



Ana Catarina Martins  
Baptista

**Representações usadas na  
resolução de problemas: Um estudo  
no 3.º ano de escolaridade**

Relatório da componente de investigação do  
relatório de estágio sobre a prática de ensino  
supervisionada do Mestrado em Educação Pré-  
Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Setúbal, abril de 2018

Versão definitiva



Ana Catarina Martins  
Baptista  
n.º 150140001

**Representações usadas na  
resolução de problemas: Um estudo  
no 3.º ano de escolaridade**

Relatório da componente de investigação do  
relatório de estágio sobre a prática de ensino  
supervisionada do Mestrado em Educação Pré-  
Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico

**Orientadora:** Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Maria Dias  
Roque Lemos Boavida

Setúbal, abril de 2018

Versão definitiva

Pelo sonho é que vamos,  
comovidos e mudos.  
Chegamos? Não chegamos?  
Haja ou não haja frutos,  
pelo sonho é que vamos.

Basta a fé no que temos.  
Basta a esperança naquilo  
que talvez não teremos.  
Basta que a alma demos,  
com a mesma alegria,  
ao que desconhecemos  
e ao que é do dia-a-dia.

Chegamos? Não chegamos?

– Partimos. Vamos. Somos.

**Sebastião da Gama**

## Resumo

O estudo que apresento tem como propósito analisar e compreender as representações matemáticas que os alunos utilizam para resolver problemas e o seu papel no processo de resolução. Para tal efeito, formulei duas questões: 1. Que representações usam os alunos para resolver problemas? 2. Que funções têm as representações usadas pelos alunos e como se relacionam?

No enquadramento teórico debruço-me sobre a importância da resolução de problemas, o significado de problema, tipologias de classificação de problemas de um ponto de vista educativo e aspetos importantes do processo de ensinar a resolver problemas. Além disso, refiro o significado e o papel das representações matemáticas, tipos de representações e a relevância de se estabelecer conexões entre elas.

Em termos metodológicos, este estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa de investigação e constitui uma investigação sobre a prática. Como métodos de recolha de dados, usei a observação participante, a recolha documental e entrevistas clínicas. Os participantes deste estudo foram alunos de uma turma do 3.º ano de escolaridade, de uma escola de Setúbal. Durante o tempo dedicado à intervenção pedagógica explorei seis problemas, integrados no domínio Números e Operações, em contexto de sala aula. No final do estágio, selecionei dois alunos, a quem realizei entrevistas clínicas, tendo por ponto de partida a proposta de resolução de problemas.

Os resultados deste estudo relevam que as representações ativas não tiveram grande destaque enquanto meio de apoio à resolução de problemas. Os alunos recorreram, na grande maioria, a dois tipos de representações: icónicas e simbólicas. No que se refere ao primeiro tipo, usaram esquemas ou diagramas para organizar visualmente as informações de que dispunham e para resolver os problemas. Além disso, utilizaram desenhos com a mesma função que se caracterizavam por serem pouco pormenorizados. As representações simbólicas eram usadas para resolver o problema e para verificar o resultado. A maioria das representações icónicas tinham, também, elementos simbólicos, nomeadamente números ou operações. Saliento que, habitualmente, partiam das representações menos abstratas para as mais simbólicas, estabelecendo relações entre si.

**Palavras-chave:** Aprendizagem da Matemática; Resolução de problemas; Representações matemáticas; Funções das representações.

# Abstract

The purpose of this study is to analyze and understand the mathematical representations that students use to solve problems and their role in the resolution process. To that end, I posed two questions: 1. What representations do students use to solve problems? 2. What functions do the representations used by the students have and how do they relate?

In the theoretical framework I dwell on the importance of problem solving, the meaning of problem, types of problems from an educational point of view and important aspects of the process of teaching to solve problems. In addition, I refer to the meaning and role of mathematical representations, types of representations, and the relevance of establishing connections between them.

In methodological terms, this study is part of a qualitative research approach and is an investigation of the practice. As methods of data collection, I used participant observation, documentary collection, and clinical interviews. The participants of this study were 3<sup>rd</sup> grade students, from a school in Setúbal. During the time dedicated to the pedagogical intervention I explored six problems, integrated in the domain “Numbers and Operations”, in a classroom context. At the end of the internship, I selected two students, to whom I conducted clinical interviews, using a problem solving proposition as a starting point.

The results of this study show that the active representations did not stand out as a means of supporting problem solving. The majority of students used two types of representations: iconic and symbolic. For the first type, they used schemes or diagrams to visually organize the information they had and to solve the problems. In addition, they used drawings with the same function that were characterized by being less detailed. Symbolic representations were used to solve the problem and to verify the result. Most iconic representations also had symbolic elements, namely numbers or operations. I emphasize that they usually went from less abstract representations to more symbolic ones, establishing relations between them.

**Keywords:** Mathematical Learning; Problem Solving; Mathematical representations; Function of representations.

# Agradecimentos

A desejada realização deste projeto só foi possível devido ao apoio de diversas entidades que me auxiliaram no desenrolar do mesmo, bem como durante o meu percurso académico. Esta jornada desencadeou diversas aprendizagens e dificuldades. Deste modo, tenho a agradecer:

Em primeiro lugar, à orientadora deste projeto, a Prof.<sup>a</sup> Doutora Ana Boavida, por todo o tempo disponibilizado, pela ajuda que me facultou perante as minhas inúmeras dificuldades, pela paciência e pelas críticas construtivas que me ajudaram a refletir, tornando possível a realização deste estudo.

Em segundo lugar, às crianças com quem me deparei nos diversos estágios, bem como à professora cooperante, pela disponibilidade e hospitalidade e por ter tornado possível a realização desta investigação.

À minha família por sempre me apoiarem nos diversos momentos da minha vida, pelas palavras carinhosas e de incentivo que têm para comigo. Em especial, aos meus pais que são o meu porto de abrigo e que tornaram possível a realização dos meus sonhos.

A todas as pessoas que conheci, durante a minha passagem pela Escola Superior de Educação, e que tenho um enorme carinho. Em especial à Rute, por todos os sorrisos que partilhámos, por todo o apoio disponibilizado e por ser uma amiga presente durante este percurso.

Aos meus amigos, que sempre me apoiaram e incentivaram. Pela paciência que tem para comigo, por ouvirem os meus desabafos e por tentarem sempre animar-me.

A todos, muito obrigada!

# Índice

Capítulo I – Introdução.....	1
1.1 Objetivos e questões do estudo .....	1
1.2 Pertinência .....	2
1.3 Estrutura do trabalho.....	6
Capítulo II - Enquadramento teórico .....	8
Secção 1 – Resolução de problemas e aprendizagem da matemática.....	8
1.1 Importância.....	8
1.2 Problema: que significado? .....	11
1.3 Tipos de problemas .....	12
1.4 Ensinar a resolver problemas: aspetos importantes.....	17
Secção 2 – Representações do conhecimento matemático .....	22
2.1 Representações: significado .....	22
2.2 Representações: importância e função .....	24
2.3 Tipos de representações e suas conexões .....	28
Capítulo III - Metodologia.....	39
3.1 Principais opções metodológicas .....	39
3.2 Processo de recolha de dados.....	42
3.2.1 Observação participante .....	43
3.2.2 Análise documental .....	45
3.2.3 Entrevistas clínicas .....	46
3.3 Processo de análise de dados .....	47
Capítulo IV - Análise de dados.....	50
4.1 Intervenção pedagógica .....	50
4.1.1 Contexto do estudo: A escola e a turma .....	50
4.1.2 Descrição da intervenção pedagógica.....	52

4.1.3	As tarefas propostas em contexto de sala de aula.....	58
4.1.4	As tarefas propostas em contexto de entrevista clínica .....	64
4.2	– Tiago .....	65
4.2.1.	Resolvendo problemas durante a intervenção pedagógica.....	66
4.2.2	Resolvendo problemas em situação de entrevista .....	74
4.3	Simão .....	87
4.3.1	Resolvendo problemas durante a intervenção pedagógica.....	87
4.3.2	Resolvendo problemas em situação de entrevista.....	98
Capítulo V	– Conclusão.....	109
5.1	Síntese do estudo .....	109
5.2	Conclusões do estudo.....	110
5.2.1	Que representações usam os alunos para resolver problemas?.....	110
5.2.2	Que funções têm as representações usadas pelos alunos e como se relacionam? .....	115
5.3	Reflexão final.....	118
Referências Bibliográficas	.....	122
Anexos	.....	127
□ Anexo I:	Problema “Brincando com conchinhas” .....	127
□ Anexo II:	Problema “A rã saltitona .....	128
□ Anexo III:	Problema “O voo das bruxas” .....	129
□ Anexo IV:	Problema “Os abraços”.....	130
□ Anexo V:	Problema “Lanche na casa da avó” .....	131
□ Anexo VI:	Problema “Organizando os Minios” .....	132
□ Anexo VII:	Problema “Os lembretes da Sofia” .....	133
□ Anexo VIII:	Problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	134

## Índice de figuras

Figura 1 - Modo como os quatro tipos de problemas se relacionam .....	15
Figura 2 - Adaptação do modelo apresentado por Coelho (2010).....	35
Figura 3 - Modelo de Boavida et al. (2008, p. 72) .....	36
Figura 4 - Os cinco tipos de representações de Clement, 2004, (p. 100) .....	37
Figura 5 - Possível resolução do problema "A rã saltitona" .....	54
Figura 6 - Registo no quadro de estratégias de resolução do problema "A rã saltitona"	56
Figura 7 - Cartaz sobre fases de resolução de problemas.....	57
Figura 8 - Estratégia I de resolução do problema “Brincando com conchinhas” proposta pelos alunos .....	59
Figura 9 - Estratégia II de resolução do problema “Brincando com conchinhas” proposta pelos alunos .....	59
Figura 10 - Estratégia I de resolução do problema “A rã saltitona” proposta pelos alunos .....	60
Figura 11 - Estratégia II de resolução do problema “A rã saltitona” proposta pelos alunos.....	60
Figura 12 - Estratégia I de resolução do problema “O voo das bruxas” proposta pelos alunos.....	61
Figura 13 - Estratégia II de resolução do problema “O voo das bruxas” proposta pelos alunos.....	61
Figura 14 - Estratégias de resolução do problema “Os abraços” propostas pelos alunos .....	62
Figura 15 - Estratégias de resolução do problema “O lanche na casa da avó” propostas pelos alunos .....	63
Figura 16 - Estratégias de resolução do problema “Organizando os Minions” propostas pelos alunos .....	63
Figura 17 - Figura apresentada no problema “Os lembretes da Sofia” .....	64
Figura 18 - Figura apresentada no problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	65
Figura 19 - Resolução de Tiago do problema “Brincando com conchinhas” .....	66
Figura 20 - Resolução de Tiago do problema “A rã saltitona” .....	67
Figura 21 - Resolução de Tiago do problema “O voo das bruxas” .....	68
Figura 22 - Resolução de Tiago da 1.ª questão do problema “Os abraços” .....	69

Figura 23 - Resolução de Tiago da 2. <sup>a</sup> questão do problema “Os abraços” .....	70
Figura 24 - Resolução de Tiago da 3. <sup>a</sup> questão do problema “Os abraços” .....	70
Figura 25 - Resolução de Tiago da 1. <sup>a</sup> questão do problema “Lanche na casa da avó” .	71
Figura 26 - Resolução de Tiago da 2. <sup>a</sup> questão do problema “Lanche na casa da avó” .	72
Figura 27- Resolução de Tiago do problema “Organizando os Minions” .....	73
Figura 28 - Resolução de Tiago da 1. <sup>a</sup> questão do problema “Os lembretes da Sofia”..	77
Figura 29 - Tabela construída pelo Tiago referente à 2. <sup>a</sup> questão do problema “Os lembretes da Sofia”.....	78
Figura 30 - Resolução de Tiago da 2. <sup>a</sup> questão do problema “Os lembretes da Sofia”..	79
Figura 31 - Resolução de Tiago da 1. <sup>a</sup> questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”.....	81
Figura 32 - Resolução de Tiago da 2. <sup>a</sup> questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”.....	82
Figura 33 - Resolução de Tiago da 3. <sup>a</sup> questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”.....	84
Figura 34 - Resolução de Tiago da 4. <sup>a</sup> questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”.....	85
Figura 35 - Resolução de Simão do problema “Brincando com conchinhas”.....	87
Figura 36 - Resolução de Simão do problema “A rã saltitona”.....	88
Figura 37 - Resolução de Simão do problema “O voo das bruxas” .....	90
Figura 38 - Resolução de Simão da primeira questão do problema “Os abraços” .....	91
Figura 39 - Resolução de Simão da segunda questão do problema “Os abraços” .....	92
Figura 40 - Resolução de Simão da terceira questão do problema “Os abraços” .....	92
Figura 41 - Resolução de Simão da primeira questão do problema “Lanche na casa da avó” .....	93
Figura 42 - Resolução de Simão da segunda questão do problema “Lanche na casa da avó”.....	95
Figura 43 - 1 <sup>a</sup> Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions” .....	96
Figura 44 - 2 <sup>a</sup> Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions” .....	96
Figura 45- 3 <sup>a</sup> Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions” .....	97
Figura 46 - 4 <sup>a</sup> Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions” .....	97
Figura 47 - 5 <sup>o</sup> Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions” .....	98
Figura 48 - Resolução de Simão da primeira pergunta do problema “Os lembretes da Sofia” .....	100

Figura 49 - Resolução de Simão da segunda pergunta do problema “Os lembretes da Sofia” .....	102
Figura 50 - Resolução de Simão da primeira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	104
Figura 51 - Resolução de Simão da segunda pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	105
Figura 52 - Resolução de Simão da terceira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	106
Figura 53 - Resolução de Simão da quarta pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria” .....	107

## Índice de tabelas

Tabela 1 - Tipologia de classificação de problemas.....	13
Tabela 2 - Modelos de resolução de problemas .....	21
Tabela 3 - Tipologias de Clement e Tripathi referente às representações matemáticas. 31	
Tabela 4 - Métodos de recolha de dados utilizados: fontes, registo e material empírico	42
Tabela 5 - Categorias de análise .....	48
Tabela 6 - Siglas utilizadas e os seus significados .....	49
Tabela 7 - Exploração dos problemas: calendarização.....	52
Tabela 8 - Características dos problemas apresentados.....	58
Tabela 9 - Representações utilizadas por Tiago e suas funções .....	86
Tabela 10 - Representações utilizadas por Simão e suas funções .....	108

# Capítulo I – Introdução

A investigação que apresento está inserida na Unidade Curricular Estágio IV, do curso de Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico. Decidi centrar-me na área da Matemática, focando-me nas representações utilizadas pelos alunos durante a resolução de problemas matemáticos.

Nesta secção identifico o tema do referido estudo, bem como os objetivos e as questões que guiaram todo o meu trabalho. Seguidamente, apresento a pertinência deste tema, não só a nível pessoal, mas também a nível contextual e teórico. Por último, faço referência à estrutura deste documento.

## 1.1 Objetivos e questões do estudo

O tema do trabalho de carácter investigativo que desenvolvi situa-se no cruzamento do que o NCTM (2007) designa por processos matemáticos: (a) Resolução de Problemas e (b) Representações do conhecimento matemático. O principal objetivo do estudo é analisar e compreender as representações usadas pelos alunos quando se envolvem na resolução de problemas matemáticos e qual o seu papel no processo de resolução. No âmbito do objetivo indicado, formulei as seguintes questões de investigação:

- Que representações usam os alunos para resolver problemas?
- Que funções têm as representações usadas pelos alunos e como se relacionam?

Considerarei que compreender, em profundidade, estas representações me seria útil tanto para delinear a minha prática durante o tempo do estágio, como o será para o meu futuro profissional, o que veio a acontecer. Por exemplo, ajudou-me a decidir que estratégias de resolução dos problemas usadas pelos alunos foi importante analisar coletivamente na turma e a ordem pela qual estas deviam ser expostas, de que modo deveria intervir para auxiliar os alunos que apresentam dificuldades, entre outros aspetos. Como tal, espero que a escolha dos problemas que trabalhei com a turma e o modo como conduzi este trabalho se tenha repercutido no desenvolvimento matemático dos alunos e

permitido que estes adotem estratégias de resolução de problemas e modos de representação de ideias matemáticas progressivamente mais eficazes.

Indo ao encontro do que Ponte (2005) e Goldin (2008) afirmam, as representações matemáticas podem conter informações sobre o grau de compreensão que o aluno possui sobre determinado problema, podem também ajudar a reduzir as dificuldades que persistem e ajudar a matemática a ser interessante e atrativa.

## **1.2 Pertinência**

A resolução de problemas é de extrema relevância no ensino da matemática, por permitir que os alunos construam novos conhecimentos, atribuam significado a ideias matemáticas e desenvolvam o raciocínio matemático a par de diversas capacidades. NCTM (2007) reforça a ideia de esta servir de veículo para a aprendizagem da Matemática. Tal como Borralho (1990), refere há inúmeros contributos da resolução de problemas, nomeadamente contribuir para fomentar o gosto pela resolução de problemas.

Os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos, pelo que resolver um problema requer, por parte de quem o resolve, “o envolvimento numa tarefa, cujo método de resolução não é conhecido antecipadamente” (NCTM, 2007, p. 57). Num ambiente educativo, nomeadamente em sala de aula, os alunos podem encarar uma mesma tarefa como um problema em que, mobilizando conhecimentos que possuem, têm que descobrir um caminho para chegar à solução que é novo para si, ou como um exercício ou seja, como algo em que aplicam o que já foi assimilado usando processos e procedimentos que já conhecem. Neste processo, “devem compreender que um problema matemático, frequentemente, pode ser resolvido através de diferentes estratégias e dar atenção à análise retrospectiva da sua resolução e apreciação das soluções que obtêm” (ME, 2007, p. 6).

Assim, a aprendizagem da resolução de problemas não remete somente para a descoberta da solução. Proporciona, ao aluno, diversas oportunidades para “adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática” (NCTM, 2007, p. 57). Considero esta temática importante, por proporcionar aos alunos a estruturação do raciocínio e do pensamento, auxiliando aprendizagens que, por exemplo, podem ser úteis em aspetos do quotidiano ou em futuros empregos.

Os alunos ao ingressarem no 1.º ciclo, já são portadores de saberes que os auxiliam no desempenho das tarefas que lhes são propostas e nas aprendizagens a efetuar em sala de aula. Nesta medida, é fundamental reconhecermos que os alunos já possuem alguns conhecimentos relativamente aos números e às suas representações.

As ideias matemáticas podem ser representadas por diversas maneiras, sendo estas representações, fundamentais para os indivíduos compreenderem e utilizarem estas mesmas ideias. De acordo com o NCTM (2007) “quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente” (p. 75).

Há várias tipologias de classificação de representações (Coelho, 2010). Uma das frequentemente usadas em estudos no âmbito da Educação Matemática é a apresentada por Bruner (citado por Fernandes, 2014, p. 33) que distingue as representações ativas, das icónicas e das simbólicas. As representações ativas, não empregam imagens ou palavras, estão associadas a ações e, nomeadamente, ao uso de materiais manipuláveis. As representações icónicas focam-se na “organização visual, no uso de figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles” (Boavida et al., 2008, p. 71). Por fim, as representações simbólicas são caracterizadas por possuírem uma natureza simbólica, sendo estas a forma mais elaborada de representação. Segundo Bruner (citado por Fernandes, 2014, p. 34),

a criança começa a ser capaz de representar a realidade através de uma linguagem simbólica, de carácter abstracto e sem uma dependência directa da realidade. Ao entrar nesta etapa, a pessoa começa a ser capaz de manejar os símbolos em ordem não só a fazer a sua leitura da realidade mas também a transformar a realidade.

Torna-se, assim, crucial entender que o professor tem uma função fundamental, na medida que primeiramente tem que escolher tarefas pertinentes e envolventes e, seguidamente, tem de dar oportunidade aos alunos de as resolverem usando representações que tenham sentido para si e que lhes sejam úteis no processo de resolução.

Com efeito, e de acordo com Bruner (citado por Fernandes, 2014, p. 33), “o desenvolvimento cognitivo da criança depende da utilização de técnicas de elaboração da informação, com o fim de codificar a experiência, tendo em conta os vários sistemas de representação ao seu dispor”. Deste modo, é essencial que os alunos compreendam e

conheçam diferentes tipos de representações, selecionando a(as) mais apropriada(s) à resolução de cada problema, tal como sobressai quando se analisa, por exemplo, o Programa de Matemática do Ensino Básico publicado em 2007:

devem ser capazes de: ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação; traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural; elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas; usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais (ME, 2007, p. 5).

Do ponto de vista pessoal, a opção pelo tema do trabalho que apresento decorre do interesse notório pela área da Matemática que experienciei ao longo da minha vida. Este interesse aumentou quando frequentei unidades curriculares de Didática da Matemática, pelo que quis aprofundar o meu conhecimento sobre o tema em questão. Considero fundamental que um professor de 1.º ciclo tenha um conhecimento sólido sobre os vários modos de representação do conhecimento matemático, bem como, sobre os modos como as crianças resolvem os problemas e os progressos que, neste âmbito, vão fazendo. Deste modo, decidi optar por este tema, primeiro, por integrar uma área que aprecio e, seguidamente, por considerar que pode ser uma mais-valia para o meu futuro profissional na área da educação.

Após selecionar o tema que pretendia estudar, decidi apresentá-lo à professora cooperante, uma vez que esta tinha um conhecimento aprofundado sobre a turma em que o meu projeto iria decorrer e poder-me-ia auxiliar nas questões que me causassem algum desconforto. Ao abordar o assunto com a referida professora, constatei que considerava o projeto útil para os seus alunos, além de que também sentia um gosto pessoal pelo tema. Referiu que tinha por hábito apresentar diversos problemas, realçando os momentos de discussão coletiva, onde as variadas formas de representar ideias matemáticas eram partilhadas e discutidas. Mais tarde, dei-me conta que cada aluno, no seu caderno, tinha as etapas a percorrer quando resolviam problemas. Este foi um aspeto positivo, pois considerei que o contacto regular que o grupo em questão possuía com a resolução de problemas poderia vir a ser favorável ao desenvolvimento da investigação.

Apesar dos alunos resolverem problemas matemáticos com frequência, a professora cooperante referiu que ainda apresentavam dificuldades no que concerne à exploração deste tipo de tarefas, pelo que considerou o projeto pertinente para a turma em que eu iria realizar o estágio. Por esta via, constatei que o projeto de investigação que pretendia desenvolver era relevante não apenas a nível pessoal e teórico, mas também a nível contextual.

Lampert, Fi e Degner, referidos por Boavida e Menezes (2012, p. 288) mencionam que ensinar Matemática com problemas é

uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão.

Perante isto, é fundamental realçar o papel que um professor deve possuir, nomeadamente o meu papel enquanto investigadora e enquanto futura professora do 1.º ciclo. Este tipo de ensino deve clarificar as ideias matemáticas, bem como divulgar e discutir os raciocínios que os alunos apresentam. Os momentos de partilha são cruciais, na medida que podem fomentar a clarificação de dúvidas por parte dos alunos, assim como guiá-los na aprendizagem de novos conhecimentos ou no aprofundamento de aprendizagens anteriormente adquiridas.

O professor deve servir como apoio, uma vez que os alunos só aprendem a resolver problemas, ao resolvê-los efetivamente e tal só acontece quando o docente promove estes momentos de exploração. A aquisição de novos conhecimentos não passa por dar somente a resposta, é necessário existir partilha de ideias, para desenvolver ideias anteriormente estudadas ou até mesmo a estruturar novas aprendizagens. Isto é, um professor poderá surgir como “orientador e desbloqueador de situações de impasse” (Lopes et al., 1990, p. 20), auxiliando os alunos a “encontrarem os seus próprios caminhos [e provocando] o aparecimento das ideias que os podem fazer avançar” (ibidem).

### 1.3 Estrutura do trabalho

O presente relatório apresenta cinco capítulos, organizados em secções, dos quais a Introdução é o primeiro.

O segundo capítulo constitui o enquadramento teórico e está estruturado em duas secções principais. Na primeira, intitulada, “Resolução de problemas e aprendizagem da matemática”, refiro a importância de resolver problemas para aprender conhecimentos matemáticos e os seus contributos para o conhecimento dos alunos. Seguidamente, clarifico o conceito de problema e apresento classificações de tipos de problemas, apoiando-me em diversos autores. Foco, ainda, em aspetos relevantes quando ensinamos a resolver problemas, nomeadamente o papel do professor durante a resolução de problemas, a importância das tarefas que são propostas e modelos de resolução de problemas.

A segunda secção, “Representações do conhecimento matemático”, encontra-se subdividida em três partes. Primeiramente refiro o significado de representação e, seguidamente, centro-me na relevância e nas funções que as representações matemáticas possuem para o ensino e aprendizagem da matemática. Por último, refiro os tipos de representações, segundo diversos autores, focando-me na classificação de Bruner como base para o desenvolvimento desta investigação.

No terceiro capítulo surge a Metodologia adotada para esta investigação. Fundamento o porquê de ter escolhido uma abordagem qualitativa de investigação e as razões pelas quais considero que realizei uma investigação sobre a prática. Para desenvolver este projeto, optei por diversas técnicas de recolha de dados, entre elas a observação participante, que integra as notas de campo e as conversas informais com os alunos e com a professora cooperante. A análise documental também é uma das técnicas escolhidas por mim, que é focada na recolha das resoluções dos problemas matemáticos que os alunos realizaram no desenrolar das semanas. Por último, surgem as entrevistas clínicas que faço a dois alunos, Tiago e Simão, escolhidos de acordo com critérios específicos, com o intuito de compreender as estratégias por eles elaboradas e os seus modos de pensar. Nessa secção também abordo o processo de análise de dados.

A análise dos dados surge no capítulo quatro. Começo por me centrar na intervenção pedagógica, descrevendo, sucintamente, o contexto em que se realizou e

apresentando os seus principais contornos em que se incluem os problemas que propus aos alunos. Em seguida, analiso, mais detalhadamente, as representações matemáticas a que Tiago e Simão recorreram para resolver os problemas que apresentei em contexto de sala de aula e, posteriormente, durante as entrevistas clínicas, referindo as funções que desempenharam.

Por último, o quinto capítulo diz respeito às conclusões do estudo, em que procuro dar resposta às questões de investigação e reflito sobre a experiência vivida ao longo do desenvolvimento deste trabalho, destacando aprendizagens realizadas e dificuldades sentidas.

## **Capítulo II - Enquadramento teórico**

A resolução de problemas tem adquirido relevância, no ensino da Matemática, à medida que a linha temporal avança. Resolver problemas possibilita a aprendizagem e o desenvolvimento de novos conceitos, permitindo ao aluno aplicar os conteúdos matemáticos a situações do seu quotidiano. Neste capítulo debruço-me sobre a resolução de problemas e, posteriormente, sobre representações matemáticas.

### **Secção 1 – Resolução de problemas e aprendizagem da matemática**

Esta secção encontra-se dividida em quatro partes. Nesta, foco a importância da resolução de problemas, analiso diversos significados de problema, refiro o significado atribuído a problema para efeitos da investigação, identifico diversos tipos de problemas e, por último, menciono aspetos importantes da resolução de problemas no ensino da Matemática, como por exemplo, o papel do professor.

#### **1.1 Importância**

A resolução de problemas no campo educativo tem vindo a afirmar-se pela sua relevância e não apenas no que se refere ao ensino e aprendizagem da Matemática. Por exemplo, na área de Física e Química, em que Leite e Esteves (2005), apoiando-se em diversos autores, afirmam,

a resolução dos problemas é, assim, um meio não só para a realização de aprendizagens conceptuais, mas também para o desenvolvimento integrado de competências específicas de uma dada área de saber (dos domínios do conhecimento substantivo e processual, do raciocínio e da comunicação) e de competências gerais (relacionadas com resolução de problemas, tomada de decisões, aprender a aprender, pesquisa e utilização de informação, autonomia e criatividade) e, se o processo se realizar em grupo, de competências de relacionamento interpessoal, nomeadamente, cooperação e tolerância. Estas últimas têm um papel decisivo na formação dos alunos para a cidadania.

No caso da matemática, o professor ao propor diversos problemas bem escolhidos pode estimular a curiosidade, proporcionar aos alunos a predisposição pela descoberta da resolução e pelo gosto da Matemática, auxiliar o raciocínio, bem como favorecer a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos.

Deste modo, é de salientar que se deve proporcionar, a todos os alunos, a oportunidade de se envolverem em atividades de resolução de problemas. Tal como refere Polya (2003) não é suficiente apenas o aluno dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais, tornando-se necessário que este contacte com problemas motivantes e desafiadores, com o objetivo de usufruir de uma experiência matemática genuína e gratificante.

A resolução de problemas engloba uma multiplicidade de processos de pensamento. Como defende NCTM (2007, p. 212), “sem a capacidade de resolver problemas, a utilidade e o poder das ideias, capacidades e conhecimento matemáticos ficam severamente limitados”. É importante dar ênfase aos conhecimentos que a resolução de problemas proporciona, ao fomentar a formação de conceitos, estratégias e a aquisição de novas técnicas. Para além de ter uma dimensão transversal, a resolução de problemas tem, também, uma dimensão global na formação dos alunos (Vale, 1997).

Borralho (1990), refere que a resolução de problemas contribui para:

- ✓ “Desenvolver o hábito e o gosto pela resolução de problemas;
- ✓ Inculcar confiança nos alunos quanto às suas capacidades para resolver problemas;
- ✓ Consciencializar os alunos acerca das estratégias que podem ser usadas na resolução de problemas;
- ✓ Consciencializar os alunos acerca das vantagens inerentes a uma abordagem sistemática e organizada dos problemas;
- ✓ Contribuir para que os alunos se consciencializem de que o mesmo problema pode ser resolvido por mais de um processo;
- ✓ Desenvolver as capacidades dos alunos em seleccionar estratégias de resolução adequadas;
- ✓ Desenvolver as capacidades dos alunos na implementação correcta de estratégias de resolução;
- ✓ Desenvolver capacidades metacognitivas;

- ✓ Contribuir para que os alunos resolvam mais problemas correctamente” (p. 69).

A resolução de problemas e, em particular, o que alguns autores designam por ensinar matemática com problemas (Lampert, Fi e Degner, referidos por Boavida e Menezes, 2012) é encarada como um veículo para aprender conceitos, como um contexto através do qual a aprendizagem de ideias matemáticas tem lugar. Assim, durante estes momentos surge o enfoque na compreensão, uma vez que os alunos têm que mobilizar conhecimentos e utilizar procedimentos matemáticos essenciais para a resolução do problema, tendo liberdade para escolher as bases matemáticas que se irão apoiar.

A resolução de problemas contribui para ensinar aos alunos a utilidade da matemática no seu quotidiano, ou seja, para a associarem a aspetos do seu dia-a-dia e, deste modo, atribuírem significado ao que realizam. Além disso, também pode favorecer num envolvimento significativo dos alunos, tornando-se numa ferramenta útil para o professor ajudar os alunos na aprendizagem matemática.

Torna-se primordial proporcionar momentos que requerem a resolução de problemas, uma vez que abordam diversos conceitos, noções e representações. Os problemas desempenham um papel fulcral para a formação do aluno na qualidade de ser social, reflexivo e ativo. Pretende-se que estas atividades sejam desafios aos alunos, surgindo, assim, o uso de estratégias e métodos de resolução variados. Estes momentos associados ao raciocínio e à comunicação propiciam a evolução do aluno.

Resolver problemas não remete somente para a mobilização de conceitos matemáticos, pois permite, também, desenvolver o raciocínio, a criatividade e a atribuição de significado à matemática. De facto, a resolução de problemas é caracterizada como uma capacidade transversal (NCTM, 2007), que possibilita um relacionamento direto com a Matemática, contribuindo para uma aprendizagem gradual dos alunos, estabelecendo ligações com outras áreas do conhecimento e com o contexto real.

Em suma, a resolução de problemas pode ser vista como um meio para criar alunos autónomos na procura de soluções, articular diversas áreas curriculares, mas também, proporciona o desenvolvimento da capacidade de pensar matematicamente, ou seja, “a resolução de problemas não só constitui um objectivo da aprendizagem matemática, como é também um importante meio pelo qual os alunos aprendem matemática” (idem, p. 57).

## 1.2 Problema: que significado?

Vários autores debruçaram-se sobre o conceito de problema e consideram que um problema “significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível” (Polya, 1962, p. 117). Outros, como Borralho (1990) dizem que “um problema é uma questão em que o estudante não dispõe de nenhum processo rotineiro conhecido para o resolver, mas que lhe excita a curiosidade e o desejo de o solucionar” (p. 74).

Uma mesma tarefa matemática pode ser um problema para um aluno e um exercício para outro: “ser ou não ser problema não depende apenas da tarefa que é proposta, mas também do indivíduo a quem se propõe” (Boavida et al., 2008, p. 15).

Quando nos deparamos com um problema temos que empregar determinada estratégia para o conseguir resolver e este deve suscitar interesse e curiosidade. Ou seja, estamos perante um problema quando predominam duas características essenciais: há uma necessidade não satisfeita e são descobertos caminhos não óbvios para satisfazê-la (Wagner, 2003).

Um exercício é caracterizado pela utilização de um algoritmo ou de um procedimento matemático anteriormente conhecido, “pois, se uma questão não tem surpresas e pode ser resolvida confortavelmente utilizando procedimentos rotineiros, (...) é um exercício.” (Palhares, 2004, p. 13).

Um bom problema tem que ser um desafio e contribuir para a compreensão de conceitos matemáticos. Segundo Boavida et al. (2008) os problemas devem possuir “as seguintes características: a) sejam, realmente, compreensíveis pelo aluno apesar de a solução não ser imediatamente atingível; b) sejam intrinsecamente motivantes e intelectualmente estimulantes; c) possam ter mais do que um processo de resolução; d) possam integrar vários temas” (p. 16).

Tal como refere NCTM (2007), bons problemas abrangem um leque diversificado de temas, contêm matemática significativa, permitem a consolidação e aprofundamento de conhecimentos, explorem diversas ideias matemáticas e estimulam os alunos a “reflectir e a comunicar e podem surgir das experiências dos próprios alunos ou de contextos puramente matemáticos” (idem, p. 213).

Em síntese, como salienta Moreira (1987), existe uma dimensão subjetiva no significado de problema, pois o conceito de problema surge de acordo com as características do indivíduo, sendo fundamental este compreender e querer resolvê-lo, não possuindo procedimentos que lhe permitam chegar à resolução de imediato, devendo encontrar diversas alternativas para o resolver.

Ao longo desta subsecção fui analisando diversas caracterizações de problema. No estudo que desenvolvi, o significado que atribuo a problema considera o nível cognitivo e o afetivo. A nível cognitivo Polya (1962) associa o conceito de problema a uma ação que não é imediatamente atingível. A nível afetivo, Borralho (1990) salienta que um problema também deve suscitar curiosidade e desejo para o resolver. Nesse âmbito, considero que um problema deve aliar estas duas vertentes, com o objetivo de promover a aprendizagem de novos conceitos e de desenvolver o gosto pela Matemática.

### **1.3 Tipos de problemas**

Como referi, há um amplo consenso em torno da ideia de que um problema que seja propício à aprendizagem da Matemática tem que ser apelativo, suscitar a curiosidade e envolver o aluno, ao desafiá-lo para a sua resolução. Há, no entanto, diversas tipologias de classificação de problemas de um ponto de vista educativo, como revela a tabela 1.

<b>Polya (1995)</b>	<b>Smole e Dinis (1998)</b>	<b>Vale e Pimentel (2004)</b>	<b>GIRP (2004)</b>	<b>Boavida et al (2008)</b>
Problemas auxiliares	Problemas convencionais	Problemas de um passo	Problemas de processo	Problemas de cálculo
Problemas rotineiros	Problemas não convencionais	Problemas de dois ou mais passos	Problemas de conteúdo	Problemas de processo
Problemas de determinação	Problemas de lógica	Problemas de processo	Problemas de aparato	Problemas abertos
Problemas de demonstração		Problemas de aplicação	Problemas de aplicação	
Problemas práticos		Problemas tipo puzzle		

Tabela 1 - Tipologia de classificação de problemas

Polya (1995) propõe a seguinte classificação de problemas:

- ✓ *Problemas auxiliares* – “o problema auxiliar é o meio pelo qual tentamos chegar ao nosso objetivo” (p. 119), ou seja, ao chegar à solução, esta auxilia na resolução de outro problema, nomeado de problema original;
- ✓ *Problemas rotineiros* – “um problema será rotineiro se ele puder ser solucionado pela substituição de dados específicos no problema genérico resolvido antes, ou pelo seguimento, passo a passo, de algum exemplo muito batido” (p. 124)
- ✓ *Problemas de determinação* – tem como objetivo “encontrar um certo objeto, a incógnita do problema” (ibidem), “que satisfaça uma condicionante claramente enunciada” (p. 104).
- ✓ *Problemas de demonstração* – o objetivo é “mostrar conclusivamente que certa afirmativa, claramente enunciada, é verdadeira ou, então, que é falsa” (p. 124), ou seja “demonstrar ou refutar um teorema claramente enunciado” (p. 104).
- ✓ *Problemas práticos* – “não é necessário qualquer conhecimento especial para compreendê-lo” (p. 126), tendo como exemplo de um problema deste tipo, a construção de uma barragem sobre um rio.

