altura superior a 7 graus. Para além da altura verdadeira é necessário ter conhecimento de mais dois valores, da latitude, esta obtida através de estima, e da distância polar do sol²⁸.

Após calculada a altura verdadeira, e tendo a latitude e a distância polar, a hora verdadeira pode ser pelo primeiro método proposto por Bowditch, é o mais simples e o único que Thomas Sumner usa para efetuar os cálculos, pois não necessita da tabela de senos naturais ²⁹, e todos os logaritmos podem ser encontrados na tabela XXV ³⁰.

²⁸ Sumner, «A New And Accurate Method Of Finding A Ship's Position At Sea», 7.

²⁹ Conforme já mencionado, as fórmulas trigonométricas resolviam-se quase todas com recurso a logaritmos. E era prática comum, quando se escrevia apenas cosseno ou seno, estar-se normalmente a referir aos logaritmos dos mesmos. Então, quando fosse pretendido mencionar apenas cosseno ou apenas seno, desig-

navam-no com a palavra “natural”.

³⁰ Bowditch, «The New American Practical Navigator», 1802, 168.

Ainda assim, Sumner recomenda o cálculo da hora aparente através do terceiro método, sendo este mais prático devido à utilização dos logaritmos, que quando usados para o cálculo da hora aparente são os mesmos para todas as operações matemáticas, tornando-se assim um método de cálculo menos extenso do que os restantes dois métodos³¹.

2.4. Cálculo pelo cronómetro

A longitude pode ser calculada, comparando a hora média do local (Hml) com a hora média de Greenwich (Hmg). A primeira pode ser calculada a partir da observação da altura do Sol, como explicado anteriormente, enquanto a segunda se conhece lendo simplesmente a hora indicada pelo cronómetro.

É importante frisar que se deve sempre calcular a “marcha do cronómetro” antes de largar para o mar, esta significa a sua taxa de variação diária. Os cronómetros da época eram relógios mecânicos de alta precisão, não precisavam de ser totalmente rigorosos, ou seja, podiam admitir erros, mas esses erros teriam de se acumular de uma forma regular no seu funcionamento. O cronómetro deveria ser lançado em terra, antes da navegação, e o procedimento que se efetuava era determinar diariamente o seu erro; variação deste erro (marcha do cronómetro) deveria ser constante.

Dever-se-ia verificar o cronómetro durante vários dias, no meridiano que ia servir de referência para a longitude, para verificar a marcha do cronómetro. Se esta fosse regular tinha-se todas as condições para se usar o cronómetro no mar. Por exemplo, se o cronómetro se atrasasse 3 segundos por dia, passados 100 dias estava atrasado 300 segundos, ou seja, 5 minutos. Logo, teria de se somar 5 minutos à hora do cronómetro para se saber que horas eram em Greenwich. E no dia seguinte ter-se-ia que somar + 3 segundos e no dia a seguir + 6, etc.

³¹ Sumner, «A New And Accurate Method Of Finding A Ship's Position At Sea», 16.

EXAMPLE II.

Suppose that, May 15, 1804, sea account, the apparent time was found by an altitude of the sun to be 4h. 3' 6'' P. M. when the time by the watch was 2h. P. M. the watch being too slow for mean Greenwich time 11' 9''. Required the longitude?

Apparent time	4h. 3' 6''	Time per watch	2h. 0' 0''
Equation of time sub.	3 57	Watch error add	11 9
Mean time	3 59 9 P. M.	Time at Greenwich	2 11 9 P. M.
Time at Greenwich	2 11 9		
Diff. is longitude	1 48 0		

Figura 2-6: Exemplo de cálculo da longitude pelo cronómetro.

Fonte: Bowditch, *The New American Practical Navigator* 1802, 198.

No exemplo II, após se ter calculado a hora verdadeira (“apparent time”), como explicado no capítulo anterior, é necessário retirar da página 2 do Almanaque Náutico a equação do tempo (“equation of time”) e aplicar a correção, resultando na hora média de 3 horas 59 minutos e 9 segundos. A hora que o cronómetro marcava em Greenwich eram 2 horas 0 minutos e 0 segundos, e após aplicada a correção da marcha do cronómetro adicionou-se 11 minutos e 9 segundos.

Ao subtrair a hora média calculada pela hora de referência em Greenwich obtém-se 1 hora 48 minutos e 0 segundos, que convertidos para graus, minutos e segundos resultou numa longitude exata de 27° Este ³². Como a hora em Greenwich é inferior à hora média do cronómetro, significa que o observador se situa a Este.

³² Bowditch, «The New American Practical Navigator», 1802, 198.

3. Método de Sumner

3.1. Contextualização histórica

A forma mais simples de calcular a latitude matematicamente e que é utilizada pelos navegadores, e já abordada anteriormente, era que esta fosse calculada pela passagem meridiana do Sol, assim tratava-se simplesmente de observar a altura através do sextante, consultar o almanaque náutico e corrigir com a declinação para determinado momento do ano. O único problema deste método é que seria necessário que o sol estivesse sempre visível na hora da passagem meridiana, e uma vez que podem surgir vários dias sem visibilidade, a navegação teria de ser efetuada por estima e, portanto, à medida que os dias passavam o erro de estima iria crescer. Consequentemente, iria causar também um erro no cálculo da longitude, pois é necessário primeiro o cálculo da latitude para posteriormente se efetuar o cálculo da longitude. É de referir que mesmo que o Sol estivesse sempre observável seria possível apenas calcular a latitude num único instante do dia, limitação essa que Sumner tentou colmatar, como será visto adiante.

A longitude também podia ser calculada com recurso a cronómetro para registar o momento da observação, em dois instantes do dia, são estes quando o azimute do Sol é exatamente Este ou Oeste, ou seja, quando o Sol está a passar exatamente no vertical primário, ou primeiro vertical. Este método de cálculo da longitude é ainda mais limitado pois o Sol não passa pelos azimutes Leste e Oeste em quase 7 meses durante o ano³³.

E se não se observar o Sol nos azimutes referidos, então os cálculos estarão acompanhados de erros na latitude, ou na longitude e esses erros serão tanto maiores quanto maior a diferença entre o azimute do Sol e a direção Norte-Sul, para o caso da latitude; e a linha Leste-Oeste, para o caso da longitude.

Face a estas duas situações distintas Sumner solucionou com um novo método que não dependeria unicamente de um ou dois instantes respetivamente para a latitude e longitude, para qualquer hora do dia. Na prática, a observação da altura do Sol na passagem

³³ Sumner, «A New And Accurate Method Of Finding A Ship's Position At Sea», 10–11.

meridiana permitia o traçado de uma reta de latitude e se fosse observado no vertical primário, possibilitava o traçado de uma reta de longitude.

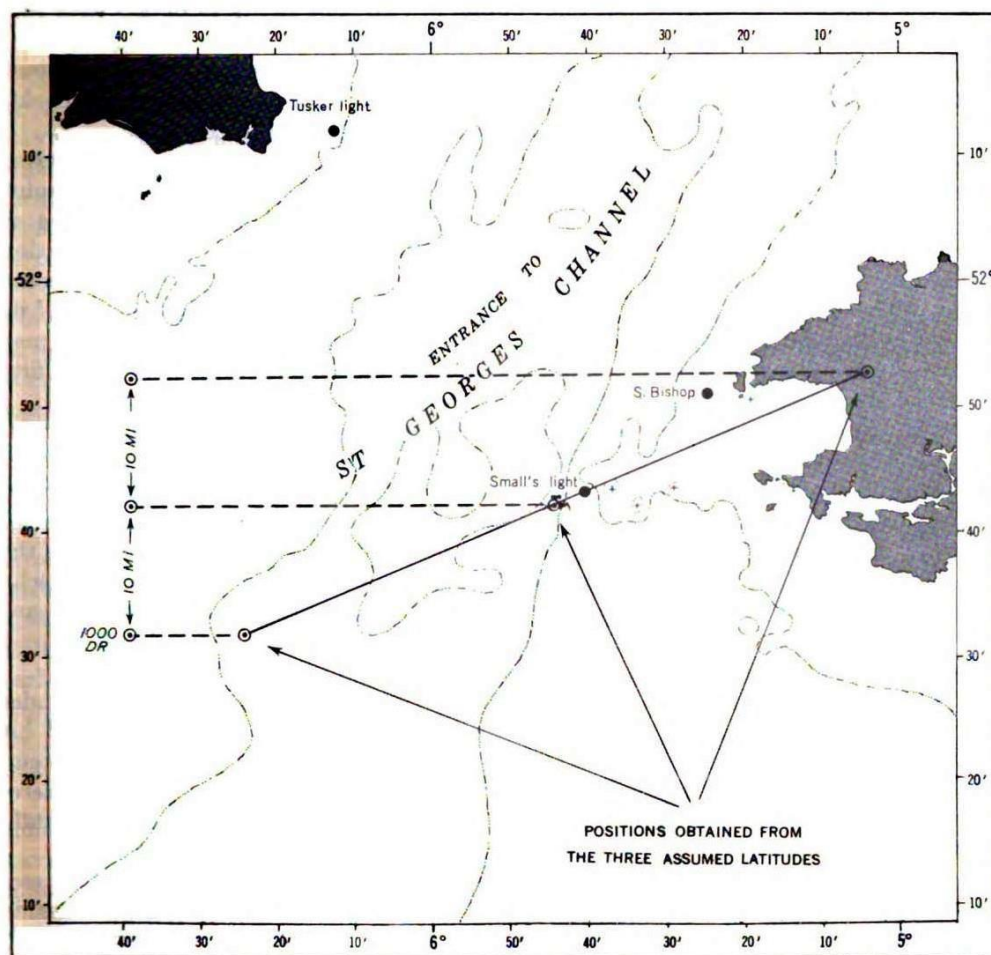


FIGURE 131.—The first celestial line of position, obtained by Captain Thomas Sumner in 1837.

