



# ESCOLA NAVAL



talant de biefaire

Alexandre Passeira da Rocha

## Métodos da Geometria Diferencial no Estudo da Acústica Submarina na Aproximação Geométrica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo de Armas e Eletrônica



Alfeite

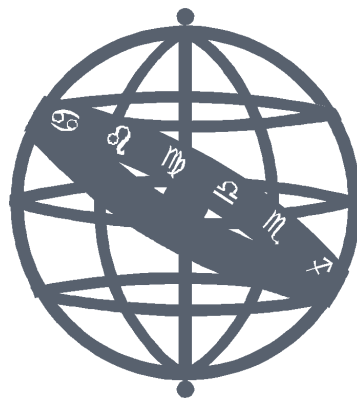
2020





# ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Alexandre Passeira da Rocha

## Métodos da Geometria Diferencial no Estudo da Acústica Submarina na Aproximação Geométrica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em  
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo  
de Armas e Eletrónica

**Orientação de:** Mário Alexandre Pousão da Costa Gatta

**Co-orientação de:** Bruno Duarte Damas

*O Aluno Mestrando,*

*O Orientador,*

---

Alexandre Rocha

---

Mário Gatta

Alfeite

2020



"Sou do tamanho do que vejo e não do tamanho da minha altura."

Fernando Pessoa



Dedico este trabalho aos meus pais por tudo o que me proporcionaram na vida, os meios necessários para alcançar o que alcancei, ou o que ainda possa vir a alcançar, e acima de tudo, os valores e a educação pelos quais me me rejo.



# Agradecimentos

Numa primeira instância, gostaria de agradecer veementemente ao meu orientador, Professor Mário Gatta, pelo enquadramento do tema com os meus propósitos, pela forma com que esse tema me lançou para aprender uma vasta diversidade de matérias não vigentes na estrutura do nosso curso e, acima de tudo, pelo incontestável apoio demonstrando durante todo o processo. Agradeço também ao meu co-orientador, Professor Bruno Damas, por toda a disponibilidade demonstrada em auxiliar e contribuir no que fosse necessário.

Aos meus pais agradeço, agora e sempre, por toda a sua presença ao longo da minha vida e pela sua preponderância nesta etapa, como em todas as outras.

Por fim, não deixarei de mencionar os meus amigos e camaradas mais chegados, pela constante proximidade, companheirismo e partilha de ideias ao longo do trabalho desenvolvido.



# Resumo

A presente dissertação visa a sugestão de uma abordagem alternativa, e recente, ao estudo da Acústica Submarina e consequente comparação com os princípios clássicos. Alicerçada na geometria diferencial e na análise tensorial, e aplicada à aproximação por raios acústicos no limite das altas frequências da onda sonora, a metodologia que será apresentada parte de uma perspectiva relativista para explicar, física e matematicamente, alguns dos fenómenos mais importantes da acústica em meios aquáticos em movimento.

Através de uma analogia evidente com a relatividade especial e geral, passa-se a encarar o meio aquático, uma parte do oceano por exemplo, como uma variedade ou um espaço pseudo-Riemanniano, no qual a métrica, ao incorporar as variáveis acústicas, define o espaço em si, os coeficientes de conexão permitem comparar diferentes pontos no espaço, o tensor de Riemann afere se existe curvatura ou não, e por fim os raios acústicos descrevem geodésicas numa espécie de espaço-tempo (aqui galileano), como na relatividade. A curvatura que os raios sonoros descrevem em meios heterogêneos, derivada da constante alteração da velocidade do som, é de certa forma identificada com a curvatura que a trajetória, das partículas ou até mesmo da luz sofre quando o espaço-tempo é curvado pela interação gravítica com a matéria, na relatividade.

Por fim, após toda a revisão teórica por trás, tanto dos métodos clássicos como deste método alternativo, e o resultante contraste entre os dois, enaltecendo as claras vantagens da geometria diferencial, não só pela solução mais completa e abrangente que dá para os problemas de acústica, incluindo os mais complicados com uma certa arbitrariedade na corrente dos fluidos, mas também pelo valor pedagógico e académico que tem pela aprendizagem de conceitos totalmente novos, pretende propor-se, para futuros trabalhos, a implementação da metodologia computacionalmente.

**Palavras-chave:** Tensor Métrico, Curvatura, Espaço de Riemann, Raios Acústicos, Espaço-tempo, Geodésica



# Abstract

The present dissertation aims to suggest an alternative and recent approach to the study of Underwater Acoustics and consequently the comparison with the classic principles. Based on differential geometry and tensor analysis, and applied to the ray theory approximation of the sound waves in the limit of the high frequencies, the methodology that will be presented proceeds to explain some of the most important phenomena of acoustics in underwater moving media, under a relativistic perspective.

From an evident analogy with the special and general relativity, one starts to interpret the underwater medium, some part of the ocean for example, as a pseudo-Riemannian manifold, where the metric, filled with the acoustic variables that describes the field, defines the space itself, the connection coefficients allow the connection between different points in the space, the Riemann curvature tensor provides the ultimate test on the existence of curvature or not, and finally the acoustic rays describe geodesics in some type of spacetime (here galilean), like in the theory of relativity. The curvature that the rays describe in non homogeneous media, due to the constant variation of the sound speed, is in some way identified with the curvature suffered by the trajectory of particles, or even the light, caused by the gravitational interaction with matter and energy that curves spacetime.

In the end, after all the theoretical revision that stands beside the both methods, the classical one and this new one, and the resulting contrast between them, extolling the notorious advantages of the differential geometry, not just by the completeness and generality that adds to a solution for the acoustic phenomena, including the most complex with arbitrary background flows, but also for the pedagogic and academic value in bringing new concepts, we propose, in future developments, the computational implementation of this methodology.

**Keywords:** Metric Tensor, Curvature, Riemannian Manifold , Acoustic Rays, Spacetime, Geodesic



# Índice

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Motivação . . . . .	1
Estrutura . . . . .	2
<b>1 Teoria de Ondas Clássica</b>	<b>7</b>
1.1 Propagação das ondas no geral . . . . .	7
1.1.1 Equação de uma onda 1D . . . . .	8
<b>2 Sistemas de Coordenadas</b>	<b>13</b>
2.1 Coordenadas Curvilíneas e Tensor Métrico . . . . .	14
2.1.1 Conceito de Coordenada Curvilínea . . . . .	14
2.1.2 Conceito de Tensor Métrico . . . . .	16
2.1.3 Cálculo de Integrais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais	21
2.1.4 Casos Particulares De Sistemas de Coordenadas . . . . .	22
Coordenadas Cilíndricas . . . . .	22
Coordenadas Esféricas . . . . .	27
2.2 Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais . .	31
Gradiente . . . . .	32
Divergência . . . . .	34
Rotacional . . . . .	36
Laplaciano de um Escalar . . . . .	38
Laplaciano de um Vetor . . . . .	38
2.3 Separação de Variáveis em Equações Diferenciais Parciais . . . . .	39
Operadores Lineares . . . . .	41
Equação de Helmholtz em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas	42
<b>3 Análise Tensorial e Curvatura</b>	<b>45</b>
3.1 Conceito Matemático de Espaço . . . . .	46
3.2 Espaços de Riemann e Conceito de Métrica . . . . .	47
3.3 Geometria Diferencial - Escalares, Vetores e Tensores . . . . .	52
3.3.1 Definição de Tensores e Propriedades de transformação . . .	54

3.4	Transformação de Tensores . . . . .	60
3.5	Propriedades Algébricas de Tensores . . . . .	61
3.6	Curvatura e Tensor da Curvatura de Riemann . . . . .	63
3.6.1	Curvatura . . . . .	64
3.6.2	Coefficientes de Conexão . . . . .	64
3.7	Diferenciação co-variante . . . . .	67
3.8	Transporte Paralelo de Vetores . . . . .	69
3.9	Geodésicas . . . . .	72
3.10	Tensor da Curvatura de Riemann . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Propagação do Som na Água - Perspetiva Clássica e Perspetiva Tensorial</b>	<b>77</b>
4.1	Enquadramento Teórico . . . . .	77
4.1.1	Teoria Clássica de Ondas em Fluidos . . . . .	78
	Comportamento de um fluido clássico . . . . .	78
	Das Equações Clássicas da Mecânica dos Fluidos à Equação de Onda Linear . . . . .	79
	Solução da Equação de Onda Plana . . . . .	82
	Grupos de Ondas e Velocidade De Grupo . . . . .	85
	Propagação do Som no Meio Aquático Com Movimento . . . . .	87
4.1.2	Acústica Geométrica - Teoria dos Raios Acústicos Clássica . . . . .	88
4.1.3	Metodologias Existentes . . . . .	93
4.2	Teoria dos Raios - Perspetiva da Análise Tensorial e Geometria Diferencial . . . . .	95
4.2.1	Das Equações dos Fluidos ao Aparecimento da Métrica . . . . .	96
4.2.2	Teoria dos Raios Numa Nova Perspetiva . . . . .	103
4.2.3	Notas sobre Trajetórias Geodésicas e Sugestão de Implementação Computacional pelos Métodos da Geometria Diferencial	104
	Dedução das Equações Geodésicas para Cada Coordenada, num Espaço-Tempo de Schwarzschild . . . . .	104
	Notas sobre Trajetórias Geodésicas com a Métrica de Schwarzschild . . . . .	108
	Sugestão de Implementação Prática . . . . .	118
	Exemplo 1 . . . . .	123
	Exemplo 2 . . . . .	123
	Exemplo 3 . . . . .	124
	Exemplo 4 . . . . .	125
	Exemplo 5 . . . . .	126

Exemplo 6 . . . . .	129
<b>Conclusão</b>	<b>132</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>137</b>
<b>Apêndices</b>	<b>139</b>
<b>A Demonstrações Auxiliares do Capítulo 4</b>	<b>139</b>
Linearização das Equações da Mecânica dos Fluidos e Obtenção do Tensor Métrico Acústico . . . . .	139
<b>B Rotina para a Métrica de Schwarzschild</b>	<b>165</b>
<b>C Rotina para a Métrica de Minkowski</b>	<b>167</b>
<b>D Rotina para Órbita Terrestre</b>	<b>169</b>



# Lista de Figuras

1.1	Onda transversal . . . . .	8
1.2	Elemento infinitesimal da corda . . . . .	10
2.1	Coordenadas Cilíndricas . . . . .	23
2.2	Coordenadas Esféricas . . . . .	27
2.3	Elemento de Volume em Coordenadas Esféricas . . . . .	30
2.4	Tipos de divergência de um campo vetorial . . . . .	34
2.5	Regra da Mão Direita . . . . .	37
3.1	Interação da matéria no espaço-Tempo . . . . .	47
3.2	Triângulo na superfície esférica . . . . .	51
3.3	Transporte Paralelo de um Vetor num Espaço Curvo . . . . .	70
3.4	Transporte Paralelo de um Vetor $\vec{V}$ numa Curva de Vetor Tangente $\vec{U}$ . . . . .	70
4.1	Onda Plana . . . . .	82
4.2	Raios sonoros na presença de obstáculo . . . . .	89
4.3	Disposição dos coeficientes de conexão da métrica de Schwarzschild na consola do Python . . . . .	121
4.4	Disposição das componentes do tensor da curvatura de Riemann para a métrica de Schwarzschild . . . . .	122
4.5	Geodésica que começa no evento de coordenadas $(0, 10, 0, 0)$ e prossegue na direção do vetor tangente $(1, 0, 0, 0)$ . . . . .	123
4.6	Geodésica que começa no evento de coordenadas $(0, 2, 0, 0)$ e prossegue, inicialmente, na direção do vetor tangente $(1, 0.3, 0, 0)$ . . . . .	124
4.7	Geodésica que começa no evento de coordenadas $(0, 2, 0, 0)$ e prossegue na direção do vetor tangente $(1, 0.5, 0, 0)$ . . . . .	125
4.8	Geodésica que começa no evento de coordenadas $(0, 2, 0, 0)$ e prossegue na direção do vetor tangente $(1, 0.3, 0, 0)$ com $r_s = 0$ . . . . .	126
4.9	Geodésica que começa no evento de coordenadas $(0, 10, 0, 0)$ e prossegue na direção do vetor tangente $(2, 0.1, 0.04, 0)$ . . . . .	127
4.10	Coefficientes de conexão e componentes do tensor da curvatura de Riemann no espaço Minkowskiano. . . . .	128

4.11 Geodésica com início no evento $(0, 0, 0, 0)$ na direção do vetor tangente $(1, 0.5, 0, 0)$ num espaço Minkowskiano. . . . .	128
4.12 Órbita da Terra em torno do Sol. . . . .	131
4.13 Precessão de uma órbita planetária. . . . .	131

# Lista de Símbolos

$F$	força	N
$f$	frequência	Hz
$T$	período	s
$ds$	elemento de linha	m
$da$	elemento de área	m <sup>2</sup>
$dV$	elemento de volume	m <sup>3</sup>
$m$	massa	kg
$c$	velocidade do som ou da luz	m s <sup>-1</sup>
$\vec{a}$	vetor aceleração	m s <sup>-2</sup>
$q_i$ ou $x^i$	coordenada geral	
$\vec{r}$	vetor posição	m
$\vec{V}$	vetor contra-variante	
$\tilde{V}$	vetor co-variante	
$\hat{e}$	versor geral	
$g_{ij}$	tensor métrico	
$V^\alpha$	componente contra-variante	
$V_\alpha$	componente co-variante	
$t$	tempo	s
$p$	pressão instantânea	
$\vec{v}$	velocidade do fluido	m s <sup>-1</sup>
$k$	número de onda	
$\vec{k}$	vetor onda	
$\hat{n}$	versor unitário tangente à trajetória de um raio	
$r_s$	raio de Schwarzschild	
$\omega$	frequência angular	rad s <sup>-1</sup>
$\rho_L$	densidade linear	kg m <sup>-1</sup>
$\rho$	densidade	kg m <sup>-3</sup>
$\nabla$	gradiente	
$\delta$	delta de Kronecker	
$\Gamma$	coeficiente de conexão ou símbolo de Cristoffel	
$\nabla_\beta X$	derivada co-variante de um tensor qualquer $X$	



# Introdução

## Motivação

O meio aquático, ou mais propriamente, o mar, é o meio que nos caracteriza e nos define enquanto marinheiros e Oficiais de Marinha. Por conseguinte, a acústica submarina constitui-se, não só como um pilar fundamental no desenvolvimento científico da Marinha, mas também como matéria de conhecimento base para qualquer aluno, durante o curso na Escola Naval. Para além disso, é irrefutável o facto de que o mar é, desde sempre, um dos maiores trunfos de Portugal e, desse modo, deverá continuar a ser uma aposta contínua, ao nível do enquadramento operacional, através da fiscalização e asseveração da busca e salvamento, e ao nível da investigação. Os fundos oceânicos continuam a ser um dos grandes mistérios da comunidade científica, e a poluição marítima uma das maiores preocupações da humanidade. Interessa portanto, hodiernamente, entender o mar e, acima de tudo, dominar as ferramentas que nos possibilitam a sua análise. Paralelamente, temos uma das maiores Zonas Económicas Exclusivas do Mundo, o que nos enaltece ainda mais o sentimento de responsabilidade para com o mar. Nesse sentido, dado o facto de o som ser o grande agente de transmissão e comunicação submarina, é essencial perceber os mecanismos associados e saber descreve-los física e matematicamente.

A presente tese insere-se numa sequência de outras recentes teses de mestrado na Escola Naval (Teses de Mestrado dos GMAR Evangelista Paiva e Amaral Raposo), no domínio da Acústica Submarina e, em especial, no estudo do comportamento da propagação de ondas sonoras na aproximação geométrica dos raios acústicos. Pretende-se, deste modo, prosseguir esses trabalhos, introduzindo uma metodologia mais poderosa, e mais complexa, para o estudo das trajetórias de raios acústicos submarinos, a partir de uma descrição fundamental, embora formalmente mais exigente. Pretende-se também que tenha utilidade futura e possa servir de “guia” parcial para futuras teses de mestrado na EN. Esta intenção, associada à relativa complexidade dos métodos apresentados, levou-nos a desenvolver um esforço pedagógico em que nos apoiámos nos conhecimentos adquiridos, especialmente nas cadeiras de Matemática, Física e Armas Submarinas, de acordo com os respetivos

---

conteúdos programáticos anteriores a 2019, estendendo-os de uma forma que julgamos adequada para os necessários novos conceitos, tais como o de operadores diferenciais em sistemas de coordenadas curvilíneas ortogonais, o de tensor métrico, fundamental no que se segue, os de sistemas de coordenadas curvilíneas não-ortogonais, de tensores covariantes e contravariantes, de espaços de Riemann, de coeficientes de conexão, de geodésicas, etc. Em consequência desta opção, decidimos dedicar três capítulos a esta parte do trabalho, reservando um último capítulo, o 4º, à exposição da sua adaptação à questão da propagação de raios sonoros submarinos através da introdução de um “tensor métrico acústico”, peça fundamental na posterior dedução das trajetórias dos raios acústicos por resolução das correspondentes equações geodésicas, à semelhança dos métodos seguidos em Relatividade Geral.

A vantagem essencial do método apresentado resulta da possibilidade da inclusão dos efeitos das variações locais de densidade do fluido, de possíveis correntes submarinas e de variações locais da velocidade do som neste tensor métrico acústico e, com base neste, obter de forma sistemática, à semelhança da Relatividade Geral, os coeficientes de conexão e as respetivas equações geodésicas que nos dão as trajetórias pretendidas. A complexidade destas últimas equações impõe o recurso a métodos computacionais, também aqui ilustrados (em Python). No entanto, limitações de tempo impuseram que os exemplos ilustrativos apresentados da passagem da expressão do tensor métrico à obtenção de trajetórias sejam oriundos da Relatividade Geral (em particular, utilizando o tensor métrico de Schwarzschild) e não da Acústica já que, embora a metodologia seja basicamente a mesma, haveria ainda a necessidade de procurar, recolher e aplicar dados observacionais que estivessem disponíveis, tarefa que, por si só, daria origem a outra tese, na nossa opinião.

Por outro lado, temos esperança que a presente tese cumpra a sua missão podendo vir a ser de alguma utilidade em outras futuras teses e que também possa contribuir para a formação de um grupo de Oficiais da Marinha Portuguesa com competências nos diversos aspetos deste tão importante quanto extenso tema, desde os seus fundamentos mais teóricos até à utilização operacional do equipamento disponibilizado na nossa Armada.

## **Estrutura**

O presente trabalho assenta no contraste entre duas metodologias, no âmbito do estudo da acústica submarina, a proveniente da teoria clássica, na vertente da aproximação geométrica ou teoria dos raios, mais tradicional, e a proveniente de uma teoria bastante inovadora, alicerçada na geometria diferencial mas também

---

direcionada para os raios acústicos. A primeira, como o próprio nome indica, é a mais vulgar e predominante em obras e artigos, que geralmente se tem acesso rápido, por ser, de certa forma, a mais consensual e mais elaborada ao longo dos tempos. A segunda não faz parte da agenda habitual da grande maioria dos cursos superiores nas áreas adjacentes à acústica, seja engenharia, física ou outros, muito menos do ensino mais básico e preparatório, onde ocorre o primeiro contacto com a física, e neste caso em específico, com a propagação de ondas sonoras. Partindo de uma perspectiva, inspirada na relatividade especial e geral, e portanto construída a partir da geometria diferencial e da análise tensorial, área da matemática que não é do conhecimento geral, sugere uma abordagem diferente da tradicional para a descrição dos espaços de interesse, os oceanos, e o seu impacto no comportamento do som, mais propriamente dos raios sonoros. Será essa, como se vai ver ao longo do trabalho, a grande identidade desta metodologia, interpretar bem o espaço e descodificar em que medida é que esse influencia a trajetória do som.

Com vista a reunir as condições necessárias para comparar as duas abordagens, este trabalho divide-se em diferentes partes, que seguem uma lógica preparatória para o que se pretende no final, compreender física e matematicamente os modelos vigentes, e confrontar um com o outro, evidenciando as vantagens, que acabam por decorrer naturalmente, da estratégia menos convencional e mais recente. Na primeira parte será feita uma revisão da teoria básica das ondas, introduzindo os conceitos fundamentais associados à problemática da propagação, como a pressão e densidade do meio, a excitação das partículas que está na origem do fenómeno ondulatório, e também os parâmetros associados a cada onda em si, a frequência, o comprimento de onda, a amplitude e o período. Seguidamente, enuncia-se um dos exemplos mais correntes, a vibração de uma corda em tensão, a fim de mostrar detalhadamente o processo de criação de uma onda e a dedução da equação correspondente, nesse caso, caso mais simples, a equação de onda 1D clássica.

A aproximação geométrica na teoria de ondas clássica, ou como é frequente chamar, teoria dos raios acústicos, negligencia o aspeto ondulatório das ondas e foca-se na sua substituição por raios, que podem ser linhas direitas ou curvas, consoante a situação. Consequentemente, a segunda parte deste trabalho irá focar-se na preparação do "terreno" matemático, que não só se tratará do primeiro passo para perceber a geometria diferencial e a contígua metodologia tensorial na análise da acústica submarina, mas também introduzirá conceitos essenciais para a apresentação, mais à frente, da teoria clássica das ondas, de um ponto de vista mais avançado e direcionado para a nossa temática, derivado das equações da mecânica dos fluídos, e a seguir para a teoria dos raios. O segundo capítulo será então sobre sistemas

---

de coordenadas, desde os mais simples e triviais ao conceito de coordenadas curvilíneas gerais, estendendo o estudado nas cadeiras do curso. Além disso, introduzirá desde logo a ideia de métrica, a ser explorada com detalhe no capítulo seguinte. Como complemento óbvio será importante enunciar também os operadores diferenciais frequentes em coordenadas curvilíneas e o método de separação de variáveis em equações diferenciais parciais, dado que grande parte da matéria discutida neste trabalho parte de equações diferenciais.

O terceiro capítulo é, de certa maneira, indissociável do segundo, na medida em que a geometria diferencial e a análise tensorial, a elevação do conceito de objeto com magnitude e direção a uma dimensão mais abrangente, partem das coordenadas curvilíneas gerais e sustentam-se num pilar fulcral, o tensor métrico, para espaços com curvatura. Assim sendo, este capítulo incidirá na noção de curvatura, espaço de Riemann e na caracterização de tensores e propriedades do cálculo tensorial. Pretende-se, nessa fase, acrescentar às coordenadas curvilíneas ortogonais, os restantes elementos indispensáveis à interpretação do método de aplicação da geometria diferencial na acústica, em detrimento do método clássico de resolução da equação de onda, ou de equação de um raio acústico.

Finalmente, no último capítulo serão confrontadas as duas metodologias, procurando deixar notáveis as vantagens da geometria diferencial, que tentativamente colmatam algumas das limitações da teoria clássica de raios acústicos, como já foi mencionado na motivação. Primeiramente, tendo como ponto de partida a mecânica dos fluidos e as suas equações clássicas, será derivada uma equação de onda diferencial e respetiva solução, com base em certas assunções e sempre com o intuito de simplificar e linearizar o problema. Posteriormente, fazer-se-á a passagem para a teoria dos raios e para o ponto de vista geométrico clássico. O capítulo terminará com a enunciação do método alternativo, que parte de uma analogia entre os elementos da teoria dos raios e os elementos da geometria diferencial, para caracterizar o espaço aquático e a sua interação com os raios sonoros como um espaço semelhante aos espaços de Riemann, sempre com alusões evidentes à perspetiva tensorial.

Em suma, a acústica submarina, na realidade, é uma área complexa e está repleta de casos e fenómenos que necessitam de um modelo generalizado e o mais completo possível, capaz de os descrever de forma satisfatória, com vista a um crescente sucesso na investigação submarina. Dada essa necessidade, este trabalho procura aprofundar duas metodologias existentes e explicar as vantagens e desvantagens correspondentes, atribuindo especial destaque à aplicação da geometria diferencial,

---

por ser uma abordagem com mais relevo recentemente, com resultados aparentemente interessantes, e também por constituir uma oportunidade considerável de aumentar o leque de conhecimento na área da matemática e da física, devido à exigência de compreender a análise tensorial e as referências à teoria da relatividade conexas, para um melhor entendimento desse método. Adicionalmente, o trabalho aqui desenvolvido pode abrir portas a futuros projetos em que se pretenda experimentar e confirmar a metodologia sugerida computacionalmente, ou até mesmo considerar a inserção desta teoria alternativa nas matérias de aprendizagem nos cursos da Escola Naval, proposta como opção à teoria clássica de ondas ou raios acústicos.



# Capítulo 1

## Teoria de Ondas Clássica

### 1.1 Propagação das ondas no geral

Em todo o processo de transmissão de uma informação, há três fases extremamente importantes, que funcionam como pilares da comunicação, designadamente a emissão do sinal, a sua propagação e posterior receção. Por conseguinte, no estudo da propagação de ondas sonoras em qualquer que seja o meio, pressupõe-se sempre a existência de um emissor, de um meio onde se dê a propagação e de um recetor que funciona como sensor e capta os eventuais sinais. Numa primeira abordagem, a descrição de onda e respetiva dedução da equação de onda será no seu modo mais simplificado matematicamente, considerando o meio de propagação contínuo, com viscosidade zero e restringindo o estudo da propagação para o caso de uma só dimensão, como se irá ver mais à frente.

No caso da onda sonora, por exemplo, tratando-se de uma onda longitudinal, a transmissão só acontece devido à perturbação mecânica de um meio material elástico provocada pelas sucessivas oscilações, na direção do movimento, no tempo e no espaço, de um objeto emissor, por exemplo um instrumento ou a voz humana. Essa perturbação vai sendo transmitida de camada em camada de partículas adjacentes, de tal forma que em cada ponto do fluido a onda sonora causa alternadamente compressão e rarefação, isto é, alterações na densidade e pressão do meio. É importante referir que é a elasticidade do meio que permite este fenómeno, na medida em que, um fluido por exemplo, ao sofrer uma alteração à sua disposição normal das partículas, tende a recuperar o estado inicial devido às forças restauradoras. Pode então concluir-se que é a conjugação dessa força de restauração elástica com a inércia do sistema que faz com que a matéria participe em vibrações oscilatórias dando origem a ondas acústicas.

Em suma, não só nas ondas sonoras em particular, mas em qualquer tipo de ondas, o importante é perceber que inerente à propagação está sempre a perturbação do meio, isto é, a criação de instabilidade e oscilação nas partículas do meio.

### 1.1.1 Equação de uma onda 1D

Como foi referido anteriormente, numa fase inicial a descrição da onda e respetiva equação será no seu modo mais simples, na medida em que o primeiro caso a ser enunciado será o exemplo trivial da vibração numa corda, situação em que estamos perante uma onda transversal, dado que as partículas vibram numa direção perpendicular à direção da propagação, como podemos ver na Figura 1.1. Os desenvolvimentos que se seguem têm como referências o livro<sup>1</sup> de Kinsler (Lawrence et al., 1982) e o curso<sup>2</sup> de Crawford (Crawford, 2011).

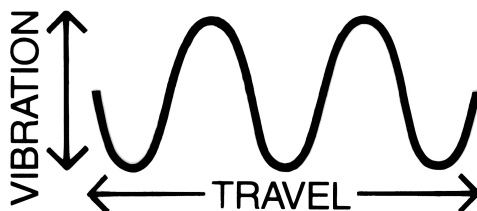


FIGURA 1.1: Comportamento de uma onda transversal. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>3</sup>a 14 de Fevereiro de 2020

No caso de uma corda em tensão como, por exemplo, sabe-se que, para se manter tensa e esticada, a corda tem de estar constantemente sujeita a uma força de tensão. Para esse efeito pode considerar-se a corda numa das pontas presa a uma estrutura e na outra segurada por uma pessoa ou segurada por duas pessoas, uma em cada extremidade e nesse caso estamos perante um sistema fechado, visto que estamos a estabelecer fronteiras ou limites à propagação das ondas, detalhe de carácter hipotético, uma vez que para esta primeira análise e dedução da equação de onda é irrelevante o tipo de sistema e apenas importante o facto de se tratar de uma aproximação linear, sem qualquer dissipação. Ora, tal como já foi referido, para haver propagação de uma onda é necessário que haja uma perturbação desse estado de equilíbrio em que a corda se encontra.

Considere-se, por exemplo, puxar a corda pelo seu seio numa direção perpendicular à corda e posteriormente largar. A partir do momento em que um ponto da

<sup>1</sup>Kinsler et al., *Fundamentals of Acoustics* (1982).

<sup>2</sup>Crawford, *Waves (Berkeley Physics Course, Vol.3)* (2011).

<sup>3</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transversal\\_Wave\\_\(PSF\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Transversal_Wave_(PSF).png)

corda é perturbado, essa perturbação vai ser transmitida aos seus pontos vizinhos e assim sucessivamente. Dessa forma, serão originadas duas novas perturbações, uma em cada direção da corda. São então essas perturbações que, ao percorrerem e excitarem cada ponto da corda, vão fazer com que, devido à única força presente no caso linear com direção inversa ao movimento transversal dos pontos, a força recuperadora, esses pontos tendam a recuperar a sua posição inicial, acabando por ultrapassá-la. Descreve-se assim, uma onda, como já tinha sido visto na Figura 1.1, em que cada ponto se constitui como um oscilador harmónico, caso seja excitada uma onda sinusoidal (que é, naturalmente, o caso mais simples).

Um exemplo também muito fácil de entender e bem presente no nosso dia a dia é o caso das ondas do mar em que, apesar de terem uma força recuperadora diferente do caso da corda, o fenómeno de propagação é exatamente o mesmo e ajuda a perceber o que aqui se quer demonstrar. De facto, se se imaginar uma partícula ou objeto numa porção de água sujeita ao efeito ondulatório do mar, repara-se que as ondas propagam-se horizontalmente e por isso propagam-se em distância, mas o objeto permanecerá sempre no mesmo sítio apenas descrevendo movimentos verticais, ao acompanhar as cristas das ondas, e por conseguinte originando um movimento oscilatório harmónico, como se pode ver no exemplo dado em (Deus et al., 2014), página 37, ou por síntese de Fourier, somas destas.

O oscilador harmónico simples é bastante intuitivo de perceber e é importante para definirmos algumas características gerais das ondas, como o período de uma vibração completa, representado por  $T$ , expresso em segundos e a frequência, número de ciclos completos por segundo, representada por  $f$  e expressa em  $Hz$ . Essas duas unidades de medida relacionam-se entre si da seguinte forma:

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.1}$$

Também é importante definir a frequência angular  $\omega$ , expressa em  $\text{rad s}^{-1}$ , dada por:

$$\omega = 2\pi f \tag{1.2}$$

Voltando ao primeiro exemplo, da corda em tensão, cada elemento de comprimento da corda será infinitesimal e está sujeito à tal força recuperadora elástica que se supõe proporcional à distância ao equilíbrio (Lei de Hooke). É importante referir que essa força recuperadora surge em direção oposta à inércia do sistema,

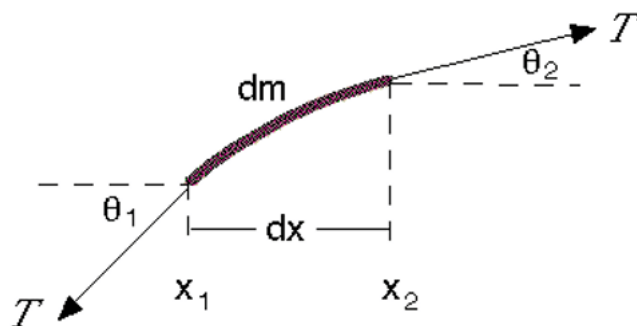


FIGURA 1.2: Elemento infinitesimal da corda em tensão. Figura retirada do website Physclips<sup>4</sup>a 20 de Fevereiro de 2020

propriedade da matéria que impede esta de alterar o seu estado de repouso ou movimento por si só.

Efetivamente, se se imaginar, por exemplo um elemento de massa com um ponto de luz, num desses pontos infinitesimais, confirma-se o efeito do oscilador harmónico, dado que só se iria ver o movimento vertical da luz. Isso significa que se está perante uma perturbação no tempo e não no espaço. Logo não se está a definir uma onda propriamente dita, apenas o caso mais simples de uma oscilação, num ponto físico. Na verdade, se espalhasse-mos luzes por todo o comprimento da corda, já iria ser possível observar a propagação da perturbação no tempo e no espaço.