De acordo com a classificação de Smole e Diniz (1998) os problemas dividem-se em:

- ✓ *Problemas convencionais* – resolvidos pelo uso de um ou mais algoritmos. Esse tipo de problemas não é usualmente utilizado para chamar a atenção do aluno;
- ✓ *Problemas não convencionais* – não abrange somente a aplicação direta de uma ou mais técnicas operatórias, nem a utilização imediata de uma equação. Propiciam a utilização de várias estratégias para chegar a uma solução;
- ✓ *Problemas de lógica* – caracterizado pelo uso do raciocínio dedutivo.

Vale e Pimentel (2004, pp. 18-19), inspirando-se em Charles e Lester, referem cinco tipo de problemas:

- ✓ *Problemas de um passo* – resolvidos exclusivamente através de uma das operações aritméticas elementares.
- ✓ *Problemas de dois ou mais passos* – resolvidos através do uso de duas ou mais operações aritméticas;
- ✓ *Problemas de processo* – “são os que só podem ser resolvidos através da utilização de uma ou mais estratégias de resolução. São os que não utilizam processos mecanizados ou estandardizados” (ibidem). Este tipo de problemas fomenta a curiosidade, desenvolve a criatividade e a iniciativa;
- ✓ *Problemas de aplicação* – resolvidos através de variadas estratégias e/ou operações, sendo que se interligam com o quotidiano, solicitando a seleção de dados sobre a vida real e a necessidade de tomar decisões. Exemplo: “no fim de ano uma turma pretende realizar um jantar de confraternização. Apresente duas propostas de ementa, sabendo que são 15 alunos e a verba disponível são 125 euros” (ibidem).
- ✓ *Problemas tipo puzzle* – a solução é encontrada ao olhar o problema sob diferentes pontos de vista. Exemplo: “Desenhe quatro linhas, sem levantar o lápis do papel, de modo que passem pelos nove pontos” (ibidem).

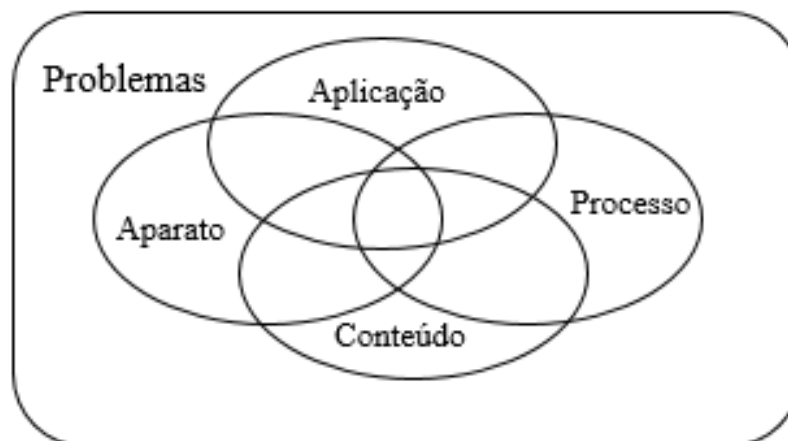
Também, GIRP<sup>1</sup>, citado por Palhares (2004), propôs uma tipologia de classificação de problemas, dividida em quatro partes:

---

<sup>1</sup> Grupo de investigação em resolução de problemas, constituído por: Domingos Fernandes; António Borrvalho; Ana Leitão; Helena Fernandes; Isabel Cabrita; Isabel Vale; Lina Fonseca; e Pedro Palhares.

- ✓ *Problemas de processo* – “não se resolve, geralmente, pela aplicação directa de um algoritmo, isto é, dificilmente se resolverá sem a utilização de estratégias de resolução de problemas” (p. 19).
- ✓ *Problemas de conteúdo* – “requer a utilização de conteúdos programáticos, conceitos, definições e técnicas matemáticas. Sem eles dificilmente poderá ser resolvido” (ibidem).
- ✓ *Problemas de aparato* – “um problema deste tipo requer a utilização de um aparato experimental, sobre o qual o solucionador deve exercer as suas ações. É um tipo de problema que dificilmente se resolve sem a utilização do aparato e que suscita a utilização de métodos de investigação próprios das ciências experimentais” (p. 20).
- ✓ *Problemas de aplicação* – “um problema deste tipo utiliza dados da vida real, apresentados ao solucionador ou por ele recolhidos. (...) A resolução destes problemas passa muitas vezes pela utilização de uma ou mais estratégias de resolução de problemas (...) e podem admitir mais que uma solução” (ibidem).

É de destacar que nesta classificação apresentada por este grupo de investigadores, um mesmo problema pode-se classificar em mais que uma tipologia, estando interligadas, como ilustra a figura 1.



*Figura 1 - Modo como os quatros tipos de problemas se relacionam*

Por último, Boavida et al., (2008) simplificaram a classificação de Lester, adaptando-a para o 1.º ciclo, ao distinguirem somente três tipos de problemas:

- ✓ *Problemas de cálculo* – problemas que exigem que os alunos tomem decisões sobre que operações pretendem utilizar. São problemas que proporcionam a “oportunidade de aplicarem conceitos e destrezas previamente aprendidos e praticarem esta aplicação. No entanto, o risco de lhes propor exclusivamente estes problemas reside em poderem levá-los a leituras demasiado rápidas, a análises superficiais ou a respostas sem qualquernexo” (pág. 18);
- ✓ *Problemas de processo* – não podem ser resolvidos apenas pela seleção das operações, requerem esforço por parte do aluno para compreender a Matemática, recorrendo a estratégias, bem como à persistência, pensamento flexível e organização. “Estes problemas podem ser usados para desenvolver diferentes capacidades, para introduzir diferentes conceitos ou para aplicar conhecimentos e procedimentos matemáticos anteriormente aprendidos” (pág. 19);
- ✓ *Problemas abertos* – também designados por investigações, podem ter mais que uma estratégia de resolução, bem como mais que uma resposta certa, em que “os alunos têm de fazer explorações para descobrir regularidades e formular conjecturas, apelando, por isso, ao desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão” (pág. 20).

Conhecer várias tipologias de classificação de problemas, de um ponto de vista educativo, pode auxiliar o professor a seleccionar e diversificar as tarefas que propõe aos alunos (Vale e Pimentel, 2004). Ao analisar as tipologias de problemas que referi anteriormente, parecem sobressair algumas semelhanças e diferenças.

Por exemplo, os problemas de cálculo referidos por Boavida et al., que remetem para a utilização de operações aritméticas e aplicação de conceitos anteriormente aprendidos, podem abranger os problemas convencionais que Smole e Diniz definiram, relacionando-os com o uso de um ou mais algoritmos.

Os problemas de processo, mencionados por Vale e Pimentel, Boavida et al. e GIRP, em que o aluno necessita de recorrer a estratégias de resolução de problemas, não utilizando a aplicação direta de um algoritmo, parecem incluir os problemas não convencionais da tipologia de Smole e Diniz.

Por fim, os problemas de aplicação mencionados por Vale e Pimentel e GIRP, que mencionam que este tipo de problemas utiliza dados do quotidiano, parece incluir os

problemas práticos presentes na tipologia de Polya, em que o mesmo afirma não ser necessário conhecimentos específicos para resolver o problema.

#### **1.4 Ensinar a resolver problemas: aspetos importantes**

Para ensinar a resolver problemas é necessário ter em atenção aspetos fundamentais, nomeadamente o papel do professor, que passa pela escolha de bons problemas e pela orientação dos alunos ao longo do processo de resolução de problemas.

O professor tem o papel de encorajar os alunos a explorarem as suas ideias, ou seja, a desempenharem um papel ativo durante todo o processo. É importante, que dê importância às sugestões apresentadas pelos alunos, valorizando as mesmas e incentivando-os, ao auxiliar a refletirem sobre estas, de modo a orientá-los na construção de saberes (NCTM, 2007).

No ensino da Matemática, o ambiente educativo possui uma crescente relevância e o professor tem um papel determinante para a aprendizagem. A postura do professor pode originar um ambiente em que existe respeito mútuo, onde é atribuído valor às intervenções dos alunos, bem como interesse em ouvir-se as opiniões de todos. Canavarro (2011) debruça-se sobre a relevância de “promover um ambiente estimulante na sala de aula em que os alunos sejam encorajados a participar ativamente” (p. 17).

Quando estamos perante estas atitudes, ocorre um ambiente favorecedor da aprendizagem da Matemática, bem como da resolução de problemas, onde o encorajamento pelas conquistas dos alunos é realçado. Salienta-se que “os alunos aprendem mais e melhor num ambiente acolhedor, no qual se sintam livres para explorar ideias matemáticas, colocar questões, discutir as suas ideias e cometer erros” (APM, 1991, p. 69).

O papel do professor na escolha dos problemas que propõe à turma é muito importante. Estes devem ser significativos, diversificados, adequados e propícios ao desenvolvimento dos alunos. O problema matemático tem de desafiar os alunos, desenvolver a sua compreensão e capacidades matemáticas, estimular o estabelecimento de conexões matemáticas e o raciocinar matematicamente (NCTM, 2007). Nesta medida, é fundamental que o docente conheça o grupo de crianças, os seus interesses, as suas

dificuldades e que promova um ambiente de partilha e negociação entre os vários elementos do contexto de sala de aula. Tal como Doyle (2007) refere, o ensino da matemática e a escolha das tarefas estão a modificar-se, de forma a ir ao encontro das necessidades dos alunos.

Polya (2003) considera importante o professor ajudar os seus alunos para que estes não trabalhem de forma despropositada, tentando compreender se o aluno percebeu o problema. Para que isto aconteça é necessário que exista, por parte do professor, disponibilidade, tempo e dedicação.

Ponte (2005) menciona que a seleção e articulação das tarefas não se esgota somente na diversificação das mesmas. Ou seja, as tarefas têm que proporcionar aos alunos um caminho de aprendizagem coerente, que lhes permita aprenderem determinados conceitos, compreenderem procedimentos matemáticos e estabelecerem diversas conexões.

Deste modo, a aprendizagem está relacionada com as tarefas que o professor propõe, pois é necessário que estas envolvam os alunos, estimulem-nos, desenvolvam o raciocínio e promovam a comunicação. Segundo NCTM (2007, pp. 18-19) e de acordo com o que foi mencionado anteriormente,

Num ensino eficaz, são utilizadas tarefas significativas para introduzir ideias matemáticas importantes e para envolver e desafiar intelectualmente os alunos (...) Este tipo de tarefas podem frequentemente ser resolvidas de mais do que uma forma, (...), fazendo com que sejam acessíveis a alunos com diferentes níveis de conhecimento e experiências prévias.

Resumindo, a elaboração/seleção de tarefas é um marco importante para o professor, uma vez que pode favorecer a aprendizagem dos alunos. É relevante que estas tarefas incluam a possibilidade da formulação de problemas pelos alunos:

A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma actividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela resolução. Encorajar os alunos a escrever, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas, é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura,

desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso (Boavida, et al., 2008, p. 27).

Para orientar os alunos no processo de resolução de problemas, o professor pode apoiar-se em modelos de resolução de problemas. O modelo de Polya (1945), um dos mais conhecidos e que serviu de base para outros autores conceberem os seus próprios modelos, tem quatro etapas:

1. *Compreensão do problema* – o aluno precisa de compreender o problema para conseguir resolvê-lo, atentando nas principais partes do problema. “Primeiro que tudo, o enunciado verbal do problema precisa de ficar bem entendido. O aluno deve também estar em condições de identificar as partes principais do problema, a incógnita, os dados, a condicionante” (pág. 4);
2. *Estabelecimento de um plano* – definição da estratégia de atuação.  
Temos um plano quando conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma ideia brilhante (idem, pág.5).
3. *Execução do plano* – “Conceber um plano, a ideia da resolução, não é fácil. Para conseguir isto é preciso, além de conhecimentos anteriores, de bons hábitos mentais e de concentração no objetivo, mais uma coisa: boa sorte” (pág.8);
4. *Verificação da solução* – nesta etapa deve-se analisar a solução obtida, verificando os resultados e os processos usados. Se os alunos verificarem a solução “reconsiderando e reexaminando o resultado final e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas” (p. 10). Neste momento “surge uma oportunidade natural de investigar as relações de um problema quando fazemos retrospecto da sua resolução” (ibidem), sendo que os alunos ficarão interessados pelo esforço realizado e conscientes de terem resolvido corretamente o problema.

Também, Alan Schoenfeld (citado por Borralho, 1990) refere um modelo de resolução de problemas composto por cinco etapas:

1. *Análise* – etapa em que se compreende o problema e se identificam os dados, levando a processos heurísticos, tendo como exemplo: a identificação do contexto; a seleção das representações que auxiliem na exploração dos dados e a análise de casos paralelos ou particulares; simplificação do problema sem perder a generalidade, entre outros;
2. *Desenho* – processo de resolução, em que o aluno define uma estratégia sobre como vai atuar;
3. *Exploração* – exploração para ultrapassar as dificuldades, podendo-se voltar atrás quando se encontra um obstáculo difícil de se ultrapassar.
4. *Realização* – etapa onde se procede à execução dos passos delineados. Nesta fase poderá existir “uma questão descoberta durante a exploração para registar ponto por ponto.” (idem, p. 59);
5. *Verificação* – reflexão do que foi elaborado, verificando todos os passos e avaliação da resposta.

Lester, em 1980, apresentou um modelo constituído por seis fases, inspirado no trabalho de Polya, que apresenta as seguintes fases:

1. *Consciencialização* – o problema é colocado ao aluno e este analisa e toma consciência de que a situação apresentada não pode ser resolvida imediatamente;
2. *Compreensão* – momento onde o aluno atribui sentido ao problema, formando uma representação interna do problema;
3. *Análise do(s) objetivos* – pode ser vista como uma tentativa de reformular o problema onde o aluno utiliza técnicas e estratégias diversificadas. Nesta fase o aluno identifica as partes integrantes do problema, ou seja, a informação dada, a inter-relação da informação e as operações a utilizar;
4. *Desenvolvimento do plano* – conceberem um plano para resolver o problema. Esta fase pode originar diversas dificuldades aos alunos;
5. *Implementação do plano* – o aluno põe em ação o plano que delineou;
6. *Avaliação dos procedimentos e da solução* – esta fase é importante, pois não diz respeito somente à análise da correção da resposta. É uma avaliação sistemática das deliberações dos alunos durante todo o processo de resolução.

Por último, Boavida, et al., (2008, p. 22), referem um modelo de resolução de problemas simplificado e adequado ao 1.º ciclo do ensino básico:

1. *Ler e compreender o problema;*
2. *Fazer e executar um plano;*
3. *Verificar a resposta.*

É de salientar que, estas autoras, baseadas no modelo de Polya, unificaram a segunda e a terceira fase por, com frequência estas duas fases se confundirem, sendo difícil distingui-las. Este modelo tanto se pode adaptar a problemas complexos, como aos mais simples.

Sintetizando, pode-se constatar que existem diversos modelos de resolução de problemas. Porém, foi Polya o grande impulsionador. Apesar de existirem variadas etapas, isto não significa que os alunos reajam de um modo igual em cada uma delas. No entanto, podem desenvolver capacidades que os façam lidar com cada uma, culminando na solução. Face isto, apresento uma tabela que inclui todos os modelos que referi anteriormente, de modo a facilitar a visualização de todas as etapas que cada autor menciona e como estas se relacionam.

<b>Polya (1945)</b>	<b>Alan Schoenfeld (1985)</b>	<b>Lester (1980)</b>	<b>Boavida, et al., (2008)</b>
Compreensão do problema	Análise	Consciencialização	Ler e compreender o problema
		Compreensão	
		Análise do(s) objetivos	
Estabelecimento de um plano	Desenho	Desenvolvimento do plano	Fazer e executar um plano
Execução do plano	Exploração	Implementação do plano	
	Realização		
Verificação da solução	Verificação	Avaliação dos procedimentos e da solução	Verificar a resposta

Tabela 2 - Modelos de resolução de problemas

Ao analisar a tabela 2 dos vários modelos de resolução de problemas, não é de espantar que existam inúmeras semelhanças entre eles, uma vez que todos eles se inspiram nas ideias de Polya. Todavia, há autores que consideram mais etapas, como Lester. Analisando o modelo, compreendo que essa divisão se enquadra na tipologia de Polya. Por exemplo, a execução do plano que Polya mencionou abrange a exploração e a realização mencionadas por Schoenfeld. Findando, Boavida et al. decidiram simplificar as ideias de Polya, desenvolvendo um modelo que se divide em apenas três fases. Nesta medida, fazer e executar um plano compreende, por exemplo, o desenho, a exploração e a realização do modelo de Schoenfeld e, por sua vez, o desenvolvimento do plano e a sua implementação, referidos por Lester.

## **Secção 2 – Representações do conhecimento matemático**

É hoje amplamente consensual que a forma como são representadas as ideias matemáticas é essencial para a compressão destas ideias (NCTM, 2007). Esta secção foca-se, precisamente, nas representações do conhecimento matemático. Encontra-se estruturada em três partes principais. Primeiramente, tentarei analisar alguns dos significados atribuídos ao conceito de representação e, seguidamente, destacar a sua importância para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Por último, apoiando-me em diversos autores, apresento algumas das tipologias de classificação de representações do conhecimento e o modo como estas se relacionam.

### **2.1 Representações: significado**

Compreender o significado de representação é crucial, pois tal como defende Duval (citado por Mata-Pereira e Ponte, 2011), “não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (...) pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação” (p. 349).

De acordo com NCTM (2007) “o termo *representação* refere-se tanto ao processo como ao resultado - por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesmo” (p. 75). Além de mais, “o termo é aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente,

como aos que ocorrem “internamente”, nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática” (ibidem).

Tal como NCTM, há vários autores que diferenciam representações internas de representações externas. Entre estes está Goldin (2008), para quem as representações do conhecimento se dividem em duas categorias: internas e externas. As representações internas remetem-nos, como o autor refere, para sistemas de representações cognitivas. Estas não são observáveis e estão diretamente relacionadas com a mente do aluno. As representações internas (configurações mentais e o raciocínio) podem ser interpretadas através das representações externas, sendo necessário que os alunos as comuniquem.

Por outro lado, as representações externas são as representações observáveis, ou seja, nelas estão presentes as descrições verbais, os gráficos, as tabelas, diagramas, entre outros. Este tipo de representações poderá ser observado e apresentado através de objetos, desenhos, linguagem falada ou símbolos, detendo de uma enorme relevância, pois, tal como refere Dufour-Lanvier et al (citado por Valério, 2005, p. 43),

As representações externas das crianças podem ser informativas de como eles percebem as situações problemáticas e podem dar ajudas para desenhar intervenções. A reconciliação entre os pontos de vista do aluno e professor serão então facilitadas e acreditamos realizadas.

Goldin (citado por Pinto e Canavarro 2012) considera que as representações se caracterizam como configurações que podem “representar uma outra coisa de alguma forma” (p. 4), sendo “uma configuração que poderá, por exemplo, agir em lugar de, ser interpretada como, conectar-se, corresponder a, denotar, retratar, encarnar, codificar, evocar, rotular, ligar, significar, produzir, referir-se, assemelhar, servir como uma metáfora para, substituir, sugerir, ou simbolizar o elemento representado” (ibidem).

As representações destacam-se como um marco fundamental na Matemática, pelo papel que têm. Estão são “todas as ferramentas – signos e gráficos – que tomam presentes os conceitos e procedimentos matemáticos, e com as quais os sujeitos particulares abordam e interactuam com o conhecimento matemático” (Rico, 2009, p. 3). Tal como menciona Tripathi (2008), pode-se descrever uma representação como “um constructo físico ou mental que descreve aspectos da estrutura inerente a um conceito e as inter-relações entre os conceitos e outras ideias” (p. 438), sendo que, quando pensamos em

representações, caracterizamo-las como uma forma que nos permite interpretar, comunicar e discutir ideias com os outros.

De acordo com Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger, (citado por Valério, 2005), há quatro características que importa considerar quando pensamos no uso das representações em Matemática: as intrínsecas à matemática, as inúmeras concretizações de um conceito, as representações para contornar as dificuldades específicas e as representações para tornar a matemática mais apelativa e interessante.

Durante a resolução de problemas, os alunos devem poder utilizar as suas próprias representações de uma ideia matemática e adequá-las ao contexto do problema. Assim, o professor poderá aceder ao modo como foi interpretado o problema e, naturalmente, ao raciocínio do aluno. Os alunos utilizam representações para representar diversos conceitos matemáticos e estes encontram-se relacionados com a forma como os alunos compreendem e utilizam as representações (Ponte e Serrazina, 2000).

Ao longo deste estudo centrar-me-ei nas representações externas, ou seja, será este o significado que atribuirei ao termo representação. Focar-me nas representações externas de ideias matemáticas pode permitir intuir o conhecimento dos alunos sobre como resolver um problema ou o seu conhecimento matemático sobre determinado assunto.

## **2.2 Representações: importância e função**

As representações do conhecimento matemático possuem um papel fundamental no ensino da Matemática e são essenciais para compreender o raciocínio dos alunos. No ensino da Matemática as representações têm sido alvo, nos últimos tempos, de diversos estudos que apontam para a sua importância e os papéis determinantes que podem ter na aprendizagem dos alunos. Diversos autores mencionam o papel das representações no desenvolvimento do raciocínio matemático e tal como Ponte et al. (2007) afirmam, “os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações” (p. 5).

Canavarro e Pinto (2012) destacam as funções dos diversos tipos de representações. Referem que as representações idiossincráticas (representações iniciais dos alunos) podem ter como função “ajudá-los tanto na compreensão como na própria resolução, constituindo, também, uma forma de registo do método de resolução que pode ainda possibilitar um meio de o descrever a outras pessoas” (idem, p. 54).

Os desenhos (representações icónicas) servem “como recurso de interpretação do problema e também como registo da solução (Smole e Diniz, citados por Canavarro e Pinto, 2012, p. 56). Apoiando-se em Cavalcanti, Canavarro e Pinto (2012) realçam a ideia de que o desenho pode ser usado de três formas diferentes na resolução de problemas. Primeiramente para representar a totalidade dos elementos da situação apresentada no enunciado. Também serve para representar a situação correspondente à solução do problema e, por fim, para ilustrar os elementos do problema, sendo meramente ilustrativo. Dentro das representações icónicas, também surgem os diagramas ou esquemas que,

podem ser encarados como representações da estrutura dos problemas e podem transformar-se em verdadeiras ferramentas de apoio ao raciocínio matemático por permitirem desocultar as relações matemáticas em presença, como é muito visível no pensamento algébrico. Além disso facilitam o desenvolvimento de inferências corretas sobre a situação representada, tornando-se, assim, uma ferramenta poderosa para raciocinar e obter soluções de problemas mais complexos (Canavarro e Pinto, 2012, p. 58).

Os símbolos convencionais (representações simbólicas), para Canavarro e Pinto (2012) citando Cândido, têm duas características: auxiliam a recuperação da memória e permitem a comunicação à distância no espaço e no tempo, tal como a troca de informação entre pessoas. Nas representações simbólicas, os alunos “ao compararem a linguagem matemática convencional com as suas representações próprias idiossincráticas, podem reconhecer que a simbologia matemática permite uma maior economia de esforço e tempo na representação das ideias e, até, na obtenção da solução de um problema” (idem, p. 62).

Preston e Garner (2003) consideram as representações essenciais para registar, analisar, resolver e comunicar dados, problemas ou ideias matemáticas. Estas são importantes, na medida em que constituem veículos para aprender e comunicar, permitindo que estes utilizem combinações de representações para obter mais informações, do que somente com uma única representação. Em Portugal, Canavarro (2007) salienta a relevância das representações como meio para o raciocínio algébrico e para expressar o pensamento dos alunos.

A importância das representações do conhecimento surge quando nos remetemos para a compreensão matemática. As representações de ideias podem ser vistas como ferramentas que auxiliam na aprendizagem, na interpretação de conceitos, na

comunicação matemática e no desenvolvimento de estratégias inerentes à resolução de tarefas (NCTM, 2007), possibilitando uma gama alargada de interpretações de uma determinada ideia matemática. De acordo com Cândido (2001), o papel das representações é destacado como um meio crucial para os alunos reconhecerem e interpretarem os dados do enunciado e, também, como uma forma elementar de registarem e refletirem sobre as estratégias desenvolvidas.

Tal como referem os autores Zazkis e Liljedahl (2004), as representações são ferramentas para a manipulação e comunicação e, também, para a compreensão conceptual. Como tal, “ter uma representação em mãos permite que um indivíduo se separe ou ignore do significado dessa representação e opere apenas nos símbolos, tornando as manipulações automáticas, e retornando mais tarde para interpretar o resultado da manipulação simbólica” (Skemp, citado por Zazkis e Liljedahl, 2004, p. 167). Os mesmos autores, também reforçam a pertinência que as representações possuem quando se aborda a comunicação matemática, afirmando que estas “ajudam na comunicação de ideias e ajudam na comunicação entre os indivíduos” (ibidem), podendo originar uma boa interpretação das ideias que os símbolos representam.

Zazkis e Liljedahl (2004) referem, ainda, que existe uma conexão entre as representações do conhecimento matemático que os alunos utilizam e a compreensão que estabelecem sobre as mesmas, afirmando que estas podem ser um caminho para formar a compreensão conceptual. Mencionam que o aluno ao utilizar várias representações de uma determinada ideia é uma indicação para o professor que este estudante possui compreensão conceptual, ou seja, o conhecimento de diversas representações está intrinsecamente relacionado com o conhecimento de noções matemáticas.

Os professores, através das representações de ideias, podem ter acesso ao modo como os alunos identificam aspetos relevantes e interpretaram o problema e o raciocínio subjacente, tornando-se estas uma ferramenta que pode permitir vislumbrar o modo como os alunos constroem o seu conhecimento. Nesta medida, é fundamental o professor valorizar e incentivar diferentes representações, dando ênfase a cada uma delas, de modo a permitir que os alunos visualizem o problema através de perspetivas diferentes das suas.

O uso de formas diversificadas de representar um conceito pode permitir uma exploração variada, onde existe comparação e análise entre representações, o que pode possibilitar o desenvolvimento de competências que permitem ao aluno adequar a

representação ao problema em questão. Nesta linha de pensamento e indo ao encontro do que refere NCTM (2007, p. 240),

Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjecturas. (...) Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros.

O aluno ao estabelecer conexões entre diversos tipos de representações, pode ganhar consciência das suas funcionalidades e estabelecer conexões entre o concreto e o abstrato. Ao utilizar um leque diversificado de representações do conhecimento matemático pode tornar a sua aprendizagem mais significativa, uma vez que nestes momentos está a exteriorizar o modo como pensa e a estruturar a informação apresentada, alcançando novos conhecimentos e aprofundando outros. É fundamental possibilitar aos alunos um papel ativo e interveniente durante todo o processo, antes, durante e após a ação, desde a planificação à avaliação (Coutinho et al., 2009), para que ao longo do tempo construam o seu conhecimento, desenvolvendo em simultâneo o raciocínio matemático.

De acordo com NCTM (2007), as representações matemáticas ajudam na compreensão de conceitos e relações matemáticas, auxiliam o raciocínio, apoiam a organização do pensamento, favorecem a reflexão e a comunicação, são úteis para interligar conceitos, proporcionam a modelação de problemas e, por último, possibilitam que os alunos descubram ativamente relações matemáticas, podendo auxiliar na formulação e refutação de conjecturas. Deste modo, os professores têm que encorajar os alunos a utilizarem diversas representações para se exprimirem, ajudando-os a evoluir até representarem o conhecimento sob formas convencionais.

Os alunos podem utilizar materiais concretos, desenhos, entre outros tipos de representações, sendo que as relações entre as diferentes formas de representar são essenciais para a aquisição de conhecimento matemático, tornando-se imprescindível estabelecer estas conexões. Neste âmbito, permitir aos alunos escolherem as representações que querem utilizar, pode ajudar o professor a compreender as ideias que o aluno possui sobre a matemática, qual a sua compreensão dos conceitos, quais os seus processos de aprendizagem e qual a natureza das dificuldades (Carruthers e Worthington, citado por Viera, 2012).

Para concluir, saliento o papel que as representações matemáticas têm na resolução de problemas, na medida que o professor, ao observá-las, poderá “conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos” (NCTM, 2007, p. 76). Assim, o professor deverá estabelecer ambientes de aprendizagem, onde ocorra a partilha e discussão de ideias e representações.

### 2.3 Tipos de representações e suas conexões

Bruner (1999) classificou as representações em três tipos, embora não se tenha focado, especificamente, nas representações matemáticas, mas antes em representações do conhecimento em geral:

- ✓ *Ativas* – ações que os alunos realizam, com base em materiais manipuláveis. De acordo com Bruner (1999) “a representação ativa baseia-se, ao que parece, na aprendizagem de resposta e formas de habituação” (p. 28).
- ✓ *Icônicas* – organização visual que recorre a imagens, em que inclui diagramas, desenhos e símbolos não convencionais, ou seja, caracteriza-se pela “organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens” (ibidem).
- ✓ *Simbólicas* – forma elaborada de representar a realidade, onde se incluem palavras ou linguagem simbólica; possuem um carácter abstrato. Bruner (1999) caracteriza-as como “um conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico que é regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições” (p. 66).

Têm surgido diversas categorizações de representações do conhecimento matemático. Contudo, os vários autores são consensuais quando afirmam que as diversas representações devem ser utilizadas em conexão umas com as outras. Apresento, em seguida, algumas das classificações que considere pertinente destacar.

Lesh, Post e Behr, citado por Clement (2004), identificam cinco maneiras de representar ideias:

- ✓ *Imagens* – As imagens podem referir-se a imagens de ideias matemáticas que os professores desenharam ou que estão nos manuais, ou todos os

desenhos usados pelos alunos. Permitem ao professor compreender o que o aluno percebe sobre uma ideia matemática e podem ser utilizadas diversas imagens para promover uma discussão coletiva. Ao aluno, permite transformar um problema numa imagem, ao mesmo tempo que considera diversos aspetos das ideias matemáticas. Tendo como exemplo, “quando os professores pedem às crianças para desenhar um quarto de um biscoito, eles podem determinar quais as crianças que entendem que cada quarta parte deve ter a mesma área que as outras, ou se elas usam todo o biscoito ao cortá-lo em quatro” (p. 98).

- ✓ *Materiais manipuláveis* – são objetos que os alunos podem tocar e manipular. Por exemplo, um aluno pode representar o número 8, ao agrupar 8 feijões. Estes são importantes porque permitem às crianças comparar tamanhos relativos de objetos que representam ideias matemáticas, permitindo a manipulação e teste de conjeturas.
- ✓ *Linguagem oral* – serve para os alunos darem as suas respostas e para expressarem o seu raciocínio. Ao permitir que o aluno se expresse oralmente, irá contribuir para um conhecimento matemático mais explícito.
- ✓ *Símbolos escritos* – Refere-se aos símbolos matemáticos e às palavras escritas que estão associadas a eles. Os símbolos tendem a ser abstratos, mas permitem representar com maior precisão as ideias matemáticas.
- ✓ *Situações relevantes* – Uma situação relevante pode ser qualquer contexto que implique ideias matemáticas apropriadas e tenha interesse para as crianças. Muitas vezes, mas não necessariamente, estão conectadas a uma situação da vida real. Estas situações relevantes podem ajudar a estabelecer significados com os conceitos matemáticos, bem como suscitar interesse aos alunos. Exemplificando, “um professor criou uma história sobre um duende que, embora não fosse uma situação da vida real, teve grande interesse para os seus alunos; portanto, este contexto é considerado uma situação relevante” (p. 99).

Para Tripathi (2008), uma representação inclui componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, contextuais, pictóricos ou simbólicos que revelem aspetos de um conceito matemático. Esta autora refere um modelo bastante semelhante ao anteriormente

apresentado, o que não é de estranhar porque se baseia, também, na classificação de Lesh, Post e Behr:

- ✓ *Concretas (manipuláveis)*
- ✓ *Linguagem*
- ✓ *Simbolismo (notação)*
- ✓ *Semi-concretas (pictóricas)*
- ✓ *Contextuais (situações da vida real)*

Tripathi (2008) refere que este modelo de classificação auxilia na diferenciação das variadas formas de representar conceitos matemáticos, mas também fornece informações que ajudam os professores a intervir e a apoiar os alunos a desenvolverem as destrezas necessárias ao mesmo tempo que aprendem o conceito. Esta autora menciona, também, que as representações visuais são as chamadas representações pictóricas ou semi-concretas e estas são, nomeadamente, as tabelas, diagramas, gráficos e imagens dinâmicas ou em movimento. Assim afirma, que os “alunos compreendem melhor quando estudam os conceitos através de uma variedade de perspetivas e desenvolvem a destreza para se moverem entre as diferentes representações sem problemas” (idem, p. 444). Salieta também o papel das representações múltiplas, sendo estas caracterizadas por serem uma “ferramenta poderosa para facilitar a compreensão dos alunos. O processo de formular e resolver problemas que acontece em torno das representações pode promover a aprendizagem da matemática” (íbidem). Na tabela 3 sistematizo as classificações de Clement e Tripathi no âmbito das representações das ideias matemáticas.

<b>Clement (2004)</b>	<b>Tripathi (2008)</b>
Imagens	Semi-concretas (pictóricas)
Materiais manipuláveis	Concretas (manipuláveis)
Linguagem oral	Linguagem
Símbolos escritos	Simbolismo (notação)
Situações relevantes	Contextuais (situações da vida real)

*Tabela 3 - Tipologias de Clement e Tripathi referente às representações matemáticas*

Ao analisar a tabela 3, destaco que os autores referidos apresentam notórias semelhanças, fruto da inspiração no trabalho de Lesh, Post e Behr, ao dividirem, as representações do conhecimento em 5 categorias. Começamos por Tripathi que se refere às concretas, como uma forma de representar uma ideia através de materiais manipuláveis. Por sua vez Clement também menciona os materiais manipuláveis como objetos que os alunos podem manipular.

Tripathi (2008) menciona, como alternativa às representações semi-concretas ou pictóricas as “representações visuais” (p. 440), que são “formas como tabelas ou diagramas organizados, modelos concretos, gráficos, metáforas, imagens dinâmicas ou em movimento e “word pictures” (a descrição em palavras do que estamos a discutir” (ibidem). Clement (2004) apresenta uma descrição de imagens dissemelhante do autor anterior, mencionando que estas são imagens desenhadas pelo professor, inseridas em livros ou desenhos dos alunos.

Outros autores também se focaram na categorização de representações de ideias no âmbito da Matemática. Começamos por Presten e Garner (2003), que se referem especificamente à resolução de problemas e ao papel que as representações do conhecimento matemático possuem, utilizando a seguinte terminologia:

- ✓ *Verbais* – apresentação do problema, comunicação com os pares durante a resolução e apresentação dos resultados. Tem como vantagem o uso da linguagem natural dos alunos e ajuda a relacionar a matemática com o cotidiano. Como desvantagem é apresentado a ambiguidade que a linguagem natural possui quando comparada com a linguagem matemática específica.
- ✓ *Pictóricas* – utilização de imagens, que contêm informações sobre o problema. Como vantagem ajudam a compreender a situação matemática; como desvantagem surgem as conclusões distanciadas que os alunos retiram com base nas suas construções, sendo que alguns alunos possuem dificuldades na elaboração dos desenhos.
- ✓ *Numéricas/tabelares* – trabalho realizado numa fase inicial, em que é frequente a organização da informação em tabelas, onde os alunos procuram exemplos específicos que se adaptem ao contexto e tentam adivinhar e testar. Como vantagens, estas são ferramentas naturais que ajudam na generalização e podem guiar o caminho até gráficos e equações. Todavia, como desvantagens surgem as questões de falta de generalidade que podem impedir o progresso e o uso somente de, por exemplo, números inteiros que podem obscurecer as situações-chave.
- ✓ *Gráficas* – são benéficas para representar situações de acréscimo e decréscimo e para comunicar resultados. São vantajosas porque mostram com clareza as relações entre as variáveis de um problema e, muitas vezes, podem ser intuitivas e apelativas para os alunos. Por sua vez, apresentam como desvantagem o uso de escalas desadequadas que podem originar interpretações erradas.
- ✓ *Algébricas* – usadas por alunos que se sentem confiantes na generalização, utilizando diversas variáveis. Sugerem uma ideia geral e concisa de uma situação, sendo vantajosas para justificar e provar alguma ideia matemática. Porém, estas são difíceis para os alunos e numa fase inicial, podem não ter significado para eles.

Ao comparar a tipologia apresentada com as de Tripathi e Clement, considero que existem algumas semelhanças e diferenças. Presten e Garner mencionam representações verbais das ideias matemáticas como a linguagem natural dos alunos, tal como os autores

anteriores. Presten e Garner mencionam representações pictóricas, como as imagens utilizadas na resolução de problemas, tal como Clement menciona. No entanto, Tripathi quando se refere a representações pictóricas inclui tabelas, diagramas organizados, gráficos, entre outros. Porém, Presten e Garner referem-se aos gráficos como representações gráficas e às tabelas como representações numéricas/tabelares. Por último, surgem as representações algébricas de Presten e Garner que se assemelham aos símbolos escritos de Clement e ao simbolismo (notação) de Tripathi.

Também, Scheuermann e Garderen (2008) apresentam um modelo de classificação de representações matemáticas que inclui duas categorias:

- ✓ *Representações pictóricas* – apresentam imagens de objetos e/ou pessoas para ilustrar os elementos do problema.
- ✓ *Representações esquemáticas* – apresentam objetos e/ou pessoas que representam elementos do problema; contudo também apresentam as suas relações espaciais entre os elementos e o modo como interagem em conjunto.