Figura 3-1 - Linha de posição astronômica, calculada por Sumner

Fonte: U.S. Navy Hydrographic Office - <https://archive.org/details/bowditch-1958-american-practical-navigator/page/55>

Aquilo que ele propôs foi o traçado de uma reta, calculada a partir de uma observação, em qualquer instante diferente da passagem do Sol no meridiano ou no vertical primário. Nestas circunstâncias, o Sol seria observado num azimute diferente das direções Norte/Sul, ou Leste/Oeste, logo, a reta obtida teria uma direção diagonal, em relação àquelas direções. Para os cálculos, era necessário conhecer, com rigor, a hora do da

observação. A latitude estimada e a hora aparente não precisavam ser conhecidas com rigor, o que várias vezes acontecia, devido a erros acumulados da posição estimada³⁴.

Como é que ele chegou a esta conclusão? Em 1837, Thomas Sumner, ao fim de um período alargado de navegação sem conseguir observar o Sol, conseguir determinar uma altura do mesmo, fora do meridiano e fora do vertical primário. Usando a latitude estimada calculou a hora aparente, e consequentemente a longitude. No entanto, não tinha grande confiança na latitude estimada, logo também não confiava na longitude calculada. Lembrou-se então de utilizar três valores de latitude para os cálculos, sendo que duas delas são latitudes hipotéticas 10 e 20 milhas afastadas da latitude estimada, tendo calculado três valores de longitude, usando a latitude estimada e as outras duas que correspondem às dez e vinte milhas afastadas desta. Ao marcar os três pontos na carta, apercebeu-se de que todos os pontos se encontravam sobre uma mesma reta, após visualizar a reta deduziu que a sua posição se encontraria algures sobre a referida reta. Sumner tinha então descoberto o conceito de linha de posição astronómica, representada na figura 3.1³⁵.

E finalmente, a partir deste raciocínio, Sumner deduziu que, se em vez de uma, fossem retiradas duas observações de alturas ao Sol, e, se acompanhadas destas duas alturas estivessem os registos da hora no cronómetro, quando intersetadas após uma projecção na carta de Mercator, encontrar-se-ia a verdadeira posição geográfica. Esta será descrita com mais detalhe no capítulo da explicação do método de Sumner, problema II³⁶.

3.2. Introdução ao método

Antes de se introduzir o método é importante salientar que para que o método de Sumner possa ser calculado e marcado na carta para o uso efetivo da navegação, o momento da observação da altura do sol não pode ser próximo do meio-dia solar (quando o azimute do Sol é Norte ou Sul), pois a reta na carta aproxima-se de uma reta de latitude constante (na passagem meridiana, é precisamente uma reta horizontal, ou seja, de latitude

³⁴ *Ibidem*, 12.

³⁵ *Ibidem*, 15–16.

³⁶ *Ibidem*, 13.

constante) e seria impossível ser marcada na carta, a menos que fosse uma carta com uma escala imensamente pequena, mas se assim o fosse também não seria possível efetuar uma navegação rigorosa.

Por outro lado, se a observação for efetuada de manhã ou ao final da tarde, acontece que o azimute do Sol é Leste ou Oeste, nesse caso a reta torna-se mais vertical, ou seja, é uma reta de longitude, e o problema de marcar um ponto na carta com extensas diferenças de longitude fica resolvido³⁷.

Após tiradas as observações da altura do astro no adequado momento do dia é necessário que sejam aplicadas diversas correções às mesmas, de modo a tornar o valor o mais rigoroso possível, tais como: paralaxe, semidiâmetro, depressão e refração. As primeiras duas correções encontram-se no Almanaque Náutico e as últimas duas dependem do rigor do observador, pois por exemplo no que diz respeito à depressão, em navios de grande dimensão, existe 1' a mais do que o habitual, e tamanho erro iria certamente influenciar o cálculo final.³⁸

E relativamente à refração, é necessário ter em conta que se o astro estiver muito próximo do horizonte os maiores níveis de refração irão influenciar negativamente no rigor dos cálculos, portanto o ideal é registar a altura quando o astro tem altura superior a 7 graus.³⁹

O primeiro passo para traçar a reta é selecionar duas latitudes, com o grau inteiro superior e inferior à latitude estimada. É importante selecionar a latitude em valores inteiros porque as tabelas logarítmicas têm normalmente uma coluna para cada valor de graus e depois linhas para os minutos. O primeiro valor da coluna é sempre o valor do grau inteiro (com zero minutos), logo, a consulta para valores inteiros é mais expedita e facilitaria bastante aos navegadores da época os cálculos a bordo.

O segundo passo é encontrar a longitude dos pontos A e A' que correspondem às diferentes latitudes selecionadas. Antes de efetuar o cálculo da longitude é necessário calcular a hora verdadeira por um dos três métodos de Bowditch, como foi descrito

³⁷ *Ibidem*, 15.

³⁸ *Ibidem*, 13.

³⁹ *Ibidem*, 7.

no capítulo 3. De seguida aplica-se a correção da equação do tempo que se encontra no Almanaque Náutico e está obtida a hora média. O último passo, e mais simples, corresponde à subtração entre a hora média e a hora de referência em Greenwich que é conhecida através do cronómetro marítimo, e após a subtração obter-se-á a longitude em tempo que, posteriormente convertida para graus, minutos e segundos, permite obter o valor real.

Saber-se-á se o observador se situa a Este se a hora em Greenwich for inferior à hora média do lugar da observação, e se a hora em Greenwich for superior à hora média do lugar, significa que o observador está localizado a Oeste.

Sabendo então a longitude dos pontos A e A' é possível traçar a linha na carta, que será a reta de altura. Irá ser analisado com mais detalhe, no subcapítulo seguinte, a relevância desta reta para a navegação astronómica ⁴⁰.

3.3. Problema I do método de Sumner

O problema I do método de Sumner é referente ao cálculo de apenas uma reta de altura. Este subcapítulo tem como principal objetivo demonstrar o processo de cálculo que Sumner usava para o cálculo da reta. A reta de altura, apesar de não fornecer a posição exata do observador, é importante para ter conhecimento sobre mais três aspetos da navegação, sendo eles ⁴¹:

- O azimute a terra.
- O erro da longitude pelo cronómetro.
- O azimute verdadeiro do Sol.

Portanto, foi significativamente importante para fornecer bases e dados pertinentes a Sumner para inventar o método do cálculo da posição.

Citar-se-á um exemplo de cálculo da reta altura na figura 3.2, e posteriormente serão descritos os passos do processo de cálculo. Transcreveu-se diretamente o enunciado do problema:

Dia 17 de dezembro de 1837, um navio que tenha percorrido entre 600 a 700 milhas sem nenhuma observação, estando perto de Terra e a latitude por estima era 51°37'N, tendo pressuposto um erro de 10 milhas para Norte e para Sul. A altura do

⁴⁰ *Ibidem*, 14–15.

⁴¹ *Ibidem*, 12.

limbo inferior do Sol era 12°02' por volta das 10 horas e 30 minutos, o olho do observador estava 17 pés acima do nível do mar e a hora média em Greenwich era 10 horas 47 minutos 13 segundos. É pedido o azimute verdadeiro a Terra: Qual o erro da longitude por cronómetro pela qual o navio estava sujeito, para a latitude incerta: azimute verdadeiro do sol

EXAMPLE I.

On 17th December, 1837, sea account, a ship having run between 600 and 700 miles without any observation, and being near the land, the latitude by dead reckoning was 51° 37' N., but supposed liable to error of 10 miles on either side, N. or S.; the altitude of the sun's lower limb, was 12° 02' at about 10 1-2 A. M., the eye of the observer being 17 feet above the sea; the mean time at Greenwich, by chronometer, was 10^h 47^m 13^s A. M.

Required, the true bearing of the land: what error of longitude the ship was subject to, by chronometer, for the uncertainty of the latitude: the sun's true azimuth.

dip	- 4' 3"	semi-dia.	+ 16' 8"
refra.	- 4' 23"	px	+ 8"
	<u>8' 26"</u>		<u>+ 16' 16"</u>
			- 8' 26"
		correction of alt. obs'd.	+ 8' 00"

1

Figura 3-2: Problema 1 do cálculo da posição pelo método de Sumner.