Seja então, no caso da corda, a força de tensão aplicada à corda  $T$  a força recuperadora. Para efeitos de compreensão e para assumir que a corda é totalmente deformável, não se vai incluir no problema a rigidez da corda. Para além disso, também se dispensam todas as eventuais forças de dissipação, como já foi referido. Se se considerar um pequeno segmento de corda, representado na Figura 1.2, de densidade linear  $\rho_L = \frac{dm}{dx}$ , uma vez que representa a massa por unidade de comprimento da corda, em que  $dx$  é o deslocamento infinitesimal em  $xx$ .

Tal como se pode ver na Figura 1.2, assume-se um deslocamento com componente no eixo dos  $xx$  e componente no dos  $yy$ . Ao puxar-se a corda, na realidade, a tensão deixa de ser a mesma que no estado inicial de equilíbrio, contudo, considere-se o deslocamento transversal pequeno e por conseguinte uma tensão sempre constante ao longo da corda. Na extremidade esquerda a tensão exerce força para baixo e na extremidade direita exerce força para cima, como se pode ver na figura. Logo a força resultante será a componente  $y$  da tensão, definida da seguinte forma:

<sup>4</sup>Website Physclips: [https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/wave\\_equation\\_speed.htm](https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/wave_equation_speed.htm)

$$T_y = T \sin\theta_2 - T \sin\theta_1 \quad (1.3)$$

Sabe-se que  $x_2 = x_1 + dx$  e aplicando a expansão da série de Taylor, que é dada pela Equação (1.4),

$$f(x + dx) = f(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_x dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_x dx + \dots \quad (1.4)$$

à Equação (1.3), obtém-se:

$$T_y = [(T \sin\theta_1) + \frac{\partial(T \sin\theta_1)}{\partial x} dx + \dots] - (T \sin\theta_1) = \frac{\partial(T \sin\theta_1)}{\partial x} dx \quad (1.5)$$

Como se está perante deslocamentos transversais pequenos, isto é, não se está a deformar muito a corda,  $\theta_1$  pode ser considerado de tal maneira pequeno, que o termo  $\sin\theta_1$  é substituído por  $\tan\theta_1 = \frac{\partial y}{\partial x}$ . Desse modo, a força resultante no eixo transversal vem:

$$T_y = \frac{\partial \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right)}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (1.6)$$

Anteriormente já tinha sido definido que a massa do elemento que estamos a considerar é representado por  $dm = \rho_L dx$  e sabe-se que a aceleração de um corpo resulta de derivar em função do tempo a velocidade desse corpo, que por sua vez é também a derivada em função do tempo do seu deslocamento, logo, pela 2ª Lei de Newton, a força resultante  $T_y$  transversal fica:

$$T_y = \rho_L dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.7)$$

Sabe-se também, da teoria das ondas em meio linear, que a velocidade de propagação da onda numa corda com as características que estão a ser consideradas, é dada por  $c = \sqrt{\frac{F}{\rho_L}} \Leftrightarrow c^2 = \frac{T}{\rho_L}$ . Com efeito, se aplicarmos a equação à que chegamos para  $T_y$  a 2ª Lei de Newton, resulta:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \rho_L dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho_L}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.8)$$

Por fim, obtém-se a Equação de Onda Clássica 1D:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

A forma da equação de onda anterior pode ainda ser escrita num formato que será discutido mais à frente como tema central desta tese e que servirá de ponto de partida para a metodologia que será sugerida. Sendo  $v$  a velocidade de propagação, não dependente do tempo, mas podendo depender do espaço, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} y = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} \frac{\partial y}{\partial t} \\ -\frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como queríamos demonstrar, chegamos à equação de onda semelhante à Equação (1.9) em que aqui a velocidade de propagação é  $v$ , em vez de  $c$ . Na primeira linha do desenvolvimento anterior podemos identificar um vector linha, uma matriz (será um "tensor métrico") e um vector coluna, que dão origem a um formato generalizado da equação de onda, como se irá ver com detalhe no Capítulo 4.

Mais à frente, na parte inicial do último capítulo, será deduzida novamente uma expressão para a equação de onda, mas no contexto dos fluidos, em 3D, através de um desenvolvimento tradicional na mecânica dos fluídos. Será possível perceber que a equação em si não será muito diferente da anterior. O que muda realmente é o processo matemático por trás e o contexto teórico, que nesse caso será o contexto de interesse para este trabalho, o comportamento do som em fluidos, nomeadamente no meio aquático.

# Capítulo 2

## Sistemas de Coordenadas

No primeiro capítulo abordou-se um dos casos mais simples no estudo da propagação de ondas, na medida em que, primeiro, se restringiu o estudo a uma só dimensão e se consideraram desprezíveis alguns fatores, chegando por fim à equação de onda clássica. É extremamente importante nesta primeira fase enunciar estes exemplos mais simplificados e fáceis de analisar, para que o leitor visualize rapidamente o que está a acontecer fisicamente.

Na verdade, os sistemas complexos que envolvem vibrações de corpos e transmissão de ondas requerem uma análise muito mais profunda, principalmente no que toca às dimensões. É nesse sentido que se torna essencial introduzir os sistemas de coordenadas neste trabalho, uma vez que permitem alargar de forma considerável o estudo de fenómenos físicos mais avançados. Aliado ao sistema de coordenadas vem o conceito de vetor que funciona como o grande ponto de partida para o tema que se irá abordar mais em diante.

Os conceitos de sistema de coordenadas e vetores são, de facto, muito importantes e aparecem sempre interligados. Com efeito, se se olhar aos vários tipos de quantidades presentes no mundo da física, é fácil perceber que umas são descritas apenas pela sua magnitude, às quais chamamos de escalares, e outras são descritas por magnitude e direção, os tais vetores anteriormente referidos. Ora, se têm uma direção associada é preciso perceber essa direção e saber estudá-la, daí qualquer vetor ter sempre um referencial associado. É precisamente isso que será o tema central deste capítulo que se segue, alguns dos sistemas de coordenadas conhecidos que se constituem como referenciais para um vetor, ou como se irá ver mais à frente, para um tensor, numa dimensão maior.

Vamos portanto, neste capítulo, rever parte da matéria das cadeiras de Análise e introduzir novos conceitos e aplicações, nomeadamente o conceito fundamental de tensor métrico e ainda algumas considerações sobre a equação de ondas

e a obtenção, por separação de variável temporal, as diversas formas de equação de Helmholtz, consoante o sistema de coordenadas usado, cumprindo a vertente pedagógica que também se pretende para esta tese, avançando para além da formação adquirida nas cadeiras do curso. Os seguintes desenvolvimentos têm como grande referência o livro<sup>1</sup> de Arfken, (Arfken, 1985), e os apontamentos e exercícios do orientador desta tese.

## 2.1 Coordenadas Curvilíneas e Tensor Métrico

### 2.1.1 Conceito de Coordenada Curvilínea

A funcionar como suporte aos vários fenómenos físicos que ocorrem todos os dias, podem ter-se em conta vários tipos de sistemas de coordenadas. O caso mais simples são as coordenadas curvilíneas ortogonais, dado que os versores que definem esse tipo de sistemas são perpendiculares entre si, o que facilita consideravelmente o cálculo.

No caso das coordenadas cartesianas, caso bem conhecido e estudado, a caracterização de um ponto no espaço é feita de forma simples, através de três planos perpendiculares entre si definidos pelos eixos dos  $xx$ ,  $yy$  e  $zz$ . A interseção destes três planos irá originar um ponto qualquer  $(x, y, z)$ , neste caso com três coordenadas diferentes por ser em três dimensões, mas podem ser consideradas mais, como se verá mais à frente. Ora, se este sistema é tão simples, qual a razão de não ser adotado em todo o tipo de estudos que se fazem? A verdade é que, efetivamente, se se considerar, por exemplo, atirar uma bola ao ar, o seu movimento vertical é facilmente descrito por este sistema de coordenadas puramente retangular e portanto os eixos do referencial estão alinhados com esse movimento. Contudo, se se estiver perante a órbita de um corpo em torno de um planeta, a sua trajetória é circular e por conseguinte, mal definida por coordenadas cartesianas. O movimento do corpo descreve um ângulo que terá que ser contabilizado. Cada ponto passa a ser caracterizado por uma distância e um ângulo. Esse tipo de situações serão vistos mais à frente neste capítulo.

Da mesma forma que se descreveu o ponto anterior pela interseção dos três planos em coordenadas cartesianas, pode-se passar a descrever um qualquer ponto por uma outra interseção de três novas famílias de superfícies, em coordenadas curvilíneas. Tal como no sistema cartesiano, as novas superfícies serão constantes

---

<sup>1</sup>Arfken, *Mathematical Methods for Physicists* (1985).

e, apesar de não serem necessariamente ortogonais entre si, neste capítulo vai-se assumir que são a fim de simplificar. São as chamadas coordenadas curvilíneas ortogonais. Sejam então as novas superfícies definidas por  $q_i$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$ , dependendo do número de dimensões. Passa-se a usar  $(q_1, q_2, q_3)$  em vez de  $(x, y, z)$  para descrever um ponto, de tal modo que:

$$\begin{aligned}x &= x(q_1, q_2, q_3) \\y &= y(q_1, q_2, q_3) \\z &= z(q_1, q_2, q_3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Da mesma forma tem-se:

$$\begin{aligned}q_1 &= q_1(x, y, z) \\q_2 &= q_2(x, y, z) \\q_3 &= q_3(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Neste novo conceito de coordenadas curvilíneas e nova família de superfícies é possível observar que o que aconteceu foi simplesmente uma transformação através de uma relação criada entre as coordenadas dos dois sistemas. Será mais fácil de entender essa transformação quando forem abordados exemplos de sistemas de coordenadas curvilíneas, com as devidas demonstrações para chegar aos novos valores.

Tal como em coordenadas cartesianas, um qualquer vetor definido em coordenadas curvilíneas (ainda ortogonais) será decomposto em várias componentes, de acordo com as dimensões em que é estudado. Vai-se continuar a restringir o estudo a três dimensões, como se tem visto. Com efeito, um vetor  $\vec{V}$  que em coordenadas cartesianas é definido por  $\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z}$ , em coordenadas curvilíneas passa a ser, também num ponto do espaço, definido por:

$$\vec{V} = V_1\hat{e}_1 + V_2\hat{e}_2 + V_3\hat{e}_3\tag{2.3}$$

Em que  $e_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são os novos versores do espaço que se está a estudar, de tal modo que são, à semelhança dos anteriores, unitários ortogonais e apontam na direção do respetivo  $q_i$  crescente. Todavia, é de notar uma diferença essencial em relação às coordenadas cartesianas. É que nas curvilíneas, os versores variam com o ponto do espaço, isto é, as superfícies que se formarão pelas coordenadas curvilíneas vão ter vetores perpendiculares ou normais a si, que variam em

cada ponto. Por se estar a assumir a ortogonalidade para todos os casos, pode-se, desde já, tornar evidente a relação que o delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$ , nos resume:

$$\begin{aligned}\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j &= \delta_{ij} \\ \hat{e}_i \times \hat{e}_j &= \hat{e}_k\end{aligned}\tag{2.4}$$

Esta notação permite que seja mais intuitivo determinar se o sistema de coordenadas é um sistema ortogonal ou não, dado que o delta de Kronecker dá 0 se  $i \neq j$  e 1 se  $i = j$ . Na verdade, a operação que está a ser aplicada aos dois versores é o produto interno e já é sabido que o produto interno entre dois vetores perpendiculares é nulo. Quanto à segunda expressão, esta diz que a produto externo entre dois versores diferentes dá o terceiro versor, quando estes são ortogonais entre si, como se vai ver mais á frente quando o conceito de produto externo for explicado mais detalhadamente.

## 2.1.2 Conceito de Tensor Métrico

Dadas as noções gerais do que são as coordenadas curvilíneas e de como é que se definem, importa agora introduzir o conceito de tensor métrico. Entenda-se, em jeito de introdução, o tensor métrico como uma função matemática que define a distância entre dois pontos num dado espaço. De certa forma, sabendo a métrica, tem-se tudo o que é preciso saber acerca da geometria desse mesmo espaço (Collier, 2012).

Através do tensor métrico passa-se a poder calcular a distância entre dois pontos vizinhos em qualquer espaço, constituindo assim a forma geral para esse cálculo. As tais componentes que constituem a métrica, são na verdade fatores de escala para que seja possível medir essa distância em qualquer que seja o sistema de coordenadas usado. As propriedades dos tensores, e a explicação de vários tipos de métricas, serão explicitadas com maior detalhe no seguinte capítulo, que será focado realmente na análise tensorial, pois na realidade, o tensor métrico é apenas um tipo, dos vários que existem, de tensor, embora este seja de importância fundamental.

Um caso concreto que pode ser estudado para exemplificar a possível relação entre dois sistemas de coordenadas devido a uma qualquer transformação, será o exemplo do vetor posição de um ponto P num sistema de quaisquer coordenadas curvilíneas  $(q_1, q_2, q_3)$ , expresso em coordenadas cartesianas:

$$\vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\hat{x} + y(q_1, q_2, q_3)\hat{y} + z(q_1, q_2, q_3)\hat{z}\tag{2.5}$$

Ao assumir, como em cima, o princípio da invariância das leis da física sobre transformações de sistemas de coordenadas, torna-se implícito que as coordenadas passíveis de sofrerem transformação, são diferenciáveis. Logo, uma variação infinitesimal de  $\vec{r}$  é traduzida por:

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \quad (2.6)$$

Reiterando o que foi dito anteriormente, as diferentes coordenadas estão a ser diferenciadas, sendo que:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3 \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Para o cálculo dessa distância infinitesimal entre dois pontos extremamente próximos, recorre-se ao Teorema de Pitágoras generalizado para coordenadas cartesianas, dado pela Equação (2.8).

Na verdade, o que se irá constatar ao longo deste desenvolvimento, é que os fatores de escala que são as raízes quadradas dos componentes do tensor, vão multiplicar cada um dos diferenciais de deslocamento do Teorema de Pitágoras. Como em coordenadas cartesianas se está perante o caso particular em que os versores são independentes do espaço e os fatores de escala são sempre constantes iguais à unidade, nesse sistema a distância é sempre calculada pela Equação (2.8).

Ao termo " $ds$ " é habitual, em grande parte dos problemas de física, chamar de elemento de linha e por isso é que, de agora em diante, será a notação usada. Verdadeiramente,  $ds^2 = |d\vec{r}|^2$ .

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.8)$$

No entanto, como será demonstrado, para outros sistemas de coordenadas mais complexos, a aplicação desta fórmula não é direta, pelo que vão aparecer fatores de escala variados, consoante o tipo de coordenadas em que se está a trabalhar. Com efeito, continuando com o exemplo das coordenadas cartesianas e seus respetivos

diferenciais, vistos na Equação (2.7), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \right)^2 \\
 & + \left( \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

De modo que no final vem:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & g_{11}dq_1dq_1 + g_{12}dq_1dq_2 + g_{13}dq_1dq_3 \\
 & + g_{21}dq_2dq_1 + g_{22}dq_2dq_2 + g_{23}dq_2dq_3 \\
 & + g_{31}dq_3dq_1 + g_{32}dq_3dq_2 + g_{33}dq_3dq_3
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Na forma geral e mais condensada, fica:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}dq_idq_j \tag{2.11}$$

Assume-se então que, num espaço de coordenadas curvilíneas, a distância entre dois pontos, pode ser generalizada na Equação (2.11). Se esta condição for válida, diz-se que se está perante um espaço de Riemann ou um espaço métrico (Arfken, 1985). Cada componente  $(i, j)$  do tensor métrico é dada por:

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} \tag{2.12}$$

Para efeitos de simplificação, continua-se a limitar o estudo às superfícies ortogonais e nesse caso, com  $i \neq j$ :

$$g_{ij} = 0 \tag{2.13}$$

O que leva a que, assumindo essa condição, fica-se com:

$$ds^2 = g_{11}(dq_1)^2 + g_{22}(dq_2)^2 + g_{33}(dq_3)^2 = (h_1dq_1)^2 + (h_2dq_2)^2 + (h_3dq_3)^2 \tag{2.14}$$

Tal como se tinha escrito anteriormente, são os fatores de escala  $h_i$  que vão determinar qual o sistema de coordenadas em que se está a trabalhar, dado que eles aparecem a multiplicar os diferenciais de cada uma das coordenadas  $q_i$ .

Logo, em coordenadas ortogonais, tem-se, no geral, o elemento de linha ou variação infinitesimal de  $\vec{r}$ :

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3 = \sum_i h_i dq_i \hat{e}_i = \sum_i ds_i \hat{e}_i \quad (2.15)$$

Desta expressão tira-se a importante relação  $ds_i = h_i dq_i$  que leva a ter alguns aspetos em consideração, no que toca a dimensões. É realmente essencial, para uma melhor compreensão de todos estes conceitos e de como é que se relacionam, saber que:

- $ds$  e conseqüentemente  $h_i dq_i$  têm dimensão de comprimento, em  $m$ ;
- $h_i$  e  $dq_i$  por si só não têm dimensão de comprimento;

Se se olhar novamente para a Equação (2.14) nota-se que:

$$g_{ii} = (h_i)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (2.16)$$

Ora, como já se viu, os vários sistemas de coordenadas caracterizam-se pelas diferentes coordenadas  $q_i$  e, no caso específico das cartesianas,  $q_i = x_i$ , pelo que efetuando essa substituição na Equação (2.16) conclui-se que os fatores de escala serão obviamente  $h_i = 1$ , como se queria demonstrar.

Da Equação (2.15) podem também tirar-se algumas relações consideráveis e que auxiliam, mais uma vez recorrendo ao exemplo das coordenadas cartesianas, a provar a condição de ortogonalidade de versores em coordenadas curvilíneas. Por conseguinte, da expressão que define o elemento de linha  $d\vec{r}$ , tira-se o seguinte:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = h_i \hat{e}_i \quad (2.17)$$

E assim se chega à expressão que dá os versores  $\hat{e}_i$  em cada ponto:

$$\hat{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \quad (2.18)$$

Recorrendo à capacidade de expressar versores de diferentes sistemas de coordenadas uns em função dos outros, vai-se expressar  $\hat{e}_i$  em função de  $\hat{x}$ . No caso

de  $\hat{e}_1$ , tem-se:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} [x(q_1, q_2, q_3)\hat{x} + y(q_1, q_2, q_3)\hat{y} + z(q_1, q_2, q_3)\hat{z}] \\ &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \hat{z} \right)\end{aligned}\tag{2.19}$$

Cada versor funciona como uma função das coordenadas  $q_i$  e sucessivamente para os versores  $\hat{e}_2$  e  $\hat{e}_3$  o desenvolvimento será idêntico.

Nesse sentido, se se quer provar a ortogonalidade, recorre-se ao, já enunciado, delta de Kronecker que dá o valor zero para o produto de versores de índices diferentes. Isto porque, se  $i \neq j$ , o produto interno entre esses versores é nulo. Por isso, considerando  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , por exemplo:

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \hat{z} \right) \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial q_2} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \hat{z} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial x}{\partial q_1} \frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \frac{\partial z}{\partial q_2} \right) = \frac{1}{h_1 h_2} g_{12} = 0\end{aligned}\tag{2.20}$$

Por outro lado:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \frac{1}{(h_1)^2} g_{11} = \frac{1}{h_1} g_{11} = 1\tag{2.21}$$

Note-se que para comprovar o resultado do delta de Kronecker recorreu-se à relação dada na Equação (2.13), através de  $g_{12}$  e agora, sabidas também as relações dadas pelas Equações (2.11) e (2.15), é possível, a título de exemplo, demonstrar o porquê de  $g_{ij} = 0$ . Na verdade, se se atentar ao exercício 2.1.1 em (Arfken, 1985, página 88), é essa demonstração que é pedida.

Imagine-se então o tal triângulo de lados  $ds_1$ ,  $ds_2$  e  $ds$ , de tal forma que ao transpor  $ds_1$  para a mesma origem que  $ds_2$  se fique com o ângulo correspondente  $\theta_{12}$ . Pela Lei dos Cossenos:

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 - 2ds_1 ds_2 \cos(\pi - \theta_{12})$$

Aplicando a Equação (2.15) vem:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= g_{11}(dq_1)^2 + g_{22}(dq_2)^2 + g_{12}dq_1 dq_2 + g_{21}dq_2 dq_1 \\ &= (ds_1)^2 + (ds_2)^2 + g_{12}dq_1 dq_2 + g_{21}dq_2 dq_1\end{aligned}$$

Igualando o desenvolvimento anterior à Lei dos Cossenos, resulta:

$$g_{12}dq_1dq_2 + g_{21}dq_2dq_1 = -2ds_1ds_2\cos(\pi - \theta_{12})$$

Sabe-se também que  $g_{12} = g_{21}$  e que, pela Equação (2.11),  $ds_1 = \sqrt{g_{11}}dq_1$  e  $ds_2 = \sqrt{g_{22}}dq_2$ . E como  $\cos(\pi - \theta_{12}) = -\cos(\theta_{12})$ , então:

$$\begin{aligned} 2g_{12}dq_1dq_2 &= -2\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}dq_1dq_2 - \cos(\theta_{12}) \Leftrightarrow g_{12} = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos(\theta_{12}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta_{12}) = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \end{aligned}$$

Da definição de ortogonalidade ou perpendicularidade entre vetores, sabe-se que o cosseno do ângulo entre eles é nulo, por ser cosseno de  $90^\circ$ . Logo,  $\cos(\theta_{12} = 0 \Rightarrow g_{12} = g_{21} = 0$ , como se queria demonstrar.

Mais à frente na Secção 2.1.4 , mantendo sempre a condição de ortogonalidade, irão ser mostrados os casos particulares de sistemas de coordenadas que mais interessam e que servem precisamente para ilustrar o funcionamento do tensor métrico em casos práticos, isto é, a capacidade que dá de obter distâncias num qualquer espaço, a partir de variações de coordenadas.

### 2.1.3 Cálculo de Integrais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Antes de se prosseguir para a enunciação de alguns dos exemplos de sistemas de coordenadas curvilíneas, é essencial rever o cálculo de alguns integrais importantes.

1. Ao elemento de linha  $d\vec{r} = \sum_i h_i dq_i \hat{e}_i$  está associado um integral de contorno que, não é nada mais nada menos que integrar a função, vetorial ou escalar, ao longo de uma curva. Esse integral é definido, para um campo vetorial  $V_i = V_i(q_1, q_2, q_3)$  por:

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int (V_1 ds_1 + V_2 ds_2 + V_3 ds_3) = \sum_i \int V_i h_i dq_i \quad (2.22)$$

2. Da mesma forma que se define um elemento de linha, também se define um elemento de área e conseqüentemente, na definição a seguir, um elemento de volume. O elemento de área pode ser definido por  $da_{ij} = ds_i ds_j = h_i h_j dq_i dq_j$ . Logo, num campo vetorial  $V_i = V_i(q_1, q_2, q_3)$ , o integral de superfície ou fluxo

é definido por:

$$\begin{aligned} \int \vec{V} \cdot d\vec{a} &= \int V_1 da_{23} + \int V_2 da_{31} + \int V_3 da_{12} = \\ &= \int V_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3 + \int V_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1 + \int V_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

3. Se se adicionar mais um elemento de linha  $ds_i$ , em vez se ter um elemento de área, passa-se a ter certamente um elemento de volume  $d^3\vec{r} = dv = ds_1 ds_2 ds_3 = (h_1 h_2 h_3) dq_1 dq_2 dq_3$ . O integral de volume será portanto:

$$\int f(\vec{r}) d^3r = \int f(q_1, q_2, q_3) h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (2.24)$$

Uma boa forma de exemplificar num caso prático este conceito de elemento de volume e que ajuda a imaginar no espaço o que realmente está a acontecer é perceber o exemplo em ((Arfken, 1985), página 91, Figura 2.1.)

## 2.1.4 Casos Particulares De Sistemas de Coordenadas

Feita a introdução às coordenadas curvilíneas e ao conceito, ainda muito vago, de tensor métrico, dado que nos capítulos seguintes será bem mais aprofundado, importa agora estudar os casos conhecidos mais importantes para este estudo de coordenadas curvilíneas ortogonais.

### Coordenadas Cilíndricas

O primeiro caso a ser abordado é o das coordenadas cilíndricas. Neste sistema de coordenadas, as superfícies constantes  $(q_1, q_2, q_3)$  que se vão intersestar para definir um ponto no espaço passam a ter a forma  $(\rho, \phi, \theta)$ , como se pode ver na Figura 2.1.

Sejam então as novas superfícies constantes limitadas da seguinte forma, sendo que a coordenada  $\theta$  da Figura 2.1, passa a representar-se neste caso por  $\phi$ :

$$\begin{cases} \rho \in [0, +\infty[ \\ \phi \in [0, 2\pi[ \\ z \in ]-\infty, +\infty[ \end{cases}$$

Tal como se pode ver na Figura 2.1, cada coordenada vai definir uma superfície da seguinte forma:

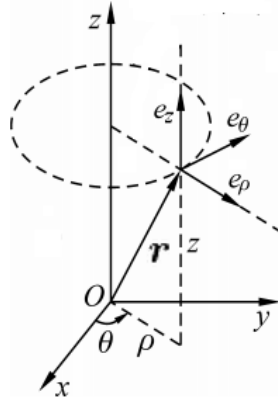


FIGURA 2.1: Coordenadas Cilíndricas. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>2</sup>a 11 de março de 2020.

- $\rho$  gera um plano vertical cilíndrico  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ , por representar a distância do eixo dos  $zz$  ao ponto que interessa no espaço;
- $\phi$  gera um semiplano vertical  $\phi = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$  consoante o ângulo que define;
- $z$  gera um plano horizontal  $z = z$  de acordo com o valor atribuído à coordenada  $z$ ;

Como era expectável, ocorre aqui uma clara transformação de coordenadas, onde aparecem novos planos constantes e ortogonais, que quando intersetados, localizam um ponto no espaço. A relação existente é entre as habituais coordenadas cartesianas e o novo tipo de coordenadas, as cilíndricas. É sempre para facilitar que se exprime o novo sistema em função do sistema cartesiano. Desse modo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi \\ y = \rho \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad (2.25)$$

Sabe-se que o tensor métrico é composto pelos fatores de escala que vão multiplicar os elementos de linha  $ds_i$  em coordenadas curvilíneas. Logo, começando pelo ponto de partida que é a base cartesiana, um vetor posição  $\vec{r}$ , é então definido, em coordenadas cartesianas, por:

$$\vec{r} = \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y} + z \hat{z} \quad (2.26)$$

<sup>2</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical\\_coordinates\\_with\\_basis.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cylindrical_coordinates_with_basis.png)

Recorrendo à Equação (2.16) e sabendo que agora  $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \phi, z)$ , vem:

$$\begin{cases} (h_1)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi + 0 = 1 \\ (h_2)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = (-\rho\sin\phi)^2 + (\rho\cos\phi)^2 + 0 = \rho^2 \\ (h_3)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

A partir daqui obtém-se os esperados fatores de escala  $h_i$ . O elemento de linha,  $d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + d\vec{r}_3$ , para as coordenadas cilíndricas será:

$$d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3 = 1 d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\phi \hat{e}_\phi + 1 dz \hat{e}_z \quad (2.28)$$

Os novos versores são  $e_\rho, e_\phi$  e  $e_z$  e os respectivos fatores de escala são:

$$\begin{cases} h_\rho = 1 \\ h_\phi = \rho \\ h_z = 1 \end{cases} \quad (2.29)$$

À semelhança das coordenadas cartesianas, estes versores são normais às superfícies que definem e apontam no sentido crescente da respetiva coordenada. Para além disso, também se podem escrever os novos versores em função dos antigos, não só as coordenadas. Com efeito, através da Equação (2.18) fica, partindo sempre da base cartesiana  $(\rho\cos\phi\hat{x} + \rho\sin\phi\hat{y} + z\hat{z})$ :

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho = \frac{1}{h_\rho} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho\cos\phi\hat{x} + \rho\sin\phi\hat{y} + z\hat{z}) = \cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y} \\ \hat{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho\cos\phi\hat{x} + \rho\sin\phi\hat{y} + z\hat{z}) = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y} \\ \hat{e}_z = \frac{1}{h_z} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial z} (\rho\cos\phi\hat{x} + \rho\sin\phi\hat{y} + z\hat{z}) = \hat{z} \end{cases} \quad (2.30)$$

Quanto à confirmação da ortogonalidade, tem-se:

$$\begin{cases} \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = (\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) \cdot (-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) \\ \quad = -\cos\phi\sin\phi + \sin\phi\cos\phi = 0 \\ \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_z = (\cos\phi\hat{x} + \sin\phi\hat{y}) \cdot (\hat{z}) = 0 \\ \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_z = (-\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}) \cdot (\hat{z}) = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Da mesma maneira que a ortogonalidade se comprova pelos resultados do

produto interno, vai também comprovar-se pelo produto externo entre versores. Ao contrário do produto interno, o resultado do produto externo entre dois vetores não é um escalar, mas sim outro vetor. Quando se está perante sistemas de coordenadas ortogonais, isto é, em que os versores são perpendiculares entre si, o produto externo entre dois desses versores vai ser sempre o versor que falta. Logo, fazendo os cálculos conclui-se que:

$$\begin{cases} \hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_z \end{cases} \quad (2.32)$$

Também é possível obter a relação inversa, isto é, escrever os versores da base cartesiana em função da base cilíndrica, de tal modo que:

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos\phi\hat{e}_\rho - \sin\phi\hat{e}_\phi \\ \hat{y} = \sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi \\ \hat{z} = e_z \end{cases} \quad (2.33)$$

Até agora estudou-se o caso particular de um vetor posição. No entanto, existem outros tipos de vetores como, por exemplo, um vento que esteja a passar nessa posição com uma determinada velocidade. Por conseguinte, é importante perceber as transformações de coordenadas para um vetor geral  $\vec{V}$  num determinado ponto. Primeiramente em coordenadas cartesianas:

$$\vec{V} = V_x\hat{x} + V_y\hat{y} + V_z\hat{z} \quad (2.34)$$

Passando à transformação para coordenadas cilíndricas, vem:

$$\vec{V} = V_\rho\hat{e}_\rho + V_\phi\hat{e}_\phi + V_z\hat{e}_z \quad (2.35)$$

À semelhança do que se fez com o vetor posição, vai-se agora exprimir primeiro o vetor geral, em coordenadas cilíndricas, em função das coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= V_x(\cos\phi\hat{e}_\rho - \sin\phi\hat{e}_\phi) + V_y(\sin\phi\hat{e}_\rho + \cos\phi\hat{e}_\phi) + V_z(\hat{e}_z) \\ &= (V_x\cos\phi + V_y\sin\phi)\hat{e}_\rho + (-V_x\sin\phi + V_y\cos\phi)\hat{e}_\phi + \hat{(V_z)}\hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.36)$$

Da Equação (2.36) tira-se as componentes novas do vetor em função das componentes cartesianas:

$$\begin{cases} V_\rho = V_x \cos\phi + V_y \sin\phi \\ V_\phi = -V_x \sin\phi + V_y \cos\phi \\ V_z = V_z \end{cases} \quad (2.37)$$

Repare-se que na Equação (2.26) escreveu-se o vetor posição  $\vec{r}$  em coordenadas cartesianas com  $x, y$  e  $z$  expressos em função das novas coordenadas  $\rho, \phi$  e  $z$ , mas não se deu o resultado final do vetor posição em coordenadas cilíndricas. Desta forma, com as componentes cilíndricas bem definidas para o caso geral, importa agora enunciar novamente o caso particular do vetor posição, mas na base cilíndrica.