É de destacar que estes autores se focam somente nas representações gráficas, surgindo as representações pictóricas que se assemelham às descritas pelos autores anteriores e as representações esquemáticas que se diferenciam das representações que Tripathi e Clement distinguiram.

Nas representações icónicas, usando a terminologia de Bruner, há autores que consideram os seguintes tipos:

- ✓ *Desenhos* – linguagem significativa para a criança, permite ao aluno expressar-se e comunicar, não só os seus sentimentos como ideias. Tal como Smole (2000) menciona, “no ato de desenhar, manifestam-se operações mentais como a imaginação, lembrança, sonho, observação, associação, relação, simbolização, estando por isso implícita ao desenho uma conversa entre o pensar e o fazer” (pág.87). Cavalcanti (citado por Pinto e Canavarro, 2012) faz uma distinção entre os desenhos na resolução de problemas, afirmando que podem ser utilizados para representar dados, para representar a solução e articulados com símbolos matemáticos.

- ✓ *Símbolos não convencionais* – é uma representação idiossincrática, em que os alunos utilizam símbolos não convencionais, como por exemplo, círculos e traços para representarem elementos do problema.
- ✓ *Diagramas* – apresentam os dados numa forma espacial. Diezmann e English (citado por Pinto e Canavarro, 2012) identificam quatro tipos de diagramas: (1) Diagrama em rede: conjunto de componentes que se relacionam por uma ou mais linhas. (2) Matrizes: é um diagrama onde existem duas dimensões para representar as ligações que ocorrem entre dois conjuntos de informação; possibilitam uma representação visual concreta do número de combinações. (3) Diagrama de hierarquia: diagrama que apresenta caminhos sincrónicos ou divergentes entre os componentes do problema. (4) Diagrama parte-todo: diagrama que apresenta uma relação entre a parte e o todo.

Resumindo, com a figura 2 é minha intenção sintetizar e esquematizar todos as tipologias de representações que fui descrevendo, tentando encontrar semelhanças e dissemelhanças entre elas. Neste âmbito, apoiei-me no esquema que Coelho (2010) utilizou para sistematizar as diversas representações matemáticas externas, bem como no modelo de Bruner (1999).

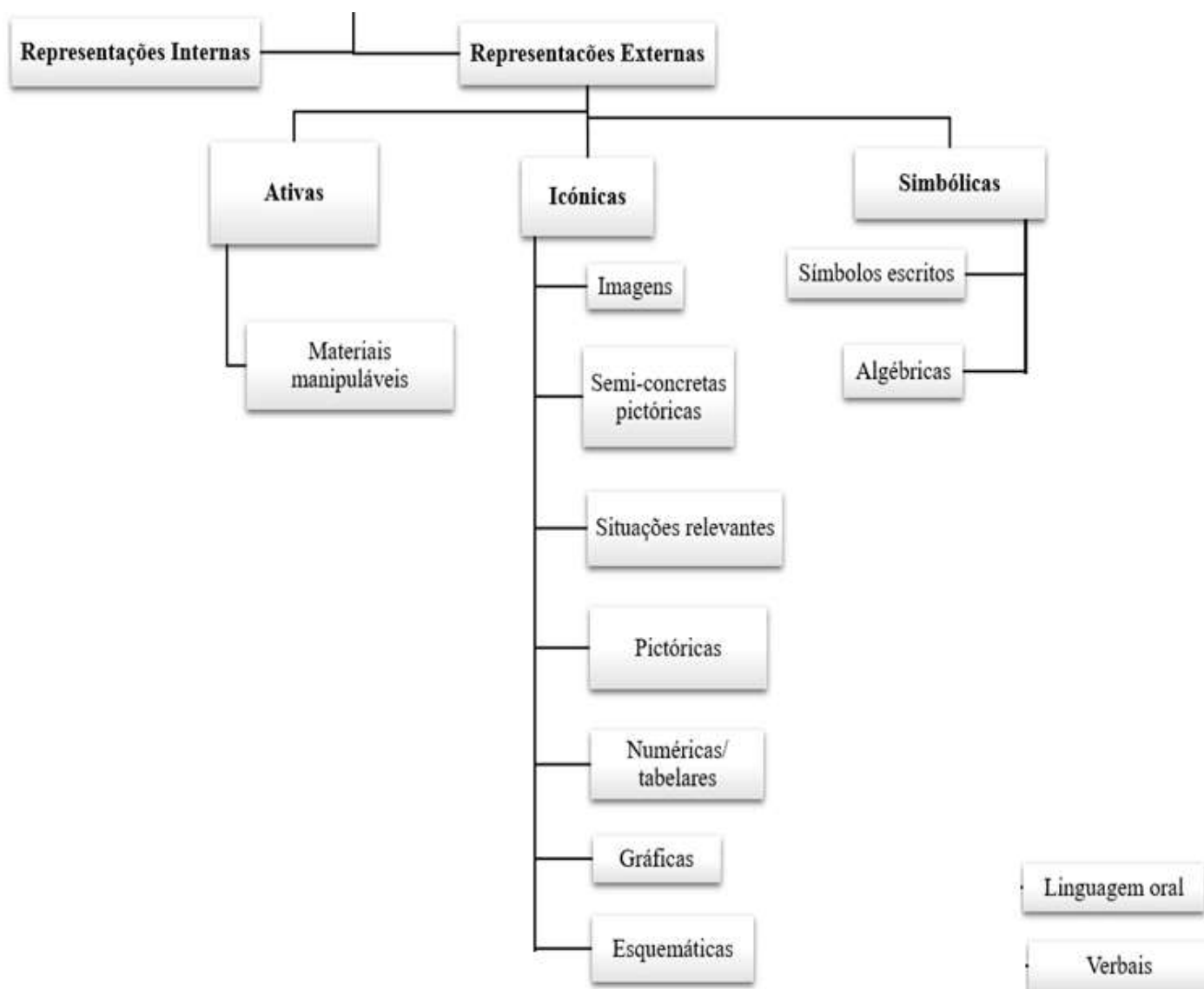


Figura 2 - Adaptação do modelo apresentado por Coelho (2010)

Como a figura 2 ilustra foquei-me nas representações externas, uma vez que só terei acesso a este tipo de representar conceitos. Partindo dos três tipos de representações do conhecimento de Bruner, agrupei os tipos de representações das ideias matemáticas, indicadas pelos autores que fui referindo ao longo da secção, em três grandes grupos (Ativas, Icônicas, Simbólicas). Destaco também que as linguagens orais e verbais se encontram externas ao esquema, porque englobam aspetos das representações icônicas e simbólicas.

Após referir todas estas tipologias de representar o conhecimento, é necessário destacar a importância do estabelecimento de conexões entre representações. Como referem Boavida et al. (2008), “estas diferentes possibilidades de representação não devem ser entendidas como autónomas, independentes ou alternativas umas às outras. Na verdade, podem ser usadas simultaneamente ou segundo várias combinações que estão presentes ao longo de toda a vida” (p. 71). Neste âmbito, estas autoras referem um modelo (figura 3) que pode ser favorável ao professor, para guiar o seu trabalho. As mesmas autoras remetem-se exclusivamente para as representações de conceitos matemáticos, ao incluir os materiais manipuláveis e objetos nas representações ativas; as imagens, os desenhos e os esquemas nas representações icónicas e, por fim, as representações simbólicas compreendem os símbolos, vocabulário matemático e linguagens.



Figura 3 - Modelo de Boavida et al. (2008, p. 72)

Ao analisar o esquema anterior, compreendo que todas estas formas de representar o conhecimento matemático estão interligadas: destaca-se “a importância de enfatizar as conexões entre as diferentes representações, traduzidas pelas setas do esquema” (idem, p. 72).

Para Clemente (2004), o uso dos cinco tipos de representações que sugere, pode proporcionar aos alunos uma acessibilidade aos saberes matemáticos. O seu conhecimento é vantajoso para refletir sobre qual das representações será mais significativa para os alunos quando são introduzidas novas ideias matemáticas. Para este autor os cinco tipos de representações descritas anteriormente são fundamentais, embora

deva existir uma sequência entre eles, devendo-se começar pelas mais significativas para os alunos. A figura 4 ilustra estes tipos e as conexões entre eles.

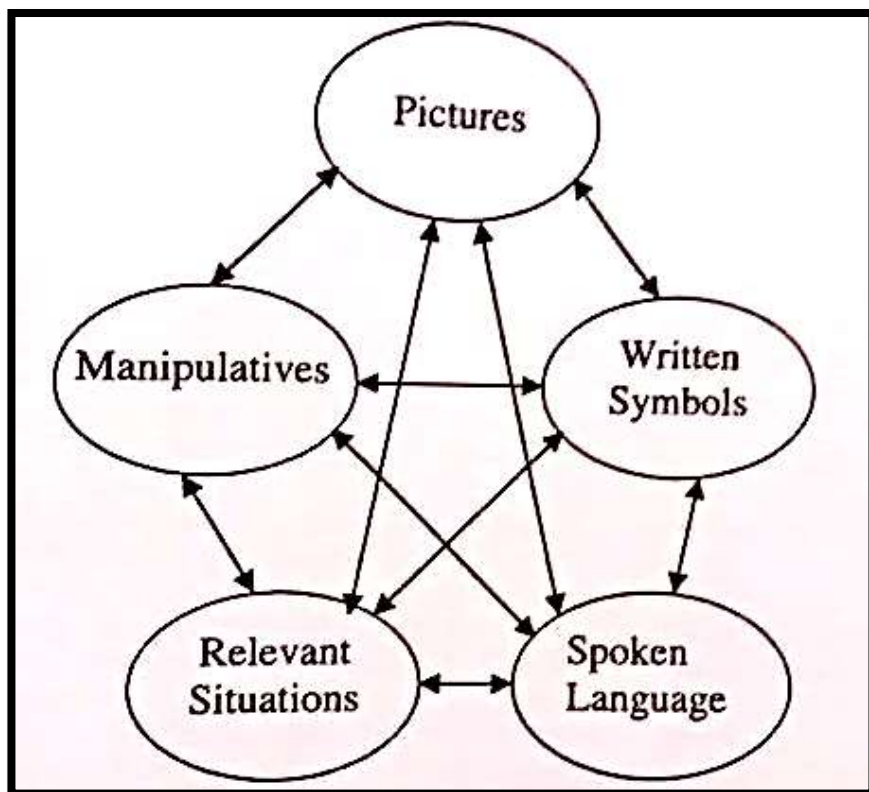


Figura 4 - Os cinco tipos de representações de Clement, 2004,( p.100)

Para Clement (2004), o modelo apresentado na figura 4 é benéfico para selecionar uma ordem para apresentar as representações. Esta sequencialidade, bem como a conexão entre as representações são cruciais na compreensão dos conceitos. A análise desta figura, revela-nos a interdependência entre as diferentes representações, salientando que qualquer representação se pode apoiar noutra, destacando a relevância dos alunos poderem contactar com diversas formas de representar e estabelecer relações entre as representações.

Em suma, destaco a existência de um leque diversificado de modelos de representações do conhecimento. Todavia, estes encontram-se inter-relacionados e é fundamental estabelecer conexões entre as diferentes representações. Nesta medida, pode-se tornar crucial para a aprendizagem da Matemática o contacto com vários tipos de representações, uma vez que propicia a criação de novas representações por parte do

aluno, não ficando preso sempre ao mesmo gênero e possibilitando a evolução do mesmo. As representações de um conceito podem ter diversas interpretações. Os alunos necessitam de compreender as variadas formas de representar para aprenderem determinado conceito, cabendo ao professor valorizar cada tipo de representação e incentivar o progresso dos alunos. As conexões entre as representações são essenciais para esta aprendizagem, uma vez que apoiam as distintas formas de pensar de cada aluno e auxiliam na visualização das diversas perspectivas que surgem.

## Capítulo III - Metodologia

Este capítulo incide sobre a metodologia utilizada no desenvolvimento desta investigação. Foca-se nas principais opções metodológicas, nos processos de recolha de dados, que incluem a observação participante, a recolha documental e as entrevistas clínicas e, por último, no processo de análise dos dados recolhidos.

### 3.1 Principais opções metodológicas

Existe um leque variado de metodologias pelas quais se poderá optar para realizar uma investigação. Alami et al. (2010) referem que “a pertinência de um método deve ser avaliada à luz do objeto da pesquisa. Ela depende do seu contexto de utilização, dos objetivos determinados para a pesquisa e, mais globalmente, da questão a ser tratada” (p. 19).

Pretendia, analisar e compreender as representações utilizadas pelos alunos quando resolvem problemas matemáticos e quais os papéis destas representações no processo de resolução. Face a este objetivo e às questões que orientam o trabalho investigativo, optei por uma metodologia qualitativa de investigação.

Segundo Coutinho (2011), numa investigação qualitativa o objeto de estudo são “as intenções e situações, ou seja, trata-se de investigar ideias, de descobrir significados nas ações individuais e nas interações sociais a partir da perspectiva dos actores intervenientes no processo” (p. 26). Neste sentido, “a inter-relação do investigador com a realidade que estuda faz com que a construção da teoria se processe, de modo indutivo e sistemático, a partir do próprio terreno à medida que os dados empíricos emergem” (ibidem).

A investigação qualitativa tem, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), cinco características essenciais:

- ✓ “A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (p. 48). São os investigadores que recolhem a informação utilizando diversas técnicas num ambiente natural;

- ✓ “É descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números” (ibidem). Os investigadores “tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos” (ibidem), sendo que os seus objetivos passam por compreender todas as informações disponíveis sobre o que irão estudar;
- ✓ “Os investigadores interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos” (ibidem). Ou seja, o processo é mais relevante do que os resultados ou produtos;
- ✓ “Os investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva” (ibidem); são analisados com o intuito de se construir uma “teoria fundamentada”, tendo como ponto de partida questões mais vastas para progredir para questões específicas;
- ✓ “O significado é de importância vital na abordagem qualitativa” (ibidem), uma vez que possibilita a compreensão do sentido que os indivíduos de um contexto específico atribuem às situações.

No estudo que realizei, a fonte direta dos dados foi a atividade desenvolvida com alunos da turma do 3.º ano de uma escola localizada em Setúbal, em que os dados foram recolhidos por mim, num ambiente natural. Estes têm a forma de imagem, palavras e não apenas de números e, a sua análise, visava compreender o que os alunos pensavam e diziam durante o processo de resolução de problemas, ou seja, era essencial entender o significado que atribuíam à sua atividade. Como tal, o estudo em questão constitui, também, uma investigação sobre a própria prática (Ponte, 2002).

A investigação sobre a prática caracteriza-se pelo investigador não estudar objetos, mas sim aspetos da sua prática profissional, entre os quais se inclui a atividade dos alunos, tendo por ponto de partida uma pergunta a que se pretende responder. Além disso, “assenta, sobretudo, em duas condições. Por um lado, é preciso ter uma disposição para questionar, o que remete para o campo afectivo e para o campo das atitudes. Por outro lado, é necessário o domínio de certo *savoir faire*, incluindo o uso de diversos instrumentos metodológicos” (Ponte, 2002, p. 11).

Segundo Ponte (2002),

a investigação sobre a prática pode ter dois tipos principais de objectivos. Por um lado pode visar principalmente alterar algum aspecto da prática, uma vez estabelecida a necessidade dessa mudança e, por outro lado, pode procurar compreender a natureza dos problemas que afectam essa mesma prática com vista à definição, num momento posterior, de uma estratégia de acção (p. 2-3).

Neste tipo de investigação, o professor tem um duplo papel: o de professor e o de investigador. Trata-se do que, por exemplo, Alarcão (2001) designa por professor-investigador:

ser professor-investigador é, primeiro que tudo, ter uma atitude de estar na profissão como intelectual que criticamente questiona e se questiona (...) e ser capaz de se organizar para, perante uma situação problemática, se questionar intencional e sistematicamente com vista à sua compreensão e posterior solução (p. 6).

Quando investiga a sua própria prática, o docente, de acordo com Ponte (2002), “pode tomar como ponto de partida problemas relacionados com os alunos e a aprendizagem, mas também com as suas aulas, a escola ou o currículo” (p. 11). Segundo este autor, para efetuar uma investigação sobre a própria prática, é indispensável possuir-se uma atitude de questionamento e, simultaneamente, reflexiva, assim como “uma predisposição para examinar a sua própria prática de uma forma crítica e sistemática” (ibidem).

Realizei uma investigação sobre a prática porque, a meu ver, este tipo de investigação é adequado ao projeto que desenvolvi, incluindo aqui o objetivo e questões de investigação formulados. Além disso, é relevante face ao contexto em que este estudo se desenvolveu: um contexto de estágio. Com efeito, de acordo com Arends (1995), a investigação sobre a prática poderá ser “um excelente guia para orientar as práticas educativas, com o objetivo de melhorar o ensino e os ambientes da sala de aula” (p. 45). Optei por um tema que me suscita interesse e que considero útil para a minha formação. Simultaneamente, uma investigação sobre a prática tem um cariz reflexivo e pode contribuir para melhorar a acção, sobre a temática que se estuda.

### 3.2 Processo de recolha de dados

Boddan e Biklen (1994) mencionam que existem diversos métodos que podem ser usados para recolher dados, entre os quais estão: a análise documental; a observação, registada, nomeadamente através de fotografias, áudio e vídeo gravações e notas de campo; e entrevistas.

Este estudo constitui uma investigação qualitativa, como mencionei anteriormente. Para recolher dados empíricos optei, sobretudo, pelos seguintes métodos: observação participante, análise documental e entrevistas (entrevistas clínicas). Além disso, durante a observação estabeleci conversas informais com a professora cooperante e com os alunos, que registei em notas de campo que me auxiliaram na análise dos documentos produzidos pelos alunos. A tabela 4 sintetiza os principais métodos utilizados, incluindo em cada, a origem dos dados (fontes), a forma de registo e o material empírico analisado.

<b>Métodos utilizados</b>	<b>Fontes</b>	<b>Registo</b>	<b>Material empírico</b>
Observação participante	Aulas em que os alunos resolvem problemas	Gravação áudio e vídeo das aulas; Notas de campo	Fotografias; Transcrição de extratos de aulas; Documentos com notas de campo
Análise documental	Alunos	Produções dos alunos	Produções dos alunos
Entrevistas (entrevistas clínicas)	Dois alunos	Gravação áudio das entrevistas; Produções dos alunos	Transcrição integral das entrevistas; Produções dos alunos

*Tabela 4 - Métodos de recolha de dados utilizados: fontes, registo e material empírico*

O processo de recolha de dados decorreu ao longo de 12 semanas, durante os meses de março a maio, do ano letivo 2016/2017. No desenrolar da primeira semana de estágio, destinada exclusivamente à observação, foi meu objetivo tentar compreender se os alunos estavam familiarizados com a atividade de resolução de problemas e se fazia parte das suas rotinas de sala de aula a partilha e a discussão das suas estratégias de resolução. Constatei que tinham por hábito explorar problemas e, em conversa com a professora cooperante, depreendi que alguns resolviam problemas com mais facilidade do que outros. Por exemplo, por vezes, eram capazes de expor as suas estratégias, mas tinham dificuldade em estabelecer conexões entre as várias representações que surgiam durante o processo de resolução de um determinado problema.

Nas semanas seguintes propus seis problemas em sala de aula: um em cada semana. No final do estágio, e porque considerei essencial compreender, com maior profundidade, que representações usavam os alunos para resolver problemas e as funções que desempenharam no processo de resolução, decidi realizar entrevistas clínicas a dois alunos da turma. Com efeito, ao longo das aulas fui-me apercebendo que nem sempre conseguia entender as razões pelas quais os alunos optavam por uma ou outra forma de representação.

### **3.2.1 Observação participante**

A observação é um método de recolha de dados, em que se “observa em directo e presencialmente o fenómeno em estudo” (Coutinho, 2011, p. 317). A observação tem uma vantagem sobre os outros métodos, nomeadamente estarmos presentes no momento em que esta ocorre. Contudo, como menciona Afonso (2005), há que ter cuidados, como por exemplo, a falta de rigor durante a observação, sendo que o professor/investigador “deve descrever as próprias observações e não as inferências elementares derivadas dessas observações” (Pelto e Pelto, citados por Afonso, 2005, p. 94).

A observação pode ser participante ou não-participante. Nesta investigação optei pela observação participante, que “consiste na participação real do observador na vida da comunidade, do grupo ou de uma situação determinada. Neste caso, o observador assume, pelo menos até certo ponto, o papel de um membro do grupo” (Gil, 1991, p. 108). Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 90) a “observação participante é a melhor técnica de

recolha de dados neste tipo de estudos”. Proporciona, como o nome indica, a observação direta do contexto e possibilita uma interação entre o investigador e os alunos. Numa sala de aula ocorrem inúmeras interações entre os alunos e é importante registar estas interações, nomeadamente os momentos em que os alunos expõem as suas estratégias de resolução de tarefas propostas.

Este método, na maioria das vezes, é sustentado por meios que possibilitem o registo de dados associados à observação como, por exemplo, em suporte áudio, fotografias e vídeos. Posteriormente à observação podem ser elaboradas notas de campo. As notas de campo, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 150) constituem “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo”. Estas podem auxiliar o investigador a observar os progressos que o projeto poderá compreender e visualizar como é que o plano de investigação foi estabelecido no desenrolar do tempo.

Com o intuito de compreender as estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas, incluindo aqui as representações a que recorriam, foi necessário interpelar os alunos sobre o que estavam a fazer, com o objetivo de explicarem o seu raciocínio. Com efeito, e como bem salienta Canavarro (2003, p. 195), “o significado revela-se tanto na acção como no discurso. O fazer e o dizer são ambos da mesma moeda e devem ser associados para a compreensão do significado de qualquer situação”.

As notas de campo podem, também, ter uma vertente reflexiva, ou seja, incluir “material reflexivo, isto é, notas interpretativas, interrogações, sentimentos, ideias, impressões que emergem no decorrer da observação ou após as primeiras leituras” (Esteves, 2008, p. 88).

No âmbito da observação participante recorri também, a conversas informais, registadas em notas de campo, quer com os alunos quer com a professora cooperante. Estas “conversas informais baseiam-se em questões que surgem, naturalmente, da interação entre as pessoas, muitas vezes no decurso da recolha de dados, durante a observação participante” (Mendes, 2012, p. 190, referindo Patton). Inicialmente, através de conversas com a docente compreendi que a turma tinha contacto regular com a resolução de problemas. Nas suas rotinas encontravam-se momentos, em que tinham de expor os seus raciocínios e onde partilhavam as diversas estratégias de resolução.

Posteriormente, também obtive, em conversa com a docente, dados sobre os conhecimentos e dificuldades dos alunos.

Concomitantemente fui, também, conversando com os alunos, para identificar as dificuldades, as capacidades, os modos de pensar e os raciocínios durante as atividades de resolução de problemas. Considero que estes diálogos, nos momentos de exploração das tarefas, me ajudaram em algumas circunstâncias, a compreender os seus raciocínios.

### **3.2.2 Análise documental**

A análise documental refere-se a “fontes de «papel» [que] muitas vezes são capazes de proporcionar ao pesquisador dados suficientemente ricos para evitar a perda de tempo com levantamentos de campo, sem contar que em muitos casos só se torna possível a investigação social a partir de documentos” (Gil, 1991, p. 158). Esta “pode relevar-se uma fonte de dados extremamente importante” (Johnson, citado por Bell, 2004, p. 101). Estes documentos podem ser primários ou secundários. As fontes primárias “são aquelas que foram produzidas durante o período a ser investigado” (Bell, 2004 p. 104).

Os documentos utilizados na análise documental são, sobretudo, as produções dos alunos sobre a resolução dos problemas matemáticos propostos ao longo das semanas de estágio e durante as entrevistas clínicas. Como tal, estes documentos são fontes primárias. A análise dos documentos concebidos pelos alunos tem um papel crucial nesta investigação: Máximo-Esteves (2008) mencionam que a “análise dos artefactos produzidos pelas crianças é indispensável quando o foco da investigação se centra na aprendizagem dos alunos” (p. 92) e Bodgan e Biken (1994) afirmam que estes caracterizam-se por registos individuais das crianças que podem indicar os conhecimentos e raciocínios dos alunos. Os documentos elaborados pelos alunos baseiam-se no registo escrito das estratégias que utilizaram para a resolução de problemas. Para compreender as estratégias dos alunos, sempre que considere pertinente, interpelei os alunos para explicarem o seu raciocínio.

### 3.2.3 Entrevistas clínicas

As entrevistas clínicas são caracterizadas por ser um género de entrevistas em que através de questões formuladas, se tenta esclarecer a conduta e os sentimentos do entrevistado. Tal como Hunting (1997) refere

As entrevistas clínicas são um meio pelo qual os professores podem observar e interpretar, isto é, avaliar o comportamento matemático dos alunos. As entrevistas clínicas também fornecem as bases para intervenções nas quais estratégias, atividades e configurações explícitas são projetadas para se adequar ao estado atual do conhecimento de matemática dos alunos. Tais intervenções, provenientes de uma profunda compreensão do pensamento do aluno, podem ajudar a impulsioná-los a concepções eficazes (p. 162).

Estas entrevistas têm como objetivo entender o processo de ensino e de aprendizagem da criança e podem, também, fornecer dados adicionais para a avaliação e para amplificar o conhecimento sobre as concepções dos alunos. Os investigadores ou professores apresentam problemas ao aluno e dialogam sobre o raciocínio apresentado, com diversos propósitos, entre eles de aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem:

Há mais semelhanças do que diferenças entre as funções do investigador e do professor pois ambos estão profundamente interessados em entender como as crianças pensam e aprendem. Ambos estão comprometidos com a recolha e a interpretação de evidências sobre a aprendizagem das crianças. O professor precisa de o fazer para tomar decisões sobre como construir o currículo de modo a facilitar o contínuo progresso dos alunos. O pesquisador precisa de o fazer como parte do processo de geração de conhecimento envolvendo a construção de teoria, o seu teste e reconstrução (Hunting, 1997, p. 162).

Hunting (1997) considera que numa entrevista clínica tem de existir um ambiente descontraído e uma relação de confiança entre o aluno e o entrevistador, tornando-se essencial explicitar, logo de início, que o importante não é a resposta obtida, mas sim o caminho que percorreu para chegar ao resultado.

Como referi, realizei entrevistas clínicas, a dois alunos da turma, Tiago e Simão. Decorreram numa das salas da instituição e o ambiente foi calmo, tranquilo e com privacidade. Considerei que estas foram fundamentais para ter uma visão aprofundada do

modo como estes pensaram e para compreender as suas estratégias, perspectivas e dificuldades.

Os dois alunos foram selecionados segundo determinados critérios: serem bons comunicadores, utilizarem diversas formas de representar ideias matemáticas, pertencerem a grupos de trabalho diferentes e estarem motivados para resolver os problemas. Escolhi dois problemas que pudessem ser resolvidos recorrendo a diversas representações e, potencialmente, que fossem cativantes para os alunos. Propus ambos os problemas aos dois alunos, mas em dias diferentes, ou seja, num dos dias realizei duas entrevistas uma a Tiago e a Simão, onde estes alunos foram desafiados a resolver um dos problemas. Subsequentemente segui o mesmo procedimento, apresentando o segundo problema. Realizei assim, quatro entrevistas clínicas em que recorri à gravação áudio e, posteriormente à transcrição, na íntegra, das gravações.

### **3.3 Processo de análise de dados**

Após a recolha dos dados seguiu-se a fase de análise de dados que é um

processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a (...) compreensão [do investigador, sobre esses] materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou (Bogdan e Biklen, 1994, p. 205).

Face ao objetivo e questões do estudo, optei por uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas:

um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (Bardin, 1977, citando Henry e Moscovici, p. 42).

O processo de análise foi desenvolvido em três etapas. Na primeira houve uma maior ênfase na ação. Nela recolhi as produções escritas dos alunos referentes à exploração das tarefas matemáticas, elaborei as notas de campo e analisei, por alto, o modo como os alunos estavam a reagir nos momentos de resolução de problemas. Todavia não era minha intenção, enquanto decorresse o estágio, desenvolver uma análise

intensiva e pormenorizada, pois o meu foco era adequar as tarefas, tentando gerar novas aprendizagens. Nesta etapa o objetivo passava por analisar e observar o trabalho que os alunos iam desenvolvendo, de modo a adequar o meu modo de agir ao contexto de sala de aula. Esta primeira etapa foi crucial, pois possibilitou observar “comportamentos no momento em que eles se produzem em si mesmos, sem a mediação de um documento ou um testemunho” (Quivy e Campenhoudt, 2005, p. 196). Também, na primeira fase, selecionei os dois alunos e realizei as entrevistas clínicas.

Na segunda fase da análise de dados, concretizada posteriormente à recolha dos referidos dados, transcrevi os extratos das gravações feitas na sala de aula e as entrevistas clínicas realizadas a Tiago e Simão. Além disso, atentei nos documentos produzidos por estes dois alunos. Foquei-me, primeiramente, nas estratégias que utilizaram, nos seis problemas resolvidos em contexto de sala de aula e, posteriormente, nos dois problemas referentes às entrevistas clínicas. Saliento que, durante estes momentos, apoiava-me nas transcrições previamente elaboradas, de modo a compreender os seus raciocínios. Foi nesta segunda fase de análise que, tendo por referência as minhas questões de investigação e o enquadramento teórico do estudo, defini o quadro orientador da análise considerando duas categorias. Baseando-me em Canavarro e Pinto (2012), considerei que uma das categorias seria as representações usadas e a outra as funções destas representações (tabela 5).

<b>Representações usadas</b>	<b>Funções das representações</b>
<p>Tipo: representações ativas, icónicas (desenhos, símbolos não convencionais e diagramas) e simbólicas;</p> <p>Quando são usadas</p>	<p>Interpretar a situação; estabelecer relações matemáticas; desocultar a estrutura matemática; obter a solução; rever o processo de resolução e explicar e/ou justificar o processo de resolução</p>

*Tabela 5 - Categorias de análise*

Na terceira etapa elaborei uma primeira versão do capítulo referente à análise de dados (capítulo IV). No decurso do processo para referir episódios extraídos da transcrição das entrevistas clínicas e episódios relativos à exploração dos problemas em contexto de sala de aula, utilizei diversas siglas apresentadas na tabela 6.

<b>Sigla</b>	<b>Significado</b>
A – BC	Aula – tarefa “Brincando com conchinhas”
A – VB	Aula - tarefa “O voo das bruxas”
A – A	Aula – tarefa “Os abraços”
A – LCA	Aula – tarefa “Lanche na casa da avó”
ET1 – LS	Primeira entrevista realizada ao Tiago – tarefa “Os lembretes da Sofia”
ET2 – RPM	Segunda entrevista realizada ao Tiago - tarefa “O restaurante dos pais da Maria”
ES1 – LS	Primeira entrevista realizada ao Simão – tarefa “Os lembretes da Sofia”
ES2 – RPM	Segunda entrevista realizada ao Simão - tarefa “O restaurante dos pais da Maria”

*Tabela 6 - Siglas utilizadas e os seus significados*

Comecei por me centrar na descrição dos principais contornos da intervenção pedagógica. Em seguida, analisei o discurso e produções de Tiago e, seguidamente, procedi do mesmo modo relativamente a Simão. Por fim, acabei de redigir o presente documento.

## **Capítulo IV - Análise de dados**

Este capítulo está organizado em três secções principais. Na primeira foco-me na intervenção pedagógica que realizei no contexto de estágio. Na segunda e terceira analiso as resoluções de Tiago e Simão aos problemas apresentados em contexto de sala de aula, bem como aos propostos nas entrevistas clínicas. Nelas procuro descrever, caracterizar e identificar as representações matemáticas utilizadas para resolver os referidos problemas, bem como as suas funções.

### **4.1 Intervenção pedagógica**

Esta secção tem como principal objetivo apresentar o contexto de desenvolvimento do estudo bem como descrever, globalmente, a intervenção pedagógica que realizei. Começo por focar-me na caracterização da escola e da turma. Em seguida, centrar-me-ei na descrição da intervenção e, por fim, nos problemas apresentados à turma e propostos nas entrevistas clínicas.

#### **4.1.1 Contexto do estudo: A escola e a turma**

A escola de 1.º ciclo em que decorreu o meu estágio pertence à cidade de Setúbal. É uma instituição pública do Ministério da Educação localizada na periferia oriental da cidade em bairros de habitação económica. A população escolar é, na sua maioria, carenciada e desfavorecida economicamente. Na zona da cidade em que se situa a escola, habitam pessoas provenientes de países africanos de língua oficial portuguesa, emigrantes brasileiros e de países de Leste Europeu e um número significativo de membros da comunidade cigana. De acordo com o Projeto Educativo do Agrupamento (2013-2017), por existir uma multiplicidade cultural e étnica, a convivência entre todos os membros, por vezes, não é pacífica, havendo, frequentemente, conflitos raciais.

Na escola há atividades de enriquecimento curricular desenvolvidas em parceria com a Câmara Municipal de Setúbal. As crianças têm oportunidade de frequentar atividades de Inglês, Expressão Física e Motora, Música e Artes, lecionadas fora do horário da professora titular da turma. Para além destas atividades, existe o Apoio ao

Estudo, que todos os alunos podem frequentar, da responsabilidade de professoras a quem não foi atribuído um horário e uma turma. Este apoio tem como intuito auxiliar as crianças com maiores dificuldades.

Em termos de infraestruturas, há um computador por sala de aula. Contudo, só algumas salas é que usufruem de quadros interativos. O edifício tem dois pisos. Para além das salas de aulas do 1.º ciclo, há uma de multideficiência e uma de pré-escolar, biblioteca, salas de apoio ao estudo, laboratório de ciências, auditório, campos desportivos e outros espaços usuais numa escola, como por exemplo, um refeitório e um ginásio.

As famílias dos alunos que integram este agrupamento são, frequentemente, destruturadas ou mono parentais. De acordo com o Projeto Educativo do Agrupamento (2013-2017), este aspeto, a par de outros fatores anteriormente referidos, vai-se refletir na escola, surgindo o insucesso, o abandono escolar, a falta de assiduidade, a indisciplina, a violência, os comportamentos de risco e a incursão precoce na marginalidade. Perante estas dificuldades emergentes, a escola e os professores tentam procurar soluções para determinar qual a melhor forma de agir para lidar com os acontecimentos que surgem.

A turma em que realizei o estágio pertencia ao 3.º ano de escolaridade e era composta por 23 crianças: 14 rapazes e 9 raparigas. Nenhuma estava diagnosticada como tendo Necessidades Educativas Especiais. Os alunos estavam organizados em quatro grupos de trabalho. A constituição destes grupos foi delineada pela professora cooperante e ia sofrendo alterações sempre que esta considerasse pertinente.

Os referidos grupos eram formados, segundo a professora cooperante, pelos níveis de desempenho dos alunos, ou seja, procurava que fossem homogéneos face ao seu desempenho. Havia três grupos cujos alunos, aparentemente, se encontravam equilibrados quanto ao nível de desenvolvimento e que conseguiam realizar positivamente as tarefas propostas. Os do quarto grupo tinham algumas dificuldades em Matemática: em quatro dos seus elementos as dificuldades eram notórias, apesar de não usufruírem de outro apoio, além do apoio semanal ao estudo. Dadas estas características, este grupo, na maioria das vezes, não conseguia resolver as atividades que propunha à turma. Os alunos escolhidos para as entrevistas clínicas pertenciam a grupos distintos e nenhum integrava o grupo com mais dificuldades.

Concluindo, o contexto em que realizei o estágio tinha características que podiam constanger a aprendizagem. Tal como refere o Projeto Educativo do Agrupamento (2013-2017), entre estas estão o défice no acompanhamento da vida escolar dos alunos por parte dos pais, o baixo nível de escolaridade dos mesmos, agregados familiares carenciados e insuficiente apoio especializado aos alunos com dificuldades de aprendizagem. Em contrapartida havia, também, pontos fortes. Por exemplo, a diversidade cultural e étnica, a estabilidade do corpo docente e a diversidade de ofertas educativas, que poderiam contribuir para criar ambientes propícios à aprendizagem. A turma em questão era motivada, trabalhadora e possuía alguma autonomia na realização das tarefas. De acordo com a professora cooperante, os alunos estavam habituados a resolver problemas e a expor as suas ideias no que se referia à disciplina de Matemática.

#### 4.1.2 Descrição da intervenção pedagógica

A intervenção pedagógica, em que se enquadrou o desenvolvimento do estudo que apresento, decorreu ao longo de doze semanas. Neste período, entre o dia 6 de março de 2017 e o dia 23 de maio de 2017, apresentei um problema por semana no horário que a professora cooperante disponibilizou. A tabela 7 mostra a data em que foi proposto cada um dos seis problemas trabalhados, bem como o tempo dedicado à sua exploração.