Fonte: Sumner, 16

Obs'd alt. $\odot$ L. L. $12^{\circ} 02'$ Correction $+ 8'$ True alt. $\odot$'s centre, $12^{\circ} 10'$	1																																																																														
1st. The latitude by dead reckoning was $51^{\circ} 37' N.$; the latitude the next degree <i>less</i> , without odd minutes, is $51^{\circ} N.$; and that, the next degree <i>greater</i> , is $52^{\circ} N.$ 2d and 3d. Find the longitude of these two points, as follows:																																																																															
$\odot$ 'S ALTITUDE $12^{\circ} 10'$. <i>For the point A in latitude $51^{\circ} N.$</i>																																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Lat. 51°</td> <td style="width: 15%;">N.</td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;">sec. 0.20113</td> </tr> <tr> <td>Dec. 23 23</td> <td>S.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>sec. 0.03722</td> </tr> <tr> <td>Sum 74 23</td> <td></td> <td>nat. cos.</td> <td>26920</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\odot$ Alt. 12 10</td> <td></td> <td>nat. sin.</td> <td>21076</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>diff.</td> <td>5844</td> <td>log,</td> <td>3.76671</td> </tr> <tr> <td>H. M. S.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 43 59</td> <td>from noon</td> <td>=</td> <td>log rising</td> <td>=</td> <td>4.00506</td> </tr> <tr> <td colspan="6">12 hours.</td> </tr> <tr> <td>10 16 01</td> <td colspan="5">app. time at ship.</td> </tr> <tr> <td>— 3 37</td> <td colspan="5">equa. time.</td> </tr> <tr> <td>10 12 24</td> <td colspan="5">mean time at ship.</td> </tr> <tr> <td>10 47 13</td> <td colspan="5">do. by chro.</td> </tr> <tr> <td>34 49</td> <td colspan="5">= $8^{\circ} 42\frac{1}{2}'$ west of Greenwich.</td> </tr> </table>	Lat. 51°	N.				sec. 0.20113	Dec. 23 23	S.				sec. 0.03722	Sum 74 23		nat. cos.	26920			$\odot$ Alt. 12 10		nat. sin.	21076					diff.	5844	log,	3.76671	H. M. S.						1 43 59	from noon	=	log rising	=	4.00506	12 hours.						10 16 01	app. time at ship.					— 3 37	equa. time.					10 12 24	mean time at ship.					10 47 13	do. by chro.					34 49	= $8^{\circ} 42\frac{1}{2}'$ west of Greenwich.					3
Lat. 51°	N.				sec. 0.20113																																																																										
Dec. 23 23	S.				sec. 0.03722																																																																										
Sum 74 23		nat. cos.	26920																																																																												
$\odot$ Alt. 12 10		nat. sin.	21076																																																																												
		diff.	5844	log,	3.76671																																																																										
H. M. S.																																																																															
1 43 59	from noon	=	log rising	=	4.00506																																																																										
12 hours.																																																																															
10 16 01	app. time at ship.																																																																														
— 3 37	equa. time.																																																																														
10 12 24	mean time at ship.																																																																														
10 47 13	do. by chro.																																																																														
34 49	= $8^{\circ} 42\frac{1}{2}'$ west of Greenwich.																																																																														
<i>For the point A' in latitude $52^{\circ} N.$</i>																																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 15%;">Lat. 52°</td> <td style="width: 15%;">N.</td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;"></td> <td style="width: 15%;">sec. 0.21066</td> </tr> <tr> <td>Dec. 23 23</td> <td>S.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>sec. 0.03722</td> </tr> <tr> <td>Sum 75 23</td> <td></td> <td>nat. cos.</td> <td>25235</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>$\odot$ Alt. 12 10</td> <td></td> <td>nat. sin.</td> <td>21076</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td>diff.</td> <td>4159</td> <td>log,</td> <td>3.61899</td> </tr> <tr> <td>H. M. S.</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>1 28 28</td> <td>from noon</td> <td>=</td> <td>log rising</td> <td>=</td> <td>3.86687</td> </tr> <tr> <td colspan="6">12 hours.</td> </tr> <tr> <td>10 31 31</td> <td colspan="5">app. time at ship.</td> </tr> <tr> <td>— 3 37</td> <td colspan="5">equa. time.</td> </tr> <tr> <td>10 27 54</td> <td colspan="5">mean time at ship.</td> </tr> <tr> <td>10 47 13</td> <td colspan="5">do. at Greenwich, by chro.</td> </tr> <tr> <td>19 18</td> <td colspan="5">= $4^{\circ} 49\frac{1}{2}'$ west long.</td> </tr> </table>	Lat. 52°	N.				sec. 0.21066	Dec. 23 23	S.				sec. 0.03722	Sum 75 23		nat. cos.	25235			$\odot$ Alt. 12 10		nat. sin.	21076					diff.	4159	log,	3.61899	H. M. S.						1 28 28	from noon	=	log rising	=	3.86687	12 hours.						10 31 31	app. time at ship.					— 3 37	equa. time.					10 27 54	mean time at ship.					10 47 13	do. at Greenwich, by chro.					19 18	= $4^{\circ} 49\frac{1}{2}'$ west long.					4
Lat. 52°	N.				sec. 0.21066																																																																										
Dec. 23 23	S.				sec. 0.03722																																																																										
Sum 75 23		nat. cos.	25235																																																																												
$\odot$ Alt. 12 10		nat. sin.	21076																																																																												
		diff.	4159	log,	3.61899																																																																										
H. M. S.																																																																															
1 28 28	from noon	=	log rising	=	3.86687																																																																										
12 hours.																																																																															
10 31 31	app. time at ship.																																																																														
— 3 37	equa. time.																																																																														
10 27 54	mean time at ship.																																																																														
10 47 13	do. at Greenwich, by chro.																																																																														
19 18	= $4^{\circ} 49\frac{1}{2}'$ west long.																																																																														

Figura 3-3: Continuação do problema 1 do cálculo da posição pelo método de Sumner.

Fonte: Sumner, 17

A partir das figuras acima, dando início no retângulo 1 (o qual se encontra dividido pelas figuras 3.2 e 3.3, pois no livro onde se explica o método de Sumner, o processo de cálculo está dividido em duas páginas distintas), percebemos que houve a necessidade de

corrigir a altura do Sol observada, através das correções referentes à depressão, semidiâmetro, refração e paralaxe, houve um incremento na altura de $12^{\circ}02'$ para $12^{\circ}10'$, sendo esta última a altura verdadeira.

No retângulo 2 está escrito que a latitude estimada era $51^{\circ}37' N$, portanto a latitude com grau inteiro imediatamente inferior é $51^{\circ} N$ e a latitude com o grau inteiro imediatamente superior é $52^{\circ} N$, sendo com estes dois que se irá calcular as longitudes correspondentes para traçar a reta altura.

O processo de cálculo da longitude está descrito nos retângulos 3 e 4, para o ponto A com latitude $51^{\circ}N$ e para o ponto A' de latitude $52^{\circ}N$, respetivamente.

Tomando como exemplo o retângulo 3, e não havendo necessidade de referir o retângulo 4 devido ao processo ser idêntico, o primeiro passo é o cálculo da hora verdadeira para posteriormente se encontrar a hora média.

O cálculo da hora verdadeiro foi anteriormente descrito no capítulo 3. Neste caso, o resultado da mesma é 10 horas 16 minutos e 1 segundo. Após a correção efetuada da equação do tempo, subtrai-se $3m37s$ à hora verdadeira e tem-se que a hora média é 10 horas 12 minutos e 24 segundos.

A diferença entre a hora média e a que está registada no cronómetro de acordo com o meridiano de Greenwich é de 34 minutos e 49 segundos, e como o valor da hora de Greenwich é superior, Sumner localizava-se a Oeste. Após convertida a diferença entre as horas de tempo para graus e minutos, a longitude é de $8^{\circ}42'25''O$.

Através do mesmo processo, a longitude no retângulo 4 para o ponto de latitude A' é igual a $4^{\circ}49'30''O$.

Após ter-se as coordenadas dos pontos A e A' procede-se à projeção dos pontos na carta de Mercator e marca-se a reta altura unindo os pontos.

3.4. Problema II do método de Sumner

O problema II baseia-se na observação de duas alturas do sol, uma observação da parte da manhã e a outra da parte da tarde, com as horas do cronómetro correspondentes registadas. É necessário também, à semelhança do problema I, a declinação do Sol e a latitude estimada.

Este tipo de problema caracteriza a essência do método de Sumner, que é o cálculo da posição. Daí ser imperativo as duas alturas do Sol para a interseção das retas alturas.

O processo de obtenção da reta à altura é igual ao referido no problema I, porém, como se trata de duas observações no problema II, há que considerar, dependendo do caso, o movimento do navio para a obtenção da posição verdadeira através da interseção. Se o deslocamento do navio for nulo, por exemplo por estar a pairar, então a posição encontra-se ao interseção das duas retas, sem necessidade de correções ⁴².

Transcreveu-se diretamente o enunciado do problema, exposto em seguida, e apresenta-se a sua resolução nas figuras 3.5 e 3.6.

Dia 21 de dezembro de 1838, a altura correta do sol era 20°23' durante a manhã, e a hora que mostrava no cronómetro era 13 horas 34 minutos. Quando a hora média em Greenwich era 17 horas 55 minutos e 34 segundos, a altura correta do sol era 25°10'. A latitude estimada era 36°08'N e entre as duas observações o navio navegou rumo Nordeste cerca de 25 milhas. É pedido a projeção na carta de Mercator, a latitude verdadeira, e a longitude pelo cronómetro.

EXAMPLE II.