Partindo então, mais uma vez, da base cartesiana em que  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  e de acordo com a Equação (2.37), as novas componentes de posição são:

$$\begin{cases} R_\rho = x \cos\phi + y \sin\phi = (\rho \cos\phi) \cos\phi + (\rho \sin\phi) \sin\phi = \rho \\ R_\phi = -x \sin\phi + y \cos\phi = -(\rho \cos\phi) \sin\phi + (\rho \sin\phi) \cos\phi = 0 \\ R_z = z \end{cases} \quad (2.38)$$

Finalmente, um vetor posição  $\vec{r}$ , em coordenadas cilíndricas, define-se então por:

$$\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z \quad (2.39)$$

É de notar que uma qualquer posição definida por um vetor nesta base não tem componente  $R_\phi$ . Na realidade, se se olhar para a Figura 2.1 percebe-se que o vetor  $\vec{r}$  está aplicado localmente num ponto, ponto esse que define um plano juntamente com os versores  $\hat{e}_\rho$  e  $\hat{e}_z$ . E esse plano, no ponto referido, é perpendicular ao versor  $\hat{e}_\phi$ , pelo que o vetor local  $\vec{r}$  não tem componente segundo o eixo local dos  $\phi\phi$ .

Relativamente às transformações que têm sido feitas, obviamente também é possível fazer o inverso do que se fez na Equação (2.36) e escrever as componentes

cartesianas em função das novas, pelo que, feitos os cálculos, fica:

$$\begin{cases} V_x = V_\rho \cos\phi - V_\phi \sin\phi \\ V_y = V_\rho \sin\phi + V_\phi \cos\phi \\ V_z = V_z \end{cases} \quad (2.40)$$

### Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas constituem outro dos exemplos de sistemas de coordenadas curvilíneas mais importantes para o estudo aqui presente. Assim sendo, o desenvolvimento matemático que se vai demonstrar neste caso, é em tudo idêntico ao anterior que foi feito para as coordenadas cilíndricas. Inicialmente vai ser abordado o caso particular do vetor posição juntamente com os fenómenos de transformação nos versores, a confirmação de ortogonalidade e por fim, o vetor no modo geral.

As coordenadas  $(q_1, q_2, q_3)$  passam a ser  $(r, \theta, \phi)$ , como se pode observar na Figura 2.2.

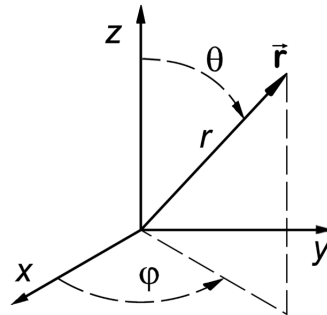


FIGURA 2.2: Coordenadas Esféricas. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>3</sup>a 13 de março de 2020.

As novas coordenadas têm os seguintes limites:

$$\begin{cases} r \in [0, +\infty[ \\ \theta \in [0, +\pi] \\ \phi \in ]0, 2\pi] \end{cases}$$

Olhando então para a Figura 2.2 consegue-se perceber que cada coordenada vai descrever uma superfície constante da seguinte forma:

---

<sup>3</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical\\_polar\\_coordinates.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_polar_coordinates.png)

- $r$  gera uma superfície esférica  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  que varia o seu raio consoante o valor da coordenada;
- $\theta$  gera uma superfície cônica  $\theta = \cos^{-1} \left[ \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]$  com vértice na origem do referencial;
- $\phi$  gera um semiplano vertical  $\phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$  consoante o ângulo que define;

Exprimindo então as coordenadas cartesianas em função das novas coordenadas esféricas, tem-se:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (2.41)$$

O vetor posição  $\vec{r}$ , na base cartesiana, com as coordenadas escritas em função das coordenadas esféricas, é definido pela Equação (2.42). Na parte final desta subsecção irá ser demonstrado o resultado final deste vetor posição, mas na base esférica.

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{x} + r \sin \theta \sin \phi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z} \quad (2.42)$$

Calculando os fatores de escala  $h_i$ , vem:

$$\begin{cases} (h_1)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial r} \right)^2 \\ \quad = (\sin \theta \cos \phi)^2 + (\sin \theta \sin \phi)^2 + (\cos \theta)^2 = 1 \\ (h_2)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \\ \quad = (r \cos \theta \cos \phi)^2 + (r \cos \theta \sin \phi)^2 + (-r \sin \theta)^2 = r^2 \\ (h_3)^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \\ \quad = (-r \sin \theta \sin \phi)^2 + (r \sin \theta \cos \phi)^2 + (0)^2 = r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \quad (2.43)$$

Estes novos fatores de escala, como já se sabe, vão ser posicionados como fatores de multiplicação na expressão do elemento de linha geral  $d\vec{r} = h_1 dq_1 \hat{e}_1 + h_2 dq_2 \hat{e}_2 + h_3 dq_3 \hat{e}_3$  e vão ser agora, retirando o quadrado às expressões anteriores:

$$\begin{cases} h_r = 1 \\ h_\theta = r \\ h_\phi = r \sin \theta \end{cases} \quad (2.44)$$

Com efeito, o elemento de linha  $d\vec{r}$ , em coordenadas esféricas, fica:

$$d\vec{r} = 1dr\hat{e}_r + rd\theta\hat{e}_\theta + r\sin\theta d\phi\hat{e}_\phi \quad (2.45)$$

É possível visualizar, para uma melhor percepção no espaço, o elemento de linha, a cima de definido, num elemento de volume, como exemplificado abaixo, na Figura 2.3.

Os novos versores já representados na Equação (2.45) caracterizam-se, identicamente aos versores das coordenadas cilíndricas, por serem normais às superfícies que as coordenadas correspondentes geram e por apontarem no sentido crescente do valor dessas mesmas coordenadas. Para além disso, também podem ser escritos em função dos antigos recorrendo à Equação (2.18) e partindo da base cartesiana ( $r\sin\theta\cos\phi\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}$ ), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_r = \frac{1}{h_r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{1}{1} \frac{\partial}{\partial r} (r\sin\theta\cos\phi\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}) \\ \quad = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} \\ \hat{e}_\theta = \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\sin\theta\cos\phi\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}) \\ \quad = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \\ \hat{e}_\phi = \frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (r\sin\theta\cos\phi\hat{x} + r\sin\theta\sin\phi\hat{y} + r\cos\theta\hat{z}) \\ \quad = -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y} \end{array} \right. \quad (2.46)$$

Analogamente ao caso das coordenadas cilíndricas, nas esféricas comprova-se também a ortogonalidade entre versores. Procedendo ao cálculo do produto interno entre os diferentes versores verifica-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\theta = (\sin\theta\cos\phi)(\cos\theta\sin\phi) + (\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\sin\phi) - \sin\theta\cos\theta = 0 \\ \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi = \sin\theta\cos\phi(-\sin\phi) + (\sin\theta\sin\phi)(\cos\phi) = 0 \\ \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi = (\cos\theta\cos\phi)(-\sin\phi) + (\cos\theta\sin\phi)(\cos\phi) = 0 \end{array} \right. \quad (2.47)$$

Por outro lado, o produto externo entre dois versores também resulta no versor restante:

$$\begin{cases} \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_r \\ \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r = \hat{e}_\theta \end{cases} \quad (2.48)$$

O processo contrário, ou seja, a escrita dos versores do sistema cartesiano em função dos do sistema esférico, fica:

$$\begin{cases} \hat{x} = \sin\theta\cos\phi\hat{e}_r + \cos\theta\cos\phi\hat{e}_\theta - \sin\phi\hat{e}_\phi \\ \hat{y} = \sin\theta\sin\phi\hat{e}_r + \cos\theta\sin\phi\hat{e}_\theta + \cos\phi\hat{e}_\phi \\ \hat{z} = \cos\theta\hat{e}_r - \sin\theta\hat{e}_\theta \end{cases} \quad (2.49)$$

A demonstração destes resultados que se têm vindo a mostrar pode ser feita minuciosamente, contudo, o principal objetivo é mostrar as relações que podem vir a ser usadas mais à frente, logo, deixa-se de parte alguma parte do desenvolvimento matemático mais complexo.

Passando novamente ao caso do vetor geral  $\vec{V}$  e ao cálculo das suas componentes, sabe-se que este é definido por:

$$\vec{V} = V_r\hat{e}_r + V_\theta\hat{e}_\theta + V_\phi\hat{e}_\phi \quad (2.50)$$

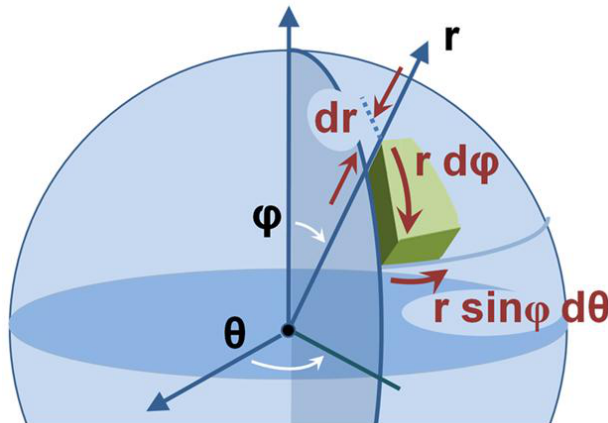


FIGURA 2.3: Elemento de Volume em Coordenadas Esféricas. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>4</sup>a 15 de março de 2020.

<sup>4</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Volume\\_element\\_spherical\\_coordinates.JPG](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Volume_element_spherical_coordinates.JPG)

Partindo dos versores do sistema cartesiano enunciados na Equação (2.49), no final do desenvolvimento fica-se com as componentes esféricas, em função das cartesianas, de um qualquer vetor  $\vec{V}$ :

$$\begin{cases} V_r = V_x \sin \theta \cos \phi + V_y \sin \theta \sin \phi + V_z \cos \theta \\ V_\theta = V_x \cos \theta \cos \phi + V_y \cos \theta \sin \phi - V_z \sin \theta \\ V_\phi = -V_x \sin \phi + V_y \cos \phi \end{cases} \quad (2.51)$$

O contrário será:

$$\begin{cases} V_x = V_r \sin \theta \cos \phi + V_\theta \cos \theta \cos \phi - V_\phi \sin \phi \\ V_y = V_r \sin \theta \sin \phi + V_\theta \cos \theta \sin \phi + V_\phi \cos \phi \\ V_z = V_r \cos \theta - V_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (2.52)$$

Através do vetor geral, voltando ao caso particular do vetor posição, consegue-se determinar a expressão do vetor posição  $\vec{r}$  em coordenadas esféricas, dado que já se consegue saber as componentes de posição nas duas bases. Se se prestar atenção às componentes esféricas, na Equação (2.49), do vetor geral em função das cartesianas e se substituir  $(x, y, z)$  por  $(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ , ficam as novas componentes:

$$\begin{cases} R_r = r(\sin \theta \cos \phi)^2 + r(\sin \theta \sin \phi)^2 + r(\cos \theta)^2 = r \\ R_\theta = r(\sin \theta \cos \phi)(\cos \theta \cos \phi) + r \sin \theta \sin \phi \cos \theta \sin \phi - r \cos \theta \sin \theta = 0 \\ R_\phi = -(r \sin \theta \cos \phi) \sin \phi + (r \sin \theta \sin \phi) \cos \phi = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Com os resultados da Equação (2.53) conclui-se que o vetor posição em relação à origem, em coordenadas esféricas, depende exclusivamente da componente do versor  $\hat{e}_r$ , ficando:

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \quad (2.54)$$

## 2.2 Operadores Diferenciais em Coordenadas Curvilíneas Ortogonais

Os operadores diferenciais têm, na verdade, muita utilidade no mundo da física e nos cálculos inerentes. Podem ser aplicados em várias áreas da matemática

e, por isso, irão ser igualmente aplicados na temática que se tem vindo a estudar, as coordenadas curvilíneas ortogonais.

Em cada subsecção explicar-se-á pormenorizadamente o que é que cada um dos operadores representa na prática. De notar que as demonstrações, de modo idêntico a todos os cálculos até aqui efetuados, vão partir sempre das já conhecidas expressões em coordenadas cartesianas.

## Gradiente

Antes de mais, é essencial perceber o conceito de gradiente, o que é que faz e em que cálculos é que vai ser usado. O gradiente, isto é, o símbolo "nabla" $\nabla$ , é um operador que transforma um campo escalar num campo vetorial. Na verdade, do processo de transformação resulta um vetor com a magnitude e direção da taxa máxima de variação no espaço (Arfken, 1985). Aplicar isso às coordenadas curvilíneas é perceber a taxa de variação das superfícies geradas pelas diferentes coordenadas.

Relembrando as Equações (2.1) e (2.2), define-se então o gradiente de um campo escalar  $\psi$  da seguinte forma:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z} \quad (2.55)$$

Por se estar a trabalhar com escalares que dependem de outros escalares, como se vê pelas relações nas Equações (2.1) e (2.2), é necessário usar a regra da derivação em cadeia. Consequentemente, vem:

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x}\right)\hat{x} \\ &+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial y}\right)\hat{y} \\ &+ \left(\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial z}\right)\hat{z} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Após algum trabalho matemático e agrupando as expressões por família de superfícies  $q_i$ , vem no final:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial q_1}\nabla q_1 + \frac{\partial\psi}{\partial q_2}\nabla q_2 + \frac{\partial\psi}{\partial q_3}\nabla q_3 \quad (2.57)$$

Em que  $\nabla q_i = \frac{\partial q_i}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\hat{z}$ , para  $i = 1, 2, 3$ .

Usando a Equação (2.18) podem escrever-se as componentes de  $\nabla q_i$  em relação aos vários versores, isto é, ao seu próprio versor e aos restantes. Dado que, por exemplo,  $q_1$  não cresce na direção de  $\hat{e}_2$  ou  $\hat{e}_3$ , é de esperar que para estes versores o gradiente não tenha componente. Seja então:

$$\begin{aligned}\nabla q_1 \cdot \hat{e}_1 &= \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{1}{h_1} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{1}{h_1} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{1}{h_1} \frac{\partial z}{\partial q_1} \\ &= \frac{1}{h_1} \left( \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial q_1}{\partial q_1} = \frac{1}{h_1}\end{aligned}\quad (2.58)$$

Naturalmente é o resultado da Equação (2.58) que se quer mostrar, porque, fazendo os cálculos,  $\nabla q_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$  e  $\nabla q_1 \cdot \hat{e}_3 = 0$  também.

Ora, estes resultados permitem deduzir o seguinte:

$$\begin{cases} \nabla q_1 = \frac{1}{h_1} \hat{e}_1 \\ \nabla q_2 = \frac{1}{h_2} \hat{e}_2 \\ \nabla q_3 = \frac{1}{h_3} \hat{e}_3 \end{cases}\quad (2.59)$$

O que, generalizando, dá:

$$\hat{e}_i = h_i \nabla q_i \quad (2.60)$$

Pelo que, no final, sabendo que  $ds_i = h_i dq_i$ , fica-se com:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \hat{e}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial s_2} \hat{e}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial s_3} \hat{e}_3 \quad (2.61)$$

Quanto aos casos específicos de sistemas de coordenadas que se têm vindo a estudar, tem-se:

1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{e}_z \quad (2.62)$$

2. Coordenadas Esféricas:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (2.63)$$

## Divergência

Se o resultado do operador gradiente num campo escalar é um campo vetorial, no caso da divergência passa-se o contrário. Na realidade, a divergência funciona como uma medida escalar.

Imagine-se um campo vetorial que represente o escoamento de um fluido qualquer. A divergência vai medir a variação de densidade de fluxo desse escoamento, isto é, a quantidade de fluido que está a entrar ou a sair, "num determinado ponto". Conseqüentemente, se se observar que entra mais fluido do que sai, está-se perante um caso de divergência positiva, caso contrário, é um caso de divergência negativa. Se, na verdade, a quantidade de fluido que entra e sai for a mesma, a divergência é nula. Na Figura 2.4 pode ver-se um bom exemplo do que é a divergência fisicamente. Uma forma fácil de imaginar este conceito no espaço é chamar à divergência positiva e negativa, fonte e "esgoto", na medida em que numa fonte tem-se fluido a vir para fora e num "esgoto", tem-se fluido a escoar e a "desaparecer".

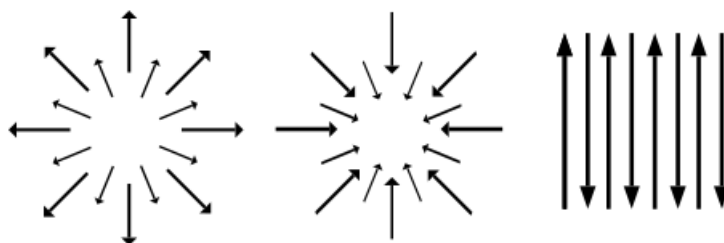


FIGURA 2.4: Tipos de divergência de um campo vetorial. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>5</sup>a 16 de março de 2020.

Relativamente ao exemplo dado a cima, tem-se divergência positiva, negativa e nula, respetivamente.

Começando de novo pelo exemplo das coordenadas cartesianas, a divergência sobre um qualquer vetor  $\vec{a}$  vem:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (2.64)$$

Contudo,  $\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3$ , e por conseguinte, no geral:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \nabla \cdot (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \quad (2.65)$$

<sup>5</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Divergence\\_\(captions\).svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Divergence_(captions).svg)

No entanto, os versores  $\hat{e}_i$  são unitários, mas de direção variável, como tal recorrem à propriedade  $(\nabla \cdot (f\vec{V})) = \nabla f \cdot \vec{V} + f\nabla \cdot \vec{V}$ . No presente caso, vem:

$$\nabla \cdot \vec{a} = a_1(\nabla \cdot \hat{e}_1) + a_2(\nabla \cdot \hat{e}_2) + a_3(\nabla \cdot \hat{e}_3) + (\hat{e}_1 \cdot \nabla a_1) + (\hat{e}_2 \cdot \nabla a_2) + (\hat{e}_3 \cdot \nabla a_3) \quad (2.66)$$

Fica a faltar saber o resultado das divergências  $\nabla \cdot \hat{e}_i$ . Para esse efeito, como se vai ver mais à frente, será preciso primeiro calcular os rotacionais.

Recorrendo então à propriedade conhecida que diz que o rotacional de um campo gradiente é nulo, vem:

$$0 = \nabla \times (\nabla q_i) = \nabla \times \left( \frac{1}{h_i} \hat{e}_i \right) \quad (2.67)$$

Desenvolvendo o segundo termo da expressão e igualando-o a zero, acaba-se por descobrir que:

$$\nabla \times \hat{e}_i = \frac{1}{h_i} (\nabla h_i \times \hat{e}_i) \quad (2.68)$$

Por outro lado, como se provou em cima,  $(\nabla h_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_1} \hat{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_i}{\partial q_2} \hat{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_i}{\partial q_3} \hat{e}_3)$ , então:

$$\nabla h_1 \times \hat{e}_1 = \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \hat{e}_2 - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{e}_3 \quad (2.69)$$

Para os restantes versores será idêntico. Desse modo, chega-se finalmente aos rotacionais de cada versor, que vão ajudar a calcular as divergências.

Os rotacionais dos versores são:

$$\begin{cases} \nabla \times \hat{e}_1 = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} \hat{e}_2 - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \hat{e}_3 \\ \nabla \times \hat{e}_2 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \hat{e}_3 - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \hat{e}_1 \\ \nabla \times \hat{e}_3 = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} \hat{e}_1 - \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \hat{e}_2 \end{cases} \quad (2.70)$$

Ora, já com os rotacionais deduzidos, é possível agora, através da relação  $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$ , obter as divergências, que é o principal objetivo desta subsecção. Trabalhando no desenvolvimento matemático, no final, as divergências dos versores vêm:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{e}_1 = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \\ \nabla \cdot \hat{e}_2 = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial q_2} + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ \nabla \cdot \hat{e}_3 = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial q_3} \end{cases} \quad (2.71)$$

Juntando todas as componentes na Equação (2.65) dada inicialmente, conclui-se que a divergência de um qualquer vetor  $\vec{a}$  em coordenadas curvilíneas ortogonais, fica:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 h_1 h_2) \right] \quad (2.72)$$

O que aplicado aos casos particulares de interesse, resulta em:

1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \quad (2.73)$$

2. Coordenadas Esféricas:

$$\nabla \cdot \vec{a} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \quad (2.74)$$

## Rotacional

A fim de entender o conceito de rotacional, pensa-se novamente num fluido representado por um vetor ou campo vetorial. O rotacional funciona como medida da rotação do escoamento desse fluido num determinado ponto. Da aplicação do rotacional a um campo vetorial, resulta outro campo vetorial, ponto a ponto.

Uma boa forma de interpretar este fenómeno fisicamente é a regra da mão direita. De facto, se se fechar a mão com o polegar virado para cima, a direção dos restantes dedos indica a rotação de um fluido representado por um campo vetorial, enquanto que o polegar a apontar para cima representa o rotacional. Esta regra, na verdade, pode ajudar muito em cálculo vetorial, nomeadamente em exemplos com produtos externos ou rotacionais, visto ser prática e simples de aplicar sempre que se queira imaginar no espaço o fenómeno. Veja-se na Figura 2.5 a aplicação da regra.

O rotacional de um vetor  $\vec{a}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \nabla \times (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) = a_1 \nabla \times \hat{e}_1 + a_2 \nabla \times \hat{e}_2 \\ &+ a_3 \nabla \times \hat{e}_3 + \nabla a_1 \times \hat{e}_1 + \nabla a_2 \times \hat{e}_2 + \nabla a_3 \times \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.75)$$

O que se observa na Equação (2.75) são termos já conhecidos e calculados anteriormente, nomeadamente o gradiente das componentes e o rotacional dos vetores. Procedendo à substituição na expressão e ao desenvolvimento matemático,



FIGURA 2.5: Regra da mão direita. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>6</sup>a 17 de março de 2020.

vem no final:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 a_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 a_2) \right] \hat{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 a_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 a_3) \right] \hat{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 a_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 a_1) \right] \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (2.76)$$

No caso particular dos sistemas de coordenadas estudados, vem:

1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial a_\phi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho \\ &+ \left( \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\phi \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\phi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{e}_z \end{aligned} \quad (2.77)$$

2. Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{a} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta a_\phi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\phi) \right] \hat{e}_\theta \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.78)$$

<sup>6</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Right-hand\\_screw\\_rule.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Right-hand_screw_rule.svg)

## Laplaciano de um Escalar

O Laplaciano é um operador diferencial de segunda ordem. Primeiramente, para o caso de um escalar, o Laplaciano  $\nabla^2\psi$  vem:

$$\begin{aligned}\nabla^2\psi &= \nabla \cdot (\nabla\psi) \\ &= \frac{1}{h_1h_2h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2h_3}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1h_3}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1h_2}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial q_3} \right) \right]\end{aligned}\quad (2.79)$$

Para os casos particulares de sistemas de coordenadas fica:

1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial\psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\quad (2.80)$$

2. Coordenadas Esféricas:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial \phi^2}\quad (2.81)$$

## Laplaciano de um Vetor

Na análise vetorial, que na verdade é a que mais vai ser importante neste trabalho, o Laplaciano escreve-se de forma diferente obviamente. Se o vetor em questão estiver escrito na base cartesiana, o Laplaciano seria simplesmente  $\nabla^2\vec{a} = \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{a}}{\partial z^2}$ . No entanto, como tem sido usual, interessa saber o caso geral para coordenadas curvilíneas ortogonais.

Nesse sentido, após se conhecerem os resultados dos vários operadores diferenciais, consegue-se tirar partido da relação  $\nabla^2\vec{a} = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{a})$ . E desenvolvendo a relação, obtém-se para os dois casos particulares estudados o seguinte:

1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\nabla^2\vec{a} = \left( \nabla^2 a_\rho - \frac{1}{\rho^2} a_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\rho + \frac{1}{2} \left( \nabla^2 a_\phi - \frac{1}{\rho^2} a_\phi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\phi + \nabla^2 a_z \hat{z}\quad (2.82)$$

2. Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{a} = & \left[ \nabla^2 a_r - \frac{2}{r^2} \left( a_r + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta a_\theta) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} \right) \right] \hat{e}_r \\ & + \left[ \nabla^2 a_\theta + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial a_r}{\partial\theta} - \frac{a_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} \right) \right] \hat{e}_\theta \\ & + \left[ \nabla^2 a_\phi + \frac{2}{r^2 \sin\theta} \left( \frac{\partial a_r}{\partial\phi} + \cot\theta \frac{\partial a_\theta}{\partial\phi} - \frac{a_\phi}{2\sin\theta} \right) \right] \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (2.83)$$

## 2.3 Separação de Variáveis em Equações Diferenciais Parciais

A Equação de Helmholtz, equação diferencial parcial, com  $k^2$  constante, tem diversas aplicações em Física e é definida da seguinte forma:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.84)$$

Devido aos resultados que foram sendo obtidos até agora, consegue-se concluir que, em coordenadas cartesianas, a expressão virá:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (2.85)$$

O método de separação de variáveis é uma das hipóteses tentativa de resolver este tipo de equações. Assumindo  $\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ , a Equação (2.85) vem:

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 XYZ = 0 \quad (2.86)$$

A partir daqui separa-se as variáveis uma a uma. Para exemplificar, começando por  $X(x)$ , vem:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k^2 - \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (2.87)$$

Repara-se que, na Equação (2.87), do lado esquerdo só existe dependência de  $x$  e do lado direito das restantes variáveis,  $y$  e  $z$ . Dado que,  $(x, y, z)$  são variáveis independentes, ambos os termos da equação terão de ser iguais a uma constante,

"constante de separação". No presente caso vai-se chamar  $-l^2$ , de tal forma que:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2 = -k^2 - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (2.88)$$

Progressivamente vão-se introduzindo novas constantes de separação até que, no final, fica-se com a seguinte equação:

$$l^2 + m^2 + n^2 = k^2 \quad (2.89)$$

Em que:

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -l^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -m^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -n^2 \end{cases} \quad (2.90)$$

Consequentemente, a Equação (2.91) será uma possível solução da Equação de Helmholtz.

$$\psi_{l,m,n}(x, y, z) = X_l(x)Y_m(y)Z_n(z) \quad (2.91)$$

Isto significa que, para cada termo  $(l, m, n)$ , haverá uma possível solução  $\phi_{l,m,n}(x, y, z)$ .

Para além disso, a Equação de Helmholtz é linear e homogénea. Por conseguinte, a soma algébrica de várias soluções  $\phi_{l,m,n}(x, y, z)$ , com diferentes valores de  $(l, m, n)$  continua a ser uma solução, de tal modo que:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{l,m,n} a_{l,m,n} \psi(x, y, z) \quad (2.92)$$

De notar que os coeficientes  $a_{l,m,n}$  são constantes e como existe liberdade na sua escolha, esses coeficientes vão sempre ser escolhidos de modo a que a Equação (2.92) satisfaça as condições fronteira de um problema em específico.

Por forma a comprovar e exemplificar a linearidade da Equação vai resolver-se o Exercício 2.6.1, em baixo, de (Arfken, 1985).

$$\begin{aligned}
 & (\nabla^2 + k^2)[a_1\psi_1(x, y, z) + a_2\psi_2(x, y, z)] = \\
 & = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [a_1\psi_1 + a_2\psi_2] + k^2[a_1\psi_1 + a_2\psi_2] = \\
 & = \frac{\partial^2 a_1\psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_1\psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_1\psi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_2\psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_2\psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_2\psi_2}{\partial z^2} + k^2 a_1\psi_1 + k^2 a_2\psi_2 = \\
 & = a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + a_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + a_1 k^2 \psi_1 + a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + a_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = \\
 & = a_1 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + k^2 \psi_1 \right) + a_2 \left( \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + k^2 \psi_2 \right) = \\
 & = a_1(\nabla^2 + k^2)\psi_1 + a_2(\nabla^2 + k^2)\psi_2
 \end{aligned}$$

### Operadores Lineares

A Equação de Helmholtz pode ser escrita, considerando  $\nabla^2 + k^2$  um operador diferencial, da seguinte forma:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (2.93)$$

Recordando as propriedades de linearidade, este operador é linear como se viu atrás, uma vez que:

$$\begin{cases}
 (\nabla^2 + k^2)(\psi_1 + \psi_2) = (\nabla^2 + k^2)\psi_1 + (\nabla^2 + k^2)\psi_2 \\
 (\nabla^2 + k^2)(a\psi) = a(\nabla^2 + k^2)\psi = a(\nabla^2 + k^2)\psi
 \end{cases} \quad (2.94)$$

Generalizando, um operador diferencial  $\mathcal{L}$  será linear quando:

$$\begin{cases}
 \mathcal{L}(a\psi) = a\mathcal{L}(\psi) \\
 \mathcal{L}(\psi_1 + \psi_2) = \mathcal{L}(\psi_1) + \mathcal{L}(\psi_2)
 \end{cases} \quad (2.95)$$

Juntando as duas propriedades vem:

$$\mathcal{L}(a\psi_1 + b\psi_2) = a\mathcal{L}\psi_1 + b\mathcal{L}\psi_2 \quad (2.96)$$

Em suma, como se queria provar, a partir do momento em que  $\nabla^2 + k^2$  é linear, o somatório em  $\Psi(x, y, z)$  pode ser decomposto em  $l \times m \times n$  termos, em

que, não só cada um desses termos, mas também a sua soma, satisfaz a Equação de Helmholtz.

### Equação de Helmholtz em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

Nesta primeira fase estudou-se a Equação de Helmholtz e a noção de operador linear para o caso das coordenadas cartesianas. Passando agora aos restantes sistemas de coordenadas que se têm vindo a estudar, cilíndricas e esféricas, o procedimento de separação de variáveis vai ser bastante semelhante.

Começando pelo caso das coordenadas cilíndricas, a Equação de Helmholtz nesta base, vem:

$$\nabla^2\psi(\rho, \phi, z) + k^2\psi(\rho, \phi, z) = \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + k^2\psi = 0 \quad (2.97)$$

Com efeito, o desenvolvimento terá, ao início, a seguinte forma:

$$\frac{\Phi z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{PZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + P\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 P\Phi Z = 0 \quad (2.98)$$

À semelhança das coordenadas cartesianas vai proceder-se à separação progressiva de variáveis, em que  $\psi(\rho, \phi, z) = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$ . A primeira será  $-l^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2}$ , na medida em que:

$$-\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = \frac{1}{\rho P} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + k^2 \quad (2.99)$$

Do lado esquerdo só existe dependência de  $z$  e do lado direito de  $\rho$  e  $\phi$ . Continuando este processo, assume-se  $-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = m^2$  e, por fim, redefinindo  $n^2$  como  $n^2 = k^2 + l^2$ , fica no final, a famosa equação diferencial de Bessel:

$$\rho \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dP}{d\rho} \right) + (n^2 \rho^2 - m^2)P = 0 \quad (2.100)$$

Logo, com base nos resultados anteriores, uma solução possível para a Equação de Helmholtz é, com  $n^2 = k^2 + l^2$ , em coordenadas cilíndricas:

$$\phi_{m,n}(\rho, \phi, z) = P_{m,n}(\rho)\Phi_m(\phi)Z_n(z) \quad (2.101)$$

Ou, generalizando e obedecendo sempre às condições fronteira do problema em questão:

$$\Psi(\rho, \phi, z) = \sum_{m,n} a_{m,n} = P_{m,n}(\rho)\Phi_m\phi Z_n(z) \quad (2.102)$$

Quanto às coordenadas esféricas é tudo muito semelhante. A Equação de Helmholtz tomará a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi(r, \theta, \phi) + k^2\psi(r, \theta, \phi) = \\ = \frac{1}{r^2\sin\theta} \left[ \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] + k^2\psi = 0 \end{aligned} \quad (2.103)$$

Tentando a habitual solução, a separação de variáveis, com  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ , vem:

$$\frac{1}{Rr^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2\theta} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -k^2 \quad (2.104)$$

Procedendo como nos casos anteriores, aqui começa-se por definir a primeira constante de separação  $-m^2 = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$ . Após desenvolvimento, fica:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = \frac{-1}{\Theta \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \quad (2.105)$$

Vão-se igualar ambos os termos da expressão à constante de separação  $Q$ , obtendo:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \Theta + Q\Theta = 0 \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{QR}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (2.106)$$

São agora 3 equações diferenciais ordinárias, tal como nos casos anteriores, cuja resolução dá origem à possível solução mais geral:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_{Q,m} a_{Q,m} R_Q(r) \Theta_{Q,m}(\theta) \Psi_m(\phi) \quad (2.107)$$

A título de exemplo, podemos mostrar como chegar à equação de Helmholtz a partir da equação de onda. Consideremos a equação de onda na seguinte forma:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\psi = 0 \quad (2.108)$$

Esta é uma das formas mais vulgares da equação de onda e que, na verdade, ainda vamos voltar a ver no Capítulo 4. Podemos então escrever a equação de onda de tal forma que a função  $\psi(\vec{r}, t)$  fique em evidência:

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.109)$$

Se assumirmos então que a nossa função  $\psi$  é separável, dizemos que:

$$\psi(\vec{r}, t) = X(\vec{r})Y(t) \quad (2.110)$$

Aplicando esta nova igualdade à equação de onda, vem:

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = \frac{1}{c^2 Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} \quad (2.111)$$

Assim já temos o que é pretendido numa separação de variáveis, que é o facto de cada lado depender apenas de uma variável. Neste caso, temos o lado esquerdo a depender unicamente de  $\vec{r}$  e o lado direito a depender de  $t$ . Agora igualam-se ambos os lados a uma constante qualquer, ficando:

$$\frac{\nabla^2 X}{X} = -b^2 \quad (2.112)$$

$$\frac{1}{c^2 Y} \frac{d^2 Y}{dt^2} = -b^2 \quad (2.113)$$

Se mudarmos agora a forma da primeira das equações anteriores e ficamos com a equação de Helmholtz, como queríamos demonstrar:

$$\nabla^2 X + b^2 X = 0 \quad (2.114)$$

# Capítulo 3

## Análise Tensorial e Curvatura

Os sistemas de coordenadas e todo o cálculo vetorial inerente, estudados no Capítulo 2, funcionam como pilar de suporte ao tema mais abrangente que será abordado agora, a análise tensorial. Na verdade, é fundamental entender os diferentes tipos de coordenadas, a forma como caracterizam um vetor, que apesar de invariante, é descrito de modo diferente por coordenadas diferentes, entender que as superfícies geradas por coordenadas curvilíneas gerais podem não ser ortogonais entre si e acima de tudo, perceber o conceito de tensor métrico e da sua capacidade de calcular deslocamentos em qualquer espaço, definido por quaisquer coordenadas.