<b>Problema</b>	<b>Data</b>	<b>Tempo de exploração</b>
<b>Problema 1: Brincando com conchinhas</b>	27/3/2017	1 hora
<b>Problema 2: A rã saltitona</b>	26/4/2017	2 horas
<b>Problema 3: O voo das bruxas</b>	2/5/2017	1 hora
<b>Problema 4: Os abraços</b>	10/5/2017	1 hora e 40 minutos
<b>Problema 5: O lanche na casa da avó</b>	16/5/17	1 hora e 30 minutos
<b>Problema 6: Organizando os Minions</b>	23/5/17	1 hora

*Tabela 7 - Exploração dos problemas: calendarização*

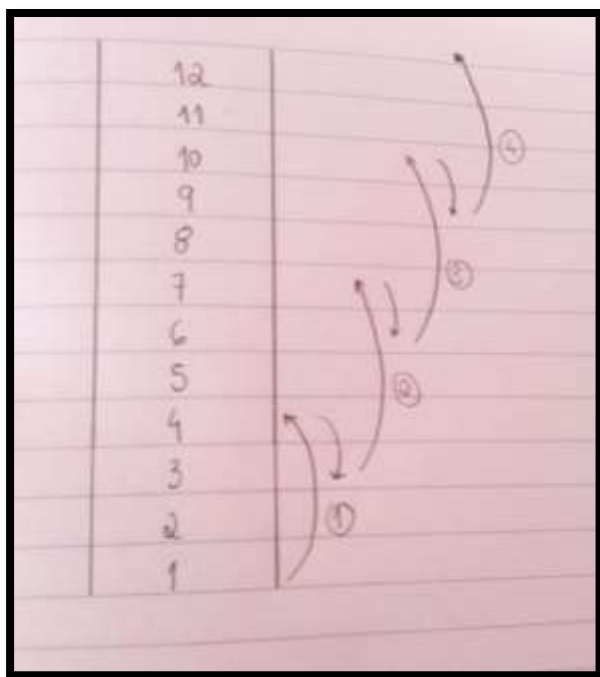
Os seis problemas, relacionados com o domínio Números e Operações, foram propostos, tendo por referência o objetivo e questões do estudo, durante o 2.º e 3.º

períodos letivos. Durante o tempo dedicado à intervenção pedagógica, reuni com a professora que orientava este projeto para delinear os problemas a apresentar e definir estratégias de intervenção que tivessem em conta as dificuldades que ia sentindo ao longo do estágio.

Para conceber, globalmente, as aulas em que iria explorar os problemas, tive por referência o modelo das cinco práticas referido por Smith et al. (2009), que compreende:

1. Antecipar as resoluções dos alunos a tarefas matemáticas desafiadoras;
2. Monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas;
3. Selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho;
4. Sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas;
5. Estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas importantes.

Antes de propor os problemas à turma, tentava prever possíveis resoluções que os alunos poderiam seguir. Esta previsão vai ao encontro da primeira prática referida por Smith et al.: “é necessário considerar como poderão os alunos interpretá-la matematicamente, identificar o conjunto de estratégias (correctas e incorrectas) que poderão usar e de que forma tudo isto se poderá relacionar com as ideias matemáticas que pretende que os alunos aprendam” (PFCM, 2009-2010, p. 2). Esta prática foi importante pois dotou-me de recursos que me ajudaram a preparar-me para as restantes práticas referidas pelas autoras em que se incluem os momentos dedicados à partilha de estratégias de resolução de problemas, o estabelecimento de conexões inter resoluções e entre estas e ideias matemáticas importantes. A figura 5 exemplifica uma possível resolução do problema “A rã saltitona”, que elaborei no meu caderno de apoio às aulas.



*Figura 5 - Possível resolução do problema "A rã saltitona"*

Relativamente a cada um dos problemas indicados na tabela 7, começava por informar os alunos que iriam resolver um problema e distribuía, por cada um, uma folha que tinha o seu enunciado e um espaço dedicado à resolução. Sublinhava que era essencial que registassem todos os passos para chegar à resolução do problema. Apesar de tentar que os alunos, sozinhos, tentassem resolver o problema, não os impedia de trocar impressões com os colegas do lado.

A exploração dos problemas era realizada em diversas fases. A primeira fase era dedicada ao que Polya (1945) designa por compreensão do problema. Depois de cada aluno ter o enunciado, escolhia um para o ler e, posteriormente, o explicar à turma por palavras suas. O episódio 1 ilustra esta situação bem como o que subsequente fazia no que se refere ao problema “Brincando com conchinhas”.

#### **Episódio 1**

1. **Professora:** então quem é que me conta por palavras suas a história?
2. **Margarida:** a Joana e a Inês foram à praia e enquanto brincaram decidiram apanhar conchinhas. A Joana apanhou 10 e a Inês 8. A Joana teve a ideia de dar algumas conchinhas à professora.
3. **Professora:** o que é que elas queriam fazer? Queriam dar as conchinhas, mas...
4. **Gonçalo:** queriam dividir com a professora.

5. **Simão:** mas as três tinham que ter o mesmo número.
6. **Professora:** já lemos e interpretamos a história. E qual é a pergunta?
7. **Vítor:** com quantas conchinhas ficou cada pessoa no final da distribuição?
8. **Professora:** e agora o que vamos fazer?
9. **Todos:** selecionar os dados.
10. **Professora:** então e quais são os dados?
11. **Simão:** Joana 10 conchinhas, Inês 8 conchinhas.
12. **Professora:** e o que é que nós queremos saber?
13. **Ana:** quantas é que vão dar à professora e ficar para elas.
14. **Cristiano:** as três ficarem com o mesmo número.
15. **Professora:** agora vamos escolher uma estratégia e podem utilizar esquemas, desenhos, palavras, o que quiserem.

(A- BC)

Analisando o episódio 1, constata-se que Margarida (§ 2) explicou o problema por palavras suas na sequência de uma solicitação que fiz. Preocupei-me, também, em cada um dos problemas que identificassem os dados e a pergunta (§ 6 e §10). Além disso, antes de iniciarem a resolução, procurei analisar se os alunos tinham dúvidas na interpretação do enunciado, de modo a que estas fossem esclarecidas.

O segundo momento destinava-se à realização da tarefa pelos alunos, o que corresponde à segunda e terceira fases do modelo de Polya. Cada um tinha a oportunidade de escolher a estratégia de resolução que considerasse mais adequada. Nesta altura circulava na sala com dois objetivos. Um deles era monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento na tarefa (Smith et al., 2009). Era minha intenção “observar e tentar compreender os raciocínios matemáticos e estratégias de resolução que utilizam enquanto resolvem a tarefa individualmente ou em pequenos grupos” (PFCM, 2009-2010, p. 2) e, também, aceder às dúvidas dos alunos, tentando que as ultrapassem sem dizer como o fazer. Notei que na maioria dos problemas apresentados havia crianças que, ainda, precisavam de ajuda para compreender o enunciado e para delinear uma estratégia para a sua resolução.

O segundo objetivo era selecionar as resoluções que iriam ser apresentadas à turma (terceira prática de Smith et al.). Escolhia de forma ponderada quais os alunos que iam expor as suas estratégias, com o objetivo de existir um leque diversificado de modos de pensar sobre uma tarefa e de representar o conhecimento matemático.

A ordem pela qual os alunos iam apresentar as suas estratégias não era arbitrária, uma vez que “fazer escolhas intencionais sobre esta ordem é crucial, pois podem aumentar-se as hipóteses de se atingirem os objectivos matemáticos visados” (PFCM, 2009-2010, p. 2, referindo Smith et al.). Usualmente seriava as estratégias das que incluíam representações mais icónicas para as representações mais complexas, nomeadamente as simbólicas. A figura 6 ilustra as várias estratégias que foram seleccionadas no problema “A rã saltitona”. Comecei pela estratégia apresentada à direita que incluía um esquema, a seguir passei à resolução do centro, em que foi usada a linguagem natural (palavras) e um cálculo de verificação; por fim, surgiu a última estratégia, apresentada à esquerda, em que predominaram representações matemáticas simbólicas.

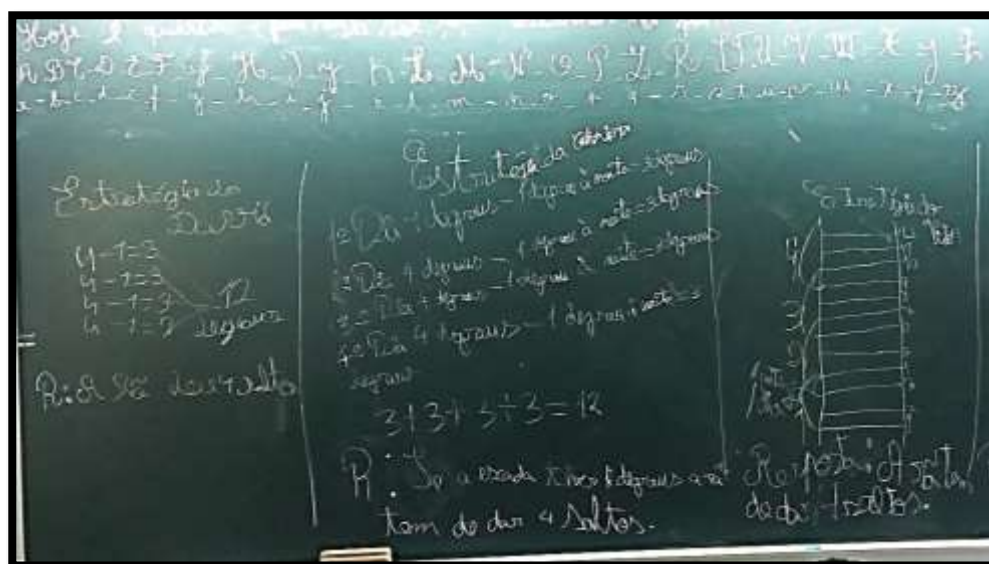


Figura 6 - Registo no quadro de estratégias de resolução do problema "A rã saltitona"

Durante a partilha das estratégias, todos os alunos tinham a oportunidade de participar, colocando questões sobre as resoluções apresentadas e debatendo aspetos particulares das estratégias e modos de pensar dos colegas: por exemplo, quais os mais adequados ou os mais simples. Nesta etapa incentivei e apoiei os alunos a compararem e estabeleceram ligações entre as estratégias apresentadas (5ª prática de Smith et al.). Quando as representações registadas no quadro eram diferentes das suas tinham que as

passar para o caderno, com o objetivo de, posteriormente, terem acesso a formas diferentes de resolver problemas.

No âmbito desta dinâmica houve uma decisão importante que tomei: a elaboração de um cartaz a afixar na sala (figura 7). Este cartaz surgiu na sequência da exploração do primeiro problema e reproduz um outro registo, apresentado pela professora cooperante, que possui exatamente a mesma informação e que os alunos já tinham no caderno. Decidi elaborar este cartaz, pois ao falar com a docente da turma constatei que os alunos, por vezes, se perdiam nas fases de resolução de problemas e que existiam algumas que lhes escapavam. Ao afixar o cartaz na sala de aula, eu e os alunos podíamos recorrer ao mesmo, para recordar estas fases.



Figura 7 - Cartaz sobre fases de resolução de problemas

Saliento que gerir o tempo, foi um aspeto difícil, pois, por vezes, era complexo prever o tempo que iria dispensar a cada momento. Quando os alunos apresentavam dificuldades em compreender o enunciado, era necessário investir mais tempo para que os momentos seguintes fossem mais facilitados. Pretendia que a dinâmica criada nas aulas

fosse caracterizada pelo envolvimento dos alunos. Uma outra dificuldade foi conseguir este envolvimento, no caso de os problemas serem apresentados no turno da tarde, em que as crianças tinham uma capacidade de concentração inferior. Um problema que me perturbou foi a entrada, na sala de aula, de elementos que não pertenciam à turma.

#### 4.1.3 As tarefas propostas em contexto de sala de aula

Pretendi selecionar tarefas que fossem desafiadoras, que constituíssem problemas para os alunos e que, ao mesmo tempo, lhes suscitassem interesse e permitissem o uso de várias estratégias de resolução. A tabela 8 apresenta as principais características dos problemas propostos durante a intervenção pedagógica.

<b>Problemas</b>	<b>Características</b>
“Brincando com conchinhas”	Problemas de cálculo envolvendo partilha equitativa, com números até 20.
“A rã saltitona”	Problema de processo associado às operações adição e subtração com números até 20.
“O voo das bruxas”	Problemas de processo envolvendo a decomposição de 20 em oito parcelas. Tem mais que uma solução.
“Os abraços”	Problema de processo envolvendo a identificação de regularidades.
“O lanche na casa da avó”	Problema de cálculo envolvendo partilha equitativa com números maiores que 20 e em que o dividendo não é múltiplo do divisor.
“Organizando os Minions”	Problema de processo envolvendo o uso do conhecimento de que $24+0=24$ e a decomposição de 24 em parcelas iguais. Tem várias soluções.

Tabela 8 - Características dos problemas apresentados

A tarefa **“Brincando com conchinhas”** (anexo I), referia duas meninas que tinham apanhado conchas na praia, sendo que uma tinha apanhado 10 e a outra tinha 8 conchas. O objetivo era distribuir as conchas de modo a que três pessoas ficassem com a mesma quantidade de conchas. Os alunos teriam de decidir quantas conchas teriam que retirar a duas pessoas, de modo a que as conchas fossem partilhadas equitativamente entre as três. Resolveram este problema através de várias estratégias, umas em que recorreram a representações icónicas, simbólicas ou em que surgiram os dois tipos de representações. As figuras 8 e 9 representam duas destas estratégias. Após a resolução, sucedeu-se uma discussão, onde escolhi três alunos para apresentarem as suas resoluções.

A partir da exploração deste problema, compreendi que quando os enunciados são extensos, os alunos têm uma maior dificuldade em focar-se no pretendido e em compreenderem qual a pergunta, o que levou a diversas respostas erradas.

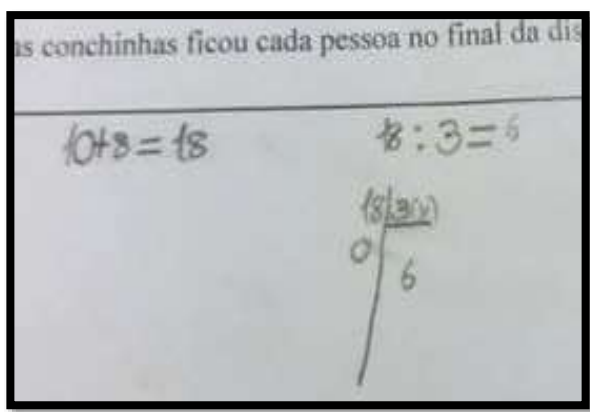


Figura 8 - Estratégia I de resolução do problema “Brincando com conchinhas” proposta pelos alunos

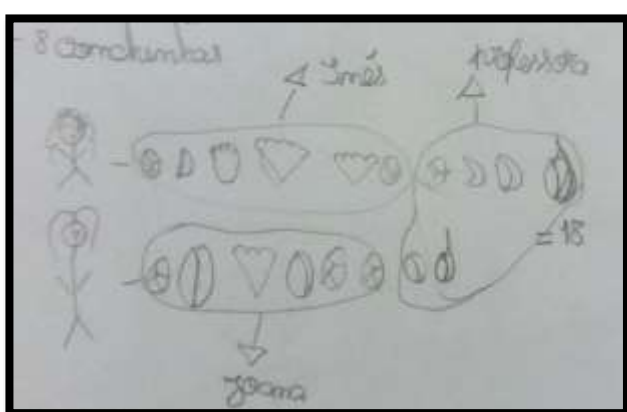


Figura 9 - Estratégia II de resolução do problema “Brincando com conchinhas” proposta pelos alunos

No problema **“A rã saltitona”** (anexo II), era apresentado uma rã que precisava de subir um poço com 12 degraus: durante o dia subia 4 e à noite descia 1 degrau. O objetivo era descobrir ao fim de quantos dias é que a rã chegava ao cimo do poço. Esta tarefa estava associada às operações adição e subtração de quantidades iguais, embora pudesse ser resolvida sem recorrer a estas operações. Despoletou alguma inquietação e entusiasmo nos alunos. Questionavam-se se seria possível resolver a tarefa, uma vez que a rã subia 4 degraus de dia e descia 1 degrau de noite. Aconselhei-os a tentar representar a rã a subir as escadas, na folha, supondo que a esquematização auxiliasse a resolução. No final, quatro alunos expuseram o seu raciocínio. A turma compreendeu que havia

várias formas de resolver a tarefa, mas que algumas estratégias eram mais simples e rápidas do que outras. As figuras 10 e 11 ilustram duas das estratégias apresentadas à turma.

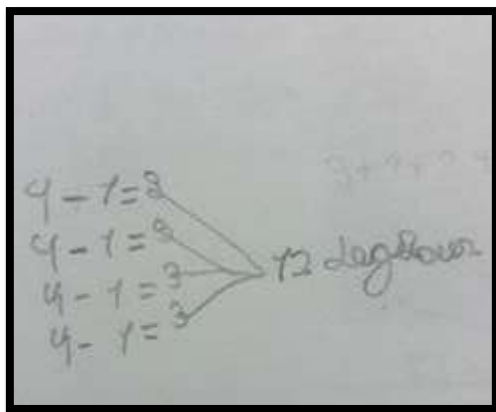


Figura 10 - Estratégia I de resolução do problema “A rã saltitona” proposta pelos alunos

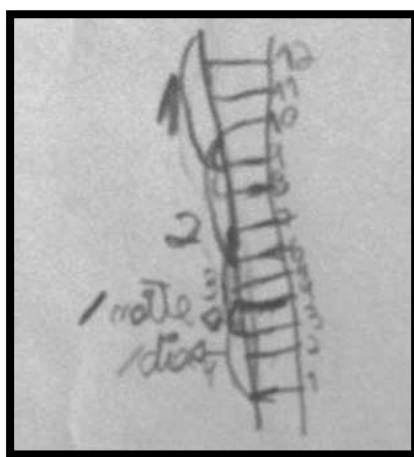


Figura 11 - Estratégia II de resolução do problema “A rã saltitona” proposta pelos alunos

A tarefa “**O voo das bruxas**” (anexo III), tinha como objetivo distribuir vinte bruxas por oito vassouras, de modo a que cada vassoura não tivesse mais que quatro bruxas, nem menos do que duas bruxas. Este problema trouxe algumas dificuldades aos alunos, pois não tinham em conta as condições apresentadas no enunciado e acabavam por fazer a distribuição das bruxas pelas vassouras ao acaso. Para chegarem à resolução correta, tinham que compreender os dados do enunciado, o que era solicitado e além disso, respeitar estas condições. Havia várias respostas corretas e quando escolhi quatro alunos para exporem as suas resoluções, foi minha intenção que compreendessem, nomeadamente que existem problemas que possuem mais que uma alternativa de resposta

certa. As figuras 12 e 13 ilustram duas estratégias diferentes, em que os alunos utilizaram representações icônicas e simbólicas para resolver o problema.

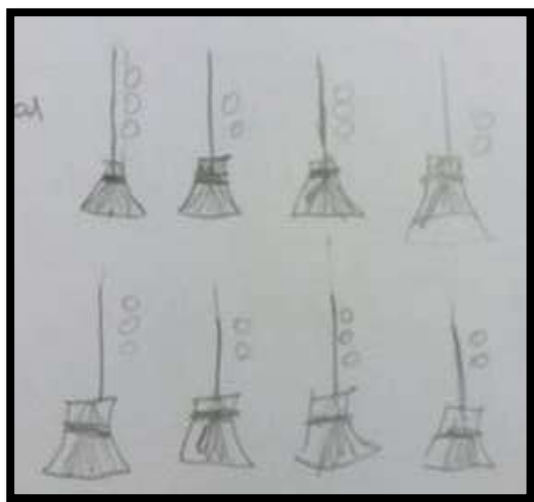


Figura 12 - Estratégia I de resolução do problema "O voo das bruxas" proposta pelos alunos

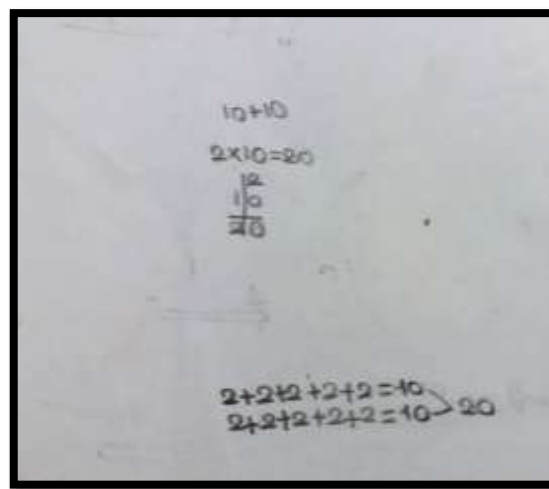


Figura 13 - Estratégia II de resolução do problema "O voo das bruxas" proposta

Na primeira estratégia (representação icônica), o aluno desenhou as vassouras e distribuiu as bruxas, pelas mesmas. As bruxas foram desenhadas através de pequenos círculos, denominados por símbolos não convencionais. A segunda estratégia (representação simbólica) apresenta operações de adição e multiplicação. Neste caso o aluno não teve em conta que só existiam 8 vassouras e distribuiu as 20 bruxas por 10 vassouras, 2 em cada, o que não corresponde a uma resposta correta.

O problema "Os abraços" (anexo IV), referia quatro amigos indicando que cada um deu um abraço aos outros e questionava quantos abraços deram no total. Posteriormente, era perguntado o mesmo, mas se fossem cinco e dez amigos. Com esta tarefa os alunos tinham que interpretar o enunciado e estabelecer relações entre o número de abraços e de amigos, para conseguirem determinar eficazmente a solução com números maiores. Ou seja, até quatro amigos poderiam resolver facilmente o problema, a partir de esquemas ou desenhos, mas quando o número de pessoas aumentava, a descoberta de regularidades simplificava a resolução. De início, senti que este problema estava a causar dificuldades aos alunos. Decidi, por isso, que seria útil dramatizar o problema e pedir a quatro alunos da turma que o fizessem. Esta dramatização permitiu que as dúvidas fossem esclarecidas. No final, foram escolhidos alunos com diferentes estratégias para mostrarem o seu raciocínio. A figura 14 ilustra uma das estratégias usadas para determinar o número

de abraços dados por quatro amigos. A análise desta estratégia permite evidenciar que o aluno, recorrendo a uma estratégia predominantemente icónica, foi capaz de compreender a estrutura matemática do problema.

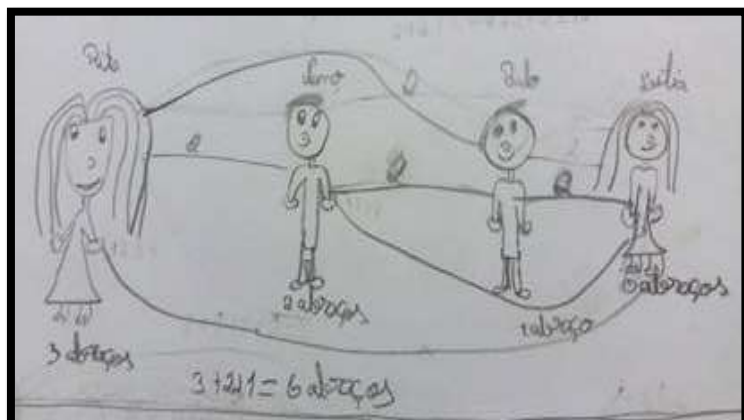


Figura 14 - Estratégias de resolução do problema “Os abraços” propostas pelos alunos

Na tarefa “**O lanche na casa da avó**”, anexo V, os alunos tinham que distribuir cinco embalagens de quatro iogurtes, que a avó comprou, pelos seis netos. Questionava-se para quantos dias chegariam os iogurtes, sabendo que cada neto só comia um iogurte por dia. Na segunda alínea, o processo era o mesmo, mas com dez embalagens de quatro iogurtes. Os alunos deviam estabelecer relações, uma vez que na alínea seguinte o número de iogurtes comprados aumentava. Neste problema, era necessário compreender que, em cada dia, todos os netos tinham que comer um iogurte, ou seja, que quando os iogurtes não chegassem para todos, num determinado dia, não podiam contabilizar esse dia. Por vezes, as estratégias utilizadas pelos alunos até estavam bem estruturadas e eram coerentes, mas a resposta era errada, por não terem em conta este facto e não pensarem que poderiam sobrar iogurtes. A figura 15 ilustra, precisamente esta situação. Um aluno, recorrendo a uma representação icónica distribuiu os iogurtes pelos netos, mas não considerou que no quarto dia, nem todos os netos comiam iogurtes e, por isso, este dia não devia ser contabilizado na resposta.

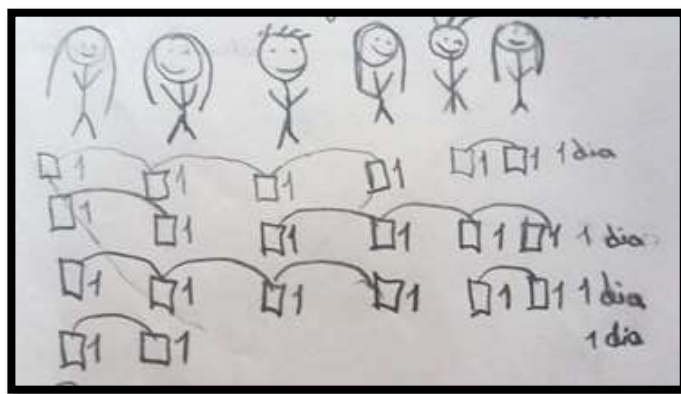


Figura 15 - Estratégias de resolução do problema “O lanche na casa da avó” propostas pelos alunos

Por último, o problema **“Organizando os Minions”**, anexo VI, tinha o objetivo de organizar vinte e quatro elementos (Minions), em filas, de tal modo que todas as filas tivessem o mesmo número de Minions. Este problema, tal como o intitulado por “O voo das bruxas”, tinha várias soluções. Não pretendia que os alunos inventariassem todas as soluções, mas que compreendessem que existiam diversas maneiras de decompor o número 24, em várias parcelas iguais e, também, que poderiam simplificar a forma de registo, de modo a “poupar” trabalho. Por exemplo, era pretendido que os alunos conseguissem criar representações simplificadas de Minions, utilizando, nomeadamente, bolas, riscos, cruzes, que lhes fossem úteis para registar as organizações possíveis. A figura 16 revela a resolução correta de um dos alunos, em que este conseguiu trabalhar com representações simplificadas dos Minions.

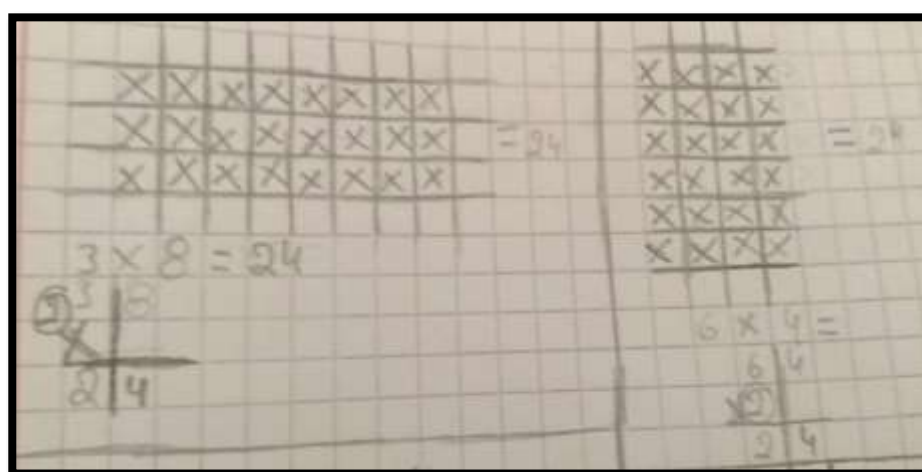


Figura 16 - Estratégias de resolução do problema “Organizando os Minions” propostas pelos alunos

Em síntese, os problemas propostos possibilitaram a emergência de diversas estratégias de resolução e de vários tipos de representações. Procurei estabelecer conexões entre estes aspetos, pois a exploração de conexões auxilia a adquirir múltiplas perspetivas sobre a resolução de um problema (Programa de Matemática do 1.º ciclo, 2007). Também foi minha intenção que os alunos compreendessem as diferentes etapas do processo de resolução de problemas, uma vez que esta compreensão os pode orientar ao longo do percurso de resolução.

#### 4.1.4 As tarefas propostas em contexto de entrevista clínica

Nos dois problemas apresentados durante as entrevistas clínicas, cada aluno dispunha de uma folha branca que continha o enunciado de cada problema e espaço para o resolver. Também tinha ao seu dispor material manipulável que podia utilizar sempre que assim o considerasse.

Com o primeiro problema, “**Os lembretes da Sofia**”, (anexo VII) foi disponibilizada uma folha de papel que continha a figura 17, bem como círculos de papel que representavam os pioneses e diversos quadrados que podiam ser considerados como os lembretes a que o problema se referia. Na primeira pergunta, era questionado o número de pioneses necessários para colocar 6 lembretes e na segunda, pedia-se o número de pioneses utilizados ao colocar 35 lembretes.

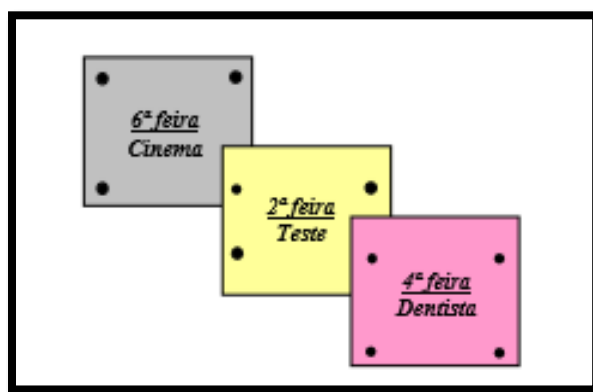
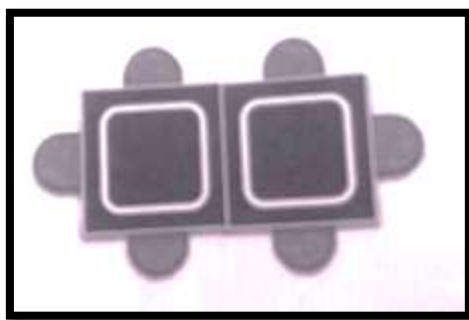


Figura 17 - Figura apresentada no problema “Os lembretes da Sofia”

Para resolver a tarefa era necessário compreender a disposição dos lembretes e o modo como os pioneses estavam organizados, de modo a identificar um padrão que permitisse responder às questões.

No segundo problema, “**O restaurante dos pais Maria**” (anexo VIII), era apresentada uma figura em que se podiam observar duas mesas quadrangulares, em que estavam dispostas seis cadeiras, como mostra a figura 18.



*Figura 18 - Figura apresentada no problema “O restaurante dos pais da Maria”*

O problema compreendia quatro questões. Na primeira, segunda e terceira perguntava-se quantas cadeiras eram necessárias se se juntassem, respetivamente, quatro, dez e cinquenta e duas mesas. Na quarta questão, ao invés de se questionar o número de cadeiras para determinado número de mesas, perguntava-se quantas mesas eram necessárias para se sentarem dezasseis pessoas. Para resolver este problema, os alunos tinham ao seu dispor quadrados que representavam as mesas e semicírculos para representar as cadeiras, que poderiam manipular se o entendessem.

Os dois problemas apresentados, são problemas de processo e a sua resolução inclui identificar regularidades. Ou seja, em ambos os casos os alunos tinham que analisar a figura disponível no enunciado e descobrir como continuava o padrão.

## **4.2 – Tiago**

Tiago tem nove anos de idade e, tal como menciona, tem um gosto enorme pela área da Matemática. É um aluno interessado e motivado na busca de novos conhecimentos. Gosta de resolver problemas e de expressar o seu modo de pensar. Por vezes é tímido, gosta de ajudar os colegas e, no geral, tem boas notas em todas as áreas

curriculares, apesar de afirmar que a área das expressões é a que menos lhe suscita interesse.

#### 4.2.1. Resolvendo problemas durante a intervenção pedagógica

Como referi, durante as semanas de estágio, explorei com a turma seis problemas. Passo a analisar as resoluções de Tiago destes mesmos problemas.

Relativamente ao primeiro, intitulado por “Brincando com conchinhas”, Tiago começou por adicionar as duas quantidades de conchas, neste caso juntou 10 com 8. Calculou mentalmente, talvez devido à ordem de grandeza dos números e ao facto de um deles ser o 10, um número de referência. Em seguida, recorreu ao algoritmo da divisão para distribuir as conchas pelas três pessoas e determinou que o quociente era 6. Findou usando algoritmo da adição, para calcular a soma de  $6+6+6$ . Este procedimento destinou-se a confirmar o resultado. A figura 19 revela a estratégia utilizada pelo aluno.

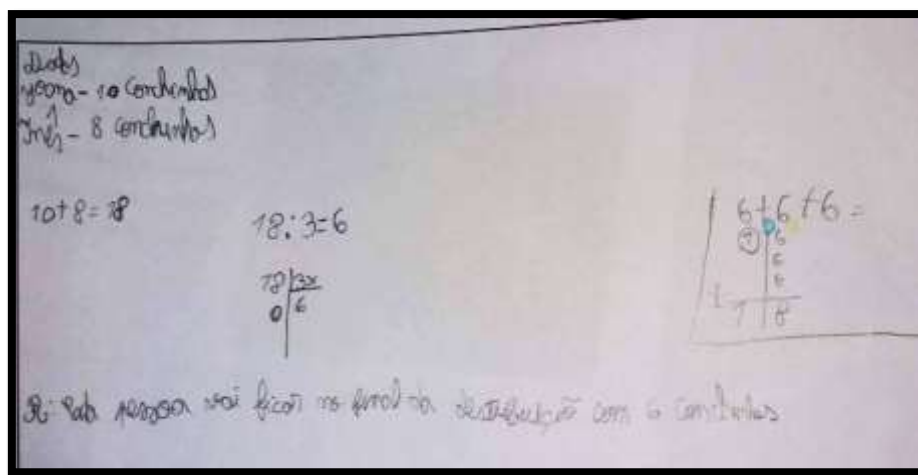


Figura 19 - Resolução de Tiago do problema “Brincando com conchinhas”

Ao analisar a figura, depreendo que Tiago utilizou sempre representações simbólicas e usou predominantemente o cálculo algorítmico para chegar à resposta acertada. Estas representações tiveram a função de explicar o processo de resolução, de obter a resposta ao problema e de confirmar esta resposta.

Para resolver o problema, “A rã saltitona”, Tiago fez sucessivas operações de subtração, como mostra a figura 20.

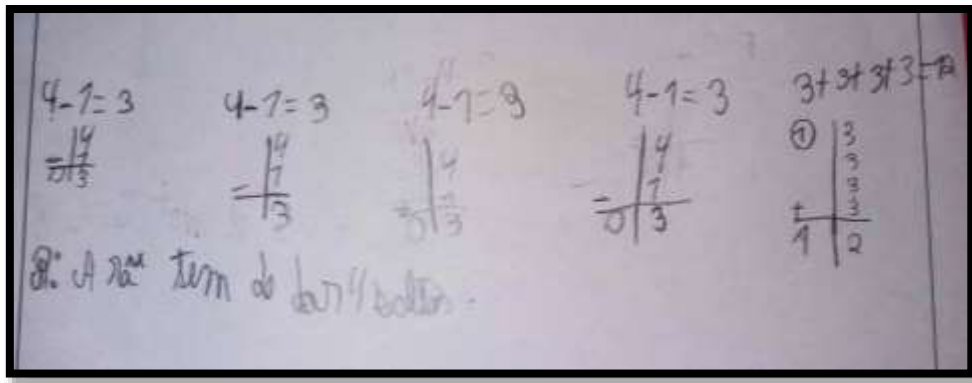


Figura 20 - Resolução de Tiago do problema “A rã saltitona”

Apesar de se tratar da mesma operação, efetuada com números iguais e dos números serem pequenos, recorreu ao cálculo algorítmico, repetindo o algoritmo da subtração. No final, adicionou todas as diferenças obtidas. Ou seja, o que Tiago começou por fazer foi calcular o número de degraus que a rã subia em cada dia recorrendo à subtração. Assim, ao fim de 4 dias já conseguia subir o poço, porque ao adicionar 3, quatro vezes, chegou ao número 12. No momento de discussão coletiva, Tiago refere que a sua resolução não era a mais fácil, comparando-a à dos seus colegas. As representações simbólicas que utilizou serviram-lhe para obter a solução, ou seja, para compreender o número de saltos que a rã teria que dar e para explicar e justificar o processo de resolução. Ao refletir sobre o porquê de o aluno ter utilizado o algoritmo da subtração para determinar o resultado de  $4-1$ , não consigo encontrar uma possível razão. Poder-se-á considerar a hipótese de o fazer porque gosta de resolver exercícios ou porque faz parte das rotinas da aula. Não me foi possível questionar o aluno sobre esta necessidade, nem sobre porque é que usou o algoritmo diversas vezes.

O problema apresentado em terceiro lugar foi o “O voo das bruxas”. O aluno começou por resolvê-lo recorrendo a representações icónicas: desenhou as bruxas e representou as vassouras por traços e, seguidamente, distribuiu as bruxas pelas vassouras, como mostra a figura 21.