On December 21st, 1838, the sun's correct central altitude was 20° 23' A. M., when the chronometer time was

Figura 3-4: Enunciado do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner

Fonte: Sumner, 24

1^h 34^m P. M.; and his correct central altitude was 25° 10' P. M., when the mean Greenwich time was 5^h 55^m 34^s P. M.; the latitude by account being 36° 08' N., and between the observations the ship sailed E. N. E. $\frac{1}{2}$ E., 25 miles. Required to project, on Mercator's chart, the true latitude, and the longitude by chronometer, &c.

Figura 3-5: Continuação do enunciado do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.

Fonte: Sumner, 25

⁴² *Ibidem*, 21.

1st. The two latitudes to be assumed, less and greater, than 36° 8' N. are 36° N. and 37° N. The declination is 23° 27' S. and equation of time as under.		1
FOR THE FIRST ALTITUDE, 20° 23' A. M.		
<i>For the point A in latitude 36° N.</i>		
Lat. 36 00 N.	sec. 0.09204	
Dec. 23 27 S.	sec. 0.03744	
Sum. 59 27	nat. cos. 50829	
☉ Alt. 20 23	nat. sin. 34830	
H. M. S.	diff. 15999	log, 4.20409
2 33 20	= log rising,	= 4.33357
12 hours.		
9 26 40	app. time at ship, A. M.	
— 1 40	equa. time.	
9 25 00	mean time at ship.	
13 34 00	do. chronometer.	
4 09 00	= 62° 15' west longitude of A.	
<i>For the point A', in latitude 37° N.</i>		
Lat. 37 00 N.	sec. 0.09765	
Dec. 23 27 S.	sec. 0.03744	
Sum. 60 27	nat. cos. 49318	
☉ Alt. 20 23	nat. sin. 34830	
H. M. S.	diff. 14488	log, 4.16101
2 26 37	= log rising,	= 4.29610
12 hours.		
9 33 23	app. time at ship, A. M.	
— 1 40	equation.	
9 31 43	mean time at ship.	
13 34 00	do. by chronometer.	
4 02 17	= 60° 34 $\frac{1}{4}$ ' west longitude of A'.	

Figura 3-6: Resolução do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.

Fonte: Sumner, 25

Todos os passos até ao retângulo 3 são idênticos ao do problema I, ou seja, no retângulo 1 seleccionaram-se os valores de latitude inteiros 36°N e 37°N, uma vez que a latitude estimada era 36°8'N. Nos retângulos 2 e 3 calcularam-se as longitudes dos pontos A e A', resultando em 62°15'W e 60°34'W, respetivamente.

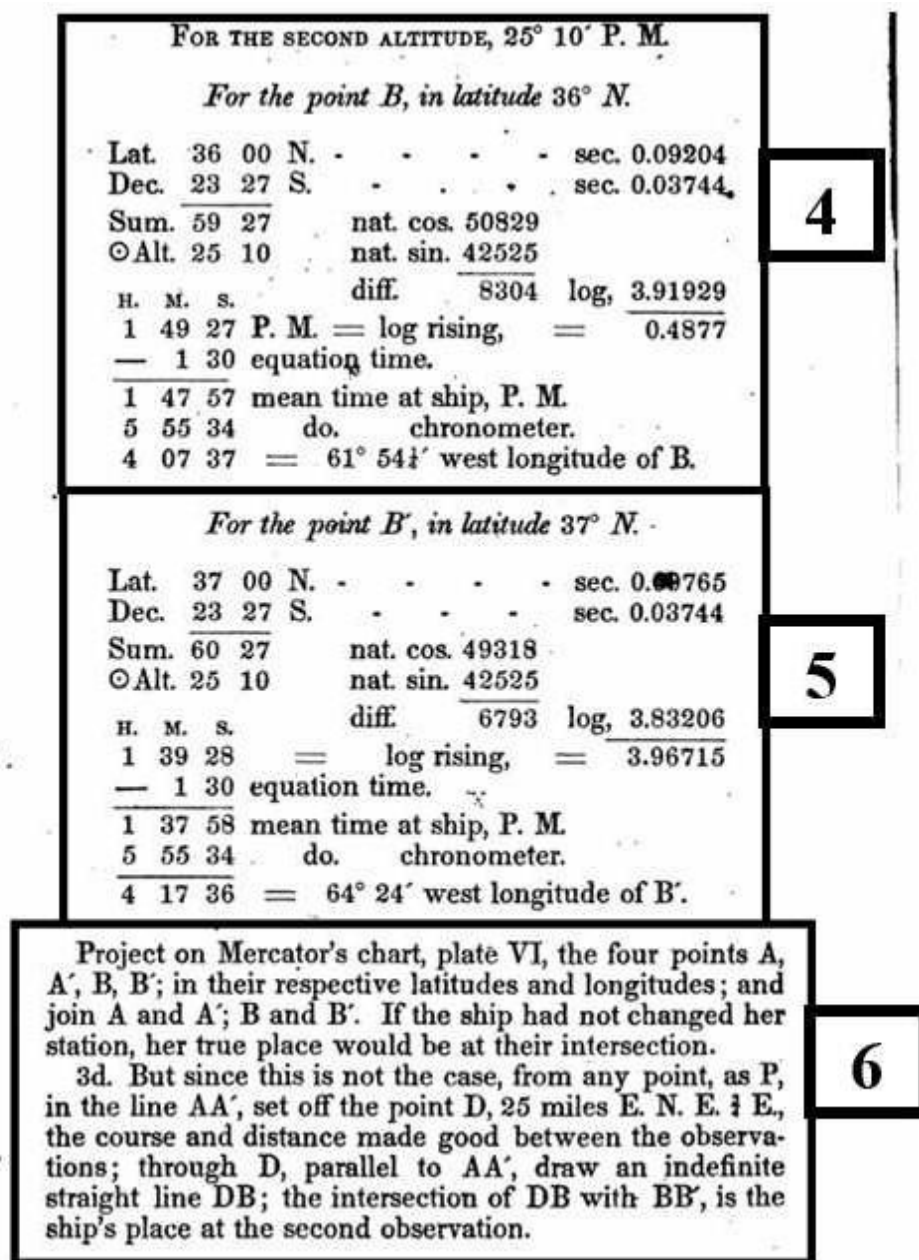


Figura 3-7: Continuação da resolução do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner

Fonte: Sumner, 26

Nos retângulos 4 e 5 o processo ainda é idêntico ao do problema I, porém esta nova reta que surgirá dos pontos B e B' não existe no problema I. Os pontos B e B' surgem da nova altura observada do astro, as latitudes hipotéticas de valores inteiros permanecem iguais, porém o valor da longitude será certamente diferente devido à nova altura

observada do Sol, que significa uma nova posição do observador no globo. As longitudes dos pontos B e B' são respectivamente 61°54'W e 64°24'W.

No retângulo 6 segue a conclusão do método de cálculo da posição, ao projetar na carta de Mercator os pontos A, A', B e B' com as suas respectivas latitudes e longitudes, e de seguida traçar as retas AA' e BB'. Se o navio não tivesse alterado a sua posição, a interseção destas duas retas seria a posição verdadeira, mas como neste exemplo não é o caso, é preciso marcar um ponto extra "D" 25 milhas (correspondente à distância percorrida do navio) no rumo ENE $\frac{3}{4}$ E. Traçar uma nova reta, paralela a AA', que passe por D. A interseção desta nova reta com BB' é a posição verdadeira do navio no instante da segunda observação.

4th. The correction in miles of the *first altitude*, for change of station, is the perpendicular upon AA' from B to C, equal to 10' additive.

The true latitude is 36° N. ; and the longitude, by chronometer, is 61° 54½' west of Greenwich.

NOTE.

This observation was found to be accurate by meridian observation of the sun, as follows :

O's observed altitude was 30° 24' bearing S.
11 correction.

30° 24'	
59 25	zenith distance N.
23 27	declination S.
35 58	latitude N.

The ship's intermediate position between the observations was at noon.

7

8

Figura 3-8: Resolução final do problema II do cálculo da posição pelo método de Sumner.

Fonte: Sumner, 27

Existiam duas maneiras de fazer "coincidir" as duas alturas. Uma hipótese era transportar a primeira altura para o instante da segunda (usando o rumo e a distância percorrida no intervalo de tempo entre as duas observações). Esta forma está exposta no retângulo 6, e após efetuado o transporte Sumner consegue saber a distância entre a reta calculada e a transportada, distância essa que é igual à correção a aplicar à reta.