O tensor métrico é só um exemplo entre a panóplia de tensores que existem e que podem ser estudados. Cada tensor tem características diferentes e funcionalidades distintas no mundo da física, sendo que neste trabalho se irão estudar os casos de particular interesse para o estudo em questão. A realidade é que, o contacto com tensores é frequente em toda a análise vetorial sem que se tenha noção disso, na medida em que os próprios vetores são casos de tensores simples, ou até mesmo um escalar, um simples número, representa o caso mais simples de um tensor.

Nesse sentido, inicialmente, entenda-se o tensor como um "objeto" de carácter mais geral e completo, munido de várias componentes passíveis de sofrerem transformações, de acordo com os diferentes tipos de coordenadas e espaços. Esses espaços deixam agora de ser planos como sempre idealizamos e passam a poder ser curvos representando outros tipos de realidades. Em suma, é precisamente esse o intuito deste estudo, possuir os meios necessários para "imaginar" e descrever qualquer tipo de espaço ou variedade, ampliando assim de forma considerável, o espectro de campos da física que se podem estudar e conhecer melhor, porque a realidade da física muitas vezes não é aquilo a que se está habituado e pode tornar-se realmente complexo e abstrato. Um exemplo disso é o conceito de espaço-tempo, na Teoria

da Relatividade, que revoluciona drasticamente as habituais intuições sobre como funciona o tempo e os eventos no quotidiano e no universo.

É importante referir que este desenvolvimento tem como suporte, tanto a nível teórico como prático, as demonstrações de Collier (Collier, 2012) e por conseguinte, é normal encontrar algumas algumas "pontes" de ligação à Relatividade Especial e Geral, dado esta constituir um dos mais importantes exemplos de aplicação da análise tensorial e da geometria diferencial. Nesse sentido, também serviu de base a abordagem à relatividade, feita por Taylor e Wheeler<sup>1</sup>, no seu livro<sup>2</sup> de introdução à relatividade especial (Taylor & Wheeler, 1992).

### 3.1 Conceito Matemático de Espaço

A melhor forma de se pensar num espaço é, de facto, pensar no que o próprio nome indica, nada mais complicado que isso. É um domínio onde ocorrem todo o tipo de fenómenos e eventos que se possam imaginar. A grande novidade é que estes espaços podem também ser curvos e consequentemente, mais difíceis de analisar.

O espaço que interessa caracterizar, habitualmente denominado na língua inglesa por "manifold", é então um espaço suavemente curvado, que localmente, a nível infinitesimal, se considera plano e portanto pode ser reduzido ao espaço plano euclidiano, ou de Minkowski<sup>3</sup>, em relatividade especial (Collier, 2012). Sem ter que chegar imediatamente aos casos de maiores dimensões, é simples de pensar nesta ideia de curvatura localmente plana em casos do quotidiano bem triviais. Imagine-se um círculo (1D) ou uma superfície esférica de raio constante (2D). Faça-se esse círculo ou toda a superfície grande o suficiente e um "pedaço" infinitesimal será considerado plano. Aumentando as dimensões consecutivamente, chega-se, por exemplo, ao espaço-tempo (4D) da relatividade especial e verifica-se o mesmo. Com efeito, um qualquer espaço é n-dimensional, dado que cada ponto desse espaço pode ser descrito por n coordenadas.

O exemplo do espaço-tempo, ainda que requeira um maior esforço para perceber por ser mais abstrato, não deixa de ser intuitivo. Na perspetiva relativista, espaço e tempo deixam de ser duas entidades e passam a formar uma única entidade,

---

<sup>1</sup>John Archibald Wheeler (1911-2008), físico teórico norte-americano e um dos últimos colaboradores de Albert Einstein e o primeiro americano envolvido no desenvolvimento teórico da bomba atómica.

<sup>2</sup>Taylor e Wheeler, *Spacetime Physics: Introduction to Special Relativity* (1992).

<sup>3</sup>Hermann Minkowski (1864-1909), matemático alemão que foi professor de Albert Einstein e introduziu o conceito de espaço-tempo. Foi também o responsável pela interpretação geométrica da relatividade especial, dando génese ao conceito de espaço de Minkowski.

o espaço-tempo (Taylor & Wheeler, 1992). O espaço-tempo define totalmente o universo em que vivemos e descarta todo o consenso vulgar de que o tempo é uma propriedade absoluta da vida. Ao invés disso, a percepção dos eventos universais tem um limite natural inerente, a velocidade da luz. E apesar de a velocidade da luz ser invariante, o percurso percorrido pela luz pode não ser uma linha direita, porque o espaço-tempo é afetado pela gravidade da matéria e pela energia, ou seja, é curvado e moldado. No entanto, se se restringir o estudo a um espaço de tal maneira profundo, longe da interação de matéria ou energia, ou então se se analisar elementos infinitesimais do espaço, localmente pode reduzir-se o problema ao espaço de Minkowski, plano e a 4 dimensões.

O essencial é perceber que, tanto nos casos mais simples como nos mais complexos, num espaço munido de curvatura uma qualquer partícula deixará de se mover numa linha "direita" e passará a mover-se naquilo a que se chama, uma geodésica. Mais à frente será aprimorado este conceito, mas para já é importante ficar com a ideia de que representa o caminho mais curto entre dois pontos num espaço curvo  $n$  dimensional. Por exemplo, uma superfície esférica tem como geodésicas os seus círculos máximos e no espaço-tempo a luz para "contornar" as deformações causadas no espaço-tempo descreverá igualmente uma geodésica. Através da Figura 3.1 é possível imaginar como se comporta o espaço-tempo quando moldado pela gravidade da matéria.

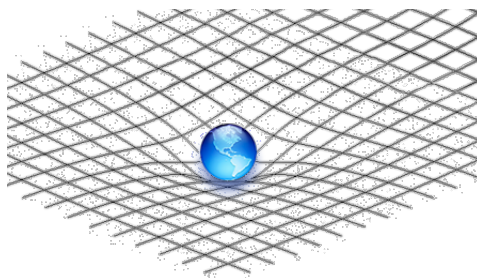


FIGURA 3.1: Interação da matéria no Espaço-Tempo. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>4</sup>a 8 de abril de 2020.

## 3.2 Espaços de Riemann e Conceito de Métrica

Os espaços curvos que se vão estudar são mais vulgarmente chamados de espaços de Riemann<sup>5</sup>e para um espaço ser deste tipo deve corresponder a requisitos como:

---

<sup>4</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:One-sided\\_spacetime\\_curvatures.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:One-sided_spacetime_curvatures.png)

- Ser diferenciável;
- Possuir um tensor métrico capaz de medir a distância entre dois pontos vizinhos, tensor este que é simétrico e varia consoante a curvatura do espaço numa determinada região;

Já tinha sido visto no capítulo anterior que é através da métrica que se definem distâncias ou separações infinitesimais entre pontos no espaço, portanto não é de admirar que também os espaços curvos necessitem da métrica para serem entendidos. A métrica define completamente a curvatura de um espaço. Deste modo, se se pretende informação de um espaço em particular, recorre-se ao tensor métrico desse espaço.

O termo distância remete rapidamente a um outro termo muito importante, já falado nos capítulos anteriores, o elemento de linha. Num espaço de Riemann  $n$ -dimensional esse elemento de linha, onde  $g_{ij}$  representa o tensor métrico e  $dx^i$  e  $dx^j$  representam os diferenciais das coordenadas, vem:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j \quad (3.1)$$

É de notar que a representação das coordenadas por  $x^i$  tem exatamente o mesmo significado que a representação  $q_i$  do Capítulo 2, ou seja, são coordenadas gerais. Simplesmente, neste campo da física, é mais habitual usar a notação nova. O número de dimensões define o número de valores que os índices  $i, j$  podem tomar. A função do tensor métrico  $g_{ij}$ , como se pode ver, é determinar os coeficientes de um elemento de linha num determinado espaço, pelo que cada espaço terá coeficientes diferentes, isto é, uma métrica diferente, derivado da sua natureza. O exemplo mais simples é, como se sabe, o elemento de linha 3D do espaço euclidiano, em coordenadas cartesianas, na Equação (3.2).

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (3.2)$$

Ora, neste caso, para descobrir a métrica não há nada mais simples que olhar para os coeficientes atrás de cada elemento infinitesimal em  $x, y, z$ . Logo, o

---

<sup>5</sup>Bernhard Riemann (1826-1866), matemático alemão com um contributo notável em várias áreas da matemática, nomeadamente a geometria diferencial, um dos principais pilares da teoria da relatividade.

tensor métrico será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Outros exemplos de métricas já foram sendo mostrados ao longo do capítulo anterior devido à abordagem de diferentes sistemas de coordenadas, como as esféricas e as cilíndricas. Um outro exemplo para reiterar o facto de que a métrica integra realmente outros casos mais complexos, é o elemento de linha no espaço de Minkowski, em relatividade especial:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

Facilmente se percebe que o processo é exatamente idêntico e o tensor métrico será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

É crucial entender que se percebe automaticamente que se está num espaço plano, nos exemplos acima, visto que os coeficientes (componentes do tensor) são  $\pm 1$ . Contudo, podem existir tensores de componentes muito complicadas que definem na mesma um espaço plano. O que vai descodificar absolutamente se o espaço é curvo ou plano é o tensor da curvatura de Riemann, que será visto mais à frente. Com efeito, o tensor métrico e o da curvatura são, de facto, diferentes, pelo que é importante não confundir. O critério rigoroso para se determinar se um espaço é plano é o tensor da curvatura de Riemann ser igual a zero. De um modo mais geral:

- Se o tensor de Riemann for zero para todos os pontos, o espaço é definitivamente plano;
- Basta o tensor de Riemann não ser nulo num dos pontos e o espaço é curvo na vizinhança desse ponto, que o inclui;

Para se definir curvatura é preciso antes ter noção do que é realmente a curvatura e que tipos de curvatura se podem imaginar. O estudo da curvatura em geral conduziu ao avanço representado pela passagem do conceito de curvatura extrínseca, tipicamente superfícies curvas bidimensionais no espaço 3D, ao conceito

de curvatura intrínseca, para domínios de dimensões superiores a 3. De certa forma pode dizer-se que a curvatura é:

- Extrínseca: É quando se observa a curvatura de algo em relação a um espaço externo de maior dimensão, como uma esfera em cima de uma mesa, visto no nosso espaço 3D;
- Intrínseca: É quando se pretende analisar um espaço por si próprio sem nenhum outro espaço de referência, de maior dimensão;

De certa forma, o objetivo é aferir se o espaço em si é realmente curvo, ou se apenas é curvo visto de fora, em relação a outro espaço. No primeiro caso, o estudo da curvatura é direto através da métrica e da matemática. Entender estes conceitos é simples, na medida em que recorrendo a exemplos familiares e básicos, não é necessário um pensamento de todo abstrato.

Se se pensar num cilindro de papel colocado numa mesa, é certo que possui curvatura extrínseca. No entanto, intrinsecamente é plano, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo desenhado na sua superfície é  $180^\circ$ . Parece difícil pensar se de facto isto é verdadeiro, mas desenrolando o cilindro, é um facto que se reduz a uma simples folha de papel e assim já fica trivial entender o valor da soma dos ângulos internos.

Por outro lado, uma esfera por mais que à primeira vista pareça ter propriedades semelhantes, não tem. A esfera pousada na mesa, tal como o cilindro, tem curvatura extrínseca, vista de fora, mas também tem curvatura intrínseca. Numa esfera nunca será possível desenrolar o objeto e ficar com uma folha de papel, nem sequer se consegue construir uma esfera com uma folha de papel, ou seja, a soma dos ângulos internos de um triângulo numa esfera nunca vai dar  $180^\circ$ , vai ser superior. De facto, a esfera é um exemplo de um objeto no qual deixa de ser verdadeira a geometria euclidiana e passam a ser verdadeiras as seguintes afirmações:

- Duas geodésicas distintas interseccionam-se exatamente duas vezes;
- Não existem paralelas;
- Ângulos internos de um triângulo numa superfície esférica (Ver Figura 3.2) somam sempre mais que  $180^\circ$ ;

É verdade que, numa primeira fase, seja mais difícil assimilar estes conceitos, mas com o auxílio da exemplificação com situações do quotidiano vai deixando de ser abstrato. Outro exemplo, para além dos enunciados em cima, são as linhas de longitude. Estas linhas parecem paralelas entre si, mas não são, interseccionam-se nos

polos do nosso planeta. É também devido a este fenómeno de curvatura que as viagens planeadas na terra a grandes distâncias são, na verdade, geodésicas.

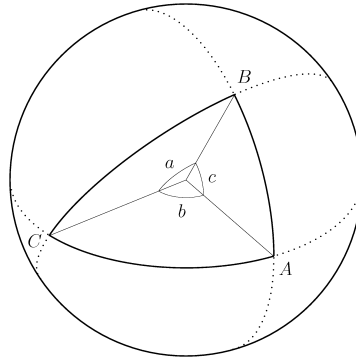


FIGURA 3.2: Triângulo na superfície esférica. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>6</sup>a 9 de abril de 2020.

Com todos os instrumentos necessários, pode-se agora dar um exemplo completo da caracterização de um espaço curvo bastante simples e conhecido de trás, a superfície esférica. No espaço euclidiano 3D, um elemento de linha, em coordenadas esféricas, vem:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.6)$$

Aplicando um raio  $R$  constante, o termo  $dr$ , como seu diferencial, passa obviamente a ser nulo e por conseguinte, fica uma superfície esférica 2D de elemento de linha na Equação (3.7) e raio  $R$ .

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.7)$$

Evidentemente o tensor métrico será:

$$[g_{ij}] = \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Naturalmente a métrica inversa será a matriz inversa, com o seguinte aspeto:

$$[g^{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

<sup>6</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical\\_triangle\\_on\\_sphere\\_with\\_angles\\_a\\_b\\_c.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_triangle_on_sphere_with_angles_a_b_c.png)

### 3.3 Geometria Diferencial - Escalares, Vetores e Tensores

A geometria diferencial é o ramo da matemática que funciona como pilar ao estudo dos espaços e por sua vez, dos objetos que interagem com esses espaços. Nesse sentido, é essencial dominar o cálculo tensorial e isso implica perceber o que são, na verdade tensores, desde os mais simples aos mais complexos. Ao longo de toda a matemática básica que se vai aprendendo, já há contacto com tensores sem que se dê por isso, neste caso os tensores mais simples que se conhecem. Verdadeiramente, para o propósito deste trabalho, devem conhecer-se bem os seguintes objetos matemáticos:

- Escalares;
- Vetores contra-variantes ou simplesmente vetores;
- Vetores co-variantes ou co-vetores;
- Tensores mais gerais;

Como é possível constatar, vetores e escalares já são vulgares na matemática elementar e, de facto, não passam de tensores mais simples. Quanto aos vetores, também é possível perceber que agora é importante distinguir dois tipos diferentes, os vetores contra-variantes e os co-variantes. No decorrer desta secção ficará bem mais evidente o que significa cada um deles. Para já, é importante saber a diferença a nível da representação e da ligação que isso tem com o conceito mais abrangente de tensor, que também ficará mais claro à frente. Assim sendo, um vetor contra-variante representa-se com um índice superior  $V^\alpha$  e um co-variante com um índice inferior  $V_\alpha$ . Estes vetores possuem sempre apenas um índice, ao contrário do tensor que poderá tomar inúmeros índices.

Já é hábito relacionar os vetores com sistemas de coordenadas, porque estes apesar de invariantes, podem ser descritos de forma diferente com coordenadas diferentes. A esses vetores estão sempre associados versores, que correspondem à base em que se está a trabalhar, sendo que cada versor representa a direção de uma determinada componente. Nas coordenadas cartesianas é sempre mais fácil trabalhar pelo simples facto de que esses versores são sempre constantes na sua direção, isto é, independentemente do ponto em que se está no espaço, os versores são sempre constantes. Em sistemas mais elaborados, isso não se verifica, os versores, na realidade, vão alterar a sua direção consoante o ponto no espaço, ou seja, a sua base altera com os valores que as coordenadas tomam, como na relatividade geral por exemplo

(ou mesmo em espaços euclidianos, se usarmos coordenadas curvilíneas), em que os vetores não são linhas "direitas" entre dois pontos. Cada vetor está localizado num único ponto no espaço-tempo, ou melhor, cada ponto no espaço-tempo é por si só um espaço vetorial, munido de vários vetores.

Ora, anteriormente já se tinha dado a entender que os vetores contra-variantes e co-variantes não são a mesma coisa. Efetivamente são representações diferentes do mesmo objeto geométrico num dado ponto do espaço, na medida em que o espaço vetorial se divide em espaço tangencial, constituído por vetores contra-variantes, e espaço co-tangencial, constituído por vetores co-variantes. Imaginando uma curva parametrizada, pensar no vetor contra-variante é pensar no vetor tangente a essa curva, ao passo que o vetor co-variante é o gradiente de um campo escalar. Sucintamente, vetores contra-variantes e co-variantes definem um espaço vetorial e mais à frente será possível perceber que um tensor tem componentes contra-variantes e co-variantes, dando origem aos tensores mais complexos.

O foco principal do Capítulo 2 foi de certa forma perceber que no cálculo tensorial, em que existem sistemas de coordenadas mais complexos e inúmeras transformações e mudanças de base, passa-se a usar o termo coordenadas curvilíneas (ortogonais ou não). De agora em diante essas coordenadas representar-se-ão por  $x^i$  com o índice  $i$  a variar de acordo com as dimensões em que se está a resolver o problema, tal como já tinha sido referido. Por exemplo, se se quiser representar as antigas coordenadas cartesianas ter-se-á  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ , ou seja, três dimensões, três coordenadas.

Um dos requisitos para classificar um espaço como espaço de Riemann é o facto de ser diferenciável. Esse requisito é realmente abrangente e imperativo, dado que as sucessivas transformações que se podem fazer entre tensores e coordenadas acontecem devido à diferenciação. Em bases coordenadas, bases que alteram com as coordenadas, os vetores contra-variantes e co-variantes vão por isso, sofrer diferenciação. O cálculo diferencial é como se fosse a base estrutural do estudo de curvatura.

Não é novidade que um vetor geral se representa pela soma dos produtos das suas componentes pelos vetores associados a cada direção. Logo, os vetores contra-variantes e co-variantes não fogem à regra. Vetores contra-variantes, habitualmente representados por uma seta em cima, ficam:

$$\vec{V} = V^\alpha e_\alpha \tag{3.10}$$

Os co-variantes, representados por um til em cima, ficam:

$$\tilde{V} = V_\alpha e^\alpha \quad (3.11)$$

Desde já note-se que um um vetor de componente contra-variante tem versor co-variante e vice-versa e para além disso, assume-se sempre uma soma implícita sobre o número de dimensões do espaço, o chamado somatório de Einstein. A linearidade que existe entre vetores contra-variantes e co-variantes permite que a atuação de um no outro produza um escalar, dado que a relação entre versores contra-variantes e co-variantes é dada por:

$$e^\alpha(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha \quad (3.12)$$

O delta de Kronecker já é bem conhecido e diz, neste caso, que se os índices  $\alpha$  e  $\beta$  forem iguais dá um e se forem diferentes dá zero. Devido a essa propriedade, comprova-se que se um vetor contra-variante atuar num co-variante resulta um escalar:

$$\tilde{P}\vec{V} = P_\alpha V^\beta e^\alpha e_\beta = P_\alpha V^\beta \delta_\beta^\alpha = P_\alpha V^\alpha = P_0V^0 + P_1V^1 + P_2V^2 + P_3V^3 \quad (3.13)$$

Obviamente, a expressão acima é um somatório que resultará num escalar. Esta operação é uma das várias propriedades que vão ser estudadas, mais à frente, dos tensores e generaliza para qualquer nº de dimensões o habitual produto interno entre vetores. O exemplo anterior também é útil para perceber a nova notação já mencionada atrás que torna ímplicito o somatório. Com efeito, índices superiores e índices inferiores iguais uns aos outros subentende-se que devam ser somados.

### 3.3.1 Definição de Tensores e Propriedades de transformação

Os escalares são simplesmente números, como já era habitual, e sabe-se agora que não passam de tensores, na forma mais simples possível. A seguir, será definido o conceito de alguns tipos de tensores, assim como definidas as respetivas propriedades de transformação de todos estes objetos e perceber logo à partida que escalares não se transformam com a transformação de coordenadas. Essas coordenadas entram na função escalar e podem ser de vários tipos, mas o resultado final, o escalar, não se altera.

## Escalares

Uma qualquer função  $F$  escalar pode ser representada em termos de coordenadas de qualquer tipo, basta que se saiba recorrer devidamente às transformações entre sistemas de coordenadas. De facto, a partir do momento que se tem os valores das coordenadas, substituindo-os na função, obtém-se o esperado, um número. Esses números ou escalares podem ser vários tipos de quantidades no nosso quotidiano, a temperatura ou a pressão de um quarto, por exemplo.

Seja então a pressão numa área confinada arbitrária expressa em função de coordenadas cartesianas  $x, y, z$ . Se se quiser transformar em coordenadas esféricas, a relação já é conhecida e é dada por ( $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$ ). O inverso é possível também, escrever as coordenadas esféricas em função das cartesianas. Por conseguinte as funções escalares, independentemente do tipo de coordenadas, são iguais:

$$P(x, y, z) = P(r, \theta, \phi) \quad (3.14)$$

Concluindo, as coordenadas transformam-se, porque em diversas situações é melhor usar um sistema de coordenadas em detrimento de outro para simplificar, mas os escalares são invariantes, nunca transformam.

## Vetores contra-variantes

As componentes contra-variantes de um vetor identificam-se, tal como já foi visto, por índices superiores e o que se pretende fazer é transformar um sistema de coordenadas antigo num novo. Considerando então as antigas coordenadas  $x^\beta$  e as novas  $x'^\alpha$ , notações estas que serão bastante frequentes daqui para a frente. As novas componentes  $V'^\alpha$  transformam em relação às velhas componentes  $V^\beta$  da seguinte forma:

$$V'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} V^\beta \quad (3.15)$$

Um exemplo de vetor contra-variante é o vetor tangente a uma curva parametrizada, logo, escolhendo por exemplo o tempo  $t$  como parâmetro, pensar na variação da posição de uma partícula em movimento em função desse tempo é pensar num vetor tangente, a velocidade, objeto de estudo vulgar na física. Essa tangente resulta da derivação das várias coordenadas em função de  $t$ , tendo assim como componentes:

$$V^\beta = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.16)$$

Se agora se quiser expressar esse vetor velocidade em coordenadas esféricas, basta recorrer à Equação (3.15). Por exemplo, para a primeira componente  $\frac{dr}{dt}$  virá:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.17)$$

As próximas componentes seriam calculadas com o mesmo método. Os termos  $\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}$  dão origem à matriz de transformação na Equação (3.18), 3D, que aplicada ao vetor contra-variante original, resulta no vetor contra-variante novo.

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Chame-se  $M$  a esta matriz acima para simplificar. As componentes novas de  $V'^\alpha$ , que será uma matriz coluna, serão:

$$V'^\alpha = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Um vetor contra-variante pode portanto (não quer dizer que seja sempre) ser o vetor tangente a uma curva parametrizada, como no exemplo demonstrado. O parâmetro pode ser diferente em muitos casos. Por exemplo, no espaço-tempo da relatividade, uma partícula a mover-se descreve uma curva e a sua velocidade é um vetor tangente, isto é, é a derivada da sua quadri-posição nesse caso, em função do seu tempo próprio, tempo de um relógio imaginário que se move com a partícula.

### Vetores co-variantes

Os co-variantes com índice inferior transformam igualmente através de derivadas parciais, só que neste caso a fração tem a posição das derivadas trocada na fração. A representação de componentes antigas e novas, assim como as coordenadas, é exatamente a mesma, à exceção do índice que nas componentes co-variantes é inferior. Logo, as novas componentes transformam em relação às velhas assim:

$$V'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} V_\beta \quad (3.20)$$

Passando a exemplificar. Anteriormente foi dito que os vetores co-variantes podem ser gradientes de campos escalares e, na verdade, o gradiente é o caso mais simples. No geral, qualquer vetor em componentes contra-variantes pode ser re-expresso em componentes co-variantes ou vice versa, através do tensor métrico. Considerando o campo escalar  $\psi$ , o seu gradiente vem:

$$\nabla\psi = \left( \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) \quad (3.21)$$

O gradiente anterior naturalmente também tem componentes esféricas, que podem ser expressas em função das cartesianas. Trata-se do processo de transformação de vetores co-variantes que resulta nas componentes  $\left( \frac{\partial\psi}{\partial r}, \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \right)$ . Recorrendo então à Equação (3.18), a nova componente  $\frac{\partial\psi}{\partial r}$  por exemplo, será:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (3.22)$$

As restantes componentes são calculadas da mesma forma e como se verá mais tarde, os termos que contêm as derivadas das coordenadas  $\frac{\partial x^\beta}{\partial y'^\alpha}$  representam a matriz de transformação na equação que multiplicada pelo vetor co-variante original resulta no vetor co-variante nas novas coordenadas. Repare-se que, devido ao facto dos termos que geram a matriz transformação nos vetores contra-variantes e co-variantes serem a mesma fração, mas invertida, também as matrizes vão ser inversas.

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial y'^\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^0}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^0} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Voltando a repetir o processo de chamar à matriz acima  $M$  para simplificação, as novas componentes de  $V'^\alpha$ , que será uma matriz linha, serão:

$$V'^\alpha = (y^0 \quad y^1 \quad y^2) = M (x^0 \quad x^1 \quad x^2) \quad (3.24)$$

## Tensores

Finalmente, depois de conhecer casos de tensores mais simples, chega-se ao conceito de tensor propriamente dito, ampliando o conhecimento com tensores mais complexos. Antes de mais, é necessário relembrar que em todo o estudo de tensores reside o princípio da co-variância geral, que diz que no processo de transformação

de coordenadas diferenciáveis, assume-se uma invariância na forma das equações tensoriais em si, em qualquer um dos sistemas de coordenadas, ou seja, no que toca aos tensores, se a equação de um tensor é verdadeira num sistema de coordenadas, é verdadeira em todos os sistemas de coordenadas (Collier, 2012). As propriedades de transformação de componentes de tensores são independentes da base.

No final de contas, o que será então um tensor? O conceito de tensor é, de certa forma, abstrato e pode ser descrito de diversas formas. Um tensor é um objeto matemático poderoso que contém um conjunto de componentes, que no caso não trivial mais simples será um vetor, representável por matrizes multidimensionais, consoante a ordem do tensor e o número de dimensões do espaço onde operam, que se transformam entre diferentes possíveis sistemas de coordenadas desse espaço segundo as transformações sofridas pelas próprias coordenadas. Esse conjunto de componentes compreende todos os vetores e versores que contribuem para a direção e magnitude de um objeto nesse espaço, por exemplo, uma força. A grande vantagem do uso de tensores na expressão de relações físicas é a garantia da manutenção da forma dessas relações, ainda que entre sistemas de coordenadas gerais curvilíneas não-ortogonais e com qualquer movimento relativo, mesmo acelerado. Esta propriedade é aproveitável no contexto da Acústica Submarina para lidar com situações em que a propagação do som ocorre quer em água em repouso, quer em água em movimento mais ou menos complicado, como será mais realista considerar. O processo de transformação de tensores, à semelhança dos simples vetores, faz-se através de derivadas parciais. Contudo como os tensores são construídos com escalares, vetores ou até outros tensores diferentes, o número de componentes será muito maior e a análise muito mais difícil e complicada de imaginar no espaço.

A classificação de um tensor é feita da seguinte forma:

- Ordem consoante o número de índices;
- Tipo  $(n, m)$  de acordo com o número de índices superiores  $n$  e inferiores  $m$ ;

A fim de se perceber melhor, serão agora mostrados alguns exemplos de tensores, onde em  $(m, n)$ ,  $m$  é o nº de índices superiores (contra-variantes) e  $n$  é o nº de índices inferiores (co-variantes), nomeadamente aqueles que já é hábito aparecerem na matemática corrente "disfarçados".

- Escalar: Tensor de ordem 0 e tipo  $(0, 0)$  que representa um simples número;
- Vetor contra-variante  $V^\beta$ : Tensor de ordem 1 e tipo  $(1, 0)$ ;
- Vetor co-variante  $V_\alpha$ : Tensor de ordem 1 e tipo  $(0, 1)$ ;

- Tensor  $T_\gamma^\alpha$ : Tensor de ordem 2 e tipo (1, 1);
- Tensor  $T^{\beta\alpha}$ : Tensor de ordem 2 e tipo (2, 0);
- Tensor  $T_\alpha^{\beta\gamma}$ : Tensor de ordem 3 e tipo (2, 1)

Os escalares representam números simples. O tensor tipo (1, 0) representa uma matriz coluna, de n dimensões, neste caso três:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

O tensor tipo (0, 1) representa uma matriz linha, de n dimensões, neste caso três:

$$(d \quad e \quad f) \quad (3.26)$$

Os tensores anteriores podem ser multiplicados dando origem a um tensor de ordem 2 que pode ser representado por uma matriz  $3 \times 3$  neste caso que se está em 3D:

$$\begin{pmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Consecutivamente, à medida que se aumenta a ordem do tensor e as dimensões, começa a ficar difícil de visualizar o tensor devido à quantidade de componentes. Pensa-se simplesmente numa matriz multidimensional que contempla produtos entre todo o tipo de objetos que se estudaram, escalares, vetores e mesmo outros tensores.