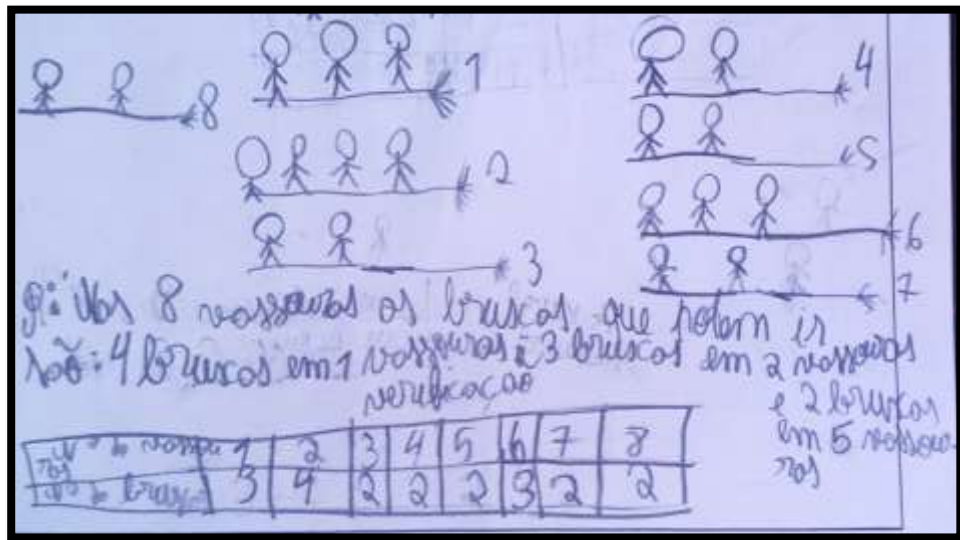


Figura 21 - Resolução de Tiago do problema “O voo das bruxas”

Ao analisar a estratégia de Tiago destaque que usou uma representação figurativa da bruxa e da vassoura simplificada. Estas representações icónicas foram-lhe úteis para registar a solução e identificar todos os elementos do enunciado. Aparentemente, o recurso ao desenho auxiliou-o a visualizar como iria distribuir as bruxas pelas vassouras que possuía. Tiago, também recorre a representações simbólicas para numerar as vassouras (associa um número a cada uma) e para representar a quantidade de bruxas em cada uma.

Em seguida, como acabou primeiro que os colegas e como gosta muito de tabelas, diz-me que iria fazer uma tabela para verificar se o seu raciocínio estava correto. Utilizou uma representação tabelar, em que numa linha identificou as vassouras que tinha (de 1 a 8) e na outra linha a quantidade de bruxas em cada vassoura. Esta representação em forma de tabela foi pertinente para o aluno organizar os dados e serviu-lhe, também, para ilustrar o que tinha feito através dos desenhos. No entanto, não é perceptível se chegou a usar a tabela para verificar se a sua resposta era correta, como previamente mencionou que iria fazer.

Este problema apresentava várias soluções, ou seja, existiam diversas formas corretas de dispor as bruxas, o que é evidenciado na análise da resolução de Simão, apresentada na secção seguinte.

No problema “Os abraços”, Tiago resolve a primeira pergunta através de um esquema (figura 22), em que coloca o nome das pessoas que davam abraços e à frente o número de abraços que já tinham sido dados por cada pessoa.

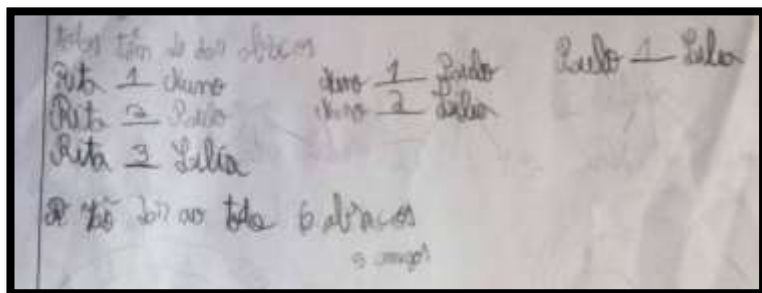


Figura 22 - Resolução de Tiago da 1.ª questão do problema “Os abraços”

Esta representação icónica, em forma de esquema ou diagrama, poderá ter servido para o aluno atribuir significado ao enunciado do problema e para estabelecer relações matemáticas entre o número de pessoas e o número de abraços que dariam. Os símbolos convencionais foram utilizados para registar a quantidade de abraços que iam sendo dados e, no final, a resposta. O esquema também lhe foi útil para compreender que não podia repetir abraços. O episódio 2 ilustra o modo como Tiago pensou.

### Episódio 2

1. **Tiago:** Então eu fiz assim, a Rita dá um abraço ao Nuno, ao Paulo e à Lília. Portanto, o Nuno já não pode dar à Rita, então vai dar ao Paulo e à Lília. E o Paulo já não pode dar nem ao Nuno, nem à Rita, e vai dar à Lília. No total vai-me dar 6 abraços.
2. **Professora:** alguém tem dúvidas na maneira como o Tiago fez?
3. **Rodrigo:** Eu não percebi, porque é que ele meteu Rita 1, Rita 2, Rita 3.
4. **Tiago:** eu fui contabilizando, primeiro a Rita deu 1 abraço, depois fui à segunda pessoa e somei logo ao abraço que deu anteriormente, por isso é que pus logo o 2 e fui fazendo sempre assim.

(A- A)

Quando aumentou o número de amigos para cinco pessoas, o aluno utilizou o processo anteriormente descrito, ou seja, recorreu a linguagem natural e a um esquema (figura 23).

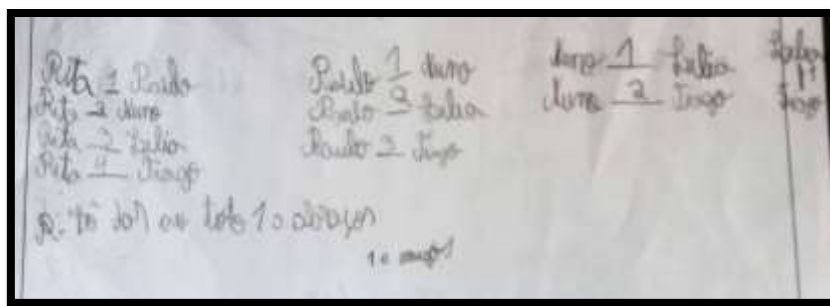


Figura 23 - Resolução de Tiago da 2.ª questão do problema “Os abraços”

Relativamente ao número de abraços dados entre dez amigos, Tiago abandonou o esquema que estava a usar. Aparentemente, reparou que nas questões anteriores havia uma regularidade: se fossem quatro amigos dariam  $3+2+1$  abraços e se fossem cinco amigos dariam  $4+3+2+1$  abraços. A descoberta desta regularidade permitiu-lhe generalizar para o caso de 10 amigos, como se pode observar na figura 24. Com efeito, começa por escrever a expressão  $9+8+7+6+5+4+3+2+1$ . Em seguida, efetua esta adição recorrendo ao algoritmo desta operação, ou seja, utilizou representações simbólicas, para determinar o número de abraços dados por dez pessoas.

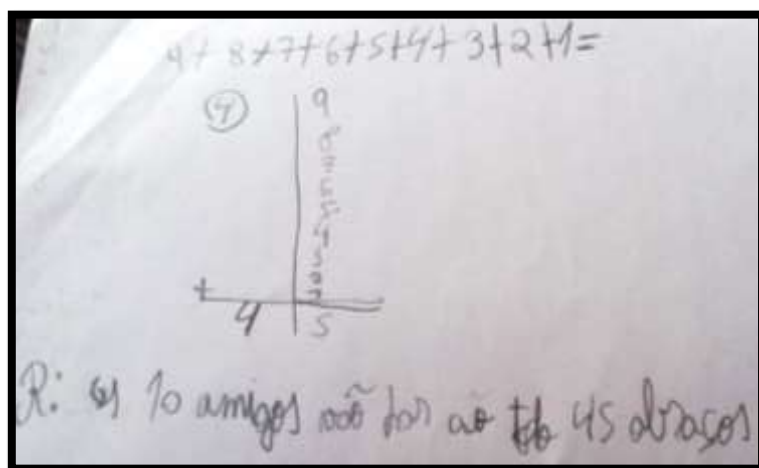


Figura 24 - Resolução de Tiago da 3.ª questão do problema “Os abraços”

A representação em esquema foi vantajosa a Tiago para encontrar um padrão que lhe permitiu representar simbolicamente a generalização feita e, assim, chegar ao resultado correto. Esta última representação utilizada também teve a função de o ajudar a obter a solução e a explicitar e justificar a resolução.

Para resolver o quinto problema - “Lanche na casa da avó”- Tiago começa por calcular quantos iogurtes têm cinco embalagens, usando o raciocínio proporcional e registando-o numa representação próxima da tabelar (figura 25). Posto isto, realizou subtrações sucessivas.

embalagens	iogurtes
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

$20 - 6 = 14$	$14 - 6 = 8$	$8 - 6 = 2$
$\begin{array}{r} 20 \\ - 6 \\ \hline 14 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \\ - 6 \\ \hline 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ - 6 \\ \hline 2 \end{array}$

R. da 5 embalagens há para 3 dias, sobram 2 iogurtes.

Figura 25 - Resolução de Tiago da 1.ª questão do problema “Lanche na casa da avó”

Tiago partiu do número total de iogurtes (vinte) e foi retirando seis, que correspondia ao número de netos, aos resultados que ia obtendo. Efetuou três subtrações e compreendeu que os iogurtes dariam só para três dias e que ainda sobriam dois iogurtes. Analisando globalmente a estratégia do aluno, destaco várias funções das representações utilizadas. Primeiramente a representação próxima da tabelar foi-lhe útil para compreender rapidamente quantos iogurtes possuía na totalidade, o que o levou seguidamente, à subtração (cálculo algorítmico), pois ao saber o total de iogurtes que possuía foi-lhe mais fácil chegar à resposta correta. Estas representações serviram-lhe para obter a solução, quando realiza as subtrações, e para explicar e justificar o processo de resolução.

Na segunda parte do problema, o número de embalagens aumentou para dez. Para descobrir para quantos dias chegariam esses iogurtes, usou um raciocínio análogo, como ilustra a figura 26.

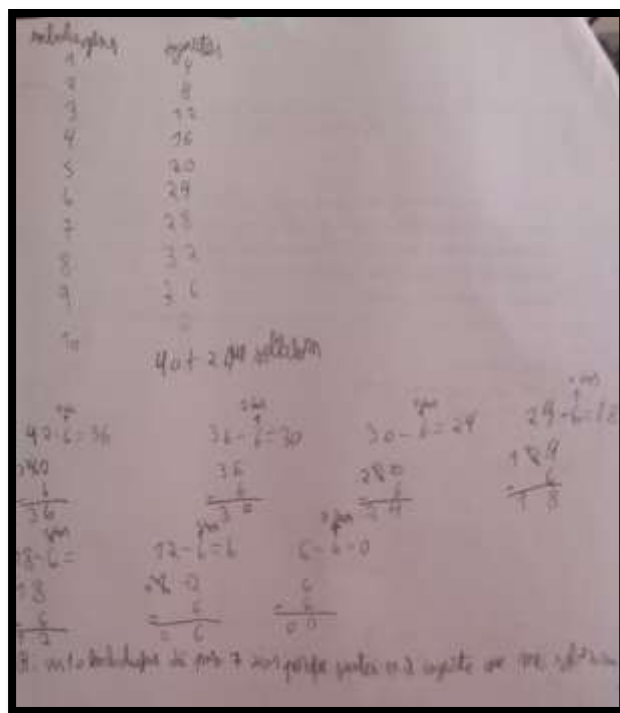


Figura 26 - Resolução de Tiago da 2.<sup>a</sup> questão do problema “Lanche na casa da avó”

A análise da figura 26 revela que recorreu, também, a uma representação próxima da tabelar, para determinar o número de iogurtes de 10 embalagens. A este número juntou os 2 iogurtes que tinham sobrado (alínea anterior), passando assim a ter 42 iogurtes, ao invés dos 40 iogurtes das 10 embalagens. A estratégia de Tiago, ao ser partilhada na turma, causou alguma confusão, uma vez que muitos alunos não tinham contabilizado os iogurtes sobrantes. O episódio 3 revela a explicação apresentada por Tiago.

### Episódio 3

1. **Tiago:** Eu fiz 10 embalagens com 4 iogurtes que me ia dar 40, mas fui juntar os 2 que me sobraram das 5 embalagens para não desperdiçar os iogurtes. Depois aos 42 fui sempre tirando 6 que me vai dar 36. Depois 36 menos 6 dá-me 30. Depois 30 menos 6 dá 24 e 24 menos 6 vai-me dar 18. A seguir, 18 menos 6 é 12 e 12 menos 6 é 6. No final, 6 menos 6 é 0.
2. **Professora:** Mas para quantos dias deu?
3. **Tiago:** 7 dias.
4. **Margarida:** 7 dias? Mas a mim só me deu 6.
5. **Tiago:** Como sobrou no anterior 2 eu juntei tudo e deu mais um dia.
6. **Iara:** Mas eu ainda não percebi.

7. **Tiago:** Então eu tenho 10 embalagens que tinham 4 iogurtes e como eu sei que 10 vezes o 4 é 40, deu-me 40 iogurtes, mas como me sobraram 2 nas 5 embalagens, juntei aos 40 mais 2, que me vai dar 42. Depois fui sempre tirando 6, começando por tirar aos 42, 6 iogurtes e depois continuei até dar zero.

(A- LCA)

O aluno utilizou representações simbólicas, recorrendo a várias subtrações sucessivas e a um procedimento de cálculo algorítmico, obtendo a solução de sete dias. Estas serviram para obter a solução e explicar e justificar o processo de resolução.

Por último, o sexto problema, “Organizando os Minions”, tal como o problema “O voo das bruxas” possuía várias soluções. Tiago indicou alguma delas utilizando diversas estratégias, como mostra a figura 27.

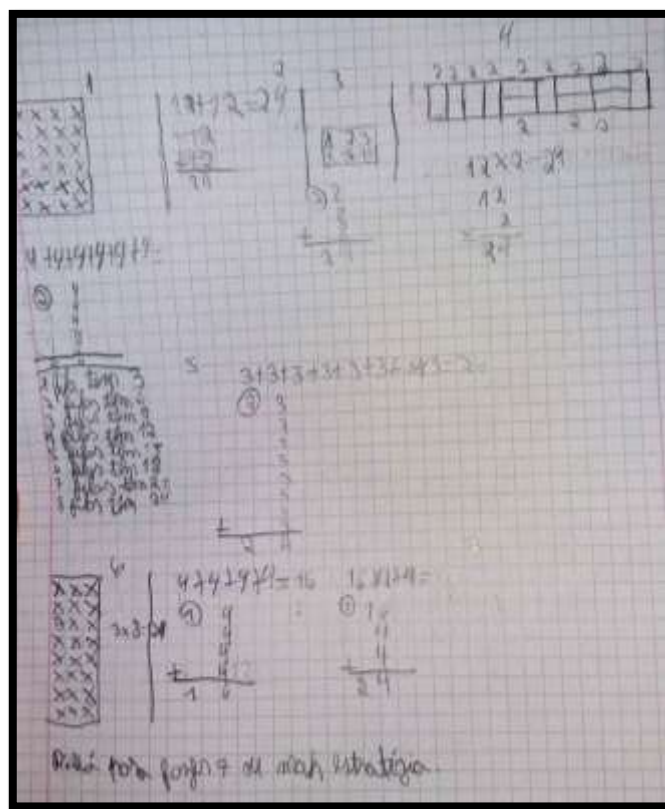


Figura 27- Resolução de Tiago do problema “Organizando os Minions”

Analisando a resolução de Tiago, constata-se que primeiro usou um desenho que lhe serviu para organizar a informação, evidenciar a estrutura matemática e raciocinar sobre a situação. Ou seja, relacionou os símbolos matemáticos, nomeadamente quando

fez seis filas com quatro participantes, em que os representou com um X. Seguintemente usou símbolos matemáticos convencionais para representar o que tinha desenhado ( $4+4+4+4+4+4$ ), ou seja, para desocultar a estrutura matemática. Em seguida usou o algoritmo da adição para confirmar que o resultado desta expressão era 24.

A solução correspondente à organização dos Minions em 8 filas de 3 Minions cada, segue a mesma lógica. Tiago recorre ao mesmo tipo de representações referidas, mas além disso explica o seu raciocínio através de palavras, relacionando o número da fila com o número de Minions (“1 fila tem 3, 2 filas tem 6 (...”). Tiago apresenta mais três soluções corretas para o problema: uma sob a forma de desenho em que há 2 filas de 12 Minions cada. Outras em que recorre a representações simbólicas:  $8+8+8$  e  $12 \times 2$ . Não é, no entanto, perceptível, se o aluno associa estas representações simbólicas a organizações possíveis dos Minions. Poder-se-á conjecturar que não, pois a expressão  $12 \times 2$  está muito próxima do desenho de 2 filas com 12 Minions cada. Esta associação incorreta pode, contudo, dever-se ao desconhecimento do que significa  $12 \times 2$ .

É de salientar que nem todas as opções que Tiago apresentou para organizar os Minions estão corretas, pois era dito no enunciado do problema que as filas tinham que ter o mesmo número de Minions. Com efeito, a certa altura, o aluno recorrendo ao algoritmo da adição, concentrou-se apenas em obter o número 24, que era o número total de participantes. No entanto, utilizou parcelas distintas:  $16+4+4$ .

#### 4.2.2 Resolvendo problemas em situação de entrevista

No problema “Os lembretes da Sofia”, Tiago começou por ler o enunciado do problema e explicar o que era pedido, referindo os dados registados na figura, ao mesmo tempo que interpretava o que era apresentado. Contudo, apresentava dúvidas na interpretação da imagem, tendo algumas incertezas sobre como esta estava organizada. Neste momento, tentei que o aluno focasse a sua atenção na forma como os pioneses eram colocados, sendo o episódio 4 um exemplo dessa situação.

##### Episódio 4

1. **Entrevistadora:** Já viste como ela coloca os pioneses?
2. **Tiago:** Sim, é quatro pioneses em cada.
3. **Entrevistadora:** Como pensaste?

4. **Tiago:** Não, é três.
5. **Entrevistadora:** Na primeira tem quantos pioneses?
6. **Tiago:** Três.
7. **Entrevistadora:** E na segunda?
8. **Tiago:** Três.
9. **Entrevistadora:** E na última?
10. **Tiago:** Tem 4.

(ET1 - LS)

A análise do episódio 4, evidencia que Tiago não estava seguro sobre a forma como os pioneses estavam organizados e, apesar das tentativas que fez para o auxiliar na interpretação da figura, não foi tarefa fácil que este interpretasse corretamente o enunciado. É um facto que mencionou: “há uns que vou contar só uma vez” (ET1- LS), referindo-se ao modo como os pioneses estavam dispostos, mas não teve uma compreensão geral da figura, nem do modo como iria agrupar os pioneses. Ou seja, ao analisar o enunciado, Tiago conseguiu identificar os dados do problema e também reconheceu ao que devia responder. No entanto, não identificou como é que os pioneses estavam colocados.

Na primeira pergunta, Tiago respondeu: “eu pensei, se for 6 lembretes eu faço 6 vezes os 4 pioneses” (ET1- LS). Utiliza a multiplicação, desprezando o que inicialmente tinha referido, o que denota que teve dificuldades em compreender a imagem. Sublinhei, que o que dizia não ia ao encontro do que tinha referido anteriormente sobre o modo como os pioneses estavam dispostos. Tiago respondeu: “sim, então não posso contar com este? É melhor fazer por desenho” (ET1- LS). Como tinha material manipulável, tive receio que o desenho não fosse suficiente e sugeri que utilizasse os quadrados de papel (lembretes) e círculos (pioneses). Tiago aceitou a sugestão e começou a usar o material.

Primeiro utilizou somente três lembretes, agrupando-os, pelo que chamei a atenção para a pergunta: “aqui estão 3 lembretes, mas quantos é que pedem, a pergunta?” (ET1- LS). Ao compreender que eram seis lembretes, Tiago começou por fazer dois grupos com três lembretes cada, ao que mencionei: “não te esqueças que eles estão todos juntos, tens de juntar aos 3 que já tinhas” (ET1- LS). Tiago ficou confuso e perguntou: “este número (3+3) é a mesma coisa que este (6)?” (ET1- LS). Referia-se à forma de agrupar os 6 lembretes, ou seja, se os pusesse todos juntos ou em dois grupos teria o mesmo efeito. Neste momento, disse: “sim, mas ela não separou os lembretes, ela tinha

os 6 todos juntos” (ET1- LS), reforçando a ideia que não os podia separar, porque o enunciado mencionava que estes eram colocado de uma forma específica. Posteriormente, o aluno juntou todos os lembretes e disse que o resultado seria 20 pioneses, desprezando, assim, a forma como os pioneses estavam colocados, apesar de ter considerado um padrão, que usou ao longo da resolução de todo o problema. O episódio 5 ilustra a emergência deste padrão.

#### Episódio 5

1. **Entrevistadora:** Então como é que chegaste lá?
2. **Tiago:** Juntei 3 mais 3 que me vai dar 6. Dez, treze, dezassete, vinte.
3. **Entrevistadora:** E és capaz de registar?
4. **Tiago:** Sim, só tenho que fazer a conta, deles todos.
5. **Entrevistadora:** E porque chegaste aos números três e quatro?
6. **Tiago:** Porque aqui não pode ser quatro porque está tapado.
7. **Entrevistadora:** Estás a dizer que no primeiro não pode ser quatro, e quais são os que tem 4?
8. **Tiago:** Este tem quatro e este.
9. **Entrevistadora:** O terceiro? E o último?
10. **Tiago:** O último tem 3.
11. **Entrevistadora:** Não sei se compreendi.
12. **Tiago:** Então como a imagem mostra que o primeiro lembrete tem 3 pioneses, o segundo também tem 3 e o último 4, se for com 6 lembretes é o dobro e vai dar 20.

(ET1- LS)

Apesar da minha insistência em tentar que o aluno representasse mentalmente os seis lembretes expostos de acordo com o indicado na figura e, posteriormente, que utilizasse representações ativas com o mesmo fim, pela análise deste episódio, considero que Tiago não conseguiu compreender a figura, nem a forma como todos os pioneses estavam dispostos. Formulou um padrão, associando cada 3 lembretes à sequência 3, 3 e 4, apesar de nem sempre utilizar esta ordem. As alíneas posteriores à primeira foram resolvidas com base nesta sequência que Tiago delineou para o modo como os pioneses se encontravam, na medida que pressupôs que os lembretes eram organizados de 3 em 3.

A análise da resolução de Tiago à primeira questão do problema, mostra que recorreu a uma estratégia aditiva para determinar o número de pioneses, utilizando uma representação simbólica. As parcelas usadas na adição remetem para o padrão que elegeu para a disposição dos pioneses, como mostra a figura 28.

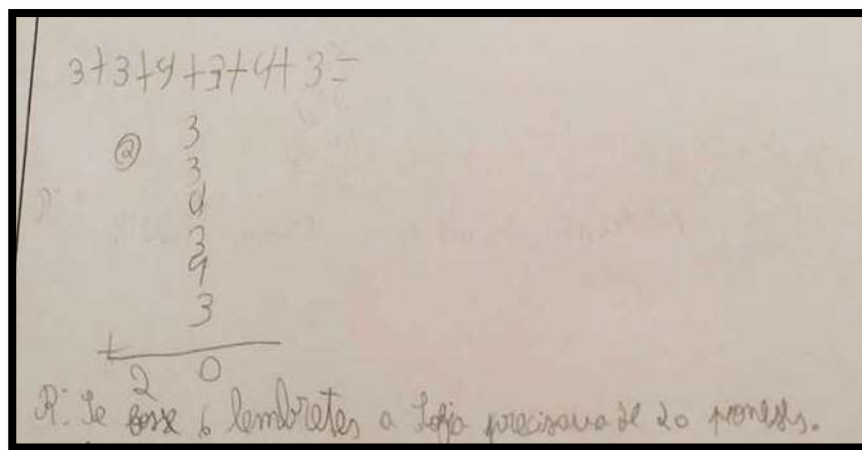


Figura 28 - Resolução de Tiago da 1.ª questão do problema “Os lembretes da Sofia”

Tiago duplicou a sequência que tinha referido somente para três lembretes, embora não respeitando a ordem dos números, realçando que não raciocinou como se os seis lembretes estivessem todos seguidos. Quando recorreu à duplicação não teve em conta que havia pioneses que seguravam dois lembretes, levando-o a uma resposta incorreta. Nesta resolução utilizou o algoritmo da adição para chegar à solução. Esta representação simbólica teve como função ajudar o aluno a representar o que tinha feito com a representação ativa, ou seja, ele anotou o número de pioneses que foi utilizando em cada lembrete e no final adicionou todas as quantidades, obtendo o número 20. Também o auxiliou a obter a solução do problema, apesar de errada, e a explicar o processo de resolução.

A segunda pergunta do problema, englobava um número grande, o que fez com que nos primeiros instantes, o aluno ficasse indeciso quanto à estratégia a escolher. Seguidamente referiu: “tenho que fazer a mesma coisa que esta aqui em cima, mas com mais pioneses” (ET1- LS). O que Tiago quis dizer foi que iria optar pelo mesmo raciocínio que utilizou para os 6 lembretes: se fossem 3 lembretes utilizaria no primeiro e no segundo lembrete 3 pioneses e no terceiro utilizaria 4 pioneses. No entanto, não conseguiu continuar com este mesmo raciocínio indicando “posso ir à tabuada do 3 e

procurar o 35 e ir à tabuada do 4 procurar o 35 e depois fazer o número que der 35, vezes 35” (ET1- LS). Porém compreendeu que 35 não é um número da tabuada do 3, o que o levou a outro caminho: “na tabuada do 3 não há 35, mas há um número perto” (ET1- LS). Como me pareceu que não estava a ter em conta o enunciado da tarefa, foquei a sua atenção no que se pretendia: “mas, não te esqueças que são 35 lembretes (...) tens que por os pioneses de acordo com o que mostra a figura” (ET1- LS). Na sequência desta intervenção Tiago perguntou: “posso tentar fazer com tabela” (ET1- LS). Respondi afirmativamente, após o que o aluno explicou o que tencionava fazer: “vou por 3, 3, 4 (...) começo a por os números, vou tipo fazendo esta sequência” (ET1- LS). A figura 29 mostra a tabela elaborada por Tiago.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
3	3	4	3	4	3	3	4	3	4	3	3	4	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3

Figura 29 - Tabela construída pelo Tiago referente da 2.ª questão do problema “Os lembretes da Sofia”

Ao analisar a figura 29 constato que na sequencialidade dos casos, o aluno associou os números 3, 3 e 4, a cada 3 lembretes, apesar de nem sempre por esta ordem. Excetua-se os lembretes 10 ao 12, em que utilizou 4, 3 e 4, fugindo, assim, ao padrão que anteriormente tinha usado, em que para cada 3 lembretes utilizava 10 pioneses. Aparentemente o aluno não associou os números usados com a disposição dos pioneses e lembretes, ou seja, não relacionou o que registava na tabela com o contexto do problema. No entanto, a representação tabelar teve uma função essencial para o aluno, uma vez que lhe permitiu visualizar de uma forma rápida quantas vezes se repetia o 3 e o 4. Assim, foi-lhe útil tanto para chegar a uma conclusão, como para organizar os dados que possuía e não se perder no seu raciocínio.

Com efeito, após construir a tabela, contou o número de vezes que registou o 3 e multiplicou o número obtido por 3, fazendo o mesmo relativamente a 4. Para efetuar os cálculos recorreu ao algoritmo da multiplicação e, posteriormente, adicionou os dois produtos obtidos, recorrendo ao algoritmo da adição. O episódio 6 e a figura 30 apoiam esta ideia.

### Episódio 6

1. **Tiago:** Vou contando todas as vezes que pus o 3 e dá-me um número e depois todas as vezes que pus o 4 e dá-me outro número e depois juntos esses números.
2. **Entrevistadora:** E sabes o resultado, é isso?
3. **Tiago:** Sim. 118 Pioneses.
4. **Entrevistadora:** Podes explicar?
5. **Tiago:** Sim. Então eu fiz por tabela, fui pondo sempre os números 3 e 4, como no exercício anterior. E depois contei todos os 3 que pus e deu me 22 vezes o 3 que me vai dar 66 e depois fui contar todas as vezes que contei o 4 e deu me 13 e depois fiz e deu me 52 e depois fiz 52 mais 66 igual a 118.

(ET1)

The image shows a piece of paper with handwritten mathematical work. At the top left, there is a multiplication problem:  $22 \times 3 = 66$ , with a vertical multiplication showing 22 multiplied by 3 to get 66. To the right, there is another multiplication problem:  $13 \times 4 = 52$ , with a vertical multiplication showing 13 multiplied by 4 to get 52. Below these, there is an addition problem:  $52 + 66 = 118$ , with a vertical addition showing 52 plus 66 to get 118. At the bottom, there is a handwritten note in Portuguese: "Fiz por 22 vezes o número 3 e depois contei as vezes que contei o 4 e deu me 52 e depois fiz 52 mais 66 igual a 118".

Figura 30 - Resolução de Tiago da 2.<sup>a</sup> questão do problema “Os lembretes da Sofia”

A análise dos procedimentos de cálculo usados pelo aluno permite evidenciar que recorreu a representações simbólicas.

No problema “O restaurante dos pais da Maria”, comecei por pedir ao aluno que me explicasse o enunciado. Notei que não o estava a compreender, pois tentou, de imediato recorrer a uma multiplicação para chegar ao resultado, sem analisar o modo como as mesas eram organizadas (episódio 7, §4). Perante as dificuldades de Tiago tentei que compreendesse o processo pelo qual as mesas eram organizadas e questionei-o como as organizaria, se fossem apenas 3 (§ 3). Além disso, chamei a atenção para o material

manipulável que tinha disponível (§5). Tiago decidiu recorrer a este material, ou seja, usou uma representação ativa para analisar a disposição das mesas e das cadeiras.

#### Episódio 7

1. **Entrevistadora:** Então, o que é que o problema pede?
2. **Tiago:** O problema pede, o pai da maria tem um restaurante e cada mesa só pode levar 4 pessoas, mas por vezes há grupos que vão em 6 ou mais pessoas. Então o pai da Maria tem que juntar 2 mesas, se o pai da Maria juntar 4 mesas, quantas cadeiras haverá?
3. **Entrevistadora:** Então e se primeiro juntar 3?
4. **Tiago:** Com 3 era fazer, como uma mesa tem 4 cadeiras, faço as 3 mesas vezes as 4 cadeiras.
5. **Entrevistadora:** Se precisares podes utilizar as mesas e as cadeiras.
6. **Tiago:** Sim.
7. **Entrevistadora:** Mas vamos lá pensar. Já tens aqui uma mesa certo?
8. **Tiago:** Aqui tenho uma mesa com 4 cadeiras, e aqui 2 mesas com 6 cadeiras.
9. **Entrevistadora:** então e se for com 3?
10. **Tiago:** 10.
11. **Entrevistadora:** 10? Será? Experimenta lá.
12. **Tiago:** Então vou utilizar as mesas e as cadeiras que estão aqui.
13. **Entrevistadora:** então com 3 mesas fica quanto?
14. **Tiago:** Ah já percebi, fica 8.

(ET2 - RPM)

Ao analisar o episódio 7 compreendo que o recurso a uma representação ativa, pois auxiliou o raciocínio do aluno, uma vez que conseguiu compreender o processo de junção de mesas e cadeiras. No momento que visualizou o que acontecia quando se juntava mais uma mesa, abandonou a conjectura de que se podia multiplicar o número de mesas por 4 e compreendeu que quando se junta mais uma mesa às duas mesas iniciais, só se acrescentam mais duas cadeiras.

Após compreendido o enunciado, o aluno começou a resolver o problema. Na primeira questão perguntou: “posso fazer por desenho?” (ET2- RPM), ao que lhe respondi que podia utilizar o processo que considerasse favorável e adequado para resolver o problema. Recorreu a uma representação icónica - desenho das mesas e das cadeiras - para chegar ao número de cadeiras necessárias para quatro mesas (figura 31).

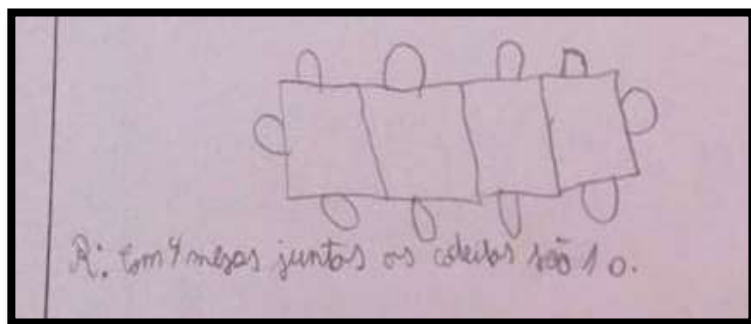


Figura 31 - Resolução de Tiago da 1.ª questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”

O desenho feito teve a função de o auxiliar a visualizar o modo como as cadeiras e as mesas se encontravam dispostas, a interpretar o enunciado e a estabelecer relações. Seguidamente contou o total de cadeiras desenhadas, uma a uma, e chegou facilmente ao resultado final: “vai-me ficar 10, porque desenhei as 4 mesas e depois ao por todas as cadeiras fica 10” (ET2- RPM).

Na pergunta seguinte, inicialmente, o aluno mencionou que havia dez cadeiras, pelo que perguntei: “10 cadeiras ou mesas?” (ET2- RPM), procurando que Tiago se focasse nos dados do enunciado. Após este momento, o aluno começou por recorrer aos materiais manipuláveis para responder às questões, ou seja, tentou resolver o problema recorrendo a representações ativas. Contudo, como o número de mesas e cadeiras era elevado, ficou confuso sobre como iria proceder: “já sei, se acrescentar mais uma mesa às 4 do exercício anterior fica 13, e depois vou ver o dobro dessas mesas e fica os 13 mais os 13” (ET2- RPM). Esta intervenção fez-me perceber que Tiago ainda não estava a entender as consequências de juntar mais uma mesa ao número de mesas anteriores, pelo que sugeri que usando o material manipulável juntasse cinco mesas, para confirmar se seriam as treze cadeiras que tinha referido. Ao verificar que a sua conjectura estava errada, Tiago afirmou “que 5 mais 5 é dez, então faço um grupo de 5 mesas e outro grupo de 5 mesas” (ET2- RPM), o que me levou a intervir para destacar que ele não poderia separar as mesas. O aluno parece compreender a minha intencionalidade, uma vez que afirmou: “pois, tenho que juntar aqui. Senão parece que estou a fazer 2 grupos” (ET2- RPM).

Após alguma hesitação recorreu novamente a um desenho (representação icónica) para visualizar o número de cadeiras e mesas (figura 32). No final utilizou a adição para determinar o número de cadeiras e recorreu ao algoritmo desta operação. Adicionou, primeiramente o número de cadeiras que estavam nas linhas superiores e inferior das mesas ( $10+10$ ) e, posteriormente, acrescentou as cadeiras das extremidades das mesas.

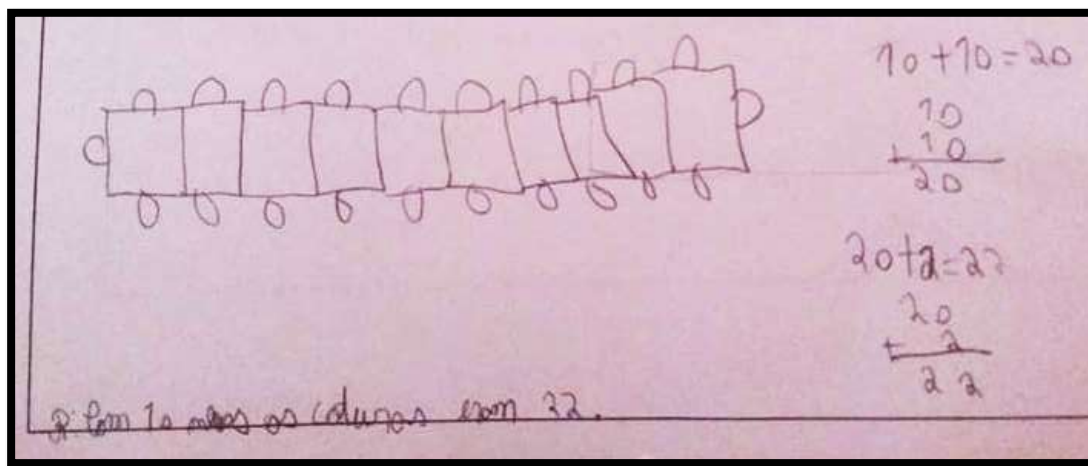


Figura 32 - Resolução de Tiago da 2.ª questão do problema "O restaurante dos pais da Maria"

### Episódio 8

1. **Entrevistadora:** Explica-me lá o teu desenho.
2. **Tiago:** O meu desenho é, tenho 10 mesas, com 10 cadeiras num lado e 10 cadeiras noutro, e 10 mais 10 vai dar 20. Depois tenho que contar uma cadeira que esta na cabeceira da mesa e outra que esta na outra.
3. **Tiago:** Agora vou fazer uma conta de verificação.
4. **Entrevistadora:** E para verificar fizeste como?
5. **Tiago:** Eu fiz 10 mais 10, porque estão nas colunas horizontais e deu me 20. Depois aos 20 fui juntar mais dois, que estão na cabeceira, deu-me os 22.

(ET2 - RPM)

A análise da figura 32 e do episódio 8 permite evidenciar que a representação icónica (desenho) teve a função de auxiliar o aluno a interpretar e a estabelecer relações, a desvendar a estrutura matemática do problema e a chegar à solução. As representações simbólicas tiveram por função confirmar os resultados obtidos. Os dois tipos de representações relacionam-se, uma vez que ambas expressam o mesmo significado,

nomeadamente, o registo do algoritmo da adição de 10 com 10, traduz o que primeiramente desenhou.