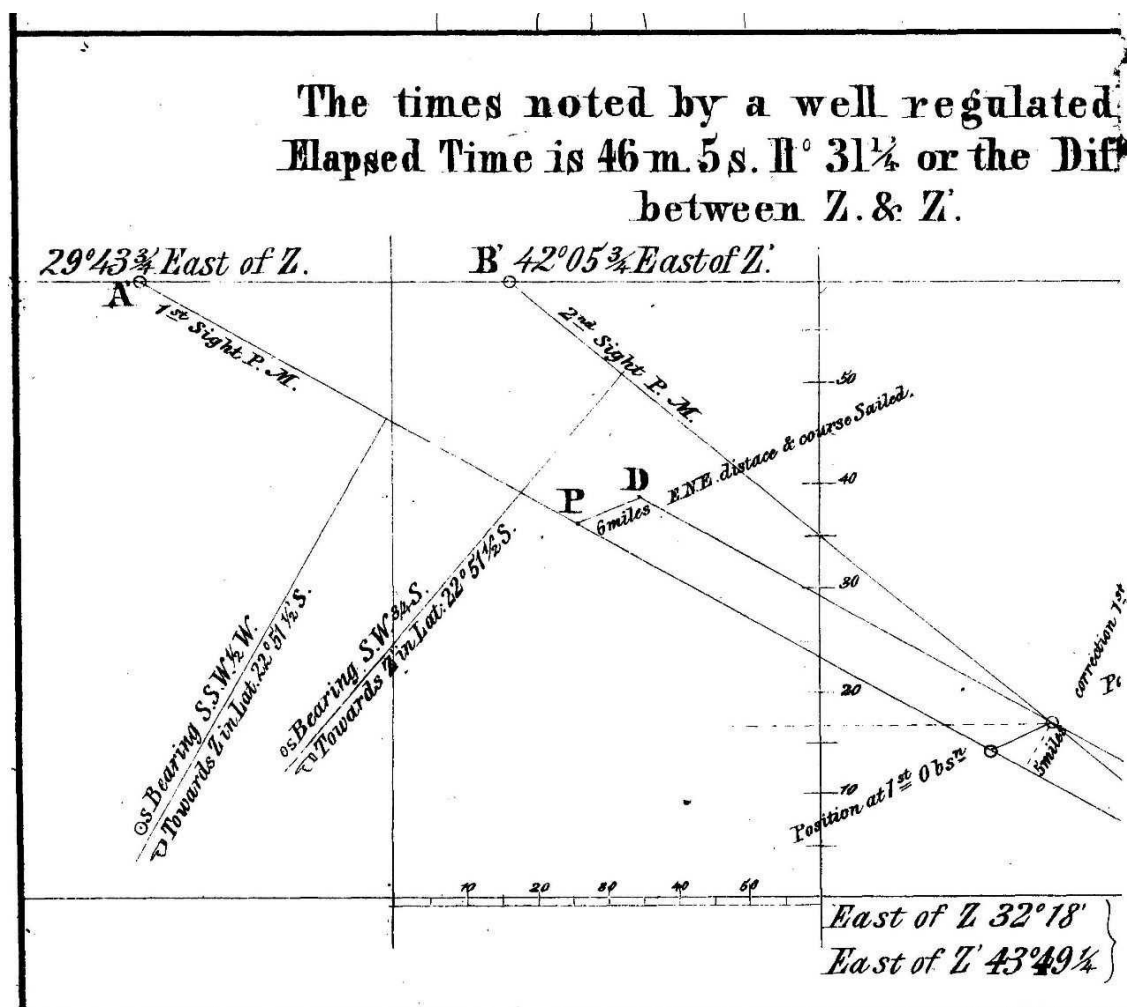


Figura 3-9 - Cruzamento de duas retas de altura, calculadas pelo método de Sumner
Fonte: Sumner, Plate VI

Na figura 3.9 encontra-se representada a marcação das duas retas de altura, assim como o transporte da primeira (AA'), para o instante da segunda (BB'). De notar que a imagem aparentemente está incompleta, pois o próprio cabeçalho tem o texto cortado. Acontece que todas as digitalizações que foi possível consultar, das várias edições do texto de Sumner apresentam sempre uma imagem semelhante à da figura que aqui se reproduziu.

A outra hipótese era aplicar uma correção à primeira altura, calculando o valor que ela teria, se a observação fosse feita no local onde se fez a segunda observação.

Esta última é a que está referida no retângulo 7, o processo de calculo não está demonstrado, apenas indicado o seu valor, pois como já tem as duas retas da primeira altura (a reta obtida na hora da observação e a reta transportada para a hora da segunda

observação) Sumner sabe qual é a distância mínima entre elas, logo sabe qual seria a correção.

Por último, o retângulo 8 não faz parte integral do processo de cálculo, porém é relevante na medida em que comprova, com base num cenário real de navegação onde os valores foram obtidos no mar, que a posição calculada era fidedigna. O que Sumner refere é que, depois de marcar a posição, conseguiu confirmar que a latitude estava certa, através da latitude na passagem meridiana. O rumo do navio é ENE $\frac{3}{4}$ E, o que é o mesmo que $075,5^\circ$, ou seja, o navio está a navegar com uma componente para Norte e outra para Este. Sendo que uma das observações foi de manhã e a outra foi de tarde, então a meridiana foi entre a primeira e a segunda observação. E Sumner concluiu que estava correto quando a latitude na meridiana obtida foi de $35^\circ 58'$, sendo, portanto, inferior à latitude obtida pelo método de Sumner, que era 36° .

4. Aplicação Prática do Método de Sumner

4.1. Introdução

Com o intuito de pôr em prática o método de Sumner e de testar a sua fiabilidade, foi realizada uma navegação no ano de 2021 de Lisboa até Açores, onde foram retirados 25 pares de alturas do Sol. Foi igualmente realizada uma outra navegação, no ano de 2022, de Lisboa até ao Brasil, da qual se escolheram 26 pares de alturas.

As tabelas realizadas no Excel serão o objeto de estudo da aplicação prática do método de Sumner e foram calculadas com base nas observações retiradas destas viagens. Antes de se iniciar o processo de cálculo da posição pelo método de Sumner, primeiramente introduziram-se as variáveis necessárias para ser possível realizar o estudo da aplicação prática, são estas: a altura observada do Sol, a declinação, equação do tempo, e latitude e as horas, que eram rigorosamente fornecidas pelo GPS relativas à hora em Greenwich.

Foram observadas e registadas várias alturas do Sol durante os dias de navegação de ambas as viagens, tanto no período da manhã como no período da tarde. E com o auxílio do conjunto destes registos, foram criados pares de pontos para a aplicação prática deste capítulo, ou seja, a tabela foi elaborada começando com a seleção de vários pares de pontos de cada dia, e de variados intervalos de tempo entre os pontos que constituem o par.

Também, em todos os momentos em que se retirou a altura do Sol, registou-se nesse exato momento a posição GPS, coordenadas de bastante relevância para o estudo da fiabilidade do cálculo da posição do método de Sumner, sendo este o valor de referência para comparação. Para além de servir como valor de referência, também foi utilizada, somente, a latitude da posição GPS como latitude estimada integrante do método de Sumner. Para calcular a posição pelo método de Sumner é necessário a altura do Astro, a declinação e a latitude estimada para estipular o limite superior e inferior da latitude em graus inteiros, mas na verdade o próprio valor da latitude estimada não influencia no

cálculo da posição pelo método de Sumner, daí ter sido considerada também a latitude do GPS como latitude estimada.

Porém, antes de passar à explicação das equações que compõem as tabelas, é pertinente referir que os valores dos graus de latitude e longitude dos vários pontos geográficos estão a ser operados em radianos no Excel, portanto, todos os pontos em estudo retirados através de observação foram inseridos no formato decimal e posteriormente alteraram-se para radiano. E o formato horário será sempre operado em unidades decimais.

4.2. Processo de cálculo

O processo de cálculo começou com o registo de valores inteiros. A latitude GPS, como já referido, foi usada como latitude estimada e a partir daí definiram-se os valores inteiros que intervalam o valor da latitude estimada, de todos os pontos A e A', B e B'.

A partir deste ponto a tabela está constituída com todas as observações que constituem as variáveis necessárias como mencionado em 4.1 e com todos os valores inteiros das latitudes estimadas. A seguinte fase serão as equações que compõem o cálculo do método.

A seguinte equação 1 é a equação responsável por todos os valores de “log rising” dos respetivos pontos, em formato decimal.

$$\text{Log rising} = \text{Log Sec } L + \text{Log Sec } D + \text{Log} (\text{Cos } (L \pm D) - \text{Sin } A) \quad \text{Eq1}$$

Mas este valor apenas é útil no formato de tempo de modo a obter o ângulo horário para posteriormente conseguir calcular a longitude, que será demonstrada na equação 5. As equações 2 e 3 são apenas passos intermédios, primeiro convertendo para radianos na equação 2 e de seguida para graus na equação 3.