Antes de se avançar para a transformação de tensores, é importante mencionar um pormenor interessante relativamente ao produto interno entre vetores. Na verdade, as componentes  $g_{ij}$  do tensor métrico são definidas pelo produto interno entre versores de um dado sistema de coordenadas:

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (3.28)$$

Desta forma, quando se fala do produto interno entre dois vetores, na realidade esse produto interno é dado por:

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j = 1A^1 B^1 + 1A^2 B^2 + 1A^3 B^3 \quad (3.29)$$

Daí, o elemento de linha de um espaço n-dimensional ser a Equação (3.1). Aproveitando este exemplo, deve recordar-se que, no caso mais geral,  $g_{ij}$  tem componentes, não da matriz identidade, mas gerais:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

### 3.4 Transformação de Tensores

Recordando os conhecimentos que se têm consolidado nas secções anteriores, é certo que um tensor pode resultar da multiplicação de vários objetos, como vetores contra-variantes e co-variantes, escalares ou até mesmo outros tensores, ou seja, um tensor mais complicado, é fruto da contribuição conjunta de tensores mais simples. Por exemplo, veja-se como é que "nasce" o seguinte tensor:

$$T_{\eta}^{\beta\lambda} = F^{\beta} W^{\lambda} A_{\eta} \quad (3.30)$$

No lugar do tensor  $T_{\eta}^{\beta\lambda}$  podia estar outro qualquer tensor, com índices diferentes, resultante do produto entre vetores diferentes. Ora, considerando então o exemplo dado na Equação (3.30), já é sabido como é que se transformam os vetores contra-variantes e co-variantes da expressão através das Equações (3.15) e (3.20) respetivamente. Assumindo, por exemplo, que os objetos transformados são  $F'^{\alpha}$ ,  $W'^{\epsilon}$  e  $A'_{\tau}$  e sabendo que o tensor  $T_{\eta}^{\beta\lambda}$  é resultado do produto das componentes originais desses vetores, a transformação do tensor será, intuitivamente, dada pela multiplicação das componentes dos vetores contra-variantes e co-variantes originais pelas equações de transformação:

$$T_{\eta}^{\beta\lambda} = T'_{\tau}{}^{\alpha\epsilon} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\epsilon}}{\partial x^{\lambda}} \frac{x^{\eta}}{\partial x'^{\tau}} F^{\beta} W^{\lambda} A_{\eta} \quad (3.31)$$

Desta forma, no caso geral, um tensor de ordem contra-variante  $m$  e ordem co-variante  $n$ , tem componentes que se transformam da seguinte maneira:

$$T'_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}{}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}} \frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\nu_m}} \times \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \frac{x^{\beta_2}}{\partial x'^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\alpha_n}} \times T_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}{}^{\nu_1\nu_2\dots\nu_m} \quad (3.32)$$

## 3.5 Propriedades Algébricas de Tensores

Percebido o contexto em que se usam os tensores e a sua grande utilidade, importa agora entender como se procede à sua manipulação. À semelhança de muitos outros "objetos" da matemática, os tensores obedecem a regras algébricas tais como a multiplicação, por um escalar, a adição ou subtração, a multiplicação. Para além desses, os tensores podem também sofrer contração, propriedade importantíssima no estudo de tensores. Deste modo, passando a descrever tais regras, os tensores podem estar sujeitos a:

- Multiplicação por um escalar originando um tensor diferente:  $T_{\alpha\beta} = aX_{\alpha\beta}$
- Adição e subtração de dois tensores que forma um tensor diferente:  $T_{\beta}^{\alpha} = A_{\beta}^{\alpha} + B_{\beta}^{\alpha}$
- Multiplicação tensorial que resulta num novo tensor de maior rank ou ordem:  $T_{\lambda}^{\alpha\beta\eta} = A_{\lambda}^{\alpha}B^{\beta}C^{\eta}$
- Contração de um tensor que faz o contrário que a multiplicação, faz descer o rank ou ordem do tensor, por estar a multiplicar este por um tensor com um índice igual mas na posição contrária, em cima ou em baixo:  $T_{\gamma} = A_{\alpha\gamma}B^{\alpha}$

Efetivamente, a contração é uma propriedade fundamental que estará presente na grande maioria dos problemas e que acaba sempre por reduzir a complexidade do tensor, dado que índices iguais em posições opostas pressupõe sempre um somatório, ou seja, vão ser somados e reduzidos a números, pelo que simplificam o tensor. O caso máximo de contração será obviamente contrair um vetor contra-variante com um co-variante e ficar com um escalar.

$$S = A_{\alpha}B^{\alpha} \tag{3.33}$$

É ainda possível a dupla contração para zero quando se contrai um vetor simétrico com um anti-simétrico. Seja o tensor simétrico  $A_{\mu\nu}$  e o tensor anti-simétrico  $S^{\mu\nu}$ , vem:

$$A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0 \tag{3.34}$$

Também se podem obter vetores contra-variantes através de co-variantes e vice-versa recorrendo ao tensor métrico e ao seu inverso.

$$\begin{cases} T_j = g_{ij}T^i \\ T^j = g^{ij}T_i \end{cases} \quad (3.35)$$

Mais uma vez, pode usar-se o Delta de Kronecker como tensor para resumir a relação que permite obter os resultados anteriores.

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i \quad (3.36)$$

Segue-se um exemplo prático, em (Collier, 2012), demonstrativo de algumas das propriedades anteriores, em que se tem, em coordenadas esféricas, um vetor contra-variante  $A^a = (1, r, 0)$  e um co-variante  $B_a = (0, -r^2, \cos^2\theta)$ . O objetivo é passar da componente contra-variante do primeiro para a sua co-variante e o contrário para o segundo vetor. Isso vai ser possível através da métrica e da métrica inversa.

Para converter o vetor co-variante no vetor contra-variante usar-se-á a métrica inversa:

$$B^a = g^{ab}B_b$$

Seguidamente para fazer o contrário, converter o vetor contra-variante num co-variante usar-se-á a métrica:

$$A_a = g_{ab}A^b$$

Em coordenadas esféricas a métrica é:

$$[g_{ab}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

E a métrica inversa:

$$[g^{ab}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

Então, componente a componente, para obter o co-variante  $A_a$  vem  $A_r = g_{rr}A^r = (1)(1) = 1$ ,  $A_\theta = g_{\theta\theta}A^\theta = (r^2)(r) = r^3$ ,  $A_\phi = g_{\phi\phi}A^\phi = (r^2 \sin^2\theta)(0) = 0$ , pelo que:

$$A_a = (1, r^3, 0)$$

Para obter o contra-variante  $B^a$  o processo é exatamente o mesmo e vem, no final:

$$B^a = \left( 0, -1, \frac{\cot^2 \theta}{r^2} \right)$$

## 3.6 Curvatura e Tensor da Curvatura de Riemann

Finalmente, após introduzida a análise tensorial e as capacidades matemáticas que os tensores fornecem, chega o conceito e definição propriamente dita de curvatura, assim como os instrumentos que dão a garantia de que se está perante uma situação de espaço curvo ou não. De facto, a métrica permite definir a curvatura do espaço, caracterizar deslocamentos infinitesimais no espaço, mas antes disso é preciso assegurar que o espaço é realmente curvo. É aqui que entra o tensor da curvatura de Riemann, como se vai ver.

Para isso, é fundamental que tenha ficado bem assente o que é um espaço de Riemann e que os conceitos aprendidos ao longo do capítulo tenham ficado de tal forma consolidados, que sejam possíveis de imaginar. Um espaço de Riemann, como o espaço-tempo (na verdade é pseudo-Riemanniano porque admite  $ds^2 < 0$ , o que não acontece num espaço de Riemann rigoroso), não é de todo fácil de imaginar, talvez seja até impossível para o ser humano tal imaginação, pelo que existem simplesmente ideias resultantes da conceptualização e da tentativa de criar algo próximo à realidade. Contudo, podem inventar-se formas mais simples de descrever um espaço de Riemann. Pensando numa superfície suave, capaz de ser diferenciável, mas que seja mais ou menos curva, para que seja possível "sentir" a curvatura e envolvendo essa superfície com duas linhas de coordenadas de cores diferentes é tudo o que se precisa para imaginar um espaço de Riemann. Se uma dessas linhas representar um sistema de coordenadas, a outra representa um sistema de coordenadas diferente. Por ser um espaço de Riemann, associa-se um tensor métrico a qualquer ponto na superfície do espaço, isto é, cria-se um campo tensorial que gera um tensor para cada ponto do espaço, sendo que a métrica define a separação infinitesimal entre pontos vizinhos. É fundamental perceber que pelo espaço não ser plano, os coeficientes do tensor métrico e a representação das suas componentes vão variar de ponto para ponto, ou seja, não são constantes. Contudo, o interessante é que em cada ponto

deste espaço vai ser possível ter um vetor contra-variante e outro co-variante numa das linhas de coordenadas, com determinadas coordenadas, e através das transformações vistas passar para as coordenadas da outra linha de coordenadas. Esta é a vantagem principal de definir a geometria de um espaço em coordenadas gerais, nas quais se podem definir equações tensoriais verdadeiras em qualquer sistema de coordenadas (princípio da co-variância geral), embora as componentes dos tensores variem, e que podem primeiro garantir que o espaço é curvo, como se vai ver com o tensor de Riemann, e posteriormente medir quantidades físicas com o tensor métrico, por exemplo.

O tensor métrico já foi estudado, resta agora nesta secção explorar o tensor da curvatura de Riemann, outro tensor importantíssimo em diversos campos da física e que abriu caminho para várias ferramentas como as Equações de Campo de Einstein, ou o Tensor de Ricci que resulta do de Riemann, por contração. Na relatividade geral, por exemplo, onde já se analisa o espaço-tempo curvo devido à influência de matéria e energia, é fundamental ter um tensor que seja capaz de dizer se o espaço é efetivamente curvo ou não.

### 3.6.1 Curvatura

A fim de perceber os espaços curvos que têm vindo a ser introduzidos e saber definir qualquer curvatura, é fulcral assentar dois conceitos:

- **Geodésica:** Utilizada para calcular o movimento de partículas num espaço de Riemann, corresponde nesse espaço ao caminho mais curto entre dois pontos;
- **Tensor da Curvatura de Riemann:** Mede rigorosamente a curvatura de um dado espaço;

Regressando à métrica, a métrica é também importante para adquirir outro instrumento decisivo no estudo de curvatura, os coeficientes de conexão  $\Gamma$  entre pontos no espaço, que permitem comparar vetores nesses dois pontos. Em suma, com a métrica chega-se aos coeficientes de conexão e com estes em posse, torna-se possível relacionar tudo no espaço.

### 3.6.2 Coeficientes de Conexão

Nesta fase, a diferenciação é, do mesmo modo, importantíssima. Este processo não parece complicado à partida, no entanto, é preciso ter em conta que os versores no espaço curvo não são constantes, logo, diferenciar um vetor ou tensor no espaço curvo deixa de ser trivial.

No espaço plano, em coordenadas cartesianas, sofrem diferenciação apenas as componentes do tensor (incluindo vetores). Já no espaço curvo geral, os versores contra-variantes e co-variantes variam no espaço, como se sabe, são versores coordenados, isto é, definem-se em termos das derivadas das coordenadas. Por conseguinte, diferenciar um tensor implica diferenciar não só as componentes, mas também os versores. De facto, diferenciar versores é uma novidade e só é possível através dos coeficientes de conexão.

Imagine-se o vetor contra-variante  $\vec{V} = V^\alpha e_\alpha$ , de coordenadas  $x^\beta$ , A regra da derivada do produto diz que:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\alpha \frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (3.37)$$

Uma vez que os vetores de base também variarão e portanto, é de notar que, realmente, todos os termos sofrem diferenciação na Equação (3.37), tanto as componentes como os versores do  $\vec{V}$ . O que se tem em cima são derivadas parciais que representam a taxa de variação dessa componente e desse versor em função das coordenadas  $x^\beta$ . No caso particular dos versores passa-se a representar da seguinte forma (por exemplo, para um espaço 4D):

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^0 e_0 + \Gamma_{\alpha\beta}^1 e_1 + \Gamma_{\alpha\beta}^2 e_2 + \Gamma_{\alpha\beta}^3 e_3 \quad (3.38)$$

O que é que diz então cada coeficiente de conexão? É uma notação nova e muito útil. Em cada termo  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  subentende-se a taxa de variação das componentes de  $e_\alpha$  em função das coordenadas  $x^\beta$ , na direção do versor  $e_\gamma$ . Obviamente estes índices para cada caso vão tomar os valores das coordenadas respetivas ao sistema em que se estiver a trabalhar. A essência é perceber como funciona o mecanismo do coeficiente, que é identificar a variação de uma dada componente, em função de uma dada coordenada, na direção de um dado versor. Veja-se um exemplo prático a seguir para consolidar melhor este novo conceito.

O objetivo deste exemplo é calcular os coeficientes de conexão,  $\Gamma_{jk}^i$  no modo geral, para um espaço euclidiano 2D, em coordenadas polares. Ora, pelo enunciado do problema, sabe-se desde logo que as coordenadas que vão ocupar o lugar dos índices serão  $r$  e  $\theta$ , por se estar a trabalhar em coordenadas polares. Então, em primeiro lugar, expressa-se as coordenadas cartesianas em função das polares:

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$$

Neste caso considera-se o versor co-variante, logo a transformação dos versores será dada pela Equação (3.20), sendo que a transformação de um versor virá:

$$\mathbf{e}_{\alpha'} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} \mathbf{e}_{\beta}$$

Já se sabe que índices repetidos em cima e em baixo somam-se, logo:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_{\theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin\theta \mathbf{e}_x + r \cos\theta \mathbf{e}_y \end{cases}$$

Estão definidos os versores nas coordenadas polares em função da base cartesiana. Importa agora aplicar o conceito que se aprendeu nesta secção, a derivação dos próprios tensores em função das duas coordenadas do sistema, obtendo-se o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y = \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_{\theta}}{\partial r} = -\sin\theta \mathbf{e}_x - r \sin\theta \mathbf{e}_y = \frac{1}{r} \mathbf{e}_{\theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_{\theta}}{\partial \theta} = -r \cos\theta \mathbf{e}_x - r \sin\theta \mathbf{e}_y = -r \mathbf{e}_r \end{cases}$$

Agora estão explícitas todas as derivadas parciais necessárias e com um formato simples de perceber. Basta agora passar esse formato para o formato dos coeficientes de conexão intuitivamente, ficando:

$$\begin{cases} \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r = -r \\ \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{\theta r}^r = 0 \\ \Gamma_{rr}^{\theta} = \Gamma_{\theta r}^{\theta} = 0 \\ \Gamma_{\theta\theta}^{\theta} = 0 \end{cases}$$

No exemplo acima o raciocínio foi baseado no conhecimento *a priori* da relação entre as coordenadas cartesianas e polares. Há, contudo, um método mais expedito para o cálculo dos coeficientes de conexão, que parte da métrica de um certo espaço. Sendo assim, tendo a métrica disponível, os coeficientes de conexão

podem ser calculados da seguinte forma:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}g^{il} \left( \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (3.39)$$

Segue-se um exemplo prático, em (Collier, 2012), desta alternativa mais útil para calcular coeficientes de conexão. Desta vez, pretende-se calcular os coeficientes de conexão  $\Gamma_{jk}^i$  para um espaço 2D euclidiano, mas em coordenadas cartesianas.

Partindo do princípio fundamental desta equação para calcular coeficientes de conexão, atenta-se primeiro à métrica em questão, que por ser o espaço euclidiano em coordenadas cartesianas, tem como elemento de linha 2D:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Este exemplo é o mais simples possível, dado que a métrica e a métrica inversa são idênticas:

$$[g_{ij}] = [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por se tratar de uma métrica euclidiana em coordenadas cartesianas, em que as componentes da métrica são simplesmente constantes, as derivadas parciais irão dar zero obviamente pelo que todos os coeficientes de conexão serão nulos, uma vez que na Equação (3.39) existe sempre a multiplicação por termos que incluem essas derivadas parciais das componentes da métrica. Contudo, se as coordenadas fossem polares isto já não se verificava, porque em coordenadas polares, mesmo num espaço euclidiano, os versores da base não são constantes como nas coordenadas cartesianas. Consequentemente se o espaço for não-euclidiano, não há nenhum sistema de coordenadas que possa ter todos os coeficientes de conexão nulos, particularidade dos espaços de Riemann com curvatura. No euclidiano há pelo menos um sistema de coordenadas que consegue que todos os coeficientes sejam nulos, o cartesiano.

## 3.7 Diferenciação co-variante

Em primeiro lugar, é necessário clarificar que o termo co-variante na diferenciação não provém dos conceitos co-variante e contra-variante que já foram estudados, não há nenhuma relação. A palavra co-variante tem diversos significados

e neste caso a diferenciação é co-variante no sentido em que a derivada de um tensor dá outro tensor, "co-varia" a equação, isto é, mantém a validade da mesma.

Com efeito, com o conceito de diferenciação de um versor já adquirido, regressa-se agora à diferenciação total de um vetor contra-variante  $\vec{V} = V^\alpha e_\alpha$ , dada pela Equação (3.37). Se nessa equação se substituir o novo termo correspondente à derivada do versor com o coeficiente de conexão, fica:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} e_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma \quad (3.40)$$

Trocando os índices repetidos que subentendem um somatório em  $\alpha$  e em  $\gamma$ , neste caso  $\gamma$ , por  $\alpha$ , fica-se com a expressão (com a soma implícita em  $\alpha$ , pelo facto do índice estar em cima e em baixo) em função dos versores  $e_\alpha$ , que fica em evidência:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) e_\alpha \quad (3.41)$$

As componentes de  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta}$  são então dadas por:

$$\left( \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \right) \quad (3.42)$$

A expressão acima é conhecida como a derivada co-variante, nesse caso de um vetor contra-variante, e é denotada por  $\nabla_\beta V^\alpha$ :

$$\nabla_\beta V^\alpha = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \quad (3.43)$$

No caso da derivada co-variante de um vetor co-variante vem:

$$\nabla_\beta V_\alpha = \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - V_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \quad (3.44)$$

Repare-se que os casos vistos anteriormente são os casos simples dos vetores. Logo, no caso dos tensores de maior ordem a expressão irá ter mais termos e o crescer desses termos segue um padrão, de tal modo que:

- Fazer a derivada parcial do tensor;
- Por cada índice superior somar  $\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$ ;
- Por cada índice inferior, subtrair  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ ;

Exemplificando, a derivada co-variantes do tensor  $X_\nu^\mu$  é:

$$\nabla_\beta X_\nu^\mu = \frac{\partial X_\nu^\mu}{\partial x^\beta} + X_\nu^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - X_\alpha^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \quad (3.45)$$

Para outros tipos de tensores, basta seguir as regras e fica intuitivo de encontrar as derivadas co-variantes.

### 3.8 Transporte Paralelo de Vetores

O transporte paralelo de vetores constitui-se como vital no domínio da ideia de curvatura. Num espaço intrinsecamente plano, ao se transpor um vetor ao longo de um circuito fechado, observar-se-á que este irá terminar o percurso paralelo ao vetor inicial, ou seja, como o espaço é plano, ao percorrer um caminho, um vetor mantém sempre as suas características, é sempre igual ao original, porque o espaço assim o permite.

O mesmo fenómeno não se pode observar em espaços curvos. Nesses espaços, o vetor transportado vai mudar de direção ao longo do espaço. Nunca se consegue que durante o transporte os vetores, inicial e final, fiquem paralelos, por mais que se tente, porque a natureza do espaço acaba sempre por influenciar a direção do vetor, mesmo que em deslocamentos infinitesimais isso seja possível.

A superfície esférica, como espaço de Riemann, permite observar o transporte paralelo de um vetor num espaço curvo através de um circuito fechado arbitrário traçado na sua superfície, como se pode ver na Figura 3.3.

Como se pode constatar pela imagem, de facto, o vetor termina o seu circuito com direção bastante diferente da inicial. Assim, para entender não só visualmente, mas também matematicamente o transporte paralelo do vetor, deve recordar-se o conceito de curva parametrizada e o respetivo vetor tangente.

Seja  $\lambda$  o parâmetro dessa curva. O vetor tangente terá componentes gerais, em 3D:

$$V^\beta = \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left( \frac{dx^0}{d\lambda}, \frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda} \right) \quad (3.46)$$

Nesta fase vão comparar-se dois vetores, para depois mais à frente dizer que o objetivo é que estes sejam o mais idênticos possíveis. Logo inicialmente, este vetor tangente passar-se-á a denominar  $\vec{U}$ . Considera-se então esse mesmo vetor o vetor tangente a uma curva em pontos sucessivos e  $\vec{V}$  um vetor que se tenta

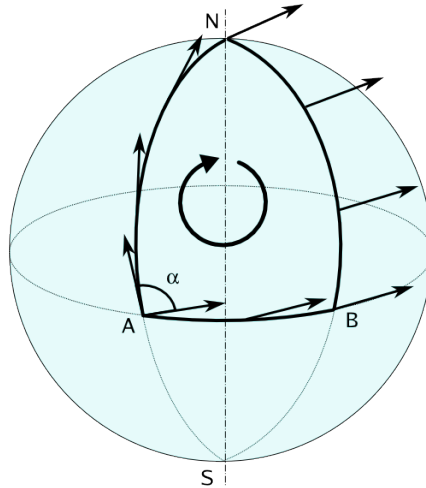


FIGURA 3.3: Transporte Paralelo de um Vetor num Espaço Curvo. Figura retirada do website Wikimedia Commons<sup>7</sup>a 14 de abril de 2020.

transportar paralelamente ao longo da curva em pontos também sucessivos. Na Figura 3.4 é possível ver o vetor  $\vec{U}$  a azul e o vetor  $\vec{V}$  a vermelho.

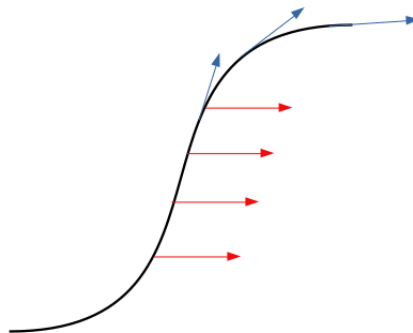


FIGURA 3.4: Transporte Paralelo de um Vetor  $\vec{V}$  numa Curva de Vetor Tangente  $\vec{U}$

Agora imagine-se que se quer transportar então o vetor  $\vec{V}$  o mais paralelamente possível ao longo da curva parametrizada, como é suposto. Nesse caso, é certo que o vetor terá de manter sempre as suas características, ou seja, não pode variar nem em magnitude nem em direção durante o percurso. A única forma de se manter um vetor sempre constante é garantir que a sua derivada, ou seja, a sua

<sup>7</sup>Website Wikimedia Commons: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel\\_transport.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parallel_transport.png)

taxa de variação ao longo do parâmetro, seja nula. Logo:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = 0 \quad (3.47)$$

Antes de igualar a zero, é necessário diferenciar o vetor e por se tratar de um vetor em espaço curvo, recorre-se à Equação (3.37), na qual se deriva a componente do vetor e o versor. A coordenada geral  $x^\beta$  é agora substituída por um parâmetro  $\lambda$ , visto ser em ordem a esse parâmetro que se vai derivar o vetor  $\vec{V}$  (dado ser o que nos transporta ao longo da curva). Portanto:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \frac{d\mathbf{e}_\alpha}{d\lambda} \quad (3.48)$$

É de notar que as derivadas passaram a ser ordinárias e não parciais, naturalmente pelo facto do vetor  $\vec{V}$  ser só função de  $\lambda$ , ao longo do percurso desta curva. Com efeito, é preciso ter em conta a função composta subentendida e derivar nesse pressuposto. Começando pela derivada do versor virá:

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (3.49)$$

O termo  $\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\beta}$  pode ser substituído pelo coeficiente de conexão e fica-se com:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} \mathbf{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{dx^\beta}{d\lambda} \mathbf{e}_\gamma \quad (3.50)$$

Tal como se fez na Equação (3.41) troca-se os índices  $\alpha$  por  $\gamma$  com o propósito colocar o versor  $\mathbf{e}_\alpha$  em evidência:

$$\frac{d\vec{V}}{d\lambda} = \left( \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \mathbf{e}_\alpha \quad (3.51)$$

A expressão entre parêntesis é a componente da derivada do vetor  $\vec{V}$ , à qual se chama derivada absoluta e é precisamente essa componente que tem de ser nula se queremos impôr o "deslocamento paralelo". Quando se trata de uma derivada absoluta a notação passa a ser  $\frac{DV^\alpha}{d\lambda}$ . A derivada composta afeta também a componente de  $\vec{V}$ , logo, não esquecer que:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{DV^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (3.52)$$

No final tem-se:

$$\frac{DV^\alpha}{d\lambda} = \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dV^\alpha}{dx^\beta} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{dV^\alpha}{d\lambda} + V^\gamma \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad (3.53)$$

Igualando a Equação (3.53) a zero, define-se o transporte paralelo de  $\vec{V}$  ao longo de uma curva de vetor tangente  $\vec{U}$ .

### 3.9 Geodésicas

A definição de geodésica, como caminho mais curto possível entre dois pontos num espaço curvo, não é novidade. Numa superfície esférica, por exemplo, este caminho não será uma qualquer linha, mas sim um arco de curva de uma linha equatorial que passe pelos dois pontos.

Tendo em conta os conceitos vistos anteriormente de vetor tangente e transporte paralelo de vetores ao longo de uma curva, conclui-se que ao imaginar uma geodésica tenciona-se que o vetor tangente seja sempre o mais paralelo possível ao anterior e assim sucessivamente. Resumidamente, procura-se que os dois vetores diferentes sejam agora apenas um, isto é, para que um arco de curva seja de facto uma geodésica, o vetor tangente tem de ser igual ao vetor transportado paralelamente, ou seja, definimos uma geodésica como sendo a curva, entre dois pontos dados, ao longo da qual o vetor tangente no ponto inicial sofre um transporte paralelo ao longo do seu percurso, até ao ponto final.

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = V^\alpha \quad (3.54)$$

Substituindo  $\vec{U}$  na Equação (3.53) anterior, agora com coordenadas  $x^\alpha$ , e igualando a zero, fica, com  $V^\gamma = \frac{dx^\gamma}{d\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \frac{DU^\alpha}{d\lambda} &= \frac{dU^\alpha}{d\lambda} + v^\gamma \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{DU^\alpha}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{DU^\alpha}{d\lambda} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \end{aligned}$$

A expressão final do desenvolvimento anterior é a equação que define a geodésica, que pode ser escrita de duas formas:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} = 0 \quad (3.55)$$

Estando subentendido os somatórios em  $\gamma$  e em  $\beta$ . Já se sabe do início deste capítulo que o número de dimensões em que se trabalha determina os valores que podem tomar os índices e para provar que a equação de facto funciona, vai-se de seguida dar o exemplo de uma geodésica numa superfície esférica. As geodésicas nas superfícies esféricas só podem ser os seus círculos máximos como a linha do equador ou os meridianos, no caso do planeta Terra. Por conseguinte, parte desses círculos máximos também são geodésicas, porque representam na mesma o caminho mais curto.

Seja então, por exemplo, um troço de um meridiano, numa esfera hipotética de raio unitário, compreendido entre a linha do equador ( $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 0$ ) e o polo norte ( $\theta = 0, \phi = 0$ ). As coordenadas esféricas para duas dimensões serão  $\theta$  e  $\phi$ , valores que os índices podem tomar. Para se verificar as condições deste arco de meridiano na Equação (3.55) primeiro é necessário obter os coeficientes de conexão para esta superfície, que são todos nulos à excepção de:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left( \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\phi} + \frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial x^\phi} - \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} \right) = \\ &= -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} = -\frac{1}{2} \times 1 \times 2 \sin \theta \cos \theta = -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \left( \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} + \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\phi} - \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\phi} \right) = \frac{1}{2}g^{\phi\phi} \frac{\partial g_{\phi\phi}}{\partial x^\theta} = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \times 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta \end{aligned}$$

Para ( $i = \theta, j = \phi, k = \phi$ ), vem:

$$\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\phi\phi}^\theta \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{d^2\theta}{d\lambda^2} - \sin\theta\cos\theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0$$

Para  $(i = \phi, j = \theta, k = \phi)$ , usando agora letras latinas para os índices, vem:

$$\frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + \Gamma_{\phi\theta}^{\phi} \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} + 2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0$$

No início do desenvolvimento o coeficiente de conexão gerou dois termos devido ao somatório subentendido dos índices, já referido várias vezes ao longo do capítulo. Agora o arco de meridiano tem de ser parametrizado e usamos o ângulo  $\theta$  como esse parâmetro,  $\theta = \lambda$ , ficando  $0 \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$  e  $\phi = 0$ . Deste modo,  $\frac{d\theta}{d\lambda} = 1$  e  $\frac{d^2\theta}{d\lambda^2} = \frac{d^2\phi}{d\lambda^2} = \frac{d\phi}{d\lambda} = 0$  pelo que tanto o lado esquerdo como o direito das equações anteriores são iguais a zero, ou seja, as condições impostas por um arco de meridiano tornam a equação da geodésica verdadeira. Logo, qualquer porção de um meridiano ou da linha do equador ou de um círculo máximo é, no geral, uma geodésica.

Uma boa experiência, para se confirmar o que acontece com círculos menores, é trocar as condições impostas às coordenadas e fazer com as condições de um círculo que não seja máximo, um círculo que esteja a meio caminho entre o equador e os pólos, por exemplo, neste caso substituindo as condições, para os valores de  $\theta$  e  $\phi$  que definem esse círculo, na equação, verificar-se-á que os dois lados não vão ser nulos, não se tratando assim de uma geodésica.

É por esta razão que, no mundo real, se usam geodésicas para traçar o rumo de uma grande navegação oceânica ou aérea. De certa forma, ao se percorrer uma distância tão vasta do globo, é impossível evitar a curvatura do espaço e por essa razão, encontrar a melhor geodésica que se aproxime do percurso que se quer fazer é sempre a solução.

### 3.10 Tensor da Curvatura de Riemann

Ainda que se tente, num espaço curvo, ao transportar um vetor deslocamento infinitesimal a deslocamento infinitesimal, num percurso fechado, nunca se consegue que o vetor final seja igual ao inicial, é um facto. Portanto, vai-se antes usar a variação que o vetor teve ao longo do transporte, para a medir a curvatura do espaço. Ou seja, o grau de variação que o vetor sofre tem relação com a curvatura. A grandeza que resulta por medir essa curvatura é o tensor de Riemann. Toda a informação sobre a curvatura de um espaço está neste tensor e basta que este tensor não seja nulo num ponto (e também não será nulo na sua vizinhança, já que o espaço é diferenciável), o espaço passa automaticamente a ser curvo. Se for zero na vizinhança de algum ponto, nessa vizinhança em particular o espaço é plano.

O tensor da curvatura de Riemann  $R_{ijk}^l$  é dado, com somatório subentendido, por:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{mj}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{mk}^l \quad (3.56)$$

O tensor de Riemann é uma mistura de várias derivadas e coeficientes de conexão, pelo que obviamente vai gerar inúmeras componentes, o que torna a visualização complicada. Contudo, goza de algumas propriedades que podem ajudar a simplificar, como:

- Assim como os coeficientes de conexão, o tensor de Riemann deriva da métrica;
- Os índices  $i, j, k, l, m$  representa as coordenadas de um espaço n-dimensional, logo tomam os valores das coordenadas do espaço em questão,  $x, y, z$  por exemplo;
- Com a aplicação do tensor métrico, contrai-se o tensor e um dos índices desce:  $R_{hijk} = g_{hl} R_{ijk}^l$ ;
- Devido às simetrias  $R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l$  e  $R_{hijk} = R_{jkhi} = -R_{hikj} = -R_{ihjk}$ , consegue reduzir-se o número de componentes, que com o aumentar das dimensões fica enorme. Por exemplo, as componentes correspondem sempre a  $n^4$  com  $n$  dimensões (porque para cada dimensão há sempre 4 combinações que o tensor pode tomar, uma vez que vamos variando cada índice e atribuindo as coordenadas possíveis, consoante a dimensão). Devido às simetrias, o número de componentes independentes desce e ficam apenas, por exemplo, uma em 2D, seis componentes em 3D e vinte em 4D;
- Os últimos dois termos têm índices iguais em posições opostas que serão somados em todos os seus valores possíveis;

A partir do tensor de Riemann, por contração, pode obter-se o tensor de Ricci e seguidamente o escalar de Ricci, que são úteis sobretudo na Relatividade Geral, mas aqui não são necessários.