Perante a terceira questão do problema, o aluno mencionou: “eu posso ir ao dobro” (ET2- RPM), o que me fez perguntar-lhe qual era o dobro que se estava a referir. Tiago respondeu: “o dobro de 52 acho que é 26” (ET2- RPM), o que indica que estava a confundir as noções de dobro e metade. Perguntei-lhe: “mas porque é que tu queres o dobro? O 26 é o dobro ou a metade de 52?” (ET2- RPM), fazendo o aluno refletir sobre o que estava a dizer. Tiago, aparentemente confuso com o caminho a escolher, respondeu: “metade. Então se eu fizer 26 mesas é mais fácil, consigo desenhar” (ET2- RPM). Com esta afirmação, depreendo que o aluno não estava a relacionar o total de mesas com o número de cadeiras, apesar de saber qual a pergunta que teria que responder. Tentei, novamente, alertar Tiago para que não podia separar as mesas e sugeri que pensasse no que tinha feito na alínea anterior, tal como ilustra o episódio 9.

#### Episódio 9

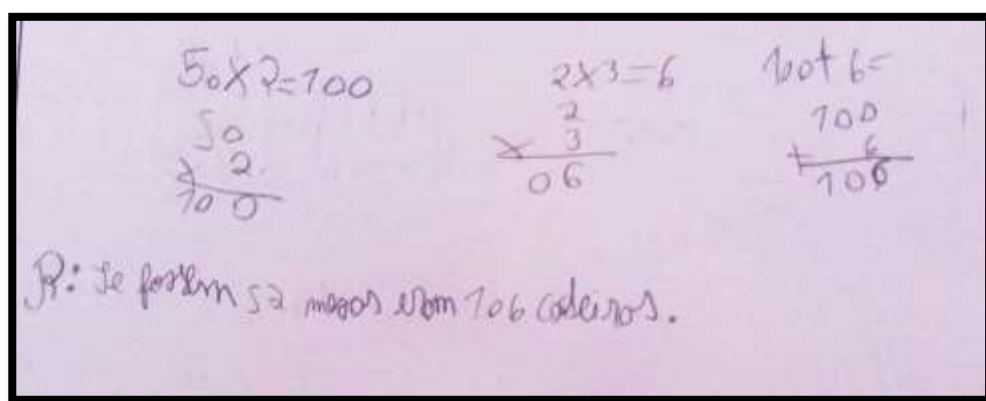
1. **Entrevistadora:** Imagina, era teres 52 mesas todas seguidas. Como é que tu tinhas pensado anteriormente? Por exemplo no 10 como é que tu fizeste?
2. **Tiago:** Eu fui buscar a metade porque era mais fácil de fazer a metade do que estar a fazer as 52 mesas, mas se eu for buscar metade e ir à tabuada do.... Ai... Não. Já não sei como fazer.
3. **Tiago:** Este problema é difícil das 52 mesas
4. **Entrevistadora:** Tens de olhar para o que fizeste anteriormente, olha lá.
5. **Tiago:** Eu estava aqui a pensar fazer uma tabela, mas deve ser mais difícil porque tenho que fazer uma conta gigante. Faço a tabela e conto quantas vezes há os números.
6. **Entrevistadora:** Faz lá uma tabela, para eu perceber como ias fazer, agora fiquei com dúvidas do que é que ias por na tabela. Vais por os 52?
7. **Tiago:** Não, acho que já tenho uma maneira mais fácil. Estava a ver o que fiz com as 10 mesas e já sei.
8. **Entrevistadora:** então?
9. **Tiago:** É 50!
10. **Entrevistadora:** Não percebi, onde foste buscar os 50? E porque estás a por 50 vezes 2?

11. **Tiago:** Porque era mais difícil fazer com tabela, mas como me lembrei da estratégia de contar os números contei pela cabeça e fiz. Como sabia que 50 mesas tinham duas pessoas cada, depois era só juntar mais duas mesas com três pessoas.

(ET2 - RPM)

Desenhar as 52 mesas é um processo mais trabalhoso e o aluno sabia que recorrer ao desenho não era a melhor estratégia a adotar. Ao ver-se neste impasse, bloqueou (§2), fazendo-me interferir, com o intuito de o auxiliar a ultrapassá-lo (§4).

Insistir que Tiago se focasse no que tinha realizado anteriormente foi útil por ajudar o aluno a encontrar uma generalização que lhe permitiu descobrir o número de cadeiras. Apesar de começar por referir que podia usar uma tabela, tal como tinha feito no problema “Os lembretes da Sofia”, rapidamente concluiu que não era a melhor estratégia. Optou por analisar o que fez apenas com 10 mesas e concluiu que se fossem 52 mesas havia apenas 2 mesas com 3 cadeiras e as restantes tinham somente 2 cadeiras. Foi esta generalização que lhe permitiu chegar à solução (figura 33). Multiplicou 50 por 2, para calcular o número de cadeiras relativas às mesas que tinham exclusivamente duas pessoas e multiplicou 2 por 3 para determinar o número de cadeiras correspondentes às mesas que estão nas extremidades. Por último, recorrendo à adição, adicionou os produtos. Neste âmbito, usa os algoritmos da adição e da multiplicação.



$50 \times 2 = 100$

$2 \times 3 = 6$

$100 + 6 = 106$

R: se fossem 52 mesas eram 106 cadeiras.

Figura 33 - Resolução de Tiago da 3.<sup>a</sup> questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”

Analisando a estratégia de Tiago, constato que o recurso a representações ativas, onde utilizou o material manipulável para simular a disposição das mesas e cadeiras, e o uso de desenhos (representação icónica) lhe foram extremamente úteis para conseguir

resolver esta alínea do problema. As representações simbólicas tiveram como função ajudar o aluno a representar matematicamente o que tinha feito anteriormente. Também o auxiliaram a obter a solução do problema e a explicar o processo de resolução.

Por último, na quarta questão do problema, o aluno mostrou compreender, de imediato, o enunciado - “não sei as mesas, eles agora não me perguntam as cadeiras perguntam-me as mesas” (ET2- RPM) - e optou sem hesitação por desenhar as mesas e as cadeiras como mostra a figura 34.

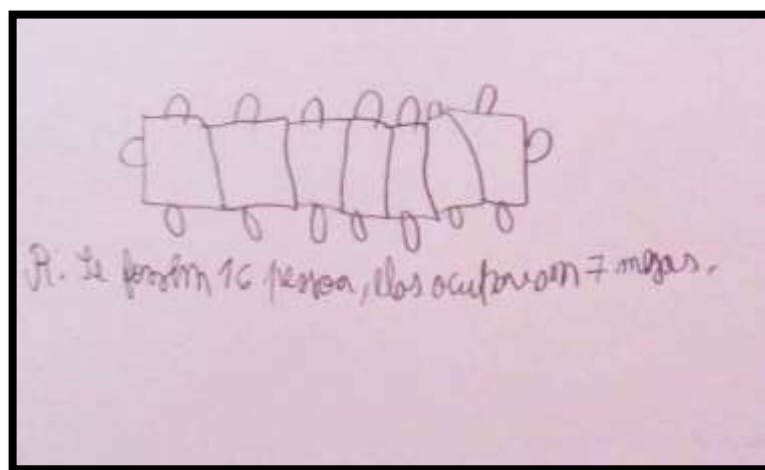


Figura 34 - Resolução de Tiago da 4.ª questão do problema “O restaurante dos pais da Maria”

Como já tinha compreendido a estrutura matemática do problema – “sim, já sei, é uma duas três, 7 mesas. Mas fiz duas com 3 e o resto com 5 vezes 2 que é 10 e depois vai-me dar 6” (ET2- RPM) – conseguiu fazer uma representação icónica da situação e visualizar de imediato o número de mesas que iria precisar para sentar as dezasseis pessoas. Tiago começou por desenhar mesa a mesa e no final procedeu à contagem, chegando facilmente ao resultado final.

Na tabela 9 sintetizo os tipos de representações utilizadas por Tiago na resolução dos problemas, em contexto de sala de aula e nas entrevistas clínicas, bem como as funções que desempenharam para este aluno.

<b>Problema</b>	<b>Representações utilizadas</b>	<b>Funções</b>
“Brincando com conchinhas”	Simbólicas	Explicar o processo de resolução; obter a solução para o problema e confirmar esta solução.
“A rã saltitona”	Simbólicas	Obter explicitamente a solução; compreender o número de saltos que a rã teria que dar; explicar e justificar o processo de resolução.
“O voo das bruxas”	Icónicas; Simbólicas: tabela	R. icónica: registar a solução; interpretar o enunciado e identificar todos os elementos do problema; auxiliou-o a visualizar como iria distribuir as bruxas pelas vassouras. R. simbólicas: numerar as vassouras e representar a quantidade de bruxas em cada vassoura. Tabela: organizar os dados e ilustrar o que tinha feito através de desenhos.
“Os abraços”	Icónicas: esquema; Simbólicas	R. icónica: atribuir significado ao enunciado; estabelecer relações matemáticas entre o número de pessoas e o número de abraços dados. R. simbólica: registar a quantidade de abraços dados e a resposta. O esquema auxiliou a compreender que não podia repetir abraços e foi-lhe vantajoso para encontrar uma generalização.
	Simbólicas	Ajudar a obter a solução e a explicitar e justificar a resolução.
“O lanche na casa da avó”	Icónicas: tabela; Simbólicas	A representação próxima da tabelar foi-lhe útil para compreender quantos iogurtes possuía na totalidade; Estas duas representações serviram-lhe para obter a solução e explicar e justificar o processo de resolução.
“Organizando os Minions”	Icónicas; Simbólicas	R. icónica: interpretar a situação, evidenciando a estrutura matemática. R. simbólicas: obter as soluções. Ambas serviram para explicar e justificar o processo de resolução.
“Os lembretes da Sofia”	Ativas; Simbólicas	R. ativa: auxiliar a visualizar a organização dos lembretes e dos pioneses. R. simbólica: ajudar o aluno a representar o que tinha feito através da representação ativa; obter a solução do problema, apesar de errada, e a explicar o processo de resolução.
	Icónica – tabela; Simbólicas	R. tabelar: interpretar situações, auxiliar a visualizar de uma forma rápida quantas vezes se repetia o 3 e o 4 e para organizar os dados que possuía e não se perder no raciocínio. R. simbólica: ajudar a representar os dados recolhidos através da tabela; obter explicitamente a solução do problema, apesar de errada, e a explicar o processo de resolução.
“O restaurante dos pais da Maria”	Ativas; Icónicas	R. ativa: compreender o processo de junção de mesas e cadeiras; verificar conjecturas. R. icónica: visualizar o modo como as cadeiras e as mesas se encontravam dispostas, a interpretar e a estabelecer relações e a desvendar a estrutura matemática do problema.
	Ativas; Icónicas; Simbólicas	R. ativa: verificar uma conjectura do aluno. R. icónica: auxiliou a interpretar e a estabelecer relações; a desvendar a estrutura matemática do problema e a chegar à solução. R. simbólica: verificar o resultado e traduz por símbolos o desenho efetuado.
	Simbólicas	R. simbólica: ajudar o aluno a representar matematicamente o que tinha feito anteriormente com as representações ativa e icónica; obter a solução do problema e a explicar o processo de resolução.
	Icónicas	R. icónica: visualizar o modo como as cadeiras e as mesas estavam dispostas, a interpretar e a estabelecer relações e a desvendar a estrutura matemática do problema.

Tabela 9 - Representações utilizadas por Tiago e suas funções

### 4.3 Simão

Simão tem oito anos de idade, é apaixonado por desporto, gosta de liderar e de ajudar os seus colegas. Em todo o seu trabalho é de notar a organização, a concentração e o empenho nas tarefas propostas. Não gosta de errar e fica aborrecido quando não compreende determinado conteúdo. Tem algumas dificuldades, mas estas são colmatadas pelo empenho e pelo gosto por aprender. Às vezes é distraído, o que o leva a errar.

#### 4.3.1 Resolvendo problemas durante a intervenção pedagógica

Para resolver o primeiro problema, “Brincando com conchinhas”, Simão recorre à adição e à divisão, como mostra a figura 35. A análise desta figura bem como do episódio 10, que ocorreu quando este aluno partilhou o raciocínio na turma, permitem compreender o modo como pensou.

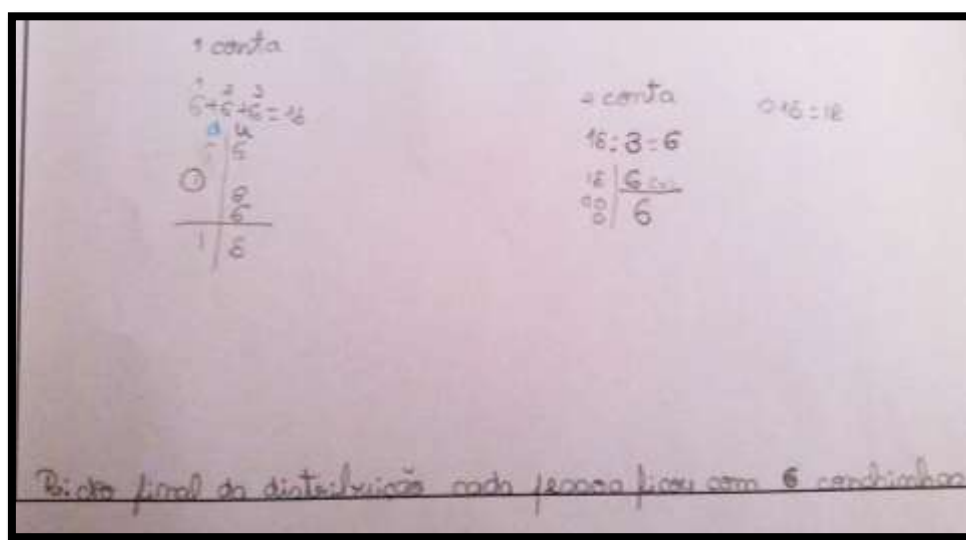


Figura 35 - Resolução de Simão do problema “Brincando com conchinhas”

#### Episódio 10

1. **Simão:** Na primeira conta eu fiz  $6+6+6$  e fui ver que dava 18. Depois na segunda conta eu fui dividir o 18 pelo 3, porque o 18 veio da soma dos 6, e deu-me o resultado de seis.
2. **Professora:** Então explica lá as conclusões que chegaste.
3. **Simão:** Cheguei à conclusão que cada uma ficou com 6 conchinhas.

4. **Margarida:** eu tenho uma dúvida, eu não percebo porque o Simão fez primeiro o  $6+6+6$ .
5. **Professora:** Foi mesmo essa a ordem que tu fizeste? Ou fizeste primeiro a de dividir e depois a adição para verificar?
6. **Simão:** Eu enganei-me. Primeiro eu somei as conchinhas das duas meninas e fiz  $10+8$  que deu 18. Depois é que fui dividir pelas três pessoas e deu 6. No final para verificar é que juntei o  $6+6+6$  para ver se estava certo.

(A- BC)

A análise da figura 35 parece indicar que Simão, depois de saber que havia 18 conchas no total, começou por adicionar três parcelas iguais a 6 e, posteriormente, dividiu 18 por 6. No entanto, a leitura do episódio 10 revela que não foi este o seu percurso de raciocínio. O aluno começou por utilizar uma representação simbólica para representar o número total de conchinhas:  $10+6=18$ . Seguidamente dividiu 18 por 3 (episódio 10, §6), de modo a encontrar o número de conchas de cada pessoa e, por último, para verificar se a solução estava correta é que recorreu à adição  $6+6+6$  (idem). Para determinar a soma e o quociente usa procedimentos de cálculo algorítmicos. Segundo a professora cooperante, durante a resolução de problemas, Simão tem por hábito verificar os resultados que obtém, o que, também, fez neste problema.

A análise da estratégia de resolução de Simão permite evidenciar que optou por utilizar representações simbólicas e que estas tiveram a função de explicar e justificar o processo de resolução e de obter a solução do problema.

O segundo problema apresentado intitulava-se “A rã saltitona”. Simão resolveu-o usando representações simbólicas (figura 36).

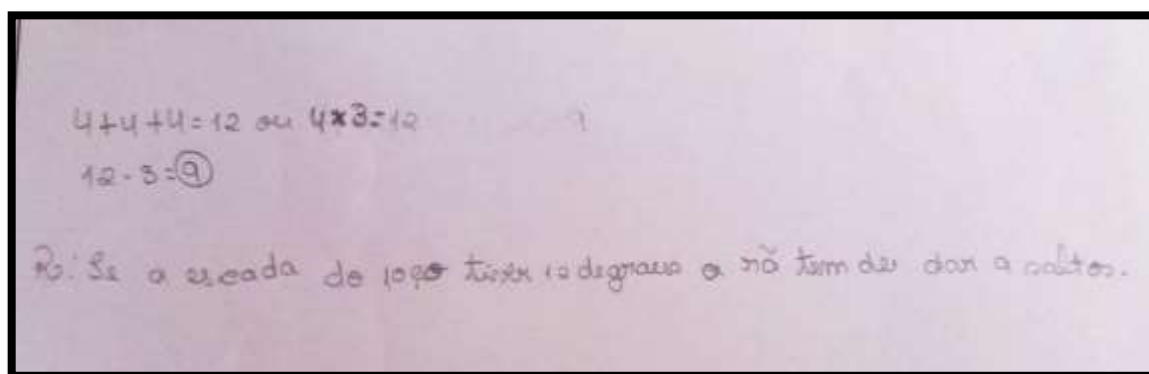


Figura 36 - Resolução de Simão do problema “A rã saltitona”

Primeiramente calculou  $4+4+4$ , em que 4 se referia aos degraus que a rã subia durante o dia, relacionando esta representação com uma outra em que usa a multiplicação ( $4 \times 3$ ) mas que não tem o mesmo significado. Aparentemente o aluno ainda não se apropriou da ideia de que para representar, usando a multiplicação, uma situação aditiva em que há um determinado número de grupos iguais, o primeiro fator representa a quantidade destes grupos e o segundo a dimensão de cada um, o que neste caso conduziria a  $3 \times 4$ . Posteriormente, recorreu a uma subtração para retirar 3 a 12. Aparentemente, considerou que 3 era o número de degraus que a rã, durante a noite, descia.

Analisando a produção escrita do aluno, considero que este apesar de ter compreendido o enunciado do problema e de ter conseguido identificar os dados e a pergunta a que precisava de responder, não foi capaz de o resolver corretamente. O aluno entendeu que se a rã subisse quatro degraus por dia, conseguiria chegar ao início do poço, ou seja ao 12º degrau. Daí ter calculado a soma  $4+4+4$ . Também teve em consideração que a rã, durante a noite, descia um degrau e como tinha mencionado que dava 3 saltos de quatro degraus cada um durante o dia, logo ia descer 3 degraus. Todavia, não conseguiu interpretar os números que ia obtendo face ao contexto do problema. Ao subtrair três a doze, desprezou o facto da rã subir quatro degraus durante o dia o que inviabilizou a obtenção de uma resposta correta. Não conseguiu “ver” os degraus do poço nem os saltos da rã através de todos os símbolos que usou, embora algumas das representações simbólicas (por exemplo,  $4+4+4$ ) lhe tivessem sido úteis para explicar e a justificar o processo de resolução, bem como para representar procedimentos de cálculo e soluções obtidas.

No problema “O voo das bruxas”, Simão utilizou o desenho para conseguir obter uma solução, como revela a figura 37.

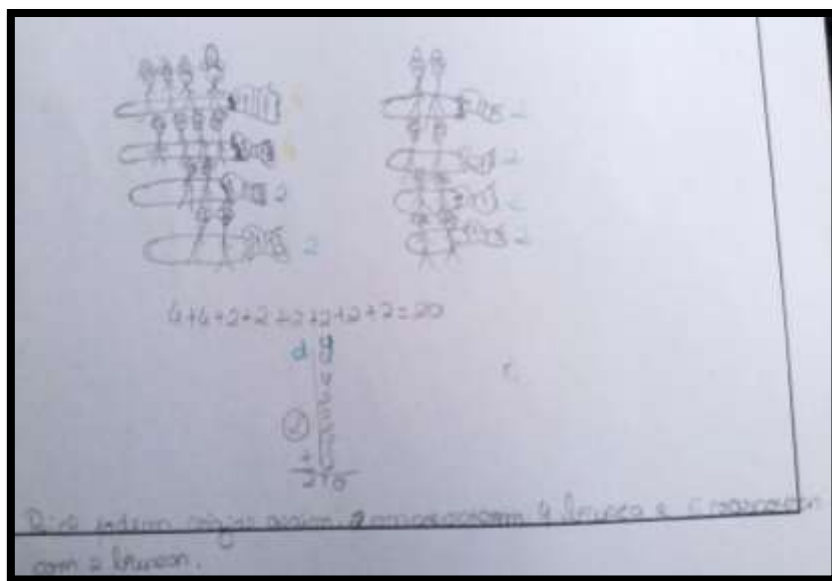


Figura 37 - Resolução de Simão do problema “O voo das bruxas”

Atentando na estratégia do aluno, destaco que recorreu a representações icônicas para representar as vassouras e, de seguida, distribuir as bruxas. Esta representação foi facilitadora para o aluno, pois este conseguiu visualizar a disposição das bruxas nas vassouras. Colocou quatro bruxas em cada uma de duas vassouras e duas bruxas em cada uma de seis vassouras. Em seguida, representou a situação usando símbolos matemáticos convencionais ( $4+4+2+2+2+2+2+2$ ) e, no final, recorreu ao algoritmo da adição (representação simbólica) para verificar a sua resposta. O episódio 11 ilustra a explicação do raciocínio seguido por Simão.

### Episódio 11

1. **Simão:** O que eu fiz foi: pus quatro bruxas na primeira vassoura, na segunda também pus e fiquei com 8. Depois na terceira vassoura pus 2 e fiquei com 10. Depois fui pondo sempre mais duas e deu 12, mais duas 14, mais duas 16, mais duas 18 e mais duas 20. E estas todas deu-me 20 bruxas.
2. **Professora:** Todos perceberam a estratégia do Simão? Repararam que há varias formas de distribuir as bruxas?
3. **Catarina:** Sim, a estratégia da Ema é diferente da do Simão.
4. **Professora:** Exatamente, este problema podia ter mais que uma resposta certa, ou seja, podiam distribuir as bruxas de diversas maneiras.
5. **Martim:** Há várias maneiras de fazer por isso é que estamos a partilhar as estratégias todas.

6. **Simão:** E eu no final, também fiz uma conta de verificação para ver se estava certo.

(A- VB)

Ao analisar o episódio 11, repara que é importante os alunos exporem variadas estratégias de resolução de uma tarefa. Com efeito, após Simão ter partilhado a sua estratégia, alguns elementos da turma concluíram que existiam diversas maneiras corretas de distribuir as bruxas pelas vassouras e que este problema poderia ter várias soluções.

O problema “Os abraços” tinha, como referi anteriormente, três perguntas. Na primeira questão, Simão optou por utilizar uma representação icónica (figura 38), nomeadamente um esquema, onde incluiu o nome dos amigos e traços que representavam um abraço entre duas pessoas.

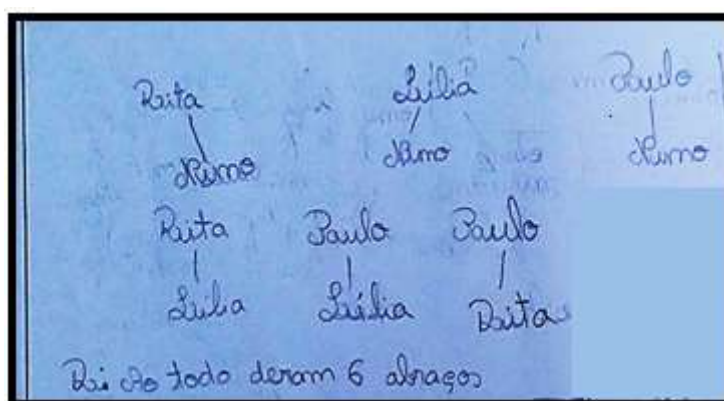


Figura 38 - Resolução de Simão da primeira questão do problema “Os abraços”

Analisando o trabalho efetuado pelo aluno, compreendo que este esquema, teve a função de o ajudar a visualizar as pessoas e os abraços que estas davam entre si. Por exemplo, entendeu que Lília dar um abraço a Nuno representa o mesmo que Nuno dar um abraço a Lília e, por isso, na parte inferior da folha não põe um traço entre Nuno e Lília, ou seja, compreende que estes dois abraços não podem ser contabilizados como abraços distintos. Assim, favoreceu a atribuição de significado ao enunciado do problema e ajudou o aluno a compreender que não podia repetir abraços.

Na segunda questão, Simão baseou-se no esquema que elaborou anteriormente, acrescentado uma pessoa, o André, como mostra a figura 39. Também aqui, para resolver

o problema, o aluno utilizou um esquema bem organizado e análogo ao anterior que lhe permitiu observar facilmente o número de abraços dados no total.



Figura 39 - Resolução de Simão da segunda questão do problema “Os abraços”

Na terceira e última questão do problema, Simão para identificar o número de abraços, recorreu novamente a um esquema que era, no entanto, diferente do que utilizou previamente. Desenhou esboços das dez pessoas alinhadas e utilizou traços, representativos de abraços, para ligar cada uma à seguinte como revela a figura 40.

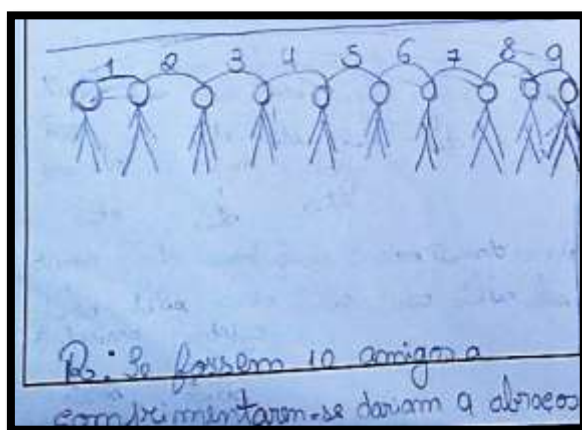


Figura 40 - Resolução de Simão da terceira questão do problema “Os abraços”

O esquema utilizado por Simão só incluía a representação dos abraços que cada pessoa daria à que estava ao seu lado direito, não considerando, assim, os restantes abraços. Nesta perspetiva, a representação que utilizou não lhe foi útil para determinar a

totalidade de abraços dados, não conseguindo encontrar uma solução correta do problema. Para indicar o número de abraços que se iam dando utilizou símbolos convencionais (representação simbólica).

Ao analisar a estratégia deste aluno, constato que não conseguiu encontrar um padrão que lhe permitisse generalizar o número de abraços dados por dez pessoas. As representações esquemáticas que foi utilizando ao longo das diversas alíneas nem sempre lhe foram úteis para chegar a um resultado correto. No caso das duas primeiras alíneas, em que o número de pessoas era reduzido, os esquemas que usou auxiliaram o seu raciocínio pois conseguiu inventariar, por exaustão, todos os abraços dados. No entanto, este esquema não era favorável à identificação de regularidades nem a desocultar a estrutura matemática do problema. Ao aumentar o número de pessoas, Simão percebeu que não conseguiria utilizar o mesmo esquema, por se tornar demasiado trabalhoso, optando por um outro esquema que, embora prometededor para efeitos de generalização, não o ajudou a chegar à resposta correta. Não há dados que permitam perceber se com mais tempo e, eventualmente, uma intervenção que trouxesse para primeiro plano a ausência de abraços, o aluno conseguiria usar o segundo esquema para resolver corretamente o problema.

O problema “Lanche na casa da avó”, englobava duas questões. Simão utilizou uma representação icónica (figura 41) para determinar para quantos dias chegariam cinco embalagens de quatro iogurtes cada. A análise da figura 41 bem como do episódio 12, associados à segunda questão da tarefa, em que Simão explica à turma a estratégia que decidiu adotar para resolver o problema, permite compreender o modo como pensou.

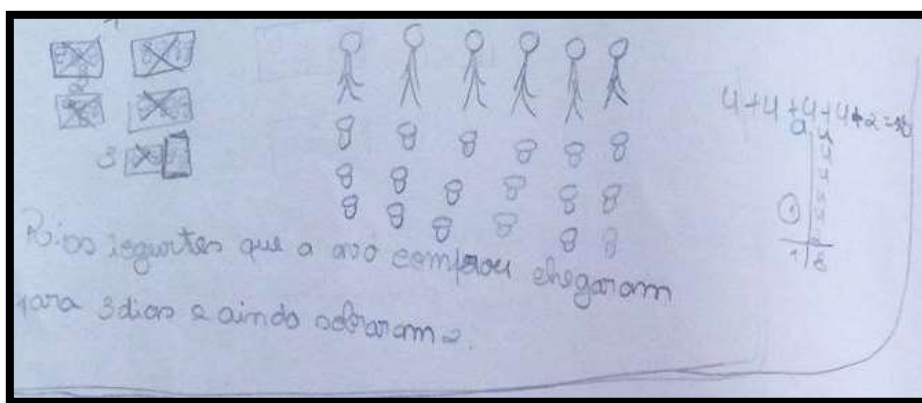


Figura 41 - Resolução de Simão da primeira questão do problema “Lanche na casa da avó”

## Episódio 12

1. **Simão:** Eu primeiro desenhei os seis netos da avó e fui pondo os iogurtes que eles comeram. Depois fui resolver a conta para ver se estava bem e deu-me 36. E deu para seis dias e sobraram dois iogurtes.
2. **Professora:** Vocês perceberam?
3. **Vítor:** Eu não percebi.
4. **Simão:** Queres que explique outra vez?
5. **Vítor:** Sim.
6. **Simão:** Então eu fiz as 10 embalagens com os quatro iogurtes lá dentro e fiz os seis netos da avó e depois fui pondo os iogurtes em cada um dos netos que comeu. Depois resolvi a conta para ver se estava certo e deu-me 36 iogurtes e se contasse um a um, os iogurtes dos netos também dava 36. Assim vi que dava para seis dias e sobrava dois iogurtes.

(A- LCA)

Como se pode observar na figura 41 e também no episódio 12 (§1), Simão primeiramente optou por desenhar as cinco embalagens com os quatro iogurtes, para conseguir compreender quantos iogurtes existiam na totalidade. Após determinar esta quantidade, desenhou os seis netos e distribuiu, um a um, os iogurtes por cada neto. O aluno também utilizou o algoritmo da adição para verificar o resultado. Adicionou  $4+4+4+4+2$ , que se referia aos iogurtes consumidos consoante o que cada embalagem continha, ou seja, o número 4 que aparece, representa uma embalagem de iogurtes e o 2 significa que nessa embalagem só foram utilizados dois iogurtes.

Na segunda questão do problema, o aluno teria que lidar com dez embalagens de quatro iogurtes cada, para os seis netos. Para tal, decidiu optar exatamente pela mesma estratégia, ou seja, começou por utilizar representações icónicas, como mostra a figura 42. Concluiu que os iogurtes de que dispunha só dariam para seis dias e terminou usando o algoritmo da adição para verificar se o resultado estaria correto.

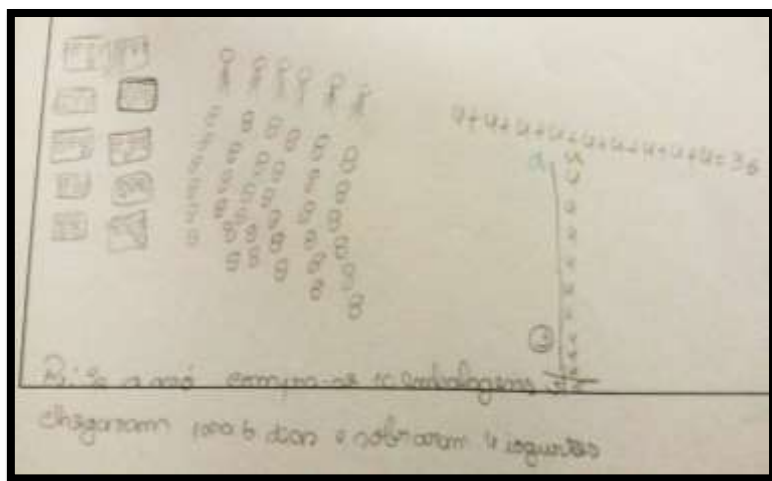


Figura 42 - Resolução de Simão da segunda questão do problema “Lanche na casa da avó”

Ao analisar o episódio 12 e as figuras 41 e 42, considero que as representações icônicas que utilizou (os desenhos) tiveram um papel determinante para o aluno. Primeiramente para compreender quantos iogurtes tinha na totalidade e, seguidamente, para os distribuir pelos seis netos. Simão também estabeleceu uma relação entre os iogurtes que desenhou, no total para os seis netos, com o resultado do cálculo de verificação (representação simbólica), concluindo que esta resolução estaria correta.

Simão para o resolver o problema “Organizando os Minions”, utilizou diversas estratégias chegando a cinco soluções. Primeiramente, utilizou uma representação icônica, ao agrupar os participantes, que representou cada um por um X, em três filas de oito elementos. A esta solução o aluno associou duas representações simbólicas, nomeadamente a adição de  $8+8+8$  e a multiplicação  $8 \times 3$  (figura 43), embora estas não tenham o mesmo significado. O aluno não compreendeu que para utilizar a multiplicação para representar uma situação aditiva, tinha que utilizar o 3 como primeiro fator, porque representa a quantidade de filas repetidas e o 8 como segundo fator, chegando à multiplicação  $3 \times 8$ .

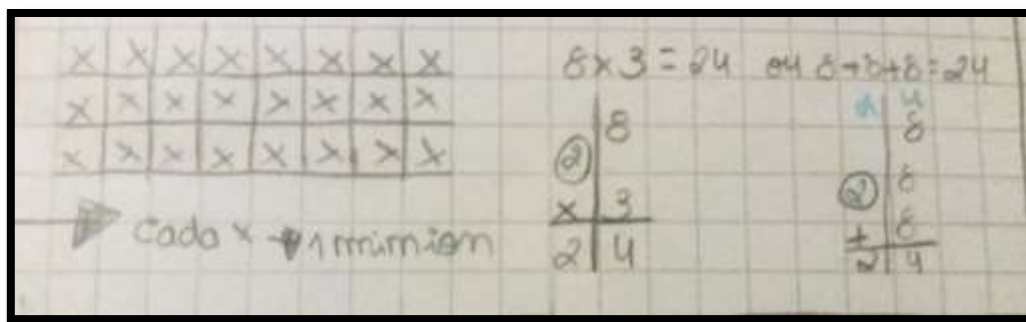


Figura 43 -1ª Resolução de Simão do problema "Organizando os Minions"

A segunda hipótese que Simão sugeriu para resolver este problema, envolvia somente representações simbólicas, especificamente a adição de  $4+4+4+4+4+4$  a que associou, incorretamente, a expressão  $4 \times 6$  (figura 44), ou seja, agrupou os participantes em seis filas com quatro elementos cada. Tal como anteriormente, esta associação não foi bem estabelecida, uma vez que a expressão correta é  $6 \times 4$ .

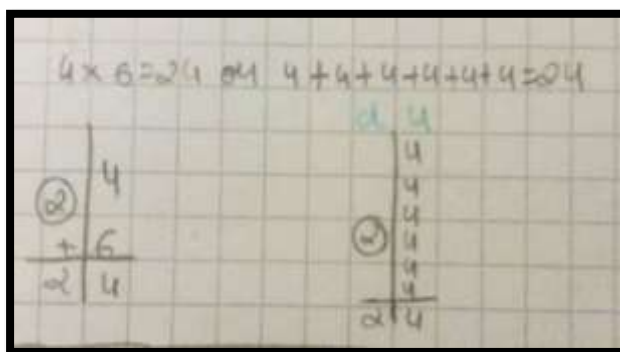


Figura 44 -2ª Resolução de Simão do problema "Organizando os Minions"

Em terceiro lugar apresentou uma resolução análoga à primeira, no sentido em que utilizou uma representação icónica que associou a representações simbólicas, utilizando a multiplicação e a adição. Desenhou doze filas com dois participantes e associou esta representação à adição de  $2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2$  e, incorretamente, à multiplicação  $12 \times 2$ , como revela a figura 45.

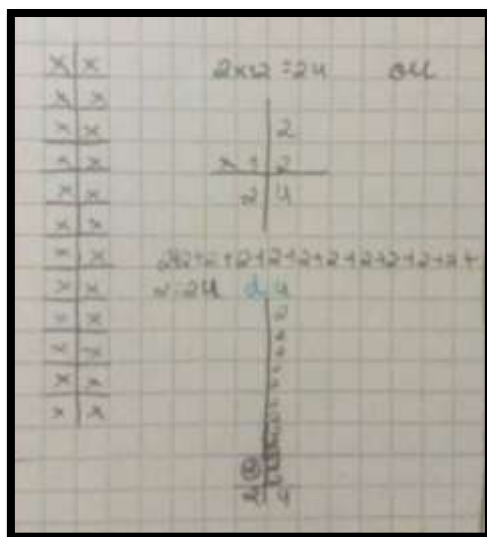


Figura 45- 3ª Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions”

A quarta resolução apresentada por Simão foi predominantemente simbólica (figura 46) e não conduziu a uma resposta correta. O aluno registra quatro adições de 2 com 1 obtendo 3. Agrupa as somas duas a duas e à direita de cada grupo registra 12 dando a entender que é este o número que se obtém quando se adiciona 3 com 3. Por último, parecendo ter adicionado os dois dozes, associa-os a 24. Além da associação de dois três a 12 estar incorreta, esta resolução de Simão não revela uma possível maneira de organizar os participantes.