Após ter o valor em graus converteu-se finalmente para horas, minutos e segundos na equação 4, “Log Rising Time”.

$$\text{Log Rising Rads} = \text{Acoss}(1 - 10^{\text{Eq1}}) \quad \text{Eq2}$$

$$\text{Log Rising Degs} = \text{Degrees}(\text{Acos}(1 - 10^{\text{Eq1}})) \quad \text{Eq3}$$

$$\text{Log Rising Time} = \frac{\text{Degrees}(\text{Acos}(1 - 10^{\text{Eq1}}))}{15} \quad \text{Eq4}$$

No cálculo da longitude, a equação 5 resume-se ao cálculo da subtração entre a hora em que a altura do Sol foi observada “T”, com a subtração da hora do meridiano em Greenwich e a soma entre o “log rising” e a equação do tempo. Existe também a condição de a hora do observador ser antes ou depois da passagem meridiana, portanto a equação 5 está subdividida em duas fórmulas. Teve-se em conta o valor 13 como hora de referência pois navegou-se sempre em longitudes na ordem dos 15 a 20 graus oeste, e nestas longitudes a hora média em Greenwich ronda as 13 horas no meridiano a que se estava a navegar.

$$\text{Longitude time} = T - (12 - \text{Log Rising Time} + \text{Time Equation}) \text{ se } T < 13h \quad \text{Eq5}$$

$$\text{Longitude time} = T - (12 + \text{Log Rising Time} + \text{Time Equation}) \text{ se } T \geq 13h \quad \text{Eq5}$$

Por fim, através da equação 6 converteu-se o valor de longitude em tempo para longitude em valores decimais:

$$\text{Longitude Degrees Decimal} = \text{Eq5} \times 15 \quad \text{Eq6}$$

Aplicaram-se assim as equações supramencionadas aos pontos A e A', B e B' e o próximo passo prende-se no transporte de latitude e longitude para o instante da última observação, ou seja, do transporte da reta AA' para o instante da reta BB', aplicando-se a

diferença de latitude e longitude entre os instantes de modo a efetuar a correção. Este transporte é necessário porque o navio sofreu movimento entre os tempos de observação. Inicialmente as unidades das longitudes estavam em minutos, portanto, na componente da longitude houve também a necessidade de incluir a fórmula do apartamento de modo a igualar às unidades em milhas da latitude.

$$Ap = \Delta L . \cos(\varphi \text{ média }) \quad Eq7$$

Após a resolução das quatro equações para encontrar os valores dos pontos A, A' e B, B' e a respetiva transposição para o segundo instante, é possível retirar o declive e posteriormente a interseção de ambas as retas.

Sabe-se que a equação 8 é a equação que descreve uma reta:

$$y = mx + b \quad Eq8$$

E que a equação 8 descreve o declive da reta, sendo “A'2” e “A2” dois pontos referentes ao eixo dos “y” de cada uma das respetivas retas, e “A'1” e “A1” do eixo das abcissas:

$$m(AA') = \frac{A'2 - A2}{A'1 - A1} \quad Eq9$$

Substituindo o declive pela equação supramencionada e “y” e “x” pelas coordenadas do ponto “A” tem-se que:

$$b = A2 - \frac{A'2 - A2}{A'1 - A1} . A2 = A2 . \left(1 - \frac{A'2 - A2}{A'1 - A1} \right) \quad Eq10$$

Pelo que a equação reduzida da reta que passa por AA' é:

$$y = \frac{A'2 - A2}{A'1 - A1} \cdot x + A2 \left(1 - \frac{A'2 - A2}{A'1 - A1}\right) \quad Eq11$$

Seguindo, o mesmo raciocínio, a equação reduzida da reta que passa por BB' é:

$$y = \frac{B'2 - B2}{B'1 - B1} \cdot x + B2 \left(1 - \frac{B'2 - B2}{B'1 - B1}\right) \quad Eq12$$

Após encontrados os declives de ambas as retas, procedeu-se ao cálculo da interseção do ponto na equação 13. φ corresponde à latitude e L à longitude.

$$\varphi = \frac{L(B) - L(A) + mAA' \cdot \varphi_A - mBB' \cdot \varphi_B}{mAA' - mBB'} \quad Eq13$$

E a partir do cálculo da latitude, encontrar-se-ia o valor da longitude:

$$L = L(A) + mAA' \cdot (\varphi - \varphi_A) \quad Eq14$$

Também foi calculado na tabela do Excel o ângulo de interseção entre as retas de azimute ao Sol. Este dado é útil para a análise de resultados do subcapítulo seguinte.

Utilizou-se a seguinte fórmula para o cálculo do azimute do Sol:

$$\cos Z = \text{Sen } D \cdot \text{Sec } L \cdot \text{Sec } a - (\text{tg } L \cdot \text{tg } a) \quad Eq15$$

A fórmula supramencionada apresenta os resultados em radianos, pelo que não é uma unidade prática para trabalhar com azimutes. Sucedeu-se na coluna seguinte do Excel a transição de radiano para graus de 0 a 180°. Porém, como um azimute é de 0 a 360°, estabeleceu-se a condição de que se um ponto pertencesse ao período da tarde, ou seja,

superior a 13h, subtraiu-se a 360 ao valor calculado em graus. Deste modo, obtém-se um azimute para os quadrantes de Oeste. Se o ponto pertencer ao período da manhã, significa que o resultado em graus está entre 0 a 180°, pertencendo aos quadrantes de Este e não é necessária correção.

O último passo é encontrar o ângulo entre as retas de azimute. Procedeu-se de forma a considerar apenas ângulos entre as retas inferiores a 90°, pois superior a 90° não é pertinente para a análise de resultados. E todos os resultados que fossem superiores a 90° efetuava-se o seu complemento de modo que o ângulo seja inferior a 90°.

4.3. Análise de resultados

Os resultados obtidos através do método de Sumner de ambos os anos são, na sua maioria, positivos face aos registos obtidos por GPS. Porém, os resultados obtidos em 2022 mostraram-se ligeiramente melhores do que os de 2021.

É importante ter em conta que os erros podem surgir a partir de dois fatores principais:

- Erros de observação. Estes englobam dados incorretos, erros de leitura, de declinação, de hora, de altura.

- Erros de cálculo. Este tipo de erros não será um problema a ter em conta pois todos os cálculos foram efetuados numa folha de Excel.

O erro mais comum é na determinação da altura, pois depende da perícia do observador, e de o sextante também estar devidamente regulado.

Apesar desse tipo de erro, também é importante considerar que o ângulo de interseção entre as retas por vezes é baixo, e essa eventualidade pode gerar um erro na posição. Tomou-se como valor de referência “baixo” inferior a 30 graus, e este último, apesar de não ser uma relação totalmente linear, pode incrementar à medida que a latitude do observador se aproxima dos valores da declinação do Sol. E, em ambas as viagens, houve momentos de navegação em que esse cenário estava presente.

Relativamente ao ano de 2021:

- 24% dos pontos têm um erro inferior a 5 milhas.
- 44% dos pontos têm um erro entre 5 e 10 milhas.
- 68% dos pontos têm um erro inferior a 10 milhas.
- 32% dos pontos têm um erro superior a 10 milhas.
- 62,5% dos pontos que têm um erro superior a 10 milhas têm por base um cruzamento de retas inferior a 30°.

Relativamente ao ano de 2022:

- 42% dos pontos têm um erro inferior a 5 milhas.
- 31% dos pontos têm um erro entre 5 e 10 milhas.
- 73% dos pontos têm um erro inferior a 10 milhas.
- 27% têm um erro superior a 10 milhas.
- 100% dos pontos que têm um erro superior a 10 milhas têm por base um cruzamento de retas inferior a 30°.

Análise conjunta dos anos 2021 e 2022:

- 33% dos pontos têm um erro inferior a 5 milhas.
- 37% dos pontos têm um erro entre 5 e 10 milhas.
- 70% dos pontos têm um erro inferior a 10 milhas.
- 30% têm um erro superior a 10 milhas.
- 20% dos pontos que têm um erro superior a 10 milhas têm por base um cruzamento de retas inferior a 30°.

O resultado mais importante para um cenário prático real do método de Sumner é a percentagem de pontos que têm um erro inferior a 10 milhas, uma vez que num cenário de navegação astronómica até 10 milhas pode-se considerar um erro aceitável, para a época. E nas navegações de 2021 e 2022, os pontos com erros inferiores a 10 milhas foram de 68% e 73%, respetivamente.

É pertinente também mencionar a análise de 2 pontos que escaparam ao padrão observado nos restantes 49 pontos. O ponto 2258 teve um erro de 1155,4 milhas, e a

origem deste erro reside no declive das retas, que são aproximadamente 0,15 e 0,12, portanto, são quase paralelas e a sua interceção provocou um erro bastante superior ao aceitável. No caso do outro ponto trata-se de uma situação em que o ângulo de cruzamento das retas é de 11 graus e este ponto tem apenas um erro de aproximadamente 2,4 milhas. Esta observação vai contra o que foi mencionado antes acerca dos erros que são originados por um cruzamento inferior a 30 graus e retira-se a partir daqui que, apesar de ser provável que um mau cruzamento de retas origine um erro superior ao aceitável, tal nem sempre acontece. Pois se os valores tiverem sido observados com elevado rigor, originará muito provavelmente um ponto fidedigno.

Conclusão

Os resultados obtidos a partir do estudo da viabilidade do método de Sumner, com base na margem de erro analisada em comparação com dados GPS, foram significativos na medida em que ofereceram perspectivas positivas relativas à possibilidade deste método ter sido realmente usufruído na época, num ambiente real de navegação. Os resultados obtidos traduzem-se numa posição bastante razoável num cenário de navegação astronómica.

Porém, é legítimo pôr em causa a total credibilidade desta afirmação, pois todos os processos relativos ao cálculo da posição foram efetuados no Excel, e por isso não se teve em conta neste estudo as condições a que os navegadores estavam submetidos na época enquanto calculavam a posição do navio. Tais condições poderiam influenciar pela negativa os resultados obtidos num cenário real de navegação, como por exemplo fadiga ou lapsos de cálculo e erros inerentes ao ser humano.

Ainda assim, estes resultados respondem diretamente à questão principal do estudo e oferecem evidências que contribuíram positivamente para o desenvolvimento da navegação astronómica da época.