# Capítulo 4

## Propagação do Som na Água - Perspetiva Clássica e Perspetiva Tensorial

### 4.1 Enquadramento Teórico

O enquadramento teórico, pode dizer-se, que já foi sendo construído ao longo dos capítulos anteriores. De certa forma, foram, gradualmente, estabelecidos os meios e instrumentos necessários que explicam e sustentam as teorias e metodologias que irão ser expostas nesta fase. Inicialmente foi revista a teoria de ondas, na sua forma mais básica e de seguida, foram introduzidos conceitos basilares na estruturação da teoria alternativa que se pretende defender, a da aplicação da análise tensorial.

Portanto, após dedução da equação de onda mais vulgar, a 1D, no Capítulo 1, pretende-se agora fazer a passagem para o meio de interesse neste trabalho, a água, que é nada mais nada menos que um fluido. Recorrendo, primeiro, aos métodos clássicos de estudo da acústica e principalmente da aproximação geométrica, vai-se, com base em referências como os livros<sup>1</sup> de Landau e Lifshitz, (Landau & Lifshitz, 1987), e o já referenciado de Kinsler, (Lawrence et al., 1982), deduzir novamente a equação de onda, mas neste caso, da onda acústica num fluido, a 3D e mais importante ainda, a equação dos raios acústicos. Para um melhor entendimento de algumas das demonstrações matemáticas que vão sendo feitas ao longo das diversas secções, nomeadamente ao nível da dedução e simplificação das equações da mecânica dos fluidos e da sua interligação com os métodos de geometria diferencial a partir do operador diferencial de 2º ordem, deve consultar-se o Apêndice A, onde

---

<sup>1</sup>Landau e Lifshitz, *Fluid Mechanics : Volume 6 (Course of Theoretical Physics)* (1987).

se encontram os procedimentos de uma forma mais detalhada. Por forma a mostrar o enquadramento de tais teorias, em casos práticos, preferenciais nos últimos tempos, ao nível dos estudos e projetos científicos, será feita uma referência a algumas metodologias existentes e adotadas, concebidas a partir de conceitos clássicos.

Em contraste a essas metodologias, será, a seguir, feita a ponte entre a análise tensorial, inspirada na relatividade, e a acústica submarina, dando lugar a uma teoria e metodologia prática diferente, já estudada outrora, mas que aqui terá como principal referência o trabalho desenvolvido e diga-se, completo, no livro<sup>2</sup> muito recente do autor David Bergman (D. R. Bergman, 2018). Já em 2005, o mesmo autor tinha escrito um relatório (D. Bergman, 2005) sobre a aplicação da geometria diferencial à acústica submarina, a partir da noção de desvio da geodésica dos estudos relativistas. Contudo, no livro mais recente, pode encontrar-se uma abordagem mais geral e completa.

### 4.1.1 Teoria Clássica de Ondas em Fluidos

#### Comportamento de um fluido clássico

Em primeiro lugar, é necessário descrever as condições em que se quer o fluido, neste caso a água, para que seja possível deduzir os resultados que se verão mais à frente. Consideram-se portanto algumas características que simplificam o desenvolvimento matemático. O objetivo é procurar a linearização das várias equações, até à equação de onda, por forma a ser mais fácil encontrar uma possível solução.

Antes de mais, todas as considerações assentam no pressuposto de que o meio é contínuo, razão pela qual existe propagação. Pensar num meio contínuo é pensar num elemento de volume com tamanho suficiente, que seja capaz de envolver um número enorme de moléculas. Ainda assim, essa amostra de água não pode ser demasiado grande, de modo a que algumas variáveis acústicas deixem de ser constantes, o que tornaria impossível partir de algumas assunções. Generalizando, a intenção é tratar um elemento de volume pequeno como uma entidade que não se altera macroscopicamente, apesar de haver movimento de moléculas no seu interior (Lawrence et al., 1982). Consequentemente, o foco será analisar os deslocamentos e velocidades das partículas, derivadas de oscilações pequenas, seguidas da propagação de ondas acústicas, no meio aquático.

Considera-se então o fluido invíscido (viscosidade zero) e todos os processos adiabáticos, isto é, não ocorrem trocas de calor entre os elementos do fluido e por

---

<sup>2</sup>Bergman, *Computational Acoustics: Theory and Implementation* (2018)

consequente, a entropia também se mantém constante. Trata-se portanto de um fluido ideal. Para além disso, o estudo restringe-se às oscilações pequenas, ou seja, de pequena amplitude. A descrição do fluido abrange três equações importantíssimas, que envolvidas, levam à equação de onda. São elas, a equação de estado, a equação da continuidade e a equação de Euler.

### Das Equações Clássicas da Mecânica dos Fluidos à Equação de Onda Linear

A equação de estado de um fluido está relacionada com as forças internas de restauração face às deformações causadas pela oscilação das partículas, dando a relação entre a pressão e a densidade. Primeiro é necessário descrever as variações que ocorrem nessas variáveis, devido às perturbações associadas à propagação das ondas sonoras. A pressão instantânea  $p$  num ponto é então dada pela soma da eventual variação de pressão  $p_1$  à pressão constante de equilíbrio  $p_0$ .

$$p = p_0 + p_1 \quad (4.1)$$

Igualmente, a densidade instantânea  $\rho$  é dada por uma soma semelhante.

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (4.2)$$

Como já foi referido, o fluido considera-se ideal. Logo, a equação de estado relaciona uma pequena variação de pressão  $p_1$  com uma pequena variação de densidade  $\rho_1$  da seguinte forma:

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \rho_1 \quad (4.3)$$

O índice inferior  $s$  na Equação (4.3) indica que o fluido é adiabático. No que toca à equação de continuidade, a relação que se define é entre o movimento do fluido e as suas sucessivas compressões e dilatações. Assim, pretende-se relacionar a velocidade do fluido  $\vec{v}$  com a sua densidade instantânea  $\rho$ . Imagine-se um elemento de volume  $dV$  fixo no espaço, um elemento da água, diga-se. Esse elemento será atravessado por um outro elemento do fluido se houver movimento e é certo que, a taxa de massa que flui para dentro desse volume, tem de ser igual à taxa com que a massa, dentro do próprio elemento, aumenta. Assumindo que se está em 3D, tendo

em conta o influxo de massa em todas as direções, o influxo total será:

$$- [\nabla \cdot (\rho \vec{v})] dV \quad (4.4)$$

Por sua vez, a taxa de aumento de massa dentro do volume é  $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ . Logo, igualando, tem-se a equação da continuidade, ainda não linear:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.5)$$

Em último lugar deduzir-se-á a equação de Euler que descreve a força aplicada num elemento segundo a 2ª Lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , ou noutra notação,  $d\vec{f} = \vec{a}dm$ . A força resultante, em todas as direções, aplicada num elemento infinitesimal, é:

$$d\vec{f} = -\nabla p dV \quad (4.6)$$

Quanto à aceleração, também com todas as componentes e direções, derivando a velocidade em função do tempo e do espaço, tem-se:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad (4.7)$$

Aplicando os resultados anteriores à 2ª Lei de Newton, a equação de Euler, não linear, fica:

$$-\nabla p = \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] \quad (4.8)$$

Obtidas as três equações que definem a mecânica de um fluido, é necessário proceder a algumas simplificações, dado que as formas apresentadas são não lineares e é intenção que se tornem lineares, para ser simples encontrar uma solução possível. Como já se sabe, uma onda sonora é a propagação de uma oscilação num fluido compressível, causando neste sucessivas zonas de compressão e rarefação. Assumindo essas oscilações pequenas, como foi feito logo à partida, pode concluir-se também que a velocidade das partículas do fluido  $v$  é pequena, bastante inferior à do som, o que permite simplificar de imediato a equação de Euler, esquecendo o termo não linear  $\vec{v}(\nabla \cdot \vec{v})$ . Também a assunção inicial de que as variações de pressão e densidade são igualmente pequenas, face às constantes de equilíbrio, permite simplificar a equação da continuidade. Com efeito, a equação de Euler simplificada vem:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot p_1 = 0 \quad (4.9)$$

E a equação da continuidade, simplificada, vem:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \vec{v} = 0 \quad (4.10)$$

A equação de estado, de trás, permite simplificar ainda mais as anteriores, dado que ainda estão presentes três funções desconhecidas,  $\vec{v}$ ,  $p_1$  e  $\rho_1$ . As duas últimas relacionam-se na equação de estado e passa a escrever-se a equação da continuidade do seguinte modo:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_0} \right)_s \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.11)$$

No final, com apenas duas funções desconhecidas,  $\vec{v}$  e  $p_1$ , têm-se todas as condições reunidas para descrever o movimento das partículas de água, através da equação de onda linear. As duas funções anteriores podem ainda ser escritas numa só, introduzindo a noção de potencial de velocidade  $v = \nabla \psi$ , de tal forma que, de acordo com a equação de Euler simplificada, a Equação (4.9), se tem:

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4.12)$$

É importante notar que, por aproximação e para simplificar, a partir de agora, como se pode ver já na expressão anterior, escrever-se-á  $\rho$ , sem o índice inferior. A equação de onda linear vem então:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (4.13)$$

em que a velocidade do som, num fluido que se considere adiabático, é dada por:

$$c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s} \quad (4.14)$$

Na nova expressão para a equação de onda, Equação (4.13), é fácil perceber que através do gradiente e através da diferenciação em função do tempo, consegue-se que, tanto todas as componentes da velocidade  $\vec{v}$ , como a pressão  $p_1$  e a densidade  $\rho_1$ , satisfaçam também a mesma equação de ondas.

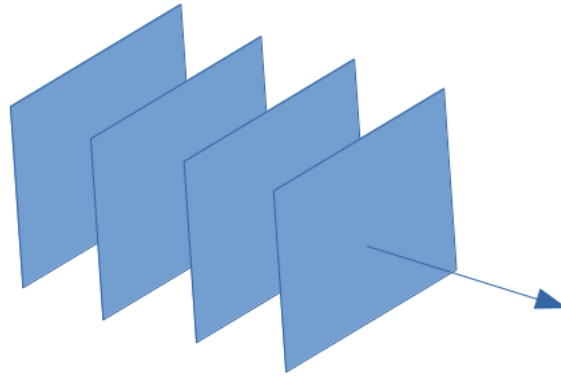


FIGURA 4.1: Onda plana.

### Solução da Equação de Onda Plana

Na realidade, as ondas podem ser de vários tipos e bastante complicadas, mas para analisar e estudar uma solução para a equação, imaginar-se-á uma onda plana monocromática. Apesar de ser o caso mais simples de onda que existe, constitui-se, ainda assim, como um exemplo fundamental para o estudo de fenómenos ondulatórios, como se verá mais à frente. A onda plana monocromática caracteriza-se pelo facto das suas frentes de onda, superfícies de fase constante, serem sempre paralelas entre si, e portanto, perpendiculares à direção de propagação (isto para fluídos em repouso), ao longo de todo o espaço e também de ter uma só frequência. Na verdade, a fase de cada variável acústica é constante no plano perpendicular à direção de propagação, dada pelo vetor de onda  $\vec{k}$ , que é sempre constante nas ondas planas. Verdadeiramente as ondas não são deste tipo e acabam por ter várias frequências, o que complicaria a sua abordagem. Deste modo, apesar de simples, o caso particular das ondas monocromáticas será escolhido, mais à frente, porque é de extrema importância. Efetivamente, uma onda mais complicada, pode ser decomposta em várias ondas monocromáticas com diferentes vetores de onda e frequências, ou seja, somando várias ondas harmónicas de uma só frequência, que não passam de simples senos e cossenos, obtém-se a onda original. Este processo advém da análise de Fourier, em que normalmente se tem uma onda original e se procede à sua expansão em várias componentes, monocromáticas ou de Fourier, por forma a simplificar a análise do problema.

No geral, considera-se uma onda plana quando se pode escolher um único eixo perpendicular às frentes de onda, que são planas e infinitas, como se pode ver na Figura 4.1.

O mais usual, em demonstrações, é atribuir a esse eixo perpendicular o eixo dos  $xx$ , e todas as variáveis acústicas passam a ser funções de uma só coordenada espacial, a coordenada  $x$ . Deste modo, a corrente é homogénea no plano  $zy$  e a equação de onda simplifica bastante e fica com o seguinte aspeto.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (4.15)$$

De facto, na equação anterior, o potencial de velocidade  $\phi$  passa a ser função espacial exclusivamente de  $x$ . Faça-se agora as seguintes mudanças de variável:

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases}$$

Com a aplicação dessas variáveis à Equação (4.15), o formato da equação será algo do tipo  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \xi} = 0$ . Integrando, por exemplo, em função de  $\xi$ , fica  $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = F(\eta)$ , uma função de  $\eta$ . Integrando de novo, descobre-se que o potencial de velocidade toma a forma:

$$\psi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (4.16)$$

As funções  $f_1$  e  $f_2$  são arbitrárias e podem ser de vários tipos. A existência das duas, uma em que se subtrai  $ct$  e outra em que se soma, é simples de entender, é devido ao facto de ser uma descrição total do movimento, no sentido positivo e negativo do  $x$ , neste caso particular em que é esse o eixo que determina a direção de propagação. Qualquer uma das variáveis acústicas, seja a pressão, velocidade ou densidade, vai-se comportar de acordo com uma função deste género e ter um valor que se repete ao longo do tempo, numa distância  $ct$  da origem espacial. Há, por isso, um certo padrão de movimento que é "transportado" ao longo da água, na direção de  $x$ , à velocidade do som  $c$ . É esse o fenómeno que é tradicional chamar de propagação de uma onda.

As ondas sonoras, em fluidos, são longitudinais, ou seja, as partículas vibram a uma velocidade com direção igual à da propagação. No caso específico que está a ser analisado, a única componente do gradiente da velocidade que não é nula é a componente  $v_x$ , pelo que, generalizando, numa onda plana que se propague na direção do eixo dos  $xx$ , a velocidade do fluido  $v$  é dada por  $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Demonstrações de Landau e Lifshitz (Landau & Lifshitz, 1987) permitem concluir que essa velocidade, em condições de equilíbrio de pressão e temperatura, se relaciona com a

densidade e a pressão da seguinte forma:

$$v = \frac{c\rho'}{\rho} \quad (4.17)$$

Para além disso, mostram também que a velocidade do som nos líquidos é dada, por:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R_T}{\mu} \rho_0} \quad (4.18)$$

Em que, a título de curiosidade,  $R_T$  é a constante de lei dos gases,  $\gamma$  o quociente de calores específicos e  $\mu$  o peso molecular.

Voltando às funções que são solução da equação de onda linear, um dos casos mais importantes, por ser mais simples e por ser usado, em sistemas lineares, como base de síntese de Fourier de ondas mais complicadas, são as ondas harmónicas, como já foi referido. Neste caso, todas as quantidades faladas, as variáveis acústicas, são funções harmónicas ou periódicas do tempo, o que permite que a solução de onda seja do tipo sinusoidal, representável por exponenciais complexas por conveniência matemática. Uma vez que a equação de onda foi escrita em termos do potencial de velocidade  $\psi$ , vem a seguinte possibilidade de solução:

$$\psi = \text{Re} \left\{ \bar{A} e^{[-i\omega(t - \frac{x}{c})]} \right\} \quad (4.19)$$

Como sabemos, assume-se apenas a parte real da função complexa, tal como é mostrado na Equação (4.20). O exemplo dado é ainda considerando uma onda plana a propagar-se no sentido positivo do eixo dos  $xx$ , ou seja, uma função do tipo  $f(x - ct)$ . Na expressão, o  $\bar{A}$  é a amplitude complexa, dado que ainda se está a representar toda a função complexa, de onde se vai retirar apenas a parte real. Negligencia-se então a parte imaginária e a solução, vem no final:

$$\psi = A \cos \left( \omega \frac{x}{c} - \omega t + \alpha \right) \quad (4.20)$$

$A$  é a amplitude da onda e tudo o que está dentro do cosseno é a chamada fase da onda, sendo  $\alpha$  a fase inicial e  $\omega$  a frequência angular. No caso geral, em que a onda não se propaga apenas segundo uma coordenada, define-se um vetor unitário  $\hat{n}$  do vetor  $\vec{k}$  que dá a direção de propagação, normal às frentes de onda. Nos casos mais triviais, incluindo as ondas planas, o versor  $\hat{n}$  genericamente dá sempre a direção da propagação. Contudo, em situações extraordinárias, isso pode

não acontecer. Esses casos não são importantes agora (mas são importantes quando há correntes, por exemplo). O vetor  $\vec{k}$  assume-se:

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n} \quad (4.21)$$

A magnitude do vetor  $\vec{k}$  é o número de onda, característica fundamental das ondas para cada componente harmónica. Como todos os vetores, o vetor onda decompõe-se em várias componentes, de acordo com as dimensões que forem consideradas, e portanto:

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (4.22)$$

Com o vetor onda definido, já é possível definir a solução de onda final, que contempla todas as direcções de propagação possíveis. A solução de uma onda harmónica plana é então:

$$\psi = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (4.23)$$

As frentes de onda, superfícies de fase constante, são dadas por  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  constante e  $\left[\frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}, \frac{k_z}{k}\right]$  são os cossenos direccionais de  $\vec{k}$ , em relação a cada um dos eixos cartesianos.

Habitualmente, este tipo de ondas que se têm vindo a estudar, ondas harmónicas planas, são também chamadas de monocromáticas (não implica que todas as ondas planas sejam monocromáticas), derivado do facto de a sua vibração ser em torno de uma só frequência. Verdadeiramente as ondas não são deste tipo e acabam por ter várias frequências, o que complicaria a sua abordagem. Deste modo, apesar de simples, o caso particular das ondas monocromáticas é escolhido porque é de extrema importância. Efetivamente, uma onda mais complicada, pode ser decomposta em várias ondas monocromáticas com diferentes vetores de onda e frequências, ou seja, somando várias ondas harmónicas de uma só frequência, que não passam de simples senos e cossenos, obtém-se a onda original. Este processo advém da análise de Fourier, em que normalmente se tem uma onda original e se procede à sua expansão em várias componentes, monocromáticas ou de Fourier, por forma a simplificar a análise do problema.

## Grupos de Ondas e Velocidade De Grupo

Considere-se agora um grupo de ondas, numa dada região do fluido. A situação aqui vai ser ligeiramente diferente. Assume-se que as várias ondas têm frequências que não fogem muito da média que será  $\omega_0$ . Da mesma maneira o

número de onda médio será  $k$ . Na realidade, o que se tem é uma sobreposição das várias ondas, em que cada onda é puramente monocromática sinusoidal, com a forma:

$$\psi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \quad (4.24)$$

Já que a expressão anterior é apenas uma das componentes do grupo todo, resultante da decomposição de Fourier, a solução mais geral, para um  $\vec{k}$  médio, será:

$$\psi = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})f(\vec{r})} \quad (4.25)$$

A expansão da função  $f(\vec{r})$  como um integral de Fourier contém todas as componentes monocromáticas e como, tanto a frequência como o vetor onda variam muito pouco em torno de um número médio, pode dizer-se que cada componente terá, no geral, num dado instante, com frequência  $\omega(\vec{k} + \Delta\vec{k})$ , o seguinte aspeto:

$$\psi_k = Ae^{i(\vec{k}+\Delta\vec{k})\cdot\vec{r}-i\omega(\vec{k}+\Delta\vec{k})t} \quad (4.26)$$

Por se admitir que a variação de  $\vec{k}$  e  $\omega$  é pequena entre as ondas,  $\Delta\vec{k}$  é de tal maneira pequeno que se recorre à aproximação  $\omega(\vec{k} + \Delta\vec{k}) \cong \omega + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\right) \cdot \Delta\vec{k}$  e fica-se com:

$$\psi_k = e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)f\left(\vec{r}-t\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\right)} \quad (4.27)$$

A função  $f$  é exatamente a mesma, só que passa a ter em consideração o decorrer do tempo, sendo que a distribuição de amplitude moveu-se a uma distância  $t\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}$ , que está a ser subtraída ao vetor posição na Equação (4.27), dado ser a variação temporal desse vetor, como se verá mais à frente. O conceito de velocidade de grupo é também muito referenciado na teoria das ondas, ao nível da ótica e da acústica e é dado, finalmente, para um  $\vec{k}$  médio, por:

$$U = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} \quad (4.28)$$

Generalizando, esta fórmula dá a velocidade de propagação de um grupo de ondas, a partir da dependência de  $\omega$  do vetor  $\vec{k}$ . Se a velocidade do som  $c$  for constante, naturalmente  $U = \frac{\omega}{k} = c$ , que é sempre o caso mais simples, tal como na abordagem por raios, em vez de ondas, no caso em que a propagação se dá por meras linhas direitas. Contudo, os diversos casos que constituem o mundo físico real estão repletos de situações, derivadas de vários fenómenos, que não são assim tão

triviais, podendo mesmo ocorrer o caso de que, para uma função arbitrária  $\omega(\vec{k})$ , a direção de propagação não seja a mesma que a do vetor onda  $\vec{k}$ . É, sem dúvida, complicado pensar nestes casos, mais abstratos, mas deve deixar-se a ressalva, de que pode acontecer. Um dos casos, relativamente simples, que serve de exemplo para tais fenómenos é o que será abordado na próxima secção. Trata-se de um fluido em movimento uniforme, em que a sua velocidade certamente irá ter uma contribuição na frequência, ou seja, é um exemplo de uma dependência mais complicada de  $\omega$  em  $k$ .

### Propagação do Som no Meio Aquático Com Movimento

Nas secções anteriores foi explicitada e detalhada a teoria de ondas mais elementar. Porém, os resultados obtidos resultam de um desenvolvimento sempre assente no pressuposto de que o fluido, a água, se considera quase estático, não tem corrente de fundo associada, o que facilita os cálculos. Naturalmente que na realidade, no mar, a propagação de sons emitidos, naturalmente ou pelo homem, não vai ser uma propagação em águas praticamente imóveis. Há sempre fenómenos como as correntes marítimas, por exemplo, que podem ter grandes velocidades. Nesse sentido, nesta secção, pretende-se rever, também com base nos métodos clássicos apresentados na literatura, (Landau & Lifshitz, 1987) por exemplo, as ferramentas usadas para ampliar um pouco os cenários a considerar, introduzindo o movimento no fluido, uma corrente, neste caso. Todavia, os princípios teóricos que se seguem apresentam ainda simplificações, na medida em que se restringem a correntes de velocidade constante, ou seja, só podem ser aplicados para estudar a propagação de um som, num fluido em movimento uniforme (que raramente é o que acontece no mar), embora possam ser generalizados para fluidos com velocidades variáveis.

A famosa relação que tem vindo a ser utilizada,  $\omega = ck$ , apenas é válida nas condições anteriores, isto é, na propagação de uma onda monocromática num meio em repouso. Daqui em diante, passa a considerar-se um fluido homogéneo, mas que se move ao longo do tempo. Neste contexto, é a corrente da água que interessa considerar. Seja a velocidade constante dessa corrente a velocidade  $\vec{u}$ . Assume-se então um sistema de coordenadas fixo  $K$  de coordenadas  $x, y, z$  e um outro sistema  $K'$  de coordenadas  $x', y', z'$  que se encontra a movimentar à velocidade  $\vec{u}$ . A partir daqui é tida em conta a perspectiva das transformações de coordenadas de Galileu. O intuito é comparar as medidas, neste caso da frequência  $\omega$ , que diferentes observadores efetuam, quando em movimento relativo um com o outro. O caso enunciado é simples, é de um eventual observador num sistema  $K'$ , em movimento relativamente a um outro, que se encontra parado com o sistema  $K$ . Cada

um destes representa aquilo a que se chama um referencial inercial. Diz-se que um referencial é inercial quando, qualquer corpo que esteja em descanso permanecerá em descanso, assim como um corpo que esteja inicialmente em movimento continuará em movimento uniforme, relativamente a esse referencial. O conceito a reter é que a percepção do movimento é relativa, depende do referencial em que se está a observar. Por exemplo, no referencial,  $K'$  que se encontra em movimento em relação ao sistema fixo  $K$ , a percepção é de que o fluido está parado, porque na verdade se "move" com o referencial.

Importa portanto, através das transformadas de Galileu, saber a relação entre os vetores posição de cada um dos referenciais. Estando o fluido em descanso, para o referencial  $K'$ , uma onda monocromática terá a forma conhecida  $\psi = ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}'-kct)}$ , em que, pela transformada de Galileu,  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$ . Visto do referencial fixo  $K$ , a onda tem a forma  $\psi = ae^{i[\vec{k}\cdot\vec{r}-(kc+\vec{k}\cdot\vec{u})t]}$ . Dado o coeficiente de  $t$  na expressão anterior, a frequência  $\omega$  será dada pela parte dentro de parênteses. Com efeito, numa água em movimento, com corrente de velocidade constante, a frequência  $\omega$  relaciona-se com o vetor de onda, não da forma simples que se tem visto, mas da seguinte forma:

$$\omega = ck + \vec{u} \cdot \vec{k} \quad (4.29)$$

A velocidade de propagação também terá a contribuição da corrente, dado que agora o som é transportado ao longo da corrente com velocidade  $\vec{u}$ , pelo que passa a ser dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = c \frac{\vec{k}}{k} + \vec{u} \quad (4.30)$$

### 4.1.2 Acústica Geométrica - Teoria dos Raios Acústicos Clássica

Na realidade, isto é, em meios aquáticos como o mar, as ondas sonoras não são, de todo, planas, ou seja, não têm direção constante em todo o meio, pelo que as suas superfícies de fase constante deixam de ser paralelas entre si. Porém, em alguns casos, podem considerar-se algumas dessas ondas como sendo planas em pequenas regiões do espaço, desde que, a amplitude e direção, variem apenas ao fim de distâncias da ordem do comprimento de onda, e de forma muito ligeira.

Subsequentemente, assumindo que esses comprimentos de onda são também pequenos, pode introduzir-se a acústica geométrica, ou como é mais comum ler-se, a teoria dos raios, acústicos neste caso. Por conseguinte, põe-se de lado o conceito de

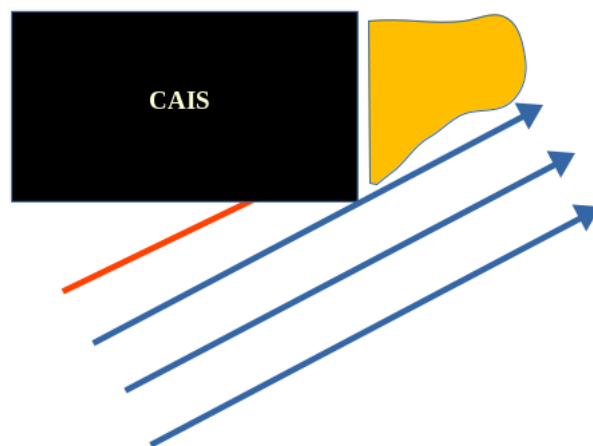


FIGURA 4.2: Raios sonoros na presença de obstáculo.

ondas, assim como o seu fenómeno ondulatório, e passa-se a falar de raios sonoros. Tendo em conta a primeira assunção feita, os raios sonoros são linhas em que a tangente em cada ponto é da mesma direção da propagação. Assim sendo, a teoria dos raios só consegue ser eficaz em propagações de tão alta frequência (comprimento de onda muito pequeno), que a amplitude e velocidade do som não sofram variações bruscas, ou seja, a refração dos raios nunca pode ser muito acentuada, se não este método falha. Novamente o conceito de refração aparece, porque é realmente esse o fator chave no estudo da trajetória de qualquer propagação. O objetivo é, através de pequenas e sucessivas refrações, descrever a trajetória, que acaba por se tornar curva, de um raio acústico.

No entanto, é de ressaltar que esta metodologia falha em descrever fenómenos como a difração, por exemplo, dado que os raios, que acabam por ser linhas em que a direção não varia muito, não servem para descrever o contorno de certos obstáculos ou aberturas. Veja-se por exemplo na Figura 4.2, o caso em que se tem uma propagação do som, hipoteticamente em raios, neste caso planos, e de facto, ao se depararem com um cais, por exemplo, não o contornam e, se assim fosse, não chegaria energia em forma de som, ao canto do cais, a sombreado amarelo. Na realidade sabemos que isso não acontece, o som sofre difração e chega a essa zona. Um bom resumo sobre a comparação entre a teoria das ondas e a teoria dos raios, evidenciando vantagens e desvantagens, pode ser encontrado em (Urlick, 2013), página 122, Tabela 5.4

Em suma, esta estratégia pode ser útil em muitos problemas, e é realmente mais simples de estudar, mas não consegue dar uma definição total do comportamento das ondas sonoras, tendo em consideração todos os fenómenos a que as ondas

podem estar sujeitas.

O ponto de partida, com vista encontrar a equação que define a direção dos raios acústicos, é a alongação  $\psi$ , com fase  $\varphi$ :

$$\psi = Ae^{i\varphi} \quad (4.31)$$

Nos casos em que a onda não é plana, mas se pode aplicar a acústica geométrica, a amplitude  $A$  é uma função que varia ligeiramente com as coordenadas e com o tempo, ao contrário da fase  $\varphi$ , que é praticamente linear. Em pequenas regiões do espaço e intervalos de tempo curtos, a fase pode ser expandida em série, da seguinte forma:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \vec{r} \cdot \nabla \varphi + t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (4.32)$$

Na situação descrita anteriormente, isto é, considerando regiões pequenas do espaço e intervalos de tempo curtos, a onda pode ser assumida como plana, de tal forma que:

$$\begin{cases} \vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla_{\vec{r}}(\varphi) \\ \omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{cases} \quad (4.33)$$

O símbolo " $\equiv$ " significa equivalente e serve precisamente para indicar que a derivada parcial em ordem a um vetor, neste caso o vetor posição  $\vec{r}$ , é o mesmo que o gradiente da função  $\varphi$  em função desse vetor. A quantidade  $\varphi$  é chamada de *eikonal*, que é basicamente a função da fase. A palavra vem do grego e significa "imagem", como se pode ver, por exemplo em (Etter, 2018). É mesmo esse o conceito a ter em mente, imaginar o *eikonal* como uma representação visual da fase em cada ponto, ao longo do espaço. Sabendo a relação  $k = \frac{\omega}{c}$  do número de onda, e por sua vez,  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ , a equação básica da acústica geométrica vem:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 0 \quad (4.34)$$

Num fluido que não seja homogéneo, ou seja, que não apresente características semelhantes em todo o espaço, a velocidade do som vai variar ao longo desse espaço, pelo que nesses casos,  $\frac{1}{c^2}$  será função das coordenadas. Este será o fator determinante na trajetória de um raio, a sucessiva alteração da velocidade do som, resultante da não homogeneidade de um dado meio, como se verá mais à frente. É possível descrever o movimento de partículas através da equação de Hamilton-Jacobi

(Landau & Lifshitz, 1976), que é do género da equação da acústica geométrica. Há uma analogia evidente entre variáveis da mecânica e as que definimos na Equação (4.33). Por conseguinte, a partir das seguintes equações, em que  $p$ , nesse caso, é o momento e  $H$  o Hamiltoniano:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{-\partial H}{\partial \vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}}(H) \\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \nabla_{\vec{p}}(H) \end{cases} \quad (4.35)$$

resultam, na acústica geométrica, as seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{-\partial \omega}{\partial \vec{r}} = \nabla_{\vec{r}}(\omega) \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \nabla_{\vec{k}}(\omega) \end{cases} \quad (4.36)$$

As equações anteriores são fundamentais para a determinação da forma dos raios, em diferentes meios, na medida em que a primeira dá a variação de  $\omega$  com o vetor posição  $\vec{r}$ , resultante da heterogeneidade do meio e a segunda dá a variação de  $\omega$  com  $\vec{k}$ , conhecida por relação de dispersão. É essencial perceber a frequência  $\omega$  se mantém sempre constante, apesar da variação da velocidade do som e do vetor onda, nos casos em que o meio é heterogéneo, ou não homogéneo, como se preferir chamar. Com efeito, as equações referidas são gerais e vão obviamente dar resultados diferentes, consoante o tipo de meio que se considerar.