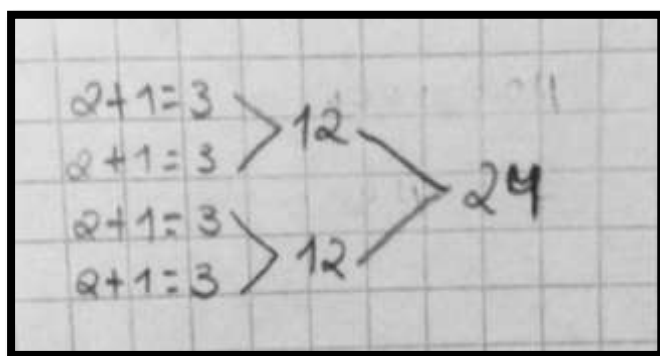


Figura 46 - 4ª Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions”

A quinta e última resolução que a aluno propõe foi representada através de palavras escritas em linguagem natural e de símbolos matemáticos convencionais (números, símbolo de adição e algoritmo desta operação), pelo que Simão usou representações simbólicas. Como mostra a figura 47, o aluno organizou oito filas com

três participantes em cada uma. À medida que lista as várias filas vai adicionando 3 ao número anterior até chegar a 24. Neste processo, aparentemente recorre ao cálculo mental e para verificar a sua correção usa o algoritmo da adição. É de realçar que o aluno parece ter entendido que dispor oito Minions em cada uma de três filas (primeira solução) é diferente de os dispor em oito filas com três Minions cada, embora em ambos os casos haja 24 Minions.

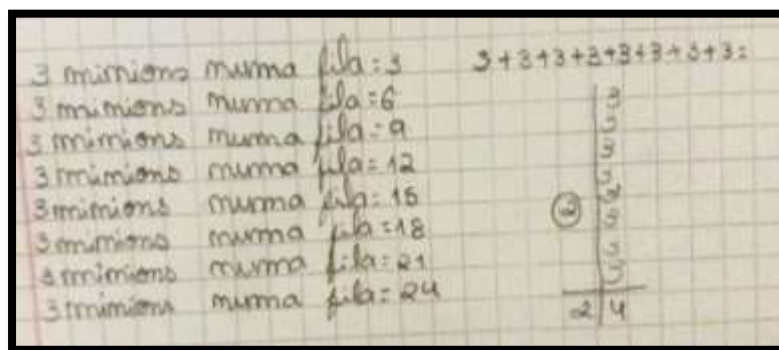


Figura 47 - 5ª Resolução de Simão do problema “Organizando os Minions”

Refletindo sobre a atividade do aluno para resolver o problema “Organizando os Minions”, saliento que este não chegou a todas as formas possíveis de agrupar os participantes embora tenha sido capaz de obter várias soluções corretas. Numa fase inicial, mostrou-se confuso sem saber bem como iria proceder. Posteriormente tentou usar vários tipos de representações que lhe permitiram chegar ao que pretendia. As representações icónicas (desenho) parecem ter ajudado o aluno a interpretar o problema e a compreender a sua estrutura matemática. As representações simbólicas, na generalidade dos casos, foram-lhe úteis para obter soluções e para verificar resultados. Ambos os tipos de representações contribuíram para explicar e justificar o processo de resolução.

#### 4.3.2 Resolvendo problemas em situação de entrevista

No problema “Os lembretes da Sofia” comecei por lembrar Simão que poderia usar os materiais manipuláveis, por mim disponibilizados, se assim o considerasse. Seguidamente, o aluno iniciou a resolução pela leitura do enunciado do problema e

explicou: “pede para colocar pioneses em 6 lembretes. Depois é, do que eu estou a ver da imagem, conto aqui são 4 pioneses e daqui são 3” (ES1- LS). Após esta informação decidi intervir para tentar compreender se o aluno tinha analisado corretamente a forma como os pioneses eram dispostos e questionei: “e já viste a imagem?” (ES1- LS), ao que o aluno responde: “sim, tem 4 pioneses” (ES1- LS). Neste momento, interroguei-me se Simão estaria a considerar que todos os lembretes teriam de ser colocados usando 4 pioneses e interpelei-o: “em todos os lembretes?” (ES1- LS). A resposta do aluno revelou que estava a interpretar corretamente a imagem: “este tem 3, este 4 e este 3” (ES1- LS), referindo-se, respetivamente ao número de pioneses do último lembrete, do primeiro e do segundo.

Depois de ter analisado a imagem disponibilizada na folha com o enunciado do problema, Simão focou-se na primeira pergunta: “de quantos pioneses precisará para colocar no placar 6 lembretes?” (ES1- LS). Começou por manipular o material por mim disponibilizado, ou seja, recorreu a uma representação ativa e, porque se baralhou ao colocar os pioneses, conclui que seriam necessários 20. Este resultado está incorreto, pelo que incentivei o aluno a observar, de novo, a imagem e, posteriormente, sugeri a realização de um desenho, como ilustra o episódio 13.

### Episódio 13

1. **Simão:** Professora, mas aqui posso pôr mais de 4 pioneses?
2. **Entrevistadora:** então o que é a imagem mostra?
3. **Simão:** a imagem mostra dois lembretes com três pioneses e um com quatro.
4. **Entrevistadora:** Então e para dizeres isso é porque reparaste que este pionés prende o primeiro e o segundo lembrete certo? Então e o primeiro lembrete tem quantos?
5. **Simão:** quatro.
6. **Entrevistadora:** e os outros?
7. **Simão:** os outros têm 3.
8. **Entrevistadora:** E como fizeste?
9. **Simão:** Eu fiz, quatro lembretes com três pioneses e dois com quatro pioneses.
10. **Entrevistadora:** Porquê?
11. **Simão:** Porque na imagem mostrava que só havia um com 4 pioneses e dois com 3 pioneses e eu fui fazendo como estava aqui, um com 4 e dois com três, um com 4 e dois com 3.
12. **Entrevistadora:** então mas se dizes que na imagem só há um lembrete com 4 pioneses porque é que com seis lembretes há dois?

13. **Simão:** Não sei. Estou confuso.

14. **Entrevistadora:** Se fizeres o desenho não é mais fácil para compreenderes?

(ES1- LS)

Inicialmente, considerei que Simão tinha compreendido a forma como os lembretes eram colocados. Porém, o aluno ao responder à primeira questão e ao justificar o seu raciocínio, fez-me suspeitar que pudesse estar a pensar que os seis lembretes podiam ser colocados em dois grupos distintos com três lembretes cada (episódio 13, § 11). A sugestão do desenho (§ 14) surge para ajudar o aluno a lidar com a confusão que sentia (§ 13). A figura 48 mostra a estratégia usada por Simão.

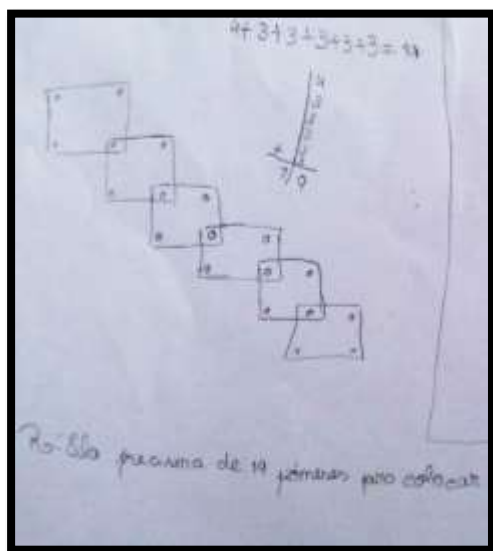


Figura 48 - Resolução de Simão da primeira pergunta do problema “Os lembretes da Sofia”

Ao utilizar uma representação icónica, nomeadamente o desenho dos lembretes e pioneses, Simão conseguiu visualizar quantos pioneses precisaria para colocar os lembretes. Representa o número de pioneses do desenho através de uma representação simbólica ( $4+3+3+3+3+3$ ) e usa o algoritmo da adição para confirmar o resultado.

A expressão  $4+3+3+3+3+3$  não surgiu de imediato. Com efeito, o aluno, após ter compreendido que eram precisos dezanove pioneses através do desenho, referiu que necessitava de verificar se a sua resposta estaria certa e disse: “eu ia fazer 6 vezes 4” (ES1- LS). Aparentemente, Simão não conseguiu relacionar o que tinha feito no desenho com símbolos matemáticos convencionais. Nesta altura interferi e disse: “conta lá os

pioneseas que colocaste no desenho, é igual ao resultado de  $6 \times 4$ ?” (ES1- LS). O aluno, aparentemente baralhado, insistiu na utilização da multiplicação, afirmando que podia “multiplicar o 4 pelo 5” (ES1- LS). Perante esta dificuldade, decidi analisar, em conjunto com Simão, cada lembrete que o próprio desenhara. Esta atividade levou o aluno a concluir que “então posso somar lembrete a lembrete e fica:  $4+3+3+3+3+3$  que vai dar 19” (ES1- LS).

Na segunda questão do problema, Simão teria que determinar o número de pioneseas para trinta e cinco lembretes. Perante esta situação, referiu: “não vou desenhar os 35 lembretes (...) vou ter que arranjar outra forma” (ES1- LS). Esta intervenção indicia que estava consciente de que optar por uma representação icónica era trabalhoso e que, por isso, havia que encontrar outro caminho para conseguir resolver o problema. Descobrir este caminho não foi simples, como ilustra o episódio 14.

#### Episódio 14

1. **Entrevistadora:** Então o que é que tu já sabes?
2. **Simão:** 4 vezes 35
3. **Entrevistadora:** mas tens que te lembrar que há pioneseas que se repetem. O que tinhas visto na pergunta anterior?
4. **Simão:** Num lembrete só havia 4 e nos outros 3.
5. **Entrevistadora:** Então e não podes pensar da mesma maneira agora para esta pergunta?
6. **Simão:** Posso fazer 35 mais 4 mais 3 mais 3 mais 3 mais 3 mais 3.
7. **Entrevistadora:** porque 35 mais 4?
8. **Simão:** Porque aqui era um de 4 e os outros eram 3 e aqui falam de mais, de 35 lembretes.
9. **Entrevistadora:** Sim são 35 lembretes e tu sabes que o primeiro lembrete tem quantos pioneseas?
10. **Simão:** 19. Devo multiplicar o 35 vezes o 19?
11. **Entrevistadora:** O 19? Porque o 19?
12. **Simão:** Porque foi o que me deu na primeira pergunta.
13. **Entrevistadora:** Sim, deu-te 19 pioneseas para 6 lembretes. Agora não te esqueças que são 35 lembretes. Tinhas visto que o primeiro lembrete tinha quantos?
14. **Simão:** 4 pioneseas.
15. **Entrevistadora:** e os outros tinham também 4?
16. **Simão:** Não, tinham 3.
17. **Entrevistadora:** Então o que é que tu sabes neste? Que o primeiro terá quantos?

18. **Simão:** 4.  
 19. **Entrevistadora:** E os outros terão quantos?  
 20. **Simão:** 3, 35, 4, 3

(ES1- LS)

Analisando o episódio 14, constata-se que Simão tentava usar os números do enunciado (35) ou outros com que tinha contactado na alínea anterior (3, 4 e 19) para efetuar cálculos que não tinham significado face ao contexto do problema. Constata-se, também, que não estava a conseguir identificar uma regularidade que lhe fosse útil para chegar à solução correta. Inicialmente desprezou o facto de nem todos os lembretes terem o mesmo número de pioneses (§2). Tentei focar Simão na disposição dos lembretes, procurando que evocasse o que tinha feito na pergunta anterior (§3). No entanto, esta intervenção não foi eficaz para que o aluno enveredasse por uma estratégia que lhe permitisse resolver o problema. Sugeri uma adição (§6) em que uma das parcelas representava uma quantidade de lembretes (35) e as restantes quantidades de pioneses (os que concluiu serem necessários para seis lembretes), desvalorizando o facto de não poder adicionar um número de lembretes com números de pioneses. Ao insistir para que Simão refletisse sobre o que tinha feito previamente (§7 e §9), este perguntou se seria antes a multiplicação de 35 por 19 (§10). Apesar das minhas múltiplas tentativas para que o aluno compreendesse a disposição dos lembretes e o modo como se colocavam os pioneses, este não conseguiu resolver corretamente o problema. Apenas efetuou o cálculo referido no parágrafo 6 do episódio 14, utilizando representações simbólicas, como revela a figura 49.

Handwritten work showing a division problem:  $35 \div 5 = 7$ . The work includes the equation  $35 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 50$  and a circled '3' next to the division symbol. Below the division is the text '3:56 pioneses de 35 pioneses'.

Figura 49 - Resolução de Simão da segunda pergunta do problema “Os lembretes da Sofia”

Perante a resolução apresentada na figura 49, procurei compreender qual o significado que Simão atribuía aos cálculos feitos. O episódio 15 revela as explicações apresentadas pelo aluno.

#### Episódio 15

1. **Entrevistadora:** Então o que é que fizeste?
2. **Simão:** Juntei  $35+4+3+3+3$ .
3. **Entrevistadora:** Onde é que foste buscar esses números?
4. **Simão:** Na anterior. E eu agora também podia ter feito 35 vezes 19.
5. **Entrevistadora:** Então imagina lá que não tinhas feito a primeira pergunta e não sabias estes números. Como é que fazias?
6. **Simão:** 4 pioneses no primeiro, o segundo 3 e o terceiro 3 e por aí fora.

(ES1- LS)

Apesar de Simão ter mencionado que se não tivesse resolvido a pergunta anterior teria procedido através de outro processo que até poderia conduzir a uma solução correta (§6) não o usou para resolver o problema nem para questionar a adequação dos cálculos que fez. Não conseguiu descortinar um padrão nas quantidades de pioneses usados para juntar lembretes, o que levou a que não soubesse o que fazer quando decidiu abandonar o desenho porque tinha um número elevado de lembretes.

Analisando, globalmente a atividade desenvolvida por Simão para resolver o problema, destaco que foi capaz, em ambas as perguntas, de seleccionar os dados e de identificar o que era pedido. Na primeira pergunta, optou por uma representação icónica (desenho) que lhe foi favorável para alcançar a solução correta. O mesmo não aconteceu na segunda em que as representações usadas não possibilitaram que chegasse ao resultado correto. As representações simbólicas utilizadas pelo aluno tiveram como função ajudar a representar os dados do problema, auxiliar na obtenção de soluções, confirmar um resultado e explicar o processo de resolução.

No problema “O restaurante dos pais da Maria”, Simão começa por ler o enunciado: “então uma mesa só dá para se sentarem 4 pessoas, duas mesas 6” (ES2-RPM). De modo a entender se o aluno estaria a compreender todos os aspetos do problema, questionei-o: “e três mesas?” (ES2- RPM). Responde, de imediato, “são 8 cadeiras” (ES2- RPM).

Logo após esta resposta, o aluno começa rapidamente a resolver a primeira pergunta que questionava o número de cadeiras para quatro mesas, recorrendo a uma representação icónica, como mostra a figura 50.

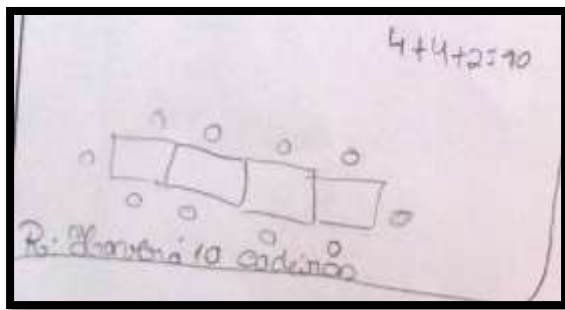


Figura 50 - Resolução de Simão da primeira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”

Simão recorreu ao desenho para representar as quatro mesas com as respetivas dez cadeiras explicando que “num lado há 4 pessoas, noutro lado mais 4 pessoas e nas pontas são duas pessoas é por isso que eu fiz, 4 mais 4 mais 2” (ES2- RPM). Conecta esta representação icónica com a representação simbólica  $4+4+2$  e chega à conclusão de que são necessárias dez cadeiras. A representação icónica foi-lhe útil para compreender a disposição das mesas e das cadeiras e para desvendar a estrutura matemática do problema. A representação simbólica serviu-lhe para verificar o resultado e traduz, através de símbolos matemáticos convencionais, a quantidade de cadeiras representadas no desenho efetuado.

A segunda pergunta requeria que se determinasse quantas cadeiras são necessárias se se juntasse um número superior de mesas (dez mesas). O aluno recorreu a representações simbólicas, registando  $10+10$  e  $20+2$ , como revela a figura 51.

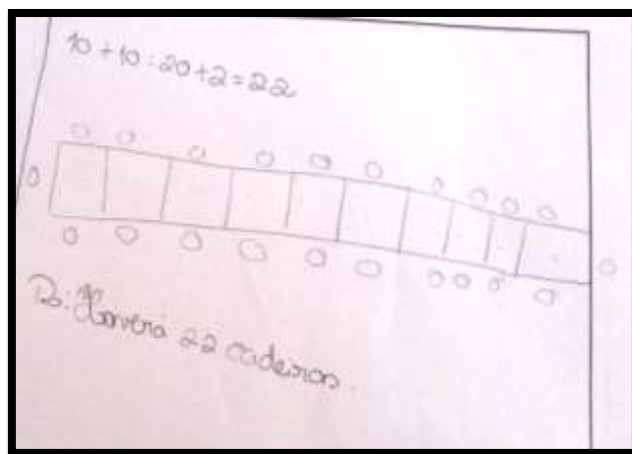
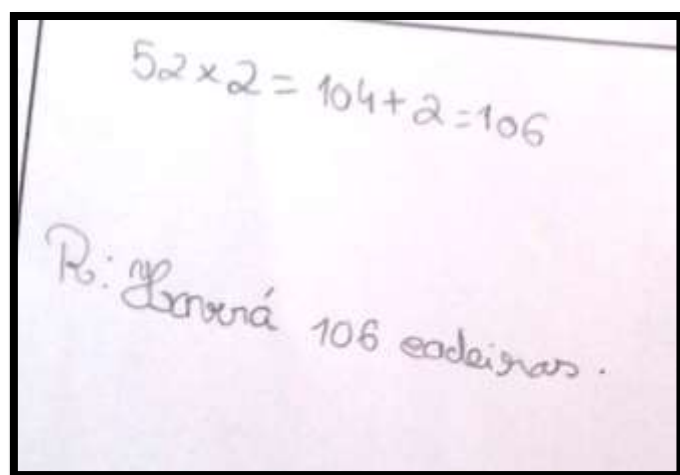


Figura 51 - Resolução de Simão da segunda pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”

Para explicar o seu raciocínio, Simão diz: “então eu aqui comecei logo a pensar igual ao que fiz antes. Antes fiz 4 mesas que era 4 em cada lado e como aqui são 10 mesas, fica 10 em cada lado, depois é só somar as pontas, que são 2 pessoas e deu-me 22” (ES2-RPM). Após ter chegado a esta conclusão, o aluno quis verificar se o seu resultado estava correto. No entanto, começaram a surgir dúvidas porque pretendia efetuar cálculos e não compreendia que operação deveria utilizar. Decidi intervir, dizendo: “nem sempre a verificação é uma operação, podes utilizar outro método” (ES2- RPM). Perante esta intervenção, o aluno questionou-me se poderia utilizar o desenho para verificar. Ao dar-lhe uma resposta positiva Simão desenha as dez mesas e as 22 cadeiras, como mostra a figura 51.

Destaco que, para responder à segunda questão, o aluno utilizou os mesmos tipos de representações que usou na pergunta anterior. Porém, não as utilizou com as mesmas funções. Simão visualizou as mesas e as cadeiras mentalmente e, a partir, daqui usou representações simbólicas para responder à questão. Este tipo de representação teve como função ajudar a representar os dados do problema, a obter a sua solução do problema e a explicar e justificar o processo de resolução. A representação icónica (desenho) serviu-lhe para verificar a solução do problema.

Na terceira questão, o aluno teria que descobrir quantas cadeiras eram necessárias para cinquenta e duas mesas. Nesta alínea, utilizou somente representações simbólicas. Como revela a figura 52, recorreu à multiplicação de 52 por 2 e à adição de 104 com 2. O seu raciocínio está correto embora os registos que faz não o estejam completamente.


$$52 \times 2 = 104 + 2 = 106$$

R: haverá 106 cadeiras.

Figura 52 - Resolução de Simão da terceira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”

O aluno mostrou compreender o enunciado e tinha presente, mentalmente, a imagem das mesas e das cadeiras quando utilizou as representações simbólicas, ou seja, a utilização das representações icónicas na resolução das perguntas anteriores foi favorável à identificação de um padrão: “eu já descobri que em cada um dos dois lados haviam 52 cadeiras, como pensei para as 10 mesas, e só falta as 2 da ponta” (ES2- RPM). Simão não mostrou ter qualquer dificuldade em resolver esta questão, apesar de ter que lidar com um número superior de mesas. O facto de ter conseguido generalizar o modo como as mesas e as cadeiras se apresentavam, fez com que conseguisse alcançar de imediato a resposta correta. As representações simbólicas tiveram como função explicar e justificar o processo de resolução e obter a solução do problema.

Na última questão do problema, ao invés de se pedir o número de cadeiras para um determinado número de mesas, perguntava-se quantas mesas eram necessárias para dezasseis cadeiras, ou seja, os alunos tinham que usar um processo inverso ao utilizado até aqui. Simão não teve qualquer dificuldade em responder. Baseou-se na alínea anterior e resolveu o problema recorrendo a representações simbólicas como mostra a figura 53.

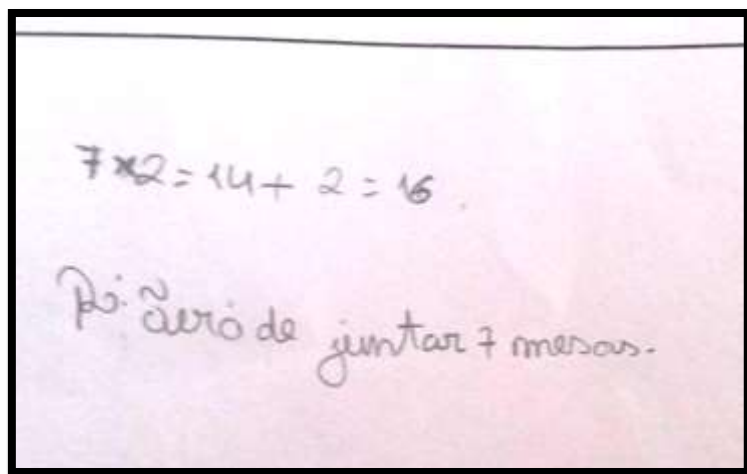


Figura 53 - Resolução de Simão da quarta pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”

Simão explicou a sua resolução dizendo: “então descobri que tinham de estar em cada lado 7 pessoas para me dar 14, porque se tivessem 8 em cada lado dava logo os 16, mas ainda faltava as pessoas da ponta. Por isso fiz 7 mais 7 são 14, depois mais duas fica 15, 16” (ES2- RPM). O aluno, por ter a imagem mental da disposição das mesas e das cadeiras, chegou, de imediato, a uma resposta correta, não mostrando dúvidas nem hesitações ao resolver o problema.

Face à resolução de todas as questões apresentadas no problema, penso que Simão compreendeu o enunciado, identificando os dados e as perguntas. Foi, também, capaz de estabelecer uma relação entre o número de mesas e de cadeiras, generalizando. No final afirmou: “este problema era mais fácil que o dos lembretes” (ES2- RPM), mostrando entusiasmo. Na generalidade, o aluno recorreu a representações icónicas e simbólicas, abandonando as representações icónicas a partir da segunda questão.

Na tabela 10 apresento uma síntese das representações utilizadas por Simão para resolver os problemas propostos em contexto de sala de aula e durante as entrevistas, bem como as funções que estas desempenharam.

<b>Problema</b>	<b>Representações utilizadas</b>	<b>Funções</b>
“Brincando com conchinhas”	Simbólicas	Explicar e justificar o processo de resolução; obter as soluções às três operações efetuadas.
“A rã saltitona”	Simbólicas	Obter o resultado das operações efetuadas, apesar de incorreto, e para explicar e justificar o processo de resolução.
“O voo das bruxas”	Icônicas; Simbólicas	R. icônicas: registrar a solução; identificar todos os elementos do enunciado; auxiliar a visualizar como iria distribuir as bruxas pelas vassouras. R. simbólicas: identificar o número bruxas em cada vassoura e verificar a solução.
“Os abraços”	Icônicas	R. icônica: atribuir significado ao que o enunciado dispunha; associar e estabelecer relações matemáticas entre as pessoas e os abraços dados; compreender que não podia repetir abraços.
	Icônicas; Simbólicas	R. icônica não lhe foi favorável para resolver o problema. Os símbolos convencionais ajudaram-lhe a contabilizar o número de abraços dados, apesar de só estar a compreender uma pessoa.
“O lanche na casa da avó”	Icônicas; Simbólicas	R. icônica: útil para compreender a totalidade de iogurtes; para distribuir os iogurtes pelos netos; para compreender o número de iogurtes que cada um ficava. R. simbólicas: verificar o resultado.
“Organizando os Minions”	Icônicas; Simbólicas	R. icônicas (desenho): ajudar o aluno a interpretar o problema e a compreender a sua estrutura matemática. R. simbólicas: ajudaram a obter soluções e a verificar o resultado. Ambas contribuíram para explicar e justificar o processo de resolução;
“Os lembretes da Sofia”	Ativas; Icônicas; Simbólicas	R. ativa.: não lhe serviu para compreender o enunciado, nem estabelecer um padrão. R. icônica (desenho): alcançar a resposta correta s e a r. simbólica: ajudar o aluno a representar o que tinha feito com a representação icônica e verificar o resultado.
	Simbólicas	R. simbólica: ajudar a representar os dados do problema; auxiliou a obter a solução do problema, confirmar um resultado e explicar o processo de resolução, apesar desta não se encontrar correta.
“O restaurante dos pais da Maria”	Icônicas; Simbólicas	R. icônica: auxiliou a visualizar o modo como as cadeiras e as mesas se encontravam dispostas, a interpretar e a estabelecer relações e a desvendar a estrutura matemática do problema. R. simbólica: verificar o resultado e traduz por símbolos o desenho efetuado.
	Simbólicas; Icônicas	R. simbólica: ajudar a representar os dados do problema; a obter a solução do problema e a explicar o processo de resolução. R. icônica: verificar a solução do problema, ao traduzir o que tinha feito através de símbolos matemáticos.
	Simbólicas	R. simbólica: obter a solução do problema e a explicar e justificar o processo de resolução.

*Tabela 10 - Representações utilizadas por Simão e suas funções*

## Capítulo V – Conclusão

Neste capítulo sintetizo o estudo por mim desenvolvido e procuro responder às questões de investigação. Além disso, reflito sobre as aprendizagens realizadas, que me poderão ser úteis como futura professora do 1.º ciclo, bem como as dificuldades que fui sentindo.

### 5.1 Síntese do estudo

Este estudo tem como propósito analisar e refletir sobre representações usadas pelos alunos na resolução de problemas matemáticos. Neste âmbito, foquei-me nas representações que utilizam para resolver problemas matemáticos, bem como nas funções que estas têm no processo de resolução e as suas relações.

Do ponto de vista metodológico, este estudo enquadra-se numa abordagem qualitativa de investigação e é uma investigação sobre a própria prática. Durante o estágio que realizei no âmbito da Unidade Curricular Estágio IV do curso de Mestrado em Educação Pré-escolar e Ensino do 1.º ciclo do Ensino Básico, concebi e concretizei uma intervenção pedagógica numa turma do 3.º ano de escolaridade em que fui propondo e explorando problemas de diversos tipos relacionados com o domínio “Números e Operações”. Neste contexto, adotei diversos métodos para a recolha de dados: recolha documental, nomeadamente as produções escritas dos alunos associadas à resolução de problemas e observação participante de seis aulas em que foram explorados problemas. Além disso, e como pretendia compreender, em profundidade, como pensam os alunos quando resolvem problemas focando-me nas representações que escolhem e suas funções, realizei entrevistas clínicas a dois alunos — Tiago e Simão — selecionados de acordo com determinados critérios. Os dados recolhidos foram objeto de uma análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas.

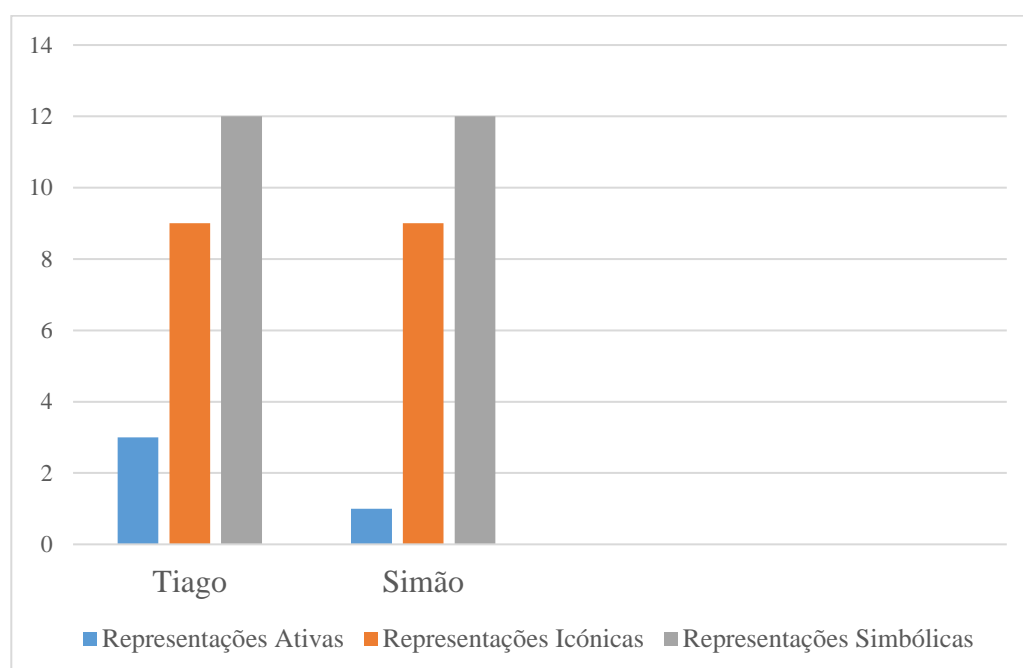
Tendo por referência o objetivo e questões de investigação bem como a análise dos dados recolhidos, elaborei as conclusões do estudo que apresento em seguida.

## 5.2 Conclusões do estudo

Organizo as conclusões deste estudo em duas secções. Começo por focar-me na primeira questão de investigação relacionada com as representações utilizadas durante a resolução de problemas matemáticos e, em seguida, debruço-me sobre a segunda questão: funções das representações e suas relações. Em ambas as secções, centro-me nas estratégias usadas por Tiago e Simão, os dois alunos que escolhi para desenvolver o estudo.

### 5.2.1 Que representações usam os alunos para resolver problemas?

Ao analisar as estratégias utilizadas por Tiago e Simão quer nos problemas apresentados em contexto de sala de aula, quer nas entrevistas clínicas, constato que as representações icónicas e simbólicas são as predominantes, como o gráfico 1 ilustra.



*Gráfico 1- representações utilizadas por Tiago e Simão*

A análise do gráfico revela que as representações ativas foram as menos utilizadas por estes dois alunos. Qualquer um apenas as usou durante a resolução de problemas apresentados nas entrevistas clínicas: Tiago três vezes e Simão uma vez. Esta situação não é de estranhar pois foi apenas nestas entrevistas que disponibilizei materiais

manipuláveis e chamei a atenção para eles. Optei por o fazer, pois os problemas que lhes propus envolviam a compreensão de figuras e a identificação de padrões e considerei que os materiais poderiam ser úteis para os ajudar a compreender o enunciado dos problemas e a descortinar regularidades. É um facto que nas aulas poderiam ter solicitado materiais para os apoiar na resolução dos problemas, mas nunca o fizeram, talvez por não terem por hábito, nas suas rotinas de sala de aula, pedir materiais por sua iniciativa enquanto resolvem problemas.

As representações icónicas e as simbólicas foram, como anteriormente referi, bastante usadas pelos dois alunos. A observação do gráfico 1 revela que ambos utilizaram qualquer um destes tipos de representações o mesmo número de vezes. No entanto, não o fizeram de igual forma, nem nos mesmos problemas. Esta conclusão é consistente com o que é referido por Pinto e Canavarro (2012) reportando-se ao estudo que realizaram: “no que diz respeito ao tipo de representações (...) as preferenciais são as do tipo icónico e as do tipo simbólico (...) estes dois tipos de representações não foram utilizados pelos quatro alunos nem da mesma forma, nem com a mesma função, nem no mesmo contexto” (p. 11).

As representações icónicas utilizadas pelos dois alunos surgiram de diversos modos. Tiago recorreu a desenhos para representar elementos do enunciado. Por exemplo, no problema “O voo das bruxas”, desenhou as bruxas e as vassouras. Utilizou o diagrama, “por vezes também designado por esquema” (Canavarro e Pinto, 2012, p. 58), para encontrar relações, nomeadamente no problema “Os abraços”, em que relacionou o número de abraços dados com o número de pessoas. Simão, neste mesmo problema, recorreu a um diagrama para resolver corretamente a primeira e segunda questão. Este diagrama permitiu-lhe fazer uma listagem sistemática de todas as possibilidades de abraços mas não era eficaz para resolver a terceira questão em que o número de pessoas era mais elevado. Dando-se conta deste facto, realizou um outro para resolver a terceira questão, iniciou esta resolução mas não conseguiu chegar à solução. Sobretudo neste caso, o recurso ao diagrama foi essencial a Tiago para resolver corretamente todas as questões do problema. Esta conclusão vai ao encontro do que é referido por Pinto e Canavarro (2012) bem como por Araújo (2014). Focando-se no papel do diagrama, Pinto e Canavarro salientam que “é o de descompactar a estrutura do problema, servindo de precioso apoio aos raciocínios matemáticos que conduzem à solução correta” (p. 12), tornando-se “uma ferramenta poderosa para raciocinar e obter soluções de problemas

mais complexos” (p. 58). Araújo, por sua vez, destaca que diagramas ou esquemas “podem representar uma forma de os alunos organizarem os dados de um problema, ao mesmo tempo que representam um bom meio de desenvolver o seu raciocínio matemático” (p. 71).

Tiago recorreu a uma representação próxima da tabelar (representação icónica) no problema “Lanche na casa da avó” para determinar o total de iogurtes de todas as embalagens disponibilizadas e a uma tabela no problema “Os lembretes da Sofia” para compreender quantas vezes apareciam determinados números. Preston e Garden (2003) referem que as representações numéricas/tabelares são vantajosas, pois são ferramentas naturais para a generalidade dos alunos, baseadas na sua experiência prévia, conduzindo a novas representações como gráficos ou equações.

No problema, “Organizando os Minions”, Tiago e Simão representaram cada participante com um X, um tipo de representação icónica que Pinto e Canavarro (2012) designam por símbolos não convencionais. De acordo com estas autoras, estes símbolos “são criados e utilizados pelas crianças para representar determinados elementos do real, surgindo por exemplo sob a forma de traços verticais, traços horizontais, círculos, setas” (p. 57), representando “sinteticamente ou alguém ou alguma coisa, usando o símbolo para assinalar a existência desse alguém ou coisa mas sem o tentar descrever” (ibidem).

Em todos os problemas, Tiago e Simão usaram estratégias de resolução, umas vezes corretas e outras nem tanto, em que usaram representações simbólicas. Estas “são sobretudo utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada ou um determinado número de elementos do problema em questão” (idem, p. 12) e “correspondem a um nível de raciocínio mais elevado” (Ponte e Velez, 2011, p. 182).

Neste âmbito, uma das representações usadas foi a linguagem natural. Por exemplo, numa das estratégias utilizadas por Simão para resolver o problema “Organizando os Minions”, o aluno explica o seu raciocínio através de palavras, relacionando com o número de Minions. Além disso, os alunos utilizam símbolos convencionais para representar quantidades, relações matemáticas (por exemplo, o sinal =), operações aritméticas (sinais de +, - e x), expressões numéricas e procedimentos de cálculo (horizontal ou algorítmico). Por exemplo, na primeira pergunta do problema “Os abraços”, Simão resolveu através de um esquema e utiliza somente os símbolos matemáticos para apresentar a solução, ou seja, a quantidade de abraços dados; no

problema “Brincando com conchinhas”, Tiago e Simão usaram exclusivamente operações matemáticas; no problema “O restaurante dos pais da Maria”, Tiago na segunda pergunta, estabelece uma relação entre o desenho e o cálculo algorítmico que efetua para verificar o resultado.

Ao refletir sobre as representações utilizadas por Tiago e Simão, deparei-me com o uso recorrente do algoritmo. Tiago utiliza-o até mesmo para calcular valores de grandezas reduzidas, como no problema “A rã saltitona”, ao utilizar o algoritmo da subtração para calcular  $4-1$ . Estas surgem, talvez devido ao seu gosto pela Matemática, por considerar que estas são uma mais-valia para a resolução do problema ou por deprender que a sua professora valoriza a apresentação do algoritmo.