Embora esta dissertação tenha alcançado os seus objetivos, deve ser reconhecido como limitação principal que nem todos os aspetos relevantes do cálculo da posição pelo método de Sumner foram abordados. Algumas das próprias limitações do método foram descritas no manual de Sumner e não foram mencionadas nesta dissertação devido à escassez de tempo para estudar profundamente o assunto. O manual do método de Sumner é também composto por três tipos de problemas práticos, e nesta dissertação foram abordados apenas os primeiros dois.

Com base nas limitações identificadas e nos resultados obtidos, é possível aproveitar o trabalho investido neste projeto e dar continuação a estudos ainda mais detalhados do método de Sumner ou outra vertente da navegação astronómica que se possa relacionar com o tema explorado.

A relevância deste estudo residiu também na compreensão dos passos históricos que moldaram para sempre a evolução da navegação. O método de Sumner, apesar de não ter sido o método que marcou o fim da busca incessante em calcular a posição com rigor

e praticidade no mar, representou certamente uma inovação crítica neste campo ao ter introduzido o conceito de reta altura pela primeira vez na navegação. E a partir dessas contribuições Sumner deu asas a novos investigadores e navegadores da época para tentar solucionar da melhor forma este problema marítimo.

Em suma, espera-se que esta pesquisa não apenas enriqueça a literatura existente, mas também forneça uma base para futuras investigações, contribuindo assim de forma positiva para o campo da navegação astronómica.

Bibliografia

- Albuquerque, Luís de. «A Navegação astronómica». Em *Estudos de História*, III:1–300. Coimbra: Universidade de Coimbra, 1975.
- Bowditch, Nathaniel. *The New American Practical Navigator*. Third edition. Boston, 1802.
- . *The New American Practical Navigator*. Ninth New Stereotype. New York: E. & G. W. BLUNT, PROPRIETORS, 1837.
- Canas, António Costa. «A introdução do Almanaque Náutico em Portugal. Contributo de Monteiro da Rocha». Em *Arte de Navegar – Nautical Science. 1400-1800 Actas da XIV Reunião Internacional de História da Náutica Coimbra, 23-25 de Outubro de 2008.*, editado por António Costa Canas, Francisco Contento Domingues, João Filipe Queirós, João Manuel Fernandes, João Marinho dos Santos, e Jorge Semedo de Matos, 31–44. Coimbra: Departamento de Matemática Faculdade de Ciências e Tecnologia Universidade de Coimbra., 2014.
- Canas, António Costa. «Tabelas de Navegação Astronómica Usadas em Portugal no Início dos Séculos XX». . Lisboa: Centro de Investigação Naval — Escola Naval; Centro de História da Universidade de Lisboa, sem data.
- Cotter, Charles. *A History of Nautical Astronomy*. Editado por William and Sons Ltd, Becles Clowes. Liverpool: Hollis and Carter, 1968.
- Gameiro, E. da Silva. *Astronomia Náutica*. Editado por E. da Silva Gameiro. Lisboa, 1964.
- Ifland, Peter. «The History of the Sextant». <https://www.mat.uc.pt/~helios/Mestre/Novemb00/H61iflan.htm>, 3 de Outubro de 2000.
- Lisboa, João de. «Livro de Marinharia». Em *Primeiras obras de Marinharia e Guerra Marítima*, editado por António Costa Canas, 47–408. Lisboa: Círculo de Leitores, 2018.
- Pires, Jorge Oliveira de Jesus. «Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol, Evolução Histórica do Processo». Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, Escola Naval, 2021.
- Queirós, Ana Filipa Teorgas. «A Navegação Astronómica antes do Método Marcq Saint-Hilaire Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário». Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha, Escola Naval, 2022.
- Sumner, Thomas. *A New And Accurate Method Of Finding A Ship's Position At Sea*. Third. Boston: Thomas Groom and CO., 82, State Street, 1851.
- The Royal Museums Greenwich. «<https://www.rmg.co.uk/stories/topics/what-mariners-astrolabe>», sem data.

ANEXOS

ANEXO A

usamos para latitude estimada a latitude GPS da 2ª
observação

Log Rising	Equation 1	Log Sec L + Log Sec D + Log (Cos (L + D) Sin A)	Usamos L+D quando têm sinais contrários e L-D quando têm o mesmo sinal
Log Rising Rads		Acos(1-10*(Eq1))	
Log Rising Degs		Degrees(Acos(1-10*(Eq1)))	
Log Rising Time	Equation 2	Degrees(Acos(1-10*(Eq1)))/15	
		12-Log Rising Time +Time Equation	
Longitude in Time	Equation 3	T-(12 - Log Rising Time +Time Equation) ; se T <13h	T-(12 + Log Rising Time +Time Equation) , se T>=13h ; Aqui 13h é a Passagem Meridiana no Local
Longitude Degrees Decima	Equation 4	Eq3 * 15	

$$\Delta\phi = \text{Erro Lat}$$
$$AP = \text{Erro Longitude} * \cos(\text{Lat_Che})$$
$$\text{Erro Posição} = \sqrt{\Delta\phi^2 + AP^2}$$