O mais simples é o meio imóvel e homogéneo. Por ser homogéneo a velocidade do som  $c$  não varia com as propriedades do meio, logo é sempre constante em magnitude e em direção. Partindo sempre da relação  $\omega = ck$ , tem-se então neste caso:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{k}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{r}}{dt} = c\hat{n} \end{cases} \quad (4.37)$$

Os resultados obtidos são óbvios. Num meio homogéneo, se não há variação da velocidade do som, não há alteração da direção de propagação, não há refração, logo a variação temporal do vetor  $\vec{k}$  tem de ser zero, é constante, os raios são linhas direitas com frequência constante.

De seguida, discute-se o caso em que o meio não é homogéneo, mas ainda assim imóvel. Por ser imóvel, a frequência  $\omega$  continua a ser uma constante, função do vetor onda  $\vec{k}$  e da velocidade do som  $c$ . A grande diferença é que, num meio heterogéneo, estas variáveis variam com a posição, porque o meio não apresenta

sempre as mesmas características, o que vai influenciar a velocidade do som e consecutivamente o vetor onda. Pode dizer-se que, num meio heterogéneo e imóvel, a frequência, sempre constante, é função de duas variáveis que variam ao longo do espaço inversamente, para que a frequência se mantenha a mesma:

$$\omega = c(\vec{r})k(\vec{r}) \quad (4.38)$$

A diferenciação temporal do vetor posição, das equações gerais na Equação (4.36), é agora dada por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} c(\vec{r}) \nabla_{\vec{k}}(k) = c(\vec{r}) \hat{n}, \quad (4.39)$$

em que  $\hat{n}$  é o versor unitário na direção de propagação  $\vec{k}$ , em cada ponto  $\vec{r}$ . Quanto à diferenciação temporal do vetor onda, as demonstrações mostram que vem:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{-\partial \omega}{\partial \vec{r}} \equiv -\nabla_{\vec{r}}(\omega) = -\nabla_{\vec{r}}[c(\vec{r})k] \quad (4.40)$$

Pelas equações anteriores, percebe-se desde logo que, em meios heterogéneos, os raios não vão ser linhas direitas, vão ser antes trajetórias curvas, em que a curvatura é ditada pelas variações da velocidade do som. Apesar disso, continua a ser certo que  $\omega$  é sempre uma constante, embora  $c$  e  $k$  variem com a posição  $\vec{r}$ . Logo, a sua derivada temporal é nula,  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ . Então, a Equação (4.40) fica:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -k \nabla_{\vec{r}}[c(\vec{r})] \quad (4.41)$$

Interessa agora saber como varia a direção de propagação, ou seja, como varia o versor  $\hat{n}$ . Dado que esse versor é o unitário e dá a direção de  $\vec{k}$ , partindo de  $\vec{k} = k\vec{n}$ , tem-se, pelas demonstrações:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{\omega}{c} \frac{d\vec{n}}{dt} - \frac{\omega}{c^2} \vec{n} \left[ \frac{dc}{d\vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \quad (4.42)$$

Sabendo também que  $\frac{d\vec{k}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}}(c)$ , deduz-se:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = -\nabla_{\vec{r}}(c) + \vec{n} [\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{r}}(c)] \quad (4.43)$$

Dividindo a Equação (4.43) por  $c$ , tem-se a derivada de  $\vec{n}$  em função do elemento de linha  $dl$ :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{-\nabla_{\vec{r}(c)}}{c} + \frac{\vec{n}}{c} [\vec{n} \cdot \nabla_{\vec{r}(c)}] \quad (4.44)$$

O versor  $\hat{n}$  é tangente à direção do raio e por isso, a Equação (4.44) descreve a forma de um raio sonoro, na medida em que define a variação da direção de propagação ao longo da própria trajetória, isto é, como é que a trajetória vai curvando. A fórmula  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}$  dá a velocidade de propagação das ondas, derivada da dependência que existe, das componentes do vetor onda, da frequência  $\omega$ .

### 4.1.3 Metodologias Existentes

A teoria de ondas é essencial, não só porque é pioneira e basilar em qualquer estudo de acústica, mas sobretudo porque ajuda a compreender certos conceitos preliminares e a ambientar o leitor perante a temática. Todavia, a teoria dos raios acústicos é, como já foi referido, o verdadeiro campo onde se foca a discussão deste trabalho, dado que é daí que surgem algumas das metodologias mais interessantes e, acima de tudo, é na teoria dos raios que se aplica a metodologia mais moderna que se tenciona defender. Com efeito, nesta parte, pretende-se reunir algumas das metodologias mais características e referenciadas no âmbito da teoria dos raios acústicos, desde equações derivadas para casos específicos a algoritmos computacionais de *ray tracing* capazes de dar uma visão mais prática à teoria. A ambição é encontrar a resposta, o mais generalizada possível, para a infinidade de problemas que a acústica expõe, isto é, uma solução que abranja grande parte desses casos.

Para além dos trabalhos de Landau e Lifshitz, também outros autores se dedicaram a procurar equações generalizadas que funcionassem para vários casos diferentes de forma satisfatória, sempre dentro de princípios teóricos próximos e com resultados semelhantes. No artigo de William Kornhauser (Kornhauser, 1953) pode ver-se uma abordagem que procura generalizar uma equação de *eikonal* em que se possa considerar uma velocidade constante do meio subjacente. Na verdade, mostrou que essa equação se reduz a uma equação de *eikonal* idêntica à deduzida, atrás nesta secção, quando a velocidade do meio se considera nula, como seria de esperar. Evidencia bem o impacto desse movimento do meio, por exemplo, na direção de um raio sonoro, na aproximação geométrica, que deixa de ter uma direção igual à da normal à frente de onda. A partir dessas suposições propõe uma forma generalizada também da Lei de Snell, para aplicar as equações ao estudo de meios estratificados. Num artigo de Peter Uginčius (Uginčius, 1970) encontra-se mais uma possível derivação de uma equação diferencial para os raios acústicos, seguida

de uma generalização do princípio de Fermat, para um meio não homogéneo em movimento. A realidade é que há muitas aproximações e derivações das equações, tanto de onda como de raios acústicos, muitas vezes com propósitos diferentes. Os artigos referenciados são apenas alguns das mais importantes, no que concerne à teoria de meios com movimento.

Fazendo a passagem para metodologias práticas propriamente ditas, desenvolvidas ao nível da computação, em algoritmos de *ray tracing*, para o cálculo de perfis de raios acústicos a partir de certas variáveis acústicas introduzidas, procede-se agora à apresentação de uma das existentes e bastante utilizada, em estudos e trabalhos no âmbito da acústica. O BELLHOP é, atualmente, um dos programas desenvolvidos mais bem estruturados, da autoria de Michael Porter. Numa versão mais recente, pode encontrar-se um manual para utilização e aplicação do algoritmo (Porter, 2011), escrito pelo próprio autor. Nesse texto é possível encontrar uma breve estrutura do programa, ilustrada, explicitando quais as variáveis de entrada e consequentemente os resultados de saída que o programa proporciona. Para além disso, de uma forma, provavelmente mais completa e introdutória ao ambiente do programa, no manual escrito em português pelo professor Orlando Rodriguez (Rodríguez, 2008), é feita uma introdução explicativa do contexto do problema, através de uma revisão teórica dos princípios que estão por trás do mesmo, seguida das instruções de instalação e subsequente utilização, com exemplos.

A principal função do programa BELLHOP é, como em qualquer programa de *ray tracing*, analisar perfis acústicos, neste caso no âmbito da oceanografia e no estudo adjacente da distribuição dos raios sonoros em ambientes desse tipo, sobretudo em zonas costeiras. Importa perceber a interação dos oceanos, com determinadas variáveis características, e das zonas de fronteira, como os fundos por exemplo, que podem ser de diferentes tipos. Tal como foi visto, já nos fundamentos teóricos e respetivas equações para descrever as trajetórias dos raios, o factor determinante é o perfil de variação da velocidade do som ao longo do meio, na medida em que são as sucessivas alterações da velocidade do som na água, mesmo que infinitesimais, que resultam em constantes refrações, daí a importância de generalizar a Lei de Snell, causando a tal curvatura dos raios. Por essa razão, a grande parte destas metodologias, centra-se no estudo de meios estratificados, em que cada estrato apresenta parâmetros diferentes, nomeadamente a velocidade do som. Nesse sentido, a partir de um perfil de velocidade do som, em função da profundidade e tendo em conta as condições de fronteira, o programa faz uma previsão do campo de distribuição da pressão e calcula os raios acústicos, em 2D. Nos manuais estão especificados os ficheiros de entrada necessários para o cálculo, como a frequência da fonte, a posição

da fonte e dos vários recetores, a profundidade do meio, entre outros, consoante a situação específica que se pretenda simular. Da mesma forma, são especificados os ficheiros de saída, dependentes também do meio envolvente que se estiver a estudar com os parâmetros de entrada, sendo que normalmente a intenção é observar os vários raios que emanam da fonte, o seu tempo de "viagem", o campo de pressão resultante e as perdas na transmissão do sinal.

O fundamental é perceber que a teoria que sustenta este modelo é, como era de esperar, a teoria clássica dos raios e o respetivo método de resolver as equações dos raios acústicos na sua forma mais "tradicional", como se pode ver no manual. Em coordenadas cilíndricas, estabelece-se a posição de origem e todas as condições iniciais, resolvem-se as equações dos raios para o caso em particular e calculam-se o tempo que o raio leva a percorrer a sua trajetória em função do comprimento do arco, que é o parâmetro escolhido para integrar. Para além disso, o programa restringe-se a estudos em 2D, uma das grandes desvantagens que tem em relação à sugestão alternativa que se irá propôr e defender mais à frente. Há outros algoritmos desenvolvidos, com abordagens teóricas um pouco diferentes do BELLHOP, mas que acabam sempre por partir do mesmo "*background*" matemático, sem nunca utilizarem ferramentas da análise tensorial na estruturação das equações que visam resolver. Em suma, resolvem sempre, por métodos numéricos variados, as equações diferenciais clássicas dos raios acústicos. Por outro lado, a seguinte secção sugere uma perspetiva mais abrangente

## 4.2 Teoria dos Raios - Perspetiva da Análise Tensorial e Geometria Diferencial

Os conceitos matemáticos de geometria diferencial e análise tensorial, que foram apresentados nos Capítulos 2, e sobretudo no 3, permitem, de facto, construir um modelo completamente diferente dos anteriores, física e matematicamente, para estudar e simular o comportamento dos raios acústicos num meio oceânico. É realmente inovador porque "nasce" de uma análise, do ponto de vista tensorial, ao problema, com analogias à relatividade especial e geral (no nosso caso, é a relatividade de Galileu) e daí a necessidade de dominar alguns conceitos como, por exemplo, tensor ou espaço de Riemann. Estes são apenas alguns dos vários termos introduzidos nesses capítulos, que na sua totalidade, definem a análise tensorial e a sua aplicação nos estudos de relatividade. Como se irá ver mais à frente, a essência é perceber o que é realmente um tensor, que tipos de tensores existem, o que é um

espaço de Riemann e como é que se pode classificar o meio aquático como sendo um desses, em que medida é que a métrica define um espaço desses e, acima de tudo, como é que uma geodésica define a trajetória de um raio sonoro, por exemplo, nesses espaços. Da teoria clássica, descrita ao longo das secções anteriores, já se sabe que a trajetória de um raio sonoro vai ser, na grande maioria dos casos, curva. Com esta estratégia vai-se aprender a "olhar" para essa curvatura de uma nova forma.

### 4.2.1 Das Equações dos Fluidos ao Aparecimento da Métrica

Nesta primeira fase, pretende-se então, a partir da manipulação e desenvolvimento de algumas das derivações da equação de onda mais importantes, específicas para casos de estudo diferentes, sugerir uma abordagem diferente da tradicional com a introdução de um operador diferencial especial de 2º ordem. (D. R. Bergman, 2018). De facto, há diversas derivações da equação de onda, que divergem consoante as condições que se assumem de aproximação e portanto, um certo tipo de derivação pode ser extremamente útil num dado caso de estudo, mas ineficaz num outro distinto, isto é, as várias formas de obter equações de propagação de ondas em fluidos assumem domínios de validade diferentes. Para além disso, o desenvolvimento de diferentes equações diferenciais de onda, terá sempre como ponto de partida as tradicionais equações não lineares da mecânica dos fluidos, vistas no início deste capítulo. Desta forma, irão ser destacadas inicialmente duas aproximações diferentes a equações lineares e de seguida, um terceiro método de tratamento das equações originais, que embora mantendo a não-linearidade, tem as suas vantagens relativas.

Como se sabe, pelo início deste capítulo, as equações básicas da mecânica dos fluidos são a equação da continuidade, que exprime a conservação da matéria do fluido, a equação de Euler (basicamente a 2º Lei de Newton aplicada a um elemento móvel de volume de fluido) e uma equação de estado da termodinâmica, relacionando diversas variáveis características do fluido em questão, tais como a densidade e a pressão, as mais importantes para nós. O formato inicial destas equações já foi demonstrado e a partir daqui começam as aproximações referidas anteriormente. A primeira abordagem visa essencialmente a linearização e a simplificação do problema, através do desenvolvimento de uma expressão, mantendo-a o mais geral e completa possível, em que os únicos termos negligenciados são os não lineares relativos às perturbações. Essas perturbações representam-se tal como nas Equações (4.1) e (4.2), só que agora com uma perturbação acrescentada também à velocidade

do fluido,  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}, t) + \vec{v}_1(\vec{r}, t)$ . Não esquecer que também a pressão  $p$  e a densidade  $\rho$  são funções da posição  $\vec{r}$  e do tempo  $t$ . É importante também notar que serão anulados os termos não perturbados que, naturalmente, faziam parte das equações originais. Nesta estratégia, esses não interessam e o que importa são realmente as equações lineares que incluem apenas os termos correspondentes às perturbações dos valores das variáveis acústicas de *background*, na medida em que essas perturbações são precisamente as ondas sonoras. Sendo assim, através do desenvolvimento matemático das equações dos fluidos, com base nas perturbações definidas para cada variável acústica, tem-se, das demonstrações no Apêndice A, as seguintes equações:

$$\begin{cases} (D_0 p_1 + \rho_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} p_0 + p_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0) = 0 \\ (D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1) + (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_0 + \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 \vec{v}_0) = 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

Nas equações anteriores,  $D_0$  é o operador diferencial  $D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}$  que permite reduzir o tamanho das expressões e mais tarde a ajudar a identificar o que haverá de comum nas expressões das diferentes aproximações. A grande vantagem das versões anteriores das equações dos fluidos, sobre as variáveis perturbadas  $p_1$  e  $v_1$ , é que estas estão afetadas por operadores diferenciais de 1º ordem nos primeiros parêntesis e surgem diretamente, em 1º ordem, nos segundos parêntesis. Os restantes elementos dizem respeito às variáveis de fundo,  $\rho_0$  e  $\vec{v}_0$ , por hipótese conhecidas. Temos portanto um conjunto de equações diferenciais, parciais, lineares, homogêneas de 1º ordem. De modo mais compacto, com  $F_1 \equiv (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} p_0 + p_1 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_0)$  e  $\vec{F}_2 = (\vec{v}_1 \cdot \vec{\nabla} \vec{v}_0 + \frac{p_1}{\rho_0 c^2} D_0 \vec{v}_0)$ , tem-se (Ver Apêndice A):

$$\begin{cases} (D_0 p_1 + \rho_0 c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) + F_1 = 0 \\ (D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1) + \vec{F}_2 = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

As equações anteriores são diferenciais parciais homogêneas lineares aplicadas a campos pressão-velocidade  $p_1, \vec{v}_1$ . O passo seguinte é diferenciar novamente as equações, a partir de suposições diferentes, a fim de se chegar a equações diferenciais de 2º ordem, que apesar de serem distintas na sua composição, terão um termo importantíssimo em comum. É esse termo que no fim irá permitir generalizar uma expressão só abrangente dos diferentes casos de estudo.

Prosseguindo o desenvolvimento, através de alguma manipulação matemática (Ver Apêndice A) conjugam-se as duas equações, na Equação (4.46), a fim de ficar com uma das equações diferenciais de 2º ordem, a mais geral e completa, linear.

As demonstrações mostram, com  $F_3 \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} v_1) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)$ , que:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_1 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right) \quad (4.47)$$

$$- \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 - F_3$$

Por outro lado, é ainda possível chegar a uma equação diferencial de 2º ordem linear mais simples, se for feita outra consideração. À semelhança do que foi visto nas deduções da teoria mais clássica se se assumir o fluido irrotacional,  $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ , o vetor velocidade  $\vec{v}$  pode ser substituído por um potencial escalar de velocidade, ou seja, proceder à aproximação  $\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, t)$ . As demonstrações mostram que, no final, esta versão de equação diferencial de 2º ordem, também para as perturbações como a Equação (4.47), mas exclusiva para fluidos irrotacionais, vem:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \vec{\nabla} \psi_1 \right) = 0 \quad (4.48)$$

Para além destas derivações para as perturbações, há também um caminho no qual as perturbações não são separadas dos campos totais. Já em 1973, Richard White, escreveu um artigo sobre raios acústicos em meios em movimento (White, 1973), onde é sugerida essa abordagem, que se aplica ao campo na sua totalidade, sem contabilizar apenas as perturbações nem proceder a suposições e simplificações. Ou seja, as perturbações estão lá na mesma, "amalgamadas" com as componentes não perturbadas, e por isso, tem-se, para este caso, uma equação diferencial de 2º ordem não linear, em que  $q$  é uma variável já definida no trabalho original (White, 1973), por  $q = \int_{p_0}^p \frac{dp}{c\rho}$ .

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} Dq \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}}{c} Dq - c \vec{\nabla} q \right) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \quad (4.49)$$

Como já foi referido, todo este desenvolvimento visa identificar o que há de comum nas equações diferenciais de 2º ordem resultantes dos diferentes métodos e abordagens, por forma a encapsular todas essas derivações numa expressão só, generalizada, e que surge a partir da introdução de conceitos da geometria diferencial, revista no Capítulo 3. No artigo referido de Richard White é possível ver o aparecimento de alguns desses conceitos e a sua aplicação na análise de trajetórias de raios acústicos.

Nesse sentido, o operador diferencial de 2º ordem no lado esquerdo das equações, pode ser apresentado de uma outra forma, em que  $f$  é um campo escalar

e  $a$  é uma função arbitrária das coordenadas e do tempo, que é precisamente o que nos interessa, no caminho de procurar uma solução geral e completa que tome a seguinte forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 f \right) - \vec{\nabla} \cdot \left( v_0 \frac{a}{c^2} D_0 f - a \vec{\nabla} f \right) \quad (4.50)$$

A equação anterior é o factor que aparece nos vários modelos que foram sendo falados. O factor arbitrariedade da função  $a$  é, de facto, importante para o propósito deste desenvolvimento e para além disso, também a velocidade do som local  $c$ , a corrente da água  $v_0$  e a sua densidade  $\rho_0$  podem ser funções da posição e do tempo. Na verdade, a função  $a(\vec{r}, t)$  pode ser  $a = \rho_0$ ,  $a = \frac{1}{\rho_0}$  ou  $a = c$ , o que dá origem a casos diferentes, como se verá mais à frente. Genera, tal comlizando o operador gradiente, com a inclusão do tempo  $t$ , a expressão anterior vem, com  $\hat{e}_t$  o versor unitário na direção da coordenada tempo:

$$\vec{\partial} = \hat{e}_t \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \quad (4.51)$$

Passando esse gradiente generalizado à notação matricial, tem-se a matriz coluna:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

A equação geral, Equação (4.50), pode agora ser escrita em formato matricial (Ver Apêndice A), o que ajuda a perceber a dinâmica dos termos que a constituem, nomeadamente objetos que começam a fazer notar-se a analogia com a geometria diferencial aplicada nos estudos relativistas. Com efeito, tal como já foi referido, retoma-se agora a ideia de coordenadas gerais, enunciadas nos capítulos anteriores, numa notação semelhante à da relatividade,  $x^\nu$ , em que o tempo passa realmente a ser uma coordenada,  $x^0$ , de tal modo que  $\nu = 0, 1, 2, 3$  e claro, o primeiro índice corresponde à coordenada temporal e os restantes às três coordenadas espaciais. Por essa mesma razão, aparece também uma nova notação,  $\partial_\nu$ , em que a cada valor do índice  $\nu$  corresponde, respetivamente, uma derivada parcial da matriz coluna na Equação (4.52). A Equação (4.50) passa então a ser escrita da seguinte forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{a}{c^2} \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Esta generalização parte do caso mais simples, em forma matricial, da equação de onda com velocidade constante e num meio em repouso (ver Anexo A), e permitirá incorporar efeitos como a variação das características do meio subjacente, tais como densidade, campos de velocidade inerentes (de *background*) do fluido. É de realçar o facto muito importante de estas propriedades, quer do meio quer da velocidade de propagação,  $c(\vec{r})$ , da própria onda sonora entrarem nas componentes de um novo "tensor métrico". Será este facto que permitirá adoptar métodos de cálculo tensorial, nomeadamente através das equações geodésicas, no cálculo, em situações mais gerais, da trajetória dos raios sonoros no meio submarino. As características físicas do fluido onde se propagam as ondas serão representadas por este mesmo tensor métrico.

De forma mais sucinta, vem:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^T \right] \frac{a}{c^2} \begin{bmatrix} -1 & -\vec{v}_0^T \\ -\vec{v}_0 & c^2 \mathbf{I} - \vec{v}_0 \vec{v}_0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \vec{\nabla} f \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

A matriz  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ . O operador diferencial do lado esquerdo  $\left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^T \right]$  vem do laplaciano em coordenadas curvilíneas, que é precisamente o tipo de coordenadas em que nos queremos focar. Mesmo no espaço euclidiano, o operador Laplaciano pode ter uma métrica diferente da mais simples que estamos habituados, a cartesiana, uma vez que lá está, podemos usar coordenadas curvilíneas. Por exemplo, uma esfera, ainda que no espaço euclidiano, pode ser descrita por coordenadas esféricas e terá certamente uma métrica que evidencia a existência de curvatura, basta aplicar o tensor de curvatura de Riemann e comprova-se tal facto. Ora, o conceito chave a partir daqui é justamente esse, a métrica, na medida em que é a métrica que define totalmente um espaço, seja de que tipo for, e o grande fundamento desta metodologia é encarar as ondas sonoras como uma propagação num espaço curvo, isto é, num espaço de Riemann, próximo do espaço pseudo-Riemanniano da relatividade. De certo modo, olhando para a Equação (4.54) é já possível notar que a matriz central é algo semelhante, no seu formato, aos vários tensores métricos que foram estudados nos capítulos anteriores, diferentes entre si por definirem espaços diferentes. Portanto, tal como já foi referido, as métricas que, na relatividade

definem o espaço de Minkowski ou o campo gravitacional em relação a um corpo esférico no espaço-tempo (de Schwarzschild), na acústica submarina definem o espaço aquático, cuja estrutura geométrica que está por trás, é construída a partir das variáveis acústicas do meio, a água, nomeadamente a sua densidade, velocidade do som, e à existência de correntes.

Escreva-se então o operador diferencial na seguinte notação:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu \sqrt{|g|} g^{\nu\mu} \partial_\mu f \quad (4.55)$$

Efetivamente, os fatores  $g^{\nu\mu}$  são componentes do tensor métrico inverso. Desde já é de notar que, ao contrário do que se convencionou no Capítulo 3, nesta notação o tensor métrico é um tensor co-variante e não contra-variante, pelo que, obviamente, o tensor métrico inverso será contra-variante e daí ter os índices em cima, como foi visto anteriormente. Com efeito, o tensor métrico propriamente dito será  $g_{\alpha\beta}$  e o inverso  $g^{\alpha\beta}$ . Como é de esperar, analogamente à relatividade e sendo um dos requisitos de um espaço Riemanniano, são ambos tensores simétricos,  $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ , e:

$$g^{\beta\sigma} g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\sigma \quad (4.56)$$

Na Equação (4.55) a quantidade  $g$  é o determinante da matriz do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$  e deduções mostram que  $\det g^{\alpha\beta} = \frac{1}{\det g_{\alpha\beta}}$ . Com esta igualdade demonstra-se que se obtém um "tensor métrico acústico" (que se pode escrever de várias formas particulares, consoante as funções  $a(\vec{r}, t)$ ) e que será o resultado central apresentado nesta tese:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_{\alpha\beta} = \frac{a}{c} \begin{bmatrix} -c^2 + \vec{v}_0^T \vec{v}_0 & -\vec{v}_0^T \\ -\vec{v}_0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ g^{\alpha\beta} = \frac{1}{ac} \begin{bmatrix} -1 & -\vec{v}_0^T \\ -\vec{v}_0 & c^2 \mathbf{I} - \vec{v}_0 \vec{v}_0^T \end{bmatrix} \\ \det g_{\alpha\beta} = -\frac{a^4}{c^2} \end{array} \right. \quad (4.57)$$

A notação  $\vec{v}_0^T \vec{v}_0$  é usada em vez do produto interno. Dadas estas novas definições, o operador d'Alembertiano (Laplaciano a 4D), ou seja, uma equação de ondas generalizada, define-se então da seguinte forma:

$$\mathbf{D}^2 f \equiv D^\mu (\partial_\mu f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\nu \sqrt{|g|} g^{\nu\mu} \partial_\mu f \quad (4.58)$$

A função arbitrária definida no início do desenvolvimento,  $a$ , é o fator que dita o tipo de problema em que se tenciona trabalhar. De facto, o operador Laplaciano, juntamente com as métricas, permite encapsular os vários casos num formato muito mais compacto e prático, no qual a função  $a$  nos diz a métrica a aplicar num caso particular, de entre aqueles que foram sendo derivados ao longo desta sub-secção. Por conseguinte, irão distinguir-se três situações, representadas por diferentes equações, para diferentes valores de  $a$ , agrupadas da seguinte forma:

1.  $a = \rho_0$  para o caso em que se considera o fluido irrotacional, isto é,  $\nabla \times \vec{v} = 0$ . Este é o caso em que a velocidade do fluido é definida a partir de um potencial escalar de velocidade e portanto o campo primário é esse potencial de velocidade,  $\psi_1$ . A métrica fica  $\rho_0 c^{-1} g_{\alpha\beta}$  e a equação final será:

$$\mathbf{D}^2 \psi_1 = 0 \quad (4.59)$$

2.  $a = c$  no ponto de vista em que se negligencia o tratamento das perturbações à parte e a expressão se refere ao campo na sua totalidade. O campo escalar primário é  $q$ . A métrica fica simplesmente  $g_{\alpha\beta}$  e a equação final:

$$\mathbf{D}^2 = \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}) \quad (4.60)$$

3.  $a = \rho_0^{-1}$  para o caso mais geral e completo linear, sendo a flutuação da pressão,  $p_1$ , isto é, a sua perturbação, o campo primário. A métrica será  $(\rho_0 c)^{-1} g_{\alpha\beta}$  e a equação final, com  $R_1 \equiv \rho_0^2 c \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_2 - F_3 \right)$ , vem:

$$\mathbf{D}^2 p_1 = R_1 \quad (4.61)$$

A lista anterior é, de certa maneira, uma generalização de alguns dos casos mais conhecidos e estudados que contribuíram para o processo de criação deste método mais abrangente. Todos os casos que o integram são importantes para destacar o facto de que, apenas com uma expressão se pode chegar a situações de propagação acústica variadas, sem ter de estudar cada uma das expressões que a descreve.

Em suma, esta primeira sub-secção visa, não só demonstrar o caminho para se chegar a uma proposta de equação de onda acústica de 2º ordem linear e geral, que admite fluidos com velocidades arbitrárias (correntes marítimas, por exemplo), a partir das equações dos fluidos clássicas e com determinadas assunções e

considerações simplificativas, mas acima de tudo apresentar uma metodologia diferente estruturalmente e alternativa às convencionais, que através de princípios matemáticos da geometria diferencial e uma abordagem inspirada na Relatividade Geral, incorpora, tanto essa solução generalizada, como outras aplicadas em casos concretos. Em certa medida, a moldagem do operador diferencial de 2º ordem a um operador Laplaciano co-variante em coordenadas curvilíneas gerais permite a identificação do tempo como sendo uma das coordenadas de um espaço 4D. Esse operador compacta a informação relativa a esse *background* acústico e identifica-o como um espaço pseudo-Riemmaniano, semelhante ao espaço-tempo da relatividade geral.

### 4.2.2 Teoria dos Raios Numa Nova Perspetiva

A aproximação geométrica das ondas a raios acústicos é, como já se pode constatar anteriormente neste capítulo, uma forma válida de simplificação do problema, tanto matematicamente como visualmente, no limite das altas frequências, pelo facto de que se torna mais intuitivo perceber a distribuição do som através dos tais raios, que são meras linhas, rectas ou curvas. As suas limitações já são conhecidas e portanto, esta nova perspetiva de descrever os raios acústicos não altera esse facto, apenas sugere uma alternativa na forma como se conceptualizam os raios.

Ora, o que nos interessa é a teoria dos raios e, de facto, para a métrica acústica, estudada na subsecção anterior, as respetivas geodésicas nulas dão as trajetórias dos raios acústicos, por semelhança com os raios de luz (Visser, 1993).

No que concerne à equação que descreverá os raios acústicos, será a equação da geodésica nula, Equação (3.55), enunciada no Capítulo 3, na medida em que, os raios descreverão geodésicas nulas no espaço-tempo do meio subaquático (assemelhando-se aos raios de luz da relatividade).

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (4.62)$$

Em suma, a aproximação por raios no estudo da acústica submarina, à luz desta metodologia, não deixa de apresentar as mesmas limitações que a teoria dos raios clássica já evidenciava, mas, aproveitando a sua utilidade ao nível da estruturação geométrica dos raios, dá lugar a um método alternativo de os descrever, com todas as vantagens já referidas, de encapsulamento de diferentes casos de variação e perturbação a que os fluídos estão sujeitos.

### 4.2.3 Notas sobre Trajetórias Geodésicas e Sugestão de Implementação Computacional pelos Métodos da Geometria Diferencial

#### Dedução das Equações Geodésicas para Cada Coordenada, num Espaço-Tempo de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild<sup>3</sup> é de facto um dos resultados mais interessantes da história da física, em particular da teoria da relatividade geral. Ora, se a métrica de Minkowski é a solução trivial das equações de Einstein, a métrica de Schwarzschild aparece como a primeira solução fundamental, não trivial, dessas equações (Lambourne, 2010). Portanto, numa região do espaço-tempo definida por esta métrica, tanto a luz como qualquer partícula, já não se movem em linhas "direitas", mas em geodésicas. Também não é novidade que a "fonte" de curvatura no espaço-tempo é a interação gravítica com massas e por isso, rigorosamente, a métrica de Schwarzschild é a solução que define a geometria do espaço-tempo em torno de um objecto esférico de massa  $M$ , como já foi visto, não rotativo e com simetria esférica. Por outras palavras, através desta métrica descreve-se a zona vazia ,exterior a esse objecto, do espaço-tempo, uma estrela por exemplo. Sem entrar em mais pormenorização, o essencial é entender que as geodésicas representam as trajetórias em torno do objeto especificado e, como tem simetria esférica, sugere-nos a utilização de coordenadas esféricas, centradas no objecto esférico. À semelhança da métrica de Minkowski, as coordenadas também incluem o tempo, de tal modo que, sendo esféricas, são  $t, r, \theta, \phi$ . Para além disso, é de destacar que num espaço longínquo, em relação ao objecto de massa  $M$ , o espaço-tempo é plano e que a métrica que define o exterior do objeto será a de Minkowski.

Dadas estas particularidades do espaço-tempo, caracterizado por este tipo de métrica, importa perceber que, na verdade, a métrica de Schwarzschild pode constituir uma boa aproximação dos campos gravitacionais de corpos de rotação lenta, como o Sol por exemplo (Collier, 2012), e que portanto é uma boa ferramenta para estimar órbitas de corpos. É nesta métrica e no seu efeito isotrópico (igual em todas as direções) que se centra um dos exemplos que vão ser dados, para introduzir a utilização de Python em matérias de geometria diferencial, mais à frente. Desde já, note-se que, em relatividade geral, pode ser incorreto, e levar a percepções errôneas, interpretar diretamente as coordenadas como o valor verdadeiro de quantidades

---

<sup>3</sup>Uma das métricas mais importantes conhecidas, considerada a primeira solução não trivial das equações de campo de Einstein. O nome deriva do físico alemão que a descobriu, Karl Schwarzschild (1873-1916).

físicas como o tempo ou a distância, isto é, as coordenadas não possuem significado métrico imediato (Lambourne, 2010). Esta é uma das características da relatividade geral e que contribui, entre outras, para a enorme complexidade e dificuldade que a reveste. De qualquer das formas, reitera-se que o essencial, com estes exemplos, é perceber simplesmente que existe forma de implementar geometria diferencial em Python e que isso pode ser uma porta aberta a futuras adaptações para a métrica no contexto da acústica submarina.