No problema “Lanche na casa da avó”, Simão nas duas perguntas desta tarefa utiliza exatamente as mesmas representações (icónicas e simbólicas), ao invés de tentar adaptar ou generalizar quando a pergunta contemplava números superiores. Esta opção talvez tenha sido utilizada, por se sentir confortável com a mesma e julgar que a consegue executar sem dificuldade. No estudo de Valério (2005), este aspeto também é mencionado, ao afirmar que “alguns alunos optam por usar o mesmo tipo de resolução utilizado nas actividades anteriores, mas outros alunos, apenas utilizam uma parte dessa representação, isto é, abandonam, a parte mais esquemática e optam apenas pela realização de cálculos” (p. 59). Indo ao encontro das palavras de Preston e Garden (2003), “quando os alunos são convidados a escolher a sua própria representação, eles às vezes escolhem a sua favorita ou representações com a qual eles estão mais à vontade, e não a que é mais útil” (p. 43).

Um aspeto a destacar, quer nos problemas propostos em contexto de sala de aula, quer nas entrevistas clínicas, é que as representações que surgiam primeiramente eram de cariz icónico, passando depois para representações simbólicas. Este facto pode estar relacionado com uma ideia apresentada por Clement (2004): os alunos podem começar pelas representações que sejam mais significativas para si.

Esta sequencialidade surgiu em diversas resoluções. Por exemplo, Simão na primeira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”, modela a situação com recurso a representações icónicas — desenho das mesas e das cadeiras — e, em seguida, usa o algoritmo da adição para verificar o resultado. Esta modelação permitiu que, nas perguntas seguintes, conseguisse utilizar uma estratégia mais abstrata: resolveu-as exclusivamente através de representações simbólicas. Este modo de agir vai ao encontro

do mencionado por Coelho (2010): “de uma forma geral, os alunos recorrem a diferentes formas de representar, optando sempre numa fase inicial pelas representações pictóricas e remetendo para o final as representações simbólicas e algébricas, estas últimas específicas da Matemática” (p. 175). Curiosamente, na segunda pergunta do problema, Simão recorre primeiramente a representações simbólicas para chegar à solução e, seguidamente, é que utiliza uma representação icónica para verificar o resultado.

Ao analisar todas as estratégias destes dois alunos compreendo que apresentam características específicas e distintas entre si. Por exemplo, Tiago recorre a tabelas durante a resolução dos problemas, ao invés de Simão que não se apoiou neste tipo de representação. Simão, durante a resolução tenta relacionar operações matemáticas em diversos momentos, embora os seus registos nem sempre sejam matematicamente corretos. Por exemplo no problema “A rã saltitona”, relaciona a adição  $12+12+12$ , com a multiplicação  $4 \times 3$ . Tal como concluiu Araújo (2014) no estudo que realizou, “parece que as representações utilizadas pelos três alunos observados estão relacionadas com a forma individual de compreensão do enunciado, bem como com a familiaridade que cada um tem com os números envolvidos e não apenas com as características matemáticas dos problemas” (p. 72). Saliento que Simão, na grande maioria dos problemas apresentados, percorreu todas as fases do modelo de Polya (1945) (compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução de um plano e verificação do resultado), pois nas suas resoluções surgiu com muita frequência uma verificação da estratégia utilizada, geralmente recorrendo a algoritmos.

Ao analisar o conjunto de problemas apresentados, compreendo que a natureza destes foi crucial para que surgissem várias estratégias de resolução. Tal como recomenda Ponte (2005), procurei que os problemas fossem desafiantes e possibilitassem o uso de diferentes representações. Na sua maioria foram o que Vale e Pimentel (2004) designam por problemas de processo. Além disso, os problemas “O voo das bruxas” e “Organizando os Minions” tinham mais do que uma solução correta, podendo considerar-se o que Boavida et al., (2008) designam por problemas abertos. Este tipo de problemas favorece o desenvolvimento do raciocínio, do espírito crítico e da capacidade de reflexão.

A análise das estratégias usadas por Tiago e Simão evidenciam, maioritariamente, o uso simultâneo de representações icónicas e simbólicas, mostrando aparentemente que ainda sentem necessidade de recorrer ao desenho ou a esquemas durante a resolução de problemas. Autores como Pinto e Canavarro (2012) afirmam que as representações

iniciais do aluno com o desenrolar do tempo evoluem para representações formais e o facto de surgirem, simultaneamente, representações icónicas e simbólicas, “fornece-lhe uma maior riqueza de pormenores e um maior cunho pessoal, além de fornecer ao professor um conjunto de informações bastante pertinente no que se refere às tarefas desenvolvidas” (p. 15). Tiago e Simão utilizaram os símbolos matemáticos em junção com as representações icónicas, para generalizar quando o problema envolvia números grandes e tornava-se trabalhoso recorrerem ao desenho, ou para confirmar o resultado, tal como na resolução de Simão da primeira pergunta do problema “O restaurante dos pais da Maria”, em que desenha as mesas e verifica com uma adição.

Sintetizando, estes dois alunos mostraram conseguir utilizar as representações simbólicas, na maioria dos problemas, quer para resolver a tarefa, quer como de verificação. Porém, aparentemente sentem a necessidade de associar a representações simbólicas e icónicas, evidenciado nas várias estratégias que utilizaram. Ambos os alunos, especialmente Tiago, recorrem muito ao algoritmo durante estes momentos. A maior dificuldade apresentada por estes alunos foi em generalizar alguns padrões a partir das representações icónicas.

### **5.2.2 Que funções têm as representações usadas pelos alunos e como se relacionam?**

Ao analisar as estratégias utilizadas por estes dois alunos, verifiquei que as representações tinham diversas funções de acordo com contexto do problema apresentado.

Primeiramente, apesar das representações ativas não terem tido grande destaque nas estratégias dos dois alunos, estas possuíram um determinado papel. Tiago ao recorrer à manipulação dos materiais no problema “O restaurante dos pais da Maria”, teve como objetivo verificar se a sua conjectura estaria correta, ou seja, esta teve como função auxiliar o raciocínio do aluno, ao visualizar e compreender o processo de junção das mesas e das cadeiras. No estudo de Pinto e Canavarro (2012), as autoras destacam o papel das representações ativas referindo que através destas os alunos conseguiram “concretizar o raciocínio matemático que esteve subjacente à correta resolução do problema em questão” (p. 13).

As representações icônicas surgiram em diversos formatos e com funções distintas. As tabelas utilizadas por Tiago no problema “O lanche na casa da avó” foi-lhe útil para compreender quantos iogurtes possuía na totalidade e a tabela presente no problema “Os lembretes da Sofia” ajudou-o a organizar os dados, a interpretar situações, a visualizar de uma forma rápida quantas vezes se repetia o 3 e o 4 e a não se perder no raciocínio. Este aluno compreendeu que as tabelas eram ferramentas úteis para organizar os dados, afirmando que possui um gosto especial pela concretização deste tipo de representação.

Ambos os alunos utilizaram desenhos (representações icônicas) em diversas tarefas matemáticas, interligando-os com símbolos convencionais. Os desenhos tiveram a função de auxiliar a desvendar a estrutura do problema e a atribuir significado ao enunciado. Por exemplo, no problema “O voo das bruxas” ambos recorreram ao desenho das bruxas e das vassouras para interpretar o enunciado, identificar todos os elementos do problema e visualizar como iriam distribuir as bruxas pelas vassouras; no problema “Organizando os Minions”, Simão, através do desenho, interpreta o problema e compreende a sua estrutura matemática. Pinto e Canavarro (2012) referem que o desenho pode possibilitar a construção de significados para cada problema e que este pode ser “uma ferramenta para os alunos darem significado aos conceitos e às ideias matemáticas” (p. 13). Com o uso deste tipo de representação icônica podem “refletir sobre o que iam construindo e recordar o processo matemático seguido a fim de o comunicar a outros” (ibidem), como tal todos os desenhos que estes dois alunos utilizaram “tinham significado, eram intencionais e tinham um propósito” (ibidem).

O diagrama surgiu, por exemplo, no problema “Os abraços”, em que Simão esquematiza através de traços e de nomes de pessoas do enunciado, o número de abraços dados entre quatro amigos. Este diagrama possuiu diversas funções, uma vez que favoreceu a atribuição de significado ao enunciado, ajudou o aluno a associar e a estabelecer relações entre o número de abraços dados e o número de pessoas e, também, a visualizar a estrutura do problema, ou seja, a compreender que não podia repetir abraços. Indo ao encontro de que Pinto e Canavarro (2012) afirmam e associando a este contexto, “o diagrama serviu ainda de apoio a diferentes raciocínios matemáticos e lançou as bases para a solução dos problemas envolvidos. Através desta representação, os alunos comunicaram também o processo de resolução seguido bem como a solução encontrada” (p. 13).

As representações simbólicas surgiram de três formas. Primeiramente em junção com elementos icônicos, ou seja, para exibir o resultado ou para identificar elementos ou em junção com palavras. Tiago no problema “Organizando os Minions” explica o seu raciocínio através de palavras, relacionando o número da fila com o número de Minions. No problema “O voo das bruxas”, Tiago numera cada vassoura e apresenta o resultado em que identifica, através de símbolos convencionais, a quantidade de bruxas presentes em cada vassoura. Seguidamente, como verificação, presente na maioria das resoluções de Simão, recorre ao algoritmo para verificar o que realizou através de representações icônicas. Por fim, as representações simbólicas surgem para resolver a tarefa matemática, como por exemplo no problema “Brincando com conchinhas”, em que ambos os alunos recorrem a duas operações de adição e divisão para explicarem e justificarem o processo de resolução.

Estas representações tiveram uma diversidade de papéis, de acordo como surgiram nas resoluções destes dois alunos. Adotando as palavras de Pinto e Canavarro (2012) “em algumas situações foram apenas utilizadas para representar e comunicar ou a solução encontrada e/ou um determinado número de elementos do problema em questão. Noutros problemas, os elementos simbólicos foram utilizados na resolução do problema em si (...)” (p. 14). Por outro lado, também verifiquei que “os elementos simbólicos se apoiam nos elementos icônicos previamente construídos, e que são estes últimos que ajudam os alunos a descompactar o problema e a dar significado à interpretação do mesmo” (ibidem).

Na maioria das vezes, o uso exclusivo de representações simbólicas ocorre depois de os alunos terem compreendido a estrutura do problema através de representações icônicas ou ativas. Como Valério (2005) menciona no seu estudo, “as representações consideradas informais parecem conduzir a representações mais formais” (p. 60). Exemplificando, no problema “O restaurante dos pais da Maria”, Tiago nas duas primeiras perguntas recorreu ao desenho das mesas e das cadeiras, sendo que o recurso a representações ativas, onde utilizou o material manipulável para simular a disposição das mesas e cadeiras, e o uso de desenhos (representação icônica) lhe foram extremamente úteis para conseguir resolver as alíneas posteriores. Fazendo um paralelismo com o estudo do mesmo autor “as representações informais terão sido utilizadas como forma de os alunos entenderem melhor o problema, antes de serem postas de parte em detrimento de representações mais formais. De referir que mesmo dominando representações formais

(algoritmos) verifica-se uma tendência para os alunos usarem inicialmente esquemas mais informais” (ibidem).

Os alunos, na maioria das vezes, partiam das representações mais elementares para as mais simbólicas, tentando estabelecer conexões entre o que iam realizando. Valério (2005) menciona que “os elementos icónicos representados pelos alunos surgem em fases iniciais da resolução do problema, geralmente em simultâneo com a apresentação dos dados. O elemento icónico poderá ser uma mera ilustração, uma forma de ligar o problema à realidade, uma forma de ajudar a visualizar o problema ou constituir um elemento meramente afectivo” (p. 60).

Em suma, a análise dos alunos das suas próprias estratégias foi essencial para determinarem um caminho favorável à resolução do problema. Através desta foram “colocando e testando hipóteses, fazendo opções, ensaiando processos de resolução e principalmente, encontrando “caminhos”, por vezes informais, mas que conduziam à formalização de conceitos e/ou procedimentos matemático” (Coelho, 2010, p. 178). Por outro lado, o momento destinado à apresentação das estratégias, também possui funções. Neste momento, surgiram novas aprendizagens, pois os alunos estabeleceram relações entre as representações destacadas e concluíram quais as mais adequadas para cada problema. Ou seja, estas conexões foram importantes, na medida que poderiam permitir a evolução dos alunos nas diferentes representações, nomeadamente passando do não convencional para o convencional.

### **5.3 Reflexão final**

O ensino da Matemática, ao longo dos anos, tem sofrido diversas alterações. Atualmente dedica-se uma maior importância ao processo de resolver tarefas matemáticas, ao invés de se valorizar, sobretudo, o produto final como acontecia há algumas décadas atrás. Como menciona Gravemeijer (citado por Valério, 2005) “se antes a matemática era vista como um produto, procura-se hoje dar maior ênfase ao processo de fazer matemática em que os alunos tenham uma profunda compreensão da sua matemática e sejam capazes de explicar e justificar os seus procedimentos” (p. 38). Esta maior ênfase que, nos tempos recentes, é dada às representações de ideias matemáticas, está associada à valorização dos alunos fazerem matemática compreendendo o que estão a fazer.

Decidi realizar uma investigação na área do ensino e aprendizagem da Matemática. Se recordar a minha experiência enquanto aluna, atento que os meus professores aparentemente não atribuíam relevância, nos momentos de resolução de problemas, ao processo de fazer matemática, nem ao aluno como ser ativo e participativo. Não me revejo neste papel e tinha consciência de que ensinar matemática iria exigir de mim uma atitude e um modo de agir mais complexo. Apoiando-me nas palavras de Dufour-Lanvier et al, citado por Valério (2005), o tipo de ensino que pretendia para mim “requer uma mudança de atitude; melhor conhecimento das representações externas da criança, das concepções ligadas aos conceitos a que correspondem representações externas ligadas a uma certa realidade, dos obstáculos encontrados pela criança nas representações propostas por ela ou desenvolvidas, e um dinâmico conhecimento dessas representações, ou seja, como se envolvem com o significado” (p. 43).

A opção pelo estudo do tema das representações utilizadas pelos alunos na resolução de problemas, decorreu de um interesse pessoal e a realização do trabalho que apresento foi crucial para o meu crescimento profissional. Por exemplo, conhecer as diversas estratégias de resolução de problemas usadas pelos alunos e estabelecer conexões entre elas auxiliou-me a compreender o seu raciocínio e a atenuar as dificuldades sentidas, tendo em consideração as capacidades dos alunos. Esta investigação também me ajudou a enfrentar algumas inseguranças, nomeadamente no momento em que tinha de liderar uma discussão coletiva sobre as estratégias apresentadas e a formular questões que fossem pertinentes. Baseando-me na teoria que fui lendo e na pesquisa efetuada, destaco o desejo de querer continuar a aprofundar os meus conhecimentos sobre a temática e a querer crescer tanto pessoalmente, como profissionalmente.

Na vertente profissional, ao realizar este projeto compreendi as diversas fases do processo de resolução de problemas, bem como ações do professor que podiam auxiliar os alunos em cada uma destas fases. Numa fase posterior à exploração do problema em contexto de sala de aula, a análise das estratégias possibilitou-me entender o que o aluno tinha compreendido de determinado enunciado e o que iria fazer com a informação fornecida. Outro aspeto fundamental foi compreender as dificuldades emergentes, na medida que podia adequar a minha prática e entender o pensamento do aluno. Por outro lado, a sequencialidade das estratégias apresentadas (4ª prática de Smith et al.) e partir de representações menos complexas que os alunos concretizavam, foi uma mais-valia para

estabelecer conexões com o mais simbólico, ajudando a desenvolver os seus pensamentos.

Com a realização deste estudo desenvolvi novos conhecimentos sobre a realização de um projeto de investigação e de todas as componentes que este integra.

Durante esta investigação fui sentindo diversas dificuldades. Primeiramente tornou-se um desafio gerir o tempo de intervenção pedagógica. Ou seja, era minha intenção atribuir tempo suficiente aos alunos para escolherem e explorarem uma estratégia, à sua escolha, que considerassem pertinente para a tarefa matemática apresentada. No entanto, devido aos ritmos dissemelhantes, nem sempre era fácil cumprir o tempo previsto para cada tarefa. Outra dificuldade que senti foi tentar que os alunos compreendessem o problema. Porém, nem sempre foi possível, pois aceder a todas as dificuldades era uma tarefa complexa. Existiam alunos que devido às suas dificuldades ao nível do seu desempenho não mostravam tanta confiança nos momentos de resolução de problemas, sendo que sempre foi minha intenção tentar motivá-los e envolve-los nestas tarefas, ao focá-los na compreensão do enunciado.

Outro aspeto que se tornou um desafio para mim, foi saber o que fazer com o que os alunos diziam e faziam durante as entrevistas clínicas. Por não ter prática com este tipo de entrevistas, não foi simples lidar com as situações em que os alunos estavam com dificuldade em prosseguir o seu raciocínio. Por exemplo, na entrevista com Tiago associada ao problema “Os lembretes da Sofia”, apesar do meu esforço em focá-lo na organização dos lembretes, o aluno nunca conseguiu identificar um padrão que lhe permitisse chegar à solução correta, levando-me a interrogar-me se as questões que coloquei não eram proveitosas e suficientes para o ajudar a superar as dificuldades.

No desenrolar desta investigação, penso que fui tentando dar resposta a todas as dificuldades que iam surgindo, umas vezes melhor do que outras, tendo como objetivo dissipar as inseguranças que tinha por realizar um projeto relevante para mim, a nível pessoal e profissional. Como é de esperar, existem aspetos em que tenho de continuar a investir para lidar, por exemplo, com as dificuldades que fui sentindo nos momentos de discussão coletiva e o receio que tinha de não me exprimir corretamente de modo a fazer-me entender.

Com a realização deste projeto sinto que consegui evoluir em diversos aspetos. Como futura professora, considero pertinente valorizar as ideias dos alunos e os seus raciocínios, independentemente de se tratar, ou não, da área da matemática. É minha

intenção que os alunos tenham um papel ativo na construção dos seus conhecimentos, que se sintam motivados para aprender, que o ambiente educativo seja propício ao desenvolvimento de cada aluno. Em modo de conclusão, pretendo continuar a refletir sobre o tema em que incide este trabalho e a aprofundá-lo, privilegiando as diversas representações de uma ideia, com o objetivo de melhorar a minha prática e ser uma professora capaz de ajudar a crescer os alunos tanto no que se refere ao seu desenvolvimento pessoal, como à aprendizagem de todas as áreas curriculares.

## Referências Bibliográficas

- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico*. Porto: Edições Asa.
- Alami, S. D. & Moussaoui, I. (2010). *Os Métodos Qualitativos*. São Paulo: Editora Vozes.
- Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? . In B P. Campos (Org.), *Formação profissional de professores no Ensino Superior/Cadernos de Formação de Professores* (pp. 21-30). Porto: Porto Editora.
- APM., IIE (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM.
- Araújo, D. (2014). *As representações usadas por alunos do 2.º ano na resolução de problemas*. Setúbal: Instituto Politécnico de Setúbal - Escola Superior de Educação. Obtido em 21 de setembro de 2017, de [https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/7980/1/Relat%C3%B3rio%20Projeto%20de%20Investiga%C3%A7%C3%A3o\\_Diana%20Ara%C3%BAjo%20n\\_%C2%BA120140020%20.pdf](https://comum.rcaap.pt/bitstream/10400.26/7980/1/Relat%C3%B3rio%20Projeto%20de%20Investiga%C3%A7%C3%A3o_Diana%20Ara%C3%BAjo%20n_%C2%BA120140020%20.pdf)
- Arends, R. I. (1995). *Aprender a ensinar*. Lisboa: McGraw-Hill de Portugal.
- Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança. Obtido em 6 de Agosto de 2017, de <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10561/1/tese.pdf>
- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Beillerot, J. A. (2001). A pesquisa: Esboço de uma análise. In M. André (Ed.), *O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores* (pp. 71-90) . Campinas: Papirus.
- Bell, J. (2004). *Como realizar um projecto de investigação..* Viseu: Gradiva.
- Boavida, A. & Menezes, L. (2012). Ensinar matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. Em L. Santos (Ed), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática*, pp. 287-295. Portalegre: SPIEM
- Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no ensino básico*. Lisboa: DGIDC.
- Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em investigação*. Porto: Porto Editora.
- Borrvalho, A. (1990). *Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de Matemática: proposta de um programa de intervenção*. Lisboa: APM.
- Bruner, J. (1999). *Para uma Teoria da Educação*. Lisboa: Relógio D'Água.
- Canavarro, A. & Pinto, M. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante 21(2)*, pp. 51 - 79.

- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: duas professoras, dois Currículos* (Tese de Doutotamento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática* 115, 11-17 .
- Canavarro, A. P. (2007). *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos*. Em Quadrante, 16(2) (pp. 81-118).
- Cândido, P. T. (2001). Comunicação em Matemática. Em K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.
- Carmo, H. & Ferreira, M. (1998). *Metodologia da Invetigação: Guia para Autoaprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Clement, L. (2004). A model for understanding, using, and connecting representations. Em *Teaching Children Mathematics* 11 (2), pp. 97-102. Reston: NCTM.
- Coelho, V. (2010). *Comunicação matemática num contexto de resolução de problemas: uma experiência com alunos do 9.º ano*. Faro: Universidade do Algarve - Faculdade de Ciências e Tecnologia . Obtido de 7 de novembro de 2017, de [https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/5561/1/Comunica%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica%20num%20contexto%20de%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas\\_%20Uma%20experi%C3%Aancia%20com%20alunos%20do%209.%C2%BAa.pdf](https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/5561/1/Comunica%C3%A7%C3%A3o%20matem%C3%A1tica%20num%20contexto%20de%20resolu%C3%A7%C3%A3o%20de%20problemas_%20Uma%20experi%C3%Aancia%20com%20alunos%20do%209.%C2%BAa.pdf)
- Coutinho, C. (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Edições Almedina, S.A.
- Coutinho, C.; Sousa, A.; Dias, A.; Bessa, F.; Ferreira, M. J. & Vieira, S. (2009). *Investigação-Acção: Metodologia Preferencial nas Práticas Educativas*. *Psicologia, Educação e Cultura*, 2, 355-380. Obtido de 7 de novembro, de [http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10148/1/Investiga%c3%a7%c3%a3o\\_Ac%c3%a7%c3%a3o\\_Metodologias.PDF](http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/10148/1/Investiga%c3%a7%c3%a3o_Ac%c3%a7%c3%a3o_Metodologias.PDF)
- Doyle, k. (2007). The teacher, the tasks: Their role in students? Mathematical literacy. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings 30th Annual Conference of the Mathematics Research Group of Australasia - Mathematics: Essential Research, Essential Practice*, (pp. 246 – 254), Hobart, Tasmania.
- Esteves, L. M. (2008). *Visão Panorâmica da Investigação-Acção*. Porto: Porto Editora.
- Estrela, A. (1994). *Teoria e Prática de Observação de Classes. Uma Estratégia de Formação de Professores*. Porto: Porto Editora .
- Fernandes, M. (2014). *Representações matemáticas como meio facilitador da comunicação matemática na resolução de problemas: um estudo com alunos do 2º ano de escolaridade*. Obtido de 24 de setembro, de [http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1699/1/Maria\\_Fernandes.pdf](http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1699/1/Maria_Fernandes.pdf)
- Gil, A. (1991). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. São Paulo: Editora Atlas.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International research in Mathematics Education* , pp. 176-201. New York: Rutledge.

- Hunting, R. (1997). Clinical Interview methods in mathematics education research and practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, pp. 145-165.
- Leite, L. & Esteves, E. (2005). Ensino orientado para a aprendizagem baseada na resolução de problemas na licenciatura em ensino de Física e Química. In Silva, B. & Almeida, L. (Eds.). *Actas do Congresso Galaico-Português de Psico-Pedagogia*. Braga: Universidade do Minho.
- Lester, F. K. (1980). Research in mathematical problem solving. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education*, pp. 286-323. Reston: NCTM.
- Lopes, A. V. (1990). *Atividades matemáticas na sala de aula*. Lisboa: Texto Editora.
- Ludke, M. & (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.
- Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos do 9º ano. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale & J. P. Ponte (Eds.), *EIEM 2011 – Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, pp. 347-364.
- Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da Investigação-acção*. Porto: Porto Editora.
- ME. (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.
- Mendes, M. (2012). *A Aprendizagem da Multiplicação numa perspetiva de Desenvolvimento do sentido do Número: Um estudo com alunos do 1º ciclo*. (Dissertação de Doutoramento). Universidade de Lisboa: Instituto de Educação.
- Moreira, L. (1987). *A resolução de problemas*. Educação e Matemática, nº1, pp. 10-12.
- NCTM. (2004). *Navigating through Problem Solving and Reasoning in Grade 3*. Reston: NCTM.
- NCTM. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.
- Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.
- Palhares, P. & Gomes, A. (2006). *MATIC - Desafios para um novo rumo*. Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.
- PFCM (2009-2010). *Orquestrar discussões colectivas: cinco práticas essenciais*. Setúbal: Instituto Politécnico de Setúbal - Escola Superior de Educação.
- Pinto, M. & Canavarro, A. P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. Em In O. Magalhães, & A. Folque (org), *Práticas-deinvestigação-em-Educação*. Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.
- Polya, G. (1945). *How to solve It – A new aspect of mathematical method*. Estados Unidos: Princeton University Press.
- Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*. USA: Library of Congress Catalog.

- Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas - Um novo aspecto do método matemático..* Rio de Janeiro: Interciência.
- Polya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.
- Ponte, J. P. & Serrazinha, M.. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. Em GTI. (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P. & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo. Em *Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra* (pp. 11-16). Fundação para a Ciência e Tecnologia.
- Ponte, J. P.; Serrazinha, L.; Guimarães, H. M.; Breda, A.; Guimarães, F.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Preston, R. & Garner, A. (2003). Representation as a Vehicle for Solving and Communicating. *Mathematics teaching in the middle school*, 9 (1), pp. 38 - 43.
- Quivy, R. & Campenhoudt, L. (2005). *Manual de investigação em ciências sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. Em PNA, 4 (1) (pp. 1-14).
- Santiago, Agrupamento Vertical de Escolas Ordem (2013/2017). *Projeto Educativo*. Ministério da Educação e Ciência.
- Scheuermann, A. & Garderen, D. (2008). *Analyzing students' use of graphic representations: Determining misconceptions and error patterns for instruction*. *Mathematical Teaching in the Middle School*, 13, 471-477.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Smith, M.; Hughes, E.; Engle, R. & Stein, M. (2009). *Orchestrating discussions Mathematics Teaching in the Middle School* 14 (9). 548-556.
- Smole, K. & Diniz, M. (1998). *Ensinar e Aprender: Matemática - Impulso Inicial*. São Paulo: Centro de Estudos e Pesquisas em Educação, Cultura e Ação Comunitária (CENPEC).
- Smole, K. C. (2000). *A Matemática na Educação Infantil: A teoria das Inteligências Múltiplas na prática escolar*. Porto Alegre: Artmes.
- Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), pp. 438-445.
- Vale, I. & Pimentel, T. (2004). Resolução de Problemas. Em P. Palhares (Ed.), *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico* (pp. 7-51). Lisboa: Lidel.
- Vale, I. (1997). Desempenhos e concepções de futuros professores de matemática na resolução de problemas. Em D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale (Coords.).

*Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: Múltiplos contextos e perspectivas* (pp. 1-38). Aveiro: GIRP.

Valério, N. (2005). A matemática nos primeiros anos. Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1º ciclo. *Revista Quadrante*, 14 (1), 38-66.

Viera, M. (2012). *A Resolução de Problemas e a Criatividade*. Viana do Castelo: Instituto Politécnico de Viana do Castelo. Obtido em 23 de setembro, de [http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1411/1/Maria\\_Vieira.pdf](http://repositorio.ipv.pt/bitstream/20.500.11960/1411/1/Maria_Vieira.pdf)

Wagner, D. R. (2003). *We Have a Problem Here:  $5 + 20 = 45$* . *Mathematics Teacher*, Reston, 96(9), pp. 612-616.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 164-186.

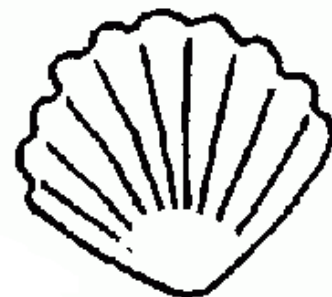
## Anexos

- ✓ **Anexo I: Problema “Brincando com conchinhas”**, adaptado de Provas de aferição de 4º ano, 2011, 1ª fase

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_



### Brincando com conchinhas



Na praia, a Joana apanhou 10 conchinhas e a Inês 8. As duas amigas decidiram dar algumas conchinhas à sua professora, de modo a que as três ficassem com o mesmo número de conchinhas.

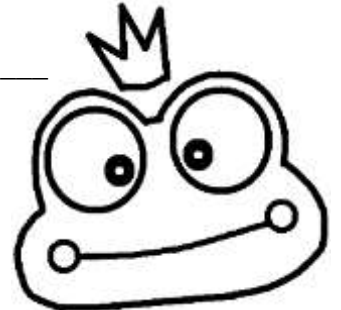
Com quantas conchinhas ficou cada uma?

Para resolveres podes utilizar palavras, números, esquemas ou desenhos.

✓ **Anexo II: Problema “A rã saltitona”,** adaptado de Canavarro e Pinto (2012)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

*A rã saltitona*



Uma rã tentava saltar para fora de um poço em que havia uma escada. Durante o dia, cada vez que a rã saltava, subia quatro degraus da escada, mas durante a noite, como estes estavam escorregadios, escorregava um degrau. Quantos saltos tem a rã de dar se a escada do poço tiver 12 degraus?

- ✓ **Anexo III: Problema “O voo das bruxas”**, adaptado de Canavarro e Pinto (2012)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

### O voo das bruxas



20 Bruxas vão a um encontro em Setúbal e têm que viajar em 8 vassouras. Nenhuma vassoura pode levar mais do que 4 bruxas nem menos do que 2 bruxas. Como poderão viajar as bruxas?

✓ **Anexo IV: Problema “Os abraços”**, adaptado de Canavarro e Pinto (2012)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_



## Os abraços

A Rita, o Nuno, o Paulo e a Lília são amigos. Quando chegaram à escola cumprimentaram-se e cada um deu um abraço aos outros. Quantos abraços deram ao todo?

E se fossem 5 amigos quantos abraços dariam ao todo?

E se fossem 10 amigos a cumprimentarem-se com um abraço?

- ✓ **Anexo V: Problema “Lanche na casa da avó”,** adaptado de Boavida et al. (2008)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_



## Lanche na casa da avó

A avó Sílvia tem 6 netos que estão a passar férias na sua casa. Um dia, a avó foi ao supermercado e comprou 5 embalagens de 4 iogurtes cada. Todos os dias, ao lanche, cada um dos seus netos come 1 iogurte. Para quantos dias chegaram os iogurtes que a avó comprou? E se a avó tivesse comprado 10 embalagens de 4 iogurtes cada, para quantos dias chegariam os iogurtes?

- ✓ **Anexo VI: Problema “Organizando os Minions”,** adaptado de Navigating through Problem Solving and Reasoning in Grade 3 (2004)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

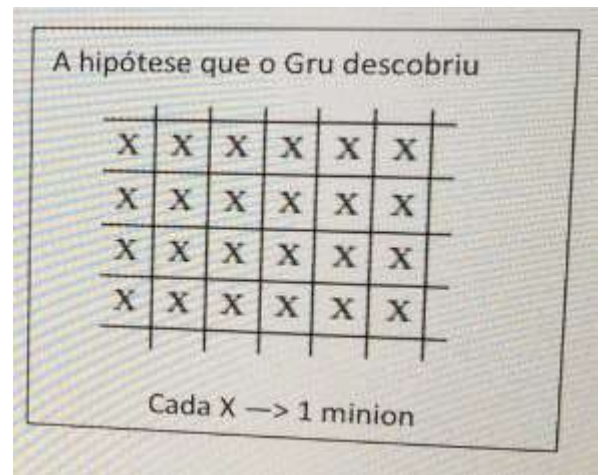


## Organizando os Minions

O Gru, o mal disposto, quer que os seus 24 minions participem num desfile e está a pensar sobre como pode organizá-los. Sabe que quem participa no desfile tem que estar organizado em filas e que se houver mais do que uma fila todas têm que ter o mesmo número de minions.

O Gru, o mal disposto, pensou: “Já sei uma hipótese, posso fazer 4 filas com 6 minions em cada fila”. Mas há mais hipóteses, quais serão?

Ajuda o Gru, a descobrir **todas as hipóteses de organizar os seus minions para o desfile.** Explica como pensaste. Podes usar palavras, cálculos ou desenhos.

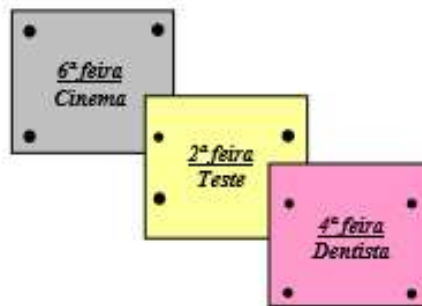


- ✓ **Anexo VII: Problema “Os lembretes da Sofia”**, adaptado de Barbosa (2009)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

## Os lembretes da Sofia

Para não se esquecer dos seus compromissos a Sofia pendura lembretes no placar do quarto, colocando *pioneses* como mostra a figura.



Se a Sofia continuar a pendurar os seus lembretes desta forma:

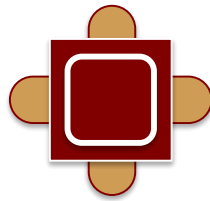
1. De quantos *pioneses* precisará para colocar no seu placar 6 lembretes?
2. E se quiser pendurar 35 lembretes, de quantos *pioneses* precisará?

✓ **Anexo VIII: Problema “O restaurante dos pais da Maria”**, adaptado de Palhares e Gomes (2006)

Nome: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_

## O restaurante dos pais da Maria

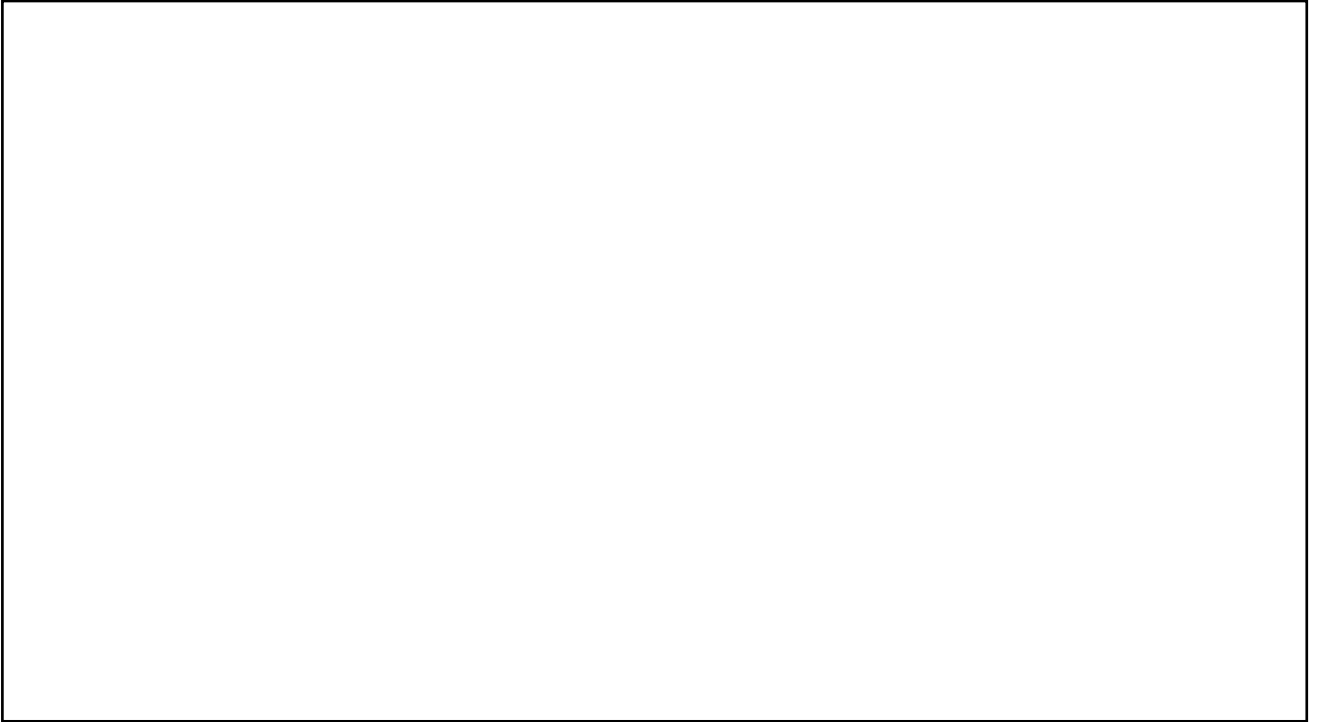
Os pais da Maria têm um restaurante. As mesas do restaurante são quadradas e em cada mesa podem sentar-se 4 pessoas, existindo 4 cadeiras.



Por vezes, vão almoçar grupos com mais pessoas e o pai da Maria tem de juntar várias mesas. Para juntar as mesas usa sempre o mesmo processo, quando junta duas mesas podem sentar-se 6 pessoas.

1. Se o pai da Maria juntar 4 mesas, quantas cadeiras haverá? Como pensaste?
2. E se o pai da Maria juntar 10 mesas, quantas cadeiras haverá? Como pensaste?

3. O pai da Maria vai receber no seu restaurante um casamento e precisa de juntar 52 mesas, quantas cadeiras haverá? Como pensaste?



4. Certo dia telefonaram a marcar um almoço para 16 pessoas. Ajuda o pai da Maria a descobrir quantas mesas terá de juntar.