		INPUT						Point A B				Point A' B'				Latitude Transporada				Longitude Transporada				Intersection Point		Ero				Erro Posição			Análise de erros							
		Time	Sun Altitude	Sun Declination	Time Equation	Latitude GPS	Longitude GPS	Latitudes Graus Interios		Equation 1	Equation 2	Equation 3	Equation 4	Equation 1	Equation 2	Equation 3	Equation 4	Latitude Transporada		Longitude Transporada		decive retas	Latitude Degrees	Longitude Degrees	Latitude Minutos	Longitude Minutos	Δp Degrees	AP Degrees	Erro Posição Minutos	Azimute Graus		ângulo cruzamento								
								Latitude A B										Latitude A' B'		Δp Degrees	Latitude A Degrees												Latitude A' Degrees	Ap Degrees	Longitude A Degrees	Longitude A' Degrees				
								Degrees	Radians									Degrees	Radians																		Log Rising	Log Rising	Longitude Time	Longitude Degrees
Decimal	Radians	Radians	Radians	Degrees	Degrees	Degrees	Radians	Degrees	Radians	Equation Log Rising	Equation Log Rising	Equation Longitude Time	Equation Longitude Degrees	Δp Degrees	Latitude A Degrees	Latitude A' Degrees	Ap Degrees	Longitude A Degrees	Longitude A' Degrees	Δp Degrees	Latitude Degrees	Longitude Degrees	Latitude Minutos	Longitude Minutos	Δp Degrees	AP Degrees	Erro Posição Minutos	Azimute Graus		ângulo cruzamento										
2105	Ponto A, A	9,41140	0,59766	0,28458	0,09556	36,940	18,793	36	0,62832	37	0,64577	-0,31173	3,94612	1,26196	18,92945	-0,31308	3,93936	1,25520	18,82807	0,05333	36,05333	37,05333	0,27166	19,20110	19,09972	-0,10138	36,94758	19,11044	0,046	0,023	2,745	1,373	2,745	1,097	2,956	95	95	35	35	2105
2105	Ponto B, B	11,86583	1,06942	0,28408	0,09556	36,993	19,133	36	0,62832	37	0,64577	-1,08124	1,56666	1,33694	20,05409	-1,11834	1,50027	1,27055	19,05824	0,06833	37,06833	38,06833	0,31801	19,37625	18,25295	-0,99585	36,94758	19,11044	0,046	0,023	2,745	1,373	2,745	1,097	2,956	95	95	35	35	2105
2108	Ponto A, A	11,86583	1,06942	0,28408	0,09556	36,993	19,133	37	0,64577	38	0,66323	-1,11834	1,50027	1,27055	19,05824	-1,11834	1,50027	1,27055	17,93494	0,06833	37,06833	38,06833	0,31801	19,37625	18,25295	-1,12330	36,95928	19,49875	0,102	0,033	6,143	1,975	6,143	1,576	6,342	125	235	75	75	2108
2108	Ponto B, B	15,14583	1,02782	0,28341	0,09556	37,062	19,532	37	0,64577	38	0,66323	-0,98767	1,74786	1,30241	19,53621	-0,10817	1,68653	1,36375	20,45625	0,02000	37,02000	38,02000	0,09575	19,63195	20,55200	0,92005	36,99293	19,60705	0,089	0,045	5,324	2,677	5,324	2,136	5,736	125	235	75	75	2108
2109	Ponto A, A	15,14583	1,02782	0,28341	0,09556	37,062	19,532	37	0,64577	38	0,66323	-0,98767	1,74786	1,30241	19,53621	-0,10817	1,68653	1,36375	20,45625	0,02000	37,02000	38,02000	0,09575	19,63195	20,55200	0,92005	36,99293	19,60705	0,089	0,045	5,324	2,677	5,324	2,136	5,736	125	235	16	16	2109
2109	Ponto B, B	16,1381	0,84302	0,28321	0,09556	37,082	19,652	37	0,64577	38	0,66323	-0,60977	2,73515	1,30735	19,61018	-0,61880	2,70559	1,33691	20,05362	0,02000	37,02000	38,02000	0,09575	19,63195	20,55200	0,92005	36,99293	19,60705	0,089	0,045	5,324	2,677	5,324	2,136	5,736	125	235	16	16	2109
2110	Ponto A, A	15,1458	1,02782	0,28341	0,09556	37,062	19,532	37	0,64577	38	0,66323	-0,98767	1,74786	1,30241	19,53621	-0,10817	1,68653	1,36375	20,45625	0,02000	37,02000	38,02000	0,09575	19,63195	20,55200	0,92005	36,99293	19,60705	0,089	0,045	5,324	2,677	5,324	2,136	5,736	125	235	16	16	2109
2110	Ponto B, B	16,1381	0,84302	0,28321	0,09556	37,082	19,652	37	0,64577	38	0,66323	-0,60977	2,73515	1,30735	19,61018	-0,61880	2,70559	1,33691	20,05362	0,02000	37,02000	38,02000	0,09575	19,63195	20,55200	0,92005	36,99293	19,60705	0,089	0,045	5,324	2,677	5,324	2,136	5,736	125	235	16	16	2109
2111	Ponto A, A	9,3186	0,53157	0,27965	0,09333	37,530	21,988	37	0,64577	38	0,66323	-0,25488	4,24297	1,46824	22,02366	-0,55661	4,23896	1,46424	21,96357	0,02167	37,02167	38,02167	0,11233	22,13599	22,07590	-0,06009	37,51548	22,10632	0,036	0,024	2,172	1,421	2,172	1,127	2,446	93	93	11	11	2111
2111	Ponto B, B	10,3178	0,74933	0,27944	0,09333	37,552	22,130	37	0,64577	38	0,66323	-0,48291	3,18998	1,48442	22,26300	-0,48823	3,16928	1,46373	21,95594	0,02167	37,02167	38,02167	0,11233	22,13599	22,07590	-0,06009	37,51548	22,10632	0,036	0,024	2,172	1,421	2,172	1,127	2,446	93	93	11	11	2111
2112	Ponto A, A	9,3186	0,53157	0,27965	0,09333	37,530	21,988	37	0,64577	38	0,66323	-0,25488	4,24297	1,46824	22,02366	-0,55661	4,23896	1,46424	21,96357	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2112	Ponto B, B	11,8961	1,02989	0,27913	0,09333	37,582	22,328	37	0,64577	38	0,66323	-1,00272	1,71732	1,52010	22,80150	-1,03494	1,65376	1,45654	21,84806	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2116	Ponto A, A	11,8961	1,02989	0,27913	0,09333	37,582	22,328	37	0,64577	38	0,66323	-1,00272	1,71732	1,52010	22,80150	-1,03494	1,65376	1,45654	21,84806	-0,00334	36,99666	37,99666	0,36851	23,17001	22,21657	-0,95343	37,37746	22,80695	0,201	0,014	12,052	0,817	12,052	0,647	12,070	127	127	145	35	2112
2116	Ponto B, B	15,72667	0,95595	0,27832	0,09333	37,578	22,793	37	0,64577	38	0,66323	-0,81941	2,13053	1,50280	22,54207	-0,83820	2,08375	1,54959	23,24380	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2121	Ponto A, A	10,92778	0,81742	0,27450	0,09111	37,515	24,860	37	0,64577	38	0,66323	-0,57939	2,83713	1,66879	25,03188	-0,58769	2,80887	1,64053	24,60799	0,16167	37,16167	38,16167	0,55860	25,59048	25,16659	-0,42389	37,41242	25,48419	0,264	0,081	15,855	4,849	15,855	3,838	16,313	109	109	127	53	2121
2121	Ponto B, B	15,64500	0,99783	0,27330	0,09111	37,575	25,565	37	0,64577	38	0,66323	-0,92625	1,87849	1,67540	25,13098	-0,95253	1,82139	1,73249	25,98741	0,16167	37,16167	38,16167	0,55860	25,59048	25,16659	-0,42389	37,41242	25,48419	0,264	0,081	15,855	4,849	15,855	3,838	16,313	109	109	127	53	2121
2123	Ponto A, A	15,2861	1,00804	0,21920	0,05889	37,695	25,565	37	0,64577	38	0,66323	-1,08159	1,56603	1,66120	24,91793	-1,12830	1,48296	1,74427	26,16399	-0,01667	36,98333	37,98333	-0,36799	24,54995	25,79600	1,24605	37,44980	25,13118	0,229	0,031	13,712	1,871	13,712	1,481	13,792	135	225	42	42	2123
2123	Ponto B, B	18,3267	0,42350	0,21847	0,05889	37,678	25,100	37	0,64577	38	0,66323	-0,19369	4,59412	1,50493	25,10943	-0,19436	4,59022	1,67755	25,16399	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2126	Ponto A, A	10,1742	0,65822	0,21466	0,05556	38,570	22,988	38	0,66323	39	0,68068	-0,42501	3,42525	1,54386	23,15790	-0,43070	3,40126	1,51987	22,79808	0,06667	38,06667	39,06667	-0,11332	23,04458	22,68476	-0,35982	38,37014	22,93538	0,267	0,092	15,992	5,523	15,992	4,314	16,563	106	106	15	15	2126
2126	Ponto B, B	11,2164	0,85643	0,21442	0,05556	38,637	22,843	38	0,66323	39	0,68068	-0,72374	2,38651	1,54735	23,21022	-0,74136	2,33701	1,49785	22,46711	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2128	Ponto A, A	10,17417	0,65822	0,21466	0,05500	38,570	22,988	38	0,66323	39	0,68068	-0,42501	3,42525	1,54442	23,16623	-0,43070	3,40126	1,52043	22,80641	0,30167	38,30167	39,30167	-0,53444	22,63179	22,27197	-0,35982	38,83267	22,44073	0,039	0,137	2,340	8,244	2,340	6,418	6,831	106	106	117	63	2128
2128	Ponto B, B	15,06528	0,98823	0,21350	0,05500	38,872	22,303	38	0,66323	39	0,68068	-1,07025	1,58689	1,42339	21,35083	-1,11871	1,49963	1,51065	22,65975	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2131	Ponto A, A	11,21640	0,85643	0,21442	0,05500	38,837	22,843	38	0,66323	39	0,68068	-0,72374	2,38651	1,54791	23,21872	-0,74136	2,33701	1,49841	22,47621	0,23500	38,23500	39,23500	-0,42111	22,79760	22,05510	-0,74251	38,79031	22,38528	0,081	0,082	4,881	4,917	4,881	3,828	6,204	120	120	103	77	2131
2131	Ponto B, B	15,06528	0,98823	0,21350	0,05500	38,872	22,303	38	0,66323	39	0,68068	-1,07025	1,58689	1,42339	21,35083	-1,11871	1,49963	1,51065	22,65975	0,05167	37,05167	38,05167	0,26954	22,29320	22,23311	-0,31037	37,56551	22,26232	0,016	0,066	0,970	3,961	0,970	3,139	3,285	93	93	35	35	2112
2133	Ponto A, A	12,14056	1,00194	0,21421	0,05522	38,692	22,722	38	0,66323	39	0,68068	-1,12039	1,49670	1,58203	23,73048	-1,17592	1,40291	1,48824	22,32364	0,18000	38,18000	39,18000	-0,32611	23,40437	21,99753	-1,40685	38,84817	22,46437	0,024	0,161	1,410	9,662	1,410	7,522	7,654	138	138	85	85	2133
2133	Ponto B, B	15,06528	0,98823	0,21350	0,05478	38,872	22,303	38	0,66323	39	0,68068	-1,07026	1,58689																											

ANEXO B

usamos para latitude estimada a latitude GPS da 2R
observação

Log Rising Equation 1 Log Sec L + Log Sec D + Log (Cos (L - D)- Sin A) Usamos L+D quando têm sinais contrários e L-D quando têm o mesmo sinal
Log Rising Rads Acos(1-10*(Eq1))
Log Rising Degs Degrees(Acos(1-10*(Eq1)))/15
Log Rising Time Equation 2 Degrees(Acos(1-10*(Eq1)))/15
12-Log Rising Time +time Equation
Longitude in Time Equation 3 T-(12 - Log Rising Time +Time Equation) ; se T <13h T-(12 + Log Rising Time +Time Equation) , se T>=13h ; Aqui 13h é a Passagem Meridiana no Local
ongitude Degrees Decim Equation 4 Eq 3 * 15

Δφ= Erro Lat
AP= Erro Longitude *COS (Lat_C
Erro Posição= sqrt(Δφ²+AP²)

		INPUT										Point A B		Point A' B'								Latitude Transportada				Longitude Transportada				Intersection Point		Erro				Erro Posição			Análise de erros																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																											
		Time		Sun Altitude		Sun Declination		Time Equation		Latitude GPS		Longitude GPS		Latitudes Graus inteiros		Equation 1		Equation 2		Equation 3		Equation 4		Equation 1		Equation 2		Equation 3		Equation 4		Latitude Transportada		Longitude Transportada		declive retas	Intersection Point		Erro		Erro Posição			Análise de erros																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																						
														Latitude A B		Latitude A' B'		Log Rising		Log Rising Time		Longitude Time		Longitude Degrees		Log Rising		Log Rising Time		Longitude Time		Longitude Degrees		Δφ Degrees			Latitude A Degrees		Latitude A' Degrees		Ap Degrees		Longitude A Degrees		Longitude A' Degrees		Latitude Degrees		Longitude Degrees		Latitude Minutos		Longitude Minutos		Δφ Minutos		AP Minutos		Erro Posição Minutos		Azimute		Análise de erros																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			
		Decimal	Radians	Radians	Decimal	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees	Degrees