A métrica de Schwarzschild é dada pela seguinte equação:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.63)$$

Passando às deduções, partimos da equação geral das geodésicas em espaços de Riemann, Equação (4.62), onde  $\lambda$  é o parâmetro, já conhecido, e os índices podem tomar os valores habituais, 0, 1, 2, 3. O trabalho essencial consiste em calcular os coeficientes de conexão, dados em função do tensor métrico, pela expressão, também já conhecida, Equação (3.39), na qual  $x^0 = ct(\lambda)$ ,  $x^1 = r(\lambda)$ ,  $x^2 = \theta(\lambda)$ ,  $x^3 = \phi(\lambda)$ . De acordo com a métrica de Schwarzschild, vem:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \quad (4.64)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{GM \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{r^2 c^2} \quad (4.65)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{-GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \quad (4.66)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (4.67)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \sin^2 \theta \quad (4.68)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (4.69)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (4.70)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (4.71)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \quad (4.72)$$

Os restantes coeficientes são nulos. Vamos então determinar as 4 equações geodésicas, uma para cada uma das coordenadas. A primeira vem:

$$\begin{aligned} x^0 = ct &\Rightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{01}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{10}^0 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + 0 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2(ct)}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \frac{d(ct)}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{GM}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{dr}{d\lambda} \frac{d(ct)}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \quad (4.73) \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Como exemplo de cálculo dos coeficientes, faremos a demonstração para  $\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0$ . Vem então:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{0\sigma} \left( \frac{\partial g_{\sigma 1}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{01}}{\partial x^\sigma} \right) \quad (4.74)$$

Mas, sendo  $g^{\mu\nu}$  de Schwarzschild diagonal, também é  $g^{\nu\sigma} \neq 0$  só para  $\sigma = 0$  e  $g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$ , pelo que sobra:

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + 0 \right) = \frac{1}{2} g^{00} \left( \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \quad (4.75)$$

e  $g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \Rightarrow g^{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}$ , porque a matriz deste  $g_{\mu\nu}$  é diagonal. Logo:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left[0 - \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{-1}{r^2}\right)\right] = \\
 &= \frac{GM}{c^2 r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} = \frac{2GM}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Voltando às coordenadas e às respectivas equações:

$$\begin{aligned}
 x^1 = r(\lambda) &\Rightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^1 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} + \Gamma_{11}^1 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{22}^1 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \\
 &+ \Gamma_{33}^1 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 0 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^1}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^1 \left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dx^2}{d\lambda}\right)^2 + \Gamma_{33}^1 \left(\frac{dx^3}{d\lambda}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}{r^2 c^2} \left(\frac{d(ct)}{d\lambda}\right)^2 + \\
 &+ \frac{-GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left[-r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)\right] \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \\
 &+ \left[-r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \sin^2 \theta\right] \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \\
 &- r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \\
 &- r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

Agora para a terceira coordenada:

$$\begin{aligned}
 x^2 = \theta(\lambda) &\Rightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^2 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + \Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{21}^2 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} + \Gamma_{33}^2 \left( \frac{dx^3}{d\lambda} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \tag{4.78} \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^2}{d\lambda^2} + 2 \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} + (-\sin \theta \cos \theta) \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d\theta^2}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 = 0
 \end{aligned}$$

Por último, temos a quarta, que vem:

$$\begin{aligned}
 x^3 = \phi(\lambda) &\Rightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^3 \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + \Gamma_{13}^3 \frac{dx^1}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + \Gamma_{31}^3 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^1}{d\lambda} + \Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + \Gamma_{32}^3 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 x^3}{d\lambda^2} + 2\Gamma_{23}^3 \frac{dx^2}{d\lambda} \frac{dx^3}{d\lambda} + 2\Gamma_{32}^3 \frac{dx^3}{d\lambda} \frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \tag{4.79} \\
 &\Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + 2 \frac{1}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0
 \end{aligned}$$

Estas 4 equações diferenciais, sobre as 4 variáveis, uma vez resolvidas, em ordem ao parâmetro afim escolhido  $\lambda$ , darão a trajetória do corpo que se desloca em redor do corpo central, esférico, sem rotação nem carga. Como era de esperar, estas demonstrações são complicadas e extensas, pelo que será conveniente adoptar uma abordagem computacional.

### Notas sobre Trajetórias Geodésicas com a Métrica de Schwarzschild

Antes de passar para alguns exemplos práticos propriamente ditos com a métrica de Schwarzschild, vai-se comparar equações de trajetórias geodésicas de corpos com massa (por mais pequena que seja) em Relatividade Geral, supondo uma métrica de Schwarzschild, com as equações correspondentes da Mecânica Newtoniana. Os desenvolvimentos que se seguem têm como base os apontamentos do orientador desta tese. Nesse sentido, pretende-se tomar o limite de massa nula do corpo em órbita e interpretar o resultado como sendo a trajetória geodésica de um

raio de luz, já que um fóton tem massa ("em repouso") nula. Este cálculo será aproximado e obteremos só o desvio angular de um raio de luz.

Começamos então por uma equação geral de uma geodésica num espaço de Riemann, idêntica à Equação (3.55) e à Equação (4.62), com os índices a poderem tomar os valores que já sabemos, 0, 1, 2, 3, 4, por ser um espaço 4D.

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0 \quad (4.80)$$

Aos corpos de massa não-nula correspondem geodésicas tipo-tempo, ou seja, ao longo das quais  $ds^2 > 0$  e a raios de luz (fotões) correspondem geodésicas ao longo das quais  $ds^2 = 0$ , as chamadas geodésicas nulas. No primeiro caso, o parâmetro geodésico  $\lambda$  escolhido para parametrizar a curva, pode ser o tempo próprio  $\tau$  do corpo maciço ( $d\lambda \rightarrow d\tau$ ) ou o próprio elemento de linha  $ds$  (já que  $ds = cd\tau$ ). No caso da luz  $\lambda$  não pode ser, obviamente, o tempo próprio  $\tau$ , uma vez que para a luz o tempo próprio não varia ( $d\tau = 0$ ) e  $ds = 0$ . Em Relatividade diz-se que o intervalo espaço-temporal entre dois eventos percorridos por um raio de luz é nulo e portanto, claro que a geodésica é nula. Com efeito, para este caso, o parâmetro diz-se afim, tal como já foi visto no Capítulo 3 na dedução da equação geodésica.

Para cada um dos 4 possíveis valores de  $\alpha$  na equação das geodésicas, Equação 4.62, obtemos a correspondente equação diferencial, calculando os coeficientes de conexão necessários. Estes são dados, como já vimos, também no Capítulo 3, por uma função do tensor métrico apropriado à situação física em questão - no presente caso, a métrica de Schwarzschild - pela expressão:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) \quad (4.81)$$

As 4 equações que obtemos da equação das geodésicas para a métrica de Schwarzschild são, em coordenadas esféricas e com  $M$  a representar a massa do objeto esférico em torno do qual outro objeto orbita e  $G$  a constante de gravitação universal, as seguintes, como já foi demonstrado:

$$x^0 \equiv t \Rightarrow \frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2GM}{r^2c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \quad (4.82)$$

$$x^1 \equiv r \Rightarrow \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + \frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \frac{GM}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left[ \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right] \quad (4.83)$$

$$x^2 \equiv \theta \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\theta}{d\lambda} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 = 0 \quad (4.84)$$

$$x^3 \equiv \phi \Rightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \cot \theta \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (4.85)$$

A nossa estratégia consistirá em tratar as equações da trajetória de um corpo com massa, utilizando o parâmetro tempo próprio,  $\tau$ , no lugar do afim  $\lambda$ , e obtidas as equações finais, compará-las com as correspondentes da gravitação newtoniana e seguidamente tomar o limite de massa nula do corpo orbital, o que nos dará o comportamento de um raio de luz.

Vamos então recorrer à equação diferencial obtida para a coordenada azimutal  $\phi$  e escolhemos, sem perda de generalidade, um plano equatorial qualquer do corpo esférico central (dada a sua simetria esférica). Considera-se então  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e vem:

$$x^3 \equiv \phi \Rightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} + 2 \cot \left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{d\theta}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0 \quad (4.86)$$

Tomamos agora, como parâmetro, o tempo próprio  $\tau$  do corpo de massa não-nula em órbita a um qualquer objeto esférico de massa  $M$ . O tempo próprio, em relatividade, é o nome que se dá ao tempo do relógio do próprio corpo em "viagem". Fica então:

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0 \quad (4.87)$$

Pretende-se resolver esta equação em ordem a  $\frac{d\phi}{d\tau}$  e por conseguinte, escrevemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi}{d\tau} = y(\tau) &\Rightarrow \frac{dy}{d\tau} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} y = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{d\lambda} = -\frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} = -2 \frac{d}{d\tau}(\ln r) = -\frac{d}{d\tau}[\ln(r^2)] \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{d}{d\tau}[\ln y] = -\frac{d}{d\tau}[\ln(r^2)] \Rightarrow \ln y = -\ln(r^2) + \ln(J)
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Na equação anterior,  $\ln(J)$  é uma constante de integração, com  $J$  constante de igual forma. Vem:

$$\ln y = \ln\left(\frac{J}{r^2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2} \tag{4.89}$$

Deve notar-se que  $\left[\frac{d\phi}{d\tau}\right] \Rightarrow \text{seg}^{-1}$  e portanto, também  $\left[\frac{J}{r^2}\right] \Rightarrow \text{seg}^{-1}$ . Isso implica que  $[J] \Rightarrow m^2 s^{-1}$ , o que representa o momento angular por unidade de massa.

Para confirmar, a título de exemplo, que  $\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{J}{r^2}$  é solução da equação, mostra-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right) + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} \left( \frac{J}{r^2} \right) + \frac{2}{r} \left( \frac{dr}{d\tau} \right) \left( \frac{J}{r^2} \right) &= 0 \Leftrightarrow J \left( -2r^{-3} \frac{dr}{d\tau} \right) + J \frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\tau} + \frac{2}{r^3} \frac{dr}{d\tau} &= 0
 \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Passamos agora para a equação das geodésicas para a coordenada  $x^0 \equiv t$ :

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} + \left[ \frac{2GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \right] \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = 0 \tag{4.90}$$

Voltamos a substituir o parâmetro por  $\tau$  e abreviamos o termo função de  $r$  que multiplica  $\frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}$ :

$$\frac{2GM}{r^2 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \frac{dN(r)}{dr} \Leftrightarrow N(r) = \ln\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \tag{4.91}$$

Vem então:

$$x^0 \equiv t \Rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \left[ \frac{dN}{dr} \right] \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0 \quad (4.92)$$

Mas  $\frac{dN}{dr} \frac{dr}{d\tau} = \frac{dN}{d\tau}$ , visto que  $N(r) = N[r(\tau)]$ . Por isso mesmo, ficamos com:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{dN}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) + \frac{dN}{d\tau} \left( \frac{dt}{d\tau} \right) = 0 \quad (4.93)$$

Resolvendo a equação anterior em ordem a  $\frac{dt}{d\tau}$ , fica, tendo em conta a simplificação  $\frac{dt}{d\tau} = W(\tau)$ , fica:

$$\frac{d}{d\tau} W + \frac{dN}{d\tau} W = 0 \Rightarrow \frac{dW}{d\tau} = -W \frac{dN}{d\tau} \Leftrightarrow \frac{dW}{W} = -dN \Leftrightarrow \ln W = -N + \ln A \quad (4.94)$$

Em que  $A$  é uma constante. Aplicando o exponencial, com  $N(r) = \ln \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)$ , vem:

$$e^{\ln W} = W = \frac{dt}{d\tau} = A e^{-N} \Leftrightarrow \frac{dt}{d\tau} = A \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \quad (4.95)$$

Retomamos a condição básica do início  $ds^2 = c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ :

$$c^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (4.96)$$

E a métrica de Schwarzschild para trajetórias tipo-tempo, ou seja,  $ds^2 > 0$ :

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2 d\tau^2 &= \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \\ &\left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c^2 &= \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - \\ &- r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Impomos a condição  $\theta = \frac{\pi}{2}$  do plano equatorial e substituímos a relação que dá  $\frac{dt}{d\tau}$ :

$$\begin{aligned}
 c^2 &= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 A^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-2} - \\
 &\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - 0 - r^2 \left(\frac{J}{r^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c^2 &= c^2 A^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{J}{r^2}\right)^2
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Multiplicando por  $\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{+1}$ , fica:

$$\begin{aligned}
 c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) &= c^2 A^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) r^2 \frac{J^2}{r^4} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) &= c^2 A^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \frac{J^2}{r^2}
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

À semelhança do que se faz com a mecânica clássica, no problema dos dois corpos em interação gravitacional, introduz-se a função auxiliar:

$$u(r) = \frac{1}{r} \tag{4.100}$$

Sendo a órbita uma função  $[r(\tau), \phi(\tau), t(\tau)]$  ou  $[u(\tau), \phi(\tau), t(\tau)]$  na forma paramétrica. Na forma estática seria, eliminando o tempo  $t$ ,  $r(\phi)$  a forma da órbita. Entretanto, temos também, onde como já foi visto  $\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2}$ :

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} \tag{4.101}$$

Além disso,  $\frac{dr}{d\phi} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{u}\right) = (-1)u^{-2} \frac{du}{d\phi}$ , pelo que:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \left(\frac{J}{r^2}\right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} J u^2 = -J \frac{du}{d\phi} \tag{4.102}$$

Substituímos este resultado na Equação (4.99) e vem, com  $r = \frac{1}{u}$ :

$$c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2} u\right) = c^2 A^2 - J^2 \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2} u\right) J^2 u^2 \tag{4.103}$$

Derivamos a equação anterior em ordem a  $\phi$ , recordando que  $A$  é uma constante de integração (adimensional):

$$\begin{aligned}
 0 - 2GM \left( \frac{du}{d\phi} \right) &= 0 - J^2 \frac{d}{d\phi} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 - J^2 \frac{d(u^2)}{d\phi} + \frac{2GM}{c^2} J^2 \frac{d(u^3)}{d\phi} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2GM \left( \frac{du}{d\phi} \right) &= -J^2 2 \left( \frac{du}{d\phi} \right) \left( \frac{d^2u}{d\phi^2} \right) - J^2 2u \left( \frac{du}{d\phi} \right) + \\
 + \frac{2GM}{c^2} J^2 3u^2 \left( \frac{du}{d\phi} \right) - & \tag{4.104} \\
 - 2GM &= -2J^2 \left( \frac{d^2u}{d\phi^2} \right) - 2J^2 u + 6 \frac{GM J^2}{c^2} u^2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2J^2 \left( \frac{d^2u}{d\phi^2} \right) + 2J^2 u - \frac{6GM J^2}{c^2} u^2 - 2GM &= 0
 \end{aligned}$$

Dividindo tudo por  $2J^2$ , vem:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} + \frac{3GM}{c^2} u^2 \tag{4.105}$$

Sendo  $r$  a "distância" do corpo orbital ao centro do objeto esférico de massa  $M$  (na realidade é o aproximadamente, é o perímetro orbital se for circular a dividir por  $2\pi$ ).

Ora, o resultado equivalente da mecânica newtoniana para este problema físico conduz à equação, com  $J$  constante e a representar o momento angular do corpo orbital dividido pela sua massa:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{J^2} \tag{4.106}$$

Concluimos portanto que as órbitas relativistas resultam de uma equação parecida com a newtoniana mas com um termo adicional pequeno,  $\frac{3GM}{c^2} u^2$ . Este termo conduz à célebre precessão orbital dos planetas à volta do Sol, mais visível no caso do planeta Mercúrio.

No caso do raio de luz, a dada massa nula ("em repouso") do fóton, é quando fazemos  $J \Rightarrow 0$ . Consequentemente, aquela equação em  $u(r) = \frac{1}{r}$ , dará, com  $J \Rightarrow 0$ :

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0 + \frac{3GM}{c^2} u^2 = \frac{3GM}{c^2} u^2 \tag{4.107}$$

O que resulta num termo muito pequeno, pois  $c$  é muito grande. A pequenez deste termo, permite resolver a EDO não-homogénea da forma aproximada. Começamos por obter a solução geral da EDO homogénea correspondente, em que  $k$  é uma constante de iteração e representa o parâmetro de impacto  $b$ :

$$\frac{d^2 u_h}{d\phi^2} + u_h = 0 \Rightarrow u_h(\phi) = k \sin \phi \quad (4.108)$$

Ora, quando  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , vem  $u_h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{r\left(\frac{\pi}{2}\right)} = k$ . A solução geral da EDO homogénea é então  $u_h(\phi) = \frac{\sin \phi}{b}$ .

Desta forma, uma versão aproximada da EDO completa acima é obtida substituindo  $u^2$  por  $\left(\frac{\sin \phi}{b}\right)^2$  no termo da direita:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{3GM}{c^2} \frac{\sin^2 \phi}{b^2} = \frac{3GM}{c^2 b^2} (1 - \cos^2 \phi) \quad (4.109)$$

Procuramos agora uma solução particular desta EDO não-homogénea aproximada:

$$\frac{d^2 u_p}{d\phi^2} + u_p = \frac{3GM}{c^2 b^2} (1 - \cos^2 \phi) \quad (4.110)$$

Cuja solução é:

$$u_p(\phi) = \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right) \quad (4.111)$$

Consequentemente, e como é sabido, a solução geral da EDO inicial completa (mas na forma aproximada) será:

$$u(\phi) = \frac{1}{r(\phi)} = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi\right) \quad (4.112)$$

Para grandes parâmetros de impacto  $b$ , o desvio  $\phi$  será pequeno pelo que temos  $\sin \phi \simeq \phi$  e  $\cos 2\phi \simeq 1$ . Logo, para  $r \Rightarrow \infty$  ( $u \Rightarrow 0$ ) temos:

$$0 \simeq \frac{\delta \phi}{b} + \frac{3GM}{2c^2 b^2} \left(1 + \frac{1}{3} \times 1\right) = \frac{\delta \phi}{b} + \frac{2GM}{c^2 b^2} \Leftrightarrow \delta \phi \simeq \frac{-2GM}{c^2 b} \quad (4.113)$$

Visto que a trajetória do raio de luz é simétrica em relação ao centro do corpo (central) de massa  $M$ , o desvio total será o dobro deste e, em módulo, o desvio total será portanto:

$$|\Delta\phi_{total}| = \frac{4GM}{c^2b} \quad (4.114)$$

Para um raio de luz de uma estrela distante que passe rente ao sol, com  $M_{sol} = 2 \times 10^{30}kg$ ,  $b \simeq$  raio do sol  $\simeq 695,7km$ , teremos:

$$|\Delta\phi_{total}| = \frac{4 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30}}{(3 \times 10^8)^2 \times 695700 \times 10^3} = 8,52 \times 10^{-6}rad$$

O resultado corresponde a 1,76 segundos de arco.

Será interessante reforçar que a métrica de Schwarzschild pode, de facto, ser importante na descrição de campos gravitacionais de massas esféricas com rotação lenta, mostrando também o exemplo de como chegar à Lei da Gravitação Universal a partir dessa métrica. A lei da gravitação universal de Newton<sup>4</sup> é uma das leis fundamentais da física, matéria *standard*, tanto nos cursos de física como na escolaridade mais básica, e aqui pretende mostrar-se um caminho diferente para se chegar à expressão conhecida dessa lei, a partir da relatividade geral e da métrica de Schwarzschild, como demonstra Collier (Collier, 2012).

Partindo da métrica de Schwarzschild na sua forma mais vulgar:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) c^2 dt^2 - \frac{(dr)^2}{1 - \frac{2GM}{c^2r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \quad (4.115)$$

A massa  $M$  já é sabido que representa a massa do objeto esférico que origina o campo gravitacional e  $G$  é a constante de gravitação universal. Se se considerar que estamos a lidar ou com massas gravitacionais pequenas, e que portanto curvam pouco o espaço-tempo, ou com distâncias radiais muito grandes, onde a curvatura provocada pela massa se sente cada vez menos, isto é, olhando para a métrica anterior, se diminuirmos ou aumentarmos consideravelmente,  $M$  e  $r$  respetivamente, podemos dizer que estamos perante um espaço quase plano, como o de Minkowski, e a métrica aproxima-se à de Minkowski, em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta (d\phi)^2 \quad (4.116)$$

A assunção feita anteriormente permite também, por assumirmos um espaço

---

<sup>4</sup>Enunciada pelo físico Isaac Newton, a lei da gravitação universal procura explicar as órbitas dos corpos através da força de atração gravítica, responsável pela interação entre corpos.

praticamente plano, a aproximação por coordenadas cartesianas. Prosseguindo, considerando então  $\frac{2GM}{c^2 r}$  uma quantidade pequena, entende-se um campo gravitacional fraco e usa-se uma métrica da seguinte forma, em que o termo  $h_{\mu\nu}$  é um pequeno acrescento à métrica de Minkowski:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.117)$$

De facto, o espaço considera-se quase plano e não totalmente plano, daí o acréscimo do termo  $h_{\mu\nu}$  ao tensor métrico de Minkowski. Tendo em conta a equação anterior, pode então dizer-se que a componente  $g_{00}$  do tensor métrico será:

$$g_{00} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \quad (4.118)$$

Em que a unidade representa a primeira componente do tensor métrico de Minkowski normal e o termo somado toma o restante valor, ou seja,  $h_{00} = -\frac{2GM}{c^2 r}$ . Sabe-se também o potencial gravitacional de Newton  $\phi$  num dado ponto de um campo gravitacional é dado por  $\phi = \frac{-GM}{r}$ , pelo que:

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \quad (4.119)$$

Através de uma manipulação matemática da equação da geodésica, demonstrada em (Collier, 2012), sabe-se que:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \quad (4.120)$$

Na equação anterior o termo  $\frac{d^2 x^i}{dt^2}$  é a aceleração e o termo  $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = \frac{\partial \phi}{\partial \vec{r}}$ , em que  $\vec{r}$  é o vetor radial da partícula de teste, a Terra por exemplo, em coordenadas cartesianas. Substituindo  $r$  pelo vetor  $\vec{r}$ ,  $\phi = \frac{-GM}{\vec{r}}$  e a equação anterior vem:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \left( \frac{\partial \left(\frac{-GM}{\vec{r}}\right)}{\partial \vec{r}} \right) = GM \frac{\partial (\vec{r})^{-1}}{\partial \vec{r}} = - \frac{GM}{(\vec{r})^2} \hat{r} \quad (4.121)$$

A partir daqui é só aplicar a 2ª lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , com vista a obter o pretendido, a expressão para a força de atração gravítica. Logo, multiplicando ambos os lados da Equação (4.121) pela massa  $m$ , que será obviamente a massa de

uma partícula qualquer, fica-se com:

$$\frac{md^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GMm}{(\vec{r})^2}\hat{r} \quad (4.122)$$

De facto, do lado esquerdo temos a 2<sup>o</sup> lei de Newton explícita, pelo que, no final tem-se:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{(\vec{r})^2}\hat{r} \quad (4.123)$$

Na Equação (4.123) temos a expressão clássica da lei da gravitação universal de Newton, em que  $m_1$  e  $m_2$  representam as massas dos objetos que estão em interação gravítica e  $\hat{r}$  é o versor unitário na direção de  $\vec{r}$ . Portanto, como se queria demonstrar, a relatividade geral, através da métrica de Schwarzschild, pode ser útil no estudo e determinação de algumas órbitas em torno de objetos esféricos que se possam aproximar a corpos sem rotação, ou no geral, no estudo da interação gravítica entre este tipo de corpos.

Como se pode constatar, o tratamento destas equações é complicado e extenso, pelo que é aconselhável adoptar uma implementação computacional como será sugerido a seguir.

### Sugestão de Implementação Prática

Nesta parte final do trabalho pretende-se fazer um enquadramento de alguns métodos, já existentes, que podem realmente servir de ponto de partida para uma futura implementação desta metodologia, para o caso particular da acústica, em programação. A linguagem de programação Python tem vindo a ser cada vez mais predominante na esfera da programação e adoptada numa panóplia de problemas de áreas bastante diversificadas. Além do mais, é livre e devido ao desenvolvimento acentuado que tem tido nos últimos tempos, há uma crescente disponibilização de documentação, tanto ao nível da aprendizagem da linguagem, como ao nível da exemplificação em exercícios práticos. Com efeito, as sugestões que serão apresentadas são escritas em Python. A primeira abordagem é com destaque para a biblioteca "SymPy" e o seu módulo de geometria diferencial, "diffgeom", que permitem uma aplicação mais generalizada das ferramentas da geometria diferencial em Python. Seguidamente, será apresentada uma outra biblioteca, "EinsteinPy", mais direccionada para a relatividade geral, na medida em que não é tão intuitiva na liberdade de especificação e alteração dos vários objetos da geometria diferencial. Trata-se de uma biblioteca mais específica no que toca à representação direta de

órbitas planetárias ou de outros exemplos, ainda mais característicos da relatividade geral. No entanto, dá igualmente para perceber a influência da métrica, ou do tensor métrico, e da capacidade do Python em trabalhar com as várias ferramentas da geometria diferencial, desde os tensores e suas componentes aos coeficientes de conexão e traçado de geodésicas. De certo modo, enquanto o "SymPy" oferece uma interação de raiz com a geometria diferencial e portanto, não está necessariamente relacionado com a relatividade, o "EinsteinPy" é especialmente dedicado a problemas de relatividade geral e, desse modo, permite a visualização de casos típicos da relatividade de forma mais imediata.

À medida que este trabalho se foi desenvolvendo foi sendo cada vez mais notório que esta nova metodologia sugerida para o estudo de acústica submarina, em detrimento da clássica, tem uma enorme intimidade com a relatividade geral. Acima de tudo, assenta nos mesmos princípios geométricos e estabelece-se num tipo de espaço semelhante, um espaço-tempo moldado, por massas gravíticas na relatividade, e pelas variáveis acústicas na acústica submarina. Logo, o fundamental é a implementação dos vários objectos matemáticos e ferramentas, que definem a geometria diferencial, na programação. Os exemplos que se seguem são testes que realizamos, a partir de uma rotina em Python, muito simples, retirada do *website*<sup>5</sup>, que tem o propósito de calcular geodésicas a partir da métrica de Schwarzschild. Além disso, teve-se como referência uma documentação mais geral, em relação à implementação prática de geometria diferencial em Python<sup>6</sup>. É importante notar que não é necessário entrar em muito detalhe relativamente a este conceito, porque não é realmente o objetivo deste trabalho, acabando por funcionar como um mero exemplo. Porém, para perceber a utilidade deste exemplo convém ter alguma noção do que é que representa.

Passando então à rotina de Python propriamente dita e aos testes realizados, em primeiro lugar é conveniente apresentar outro dos formatos da métrica de Schwarzschild. A forma mais vulgar já foi vista (expressa em função da massa  $M$  do objeto esférico originário do campo gravitacional), contudo o exemplo, no qual foram realizados os testes, é escrito a partir de uma das formas alternativas, em que existe a relação  $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ , em que  $G$  é a constante de gravitação universal e  $r_s$  é a variável em que o problema se passa a focar, o chamado raio de Schwarzschild. A

---

<sup>5</sup><http://cardona.co/math/geodesics/>

<sup>6</sup><https://docs.sympy.org/latest/modules/diffgeom.html>

métrica tem o seguinte aspecto:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.124)$$

Tal como já foi mencionado, os testes foram realizados a partir de uma rotina de Python, já referenciada. O código foi adaptado por nós, através da adição de algumas funcionalidades úteis da geometria diferencial, pormenores simples, e reprogramado para a métrica de Minkowski, com o intuito de mostrar mais um exemplo e comprovar que é possível obter resultados a partir da alteração da métrica. Mais uma vez se reitera que o principal objetivo aqui não é, efetivamente, perceber a métrica de Schwarzschild, mas sim perceber a dinâmica do módulo de geometria diferencial do Sympy, o `diffgeom`, que permite construir um problema de raiz, com a criação do espaço de Riemann (*manifold* na rotina), com a especificação do sistema de coordenadas, com a obtenção dos coeficientes de Christoffel ou de conexão, e acima de tudo, o impacto que a mudança de métrica tem nos gráficos. Como é de esperar, dado que uma métrica representa um espaço curvo e outra representa um espaço plano.

A primeira rotina corresponde então ao traçado de geodésicas, a partir da métrica de Schwarzschild, Equação (4.124), e encontra-se disponível no Apêndice B. Inicialmente importam-se algumas bibliotecas do Python extremamente úteis para cálculos no âmbito da matemática, engenharia e física, como o "SciPy", o "NumPy" e o "SymPy", entre outros. A mais importante, no âmbito deste trabalho, é o "SymPy", na medida em que é daqui que se vai importar o módulo chave para trabalhar em geometria diferencial, o "sympy.diffgeom". As outras funcionam simplesmente como auxiliares para cálculo matemático e representação gráfica. Seguidamente, começam-se a importar as classes essenciais, que são, na realidade, os elementos da geometria diferencial. Ao importar a classe "Manifold" define-se logo as dimensões que o nosso espaço terá, neste caso 4D, assim como uma região dentro desse espaço onde se vão realizar os cálculos, através da classe "Patch". Com um espaço definido, passa-se a importar a classe "CoordSystem" para definir o sistema de coordenadas, que será o sistema de coordenadas esféricas. A partir daí são definidas as funções das coordenadas e os diferenciais das mesmas que integram o elemento de linha e a métrica consecutivamente. Além disso, como se pode observar na métrica de Schwarzschild, os coeficientes dos diferenciais das coordenadas não são triviais como nas métricas simples, Euclidiana ou mesmo Minkowskiana, pelo que é necessário especificar quantidades físicas como a velocidade da luz  $c$  e o raio de Schwarzschild

```

>>> coef_conex_0
[[[0, c**2*r_s/(2*r*(r*c**2 - c**2*r_s)), 0, 0], [c**2*r_s/(2*r*(r*c**2 - c**2*r_s)), 0, 0,
0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]], [[-c**2*r_s*(-1 + r_s/r)/(2*r**2), 0, 0, 0], [0, r_s*(-1 +
r_s/r)/(2*r**2*(1 - r_s/r)**2), 0, 0], [0, 0, r*(-1 + r_s/r), 0], [0, 0, 0, r*(-1 + r_s/r)*
sin(theta)**2]], [[0, 0, 0, 0], [0, 0, 1/r, 0], [0, 1/r, 0, 0], [0, 0, 0, -sin(theta)*cos(t
heta)]]], [[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 1/r], [0, 0, 0, cos(theta)/sin(theta)], [0, 1/r, cos(thet
a)/sin(theta), 0]]]
>>>

```

FIGURA 4.3: Disposição dos coeficientes de conexão da métrica de Schwarzschild na consola do Python

$r_s$ , através do módulo "Symbols", importado no início do código. O elemento de linha, como já é sabido, é constituído pelos diferenciais das coordenadas, portanto o passo seguinte é a obtenção dessas quantidades, com o módulo "TensorProduct". Assim, todas as quantidades necessárias para escrever a métrica estão enunciadas e pode definir-se a métrica de Schwarzschild, à qual chamamos "metric", no programa.

A métrica ou o tensor métrico é, de facto, o ponto fulcral do problema, porque é a métrica que define o espaço e, desse modo, a partir da métrica conseguimos obter o que resta para calcular a geodésica que descreve o movimento de uma partícula neste espaço. Com a métrica escrita, pode-se calcular os coeficientes de conexão através de mais uma classe do módulo "diffgeom", a classe "metric\_to\_Christoffel\_2nd"(Obtenção de coeficientes de conexão, como foi visto no Capítulo 3). Esta classe vai buscar a métrica e devolve os coeficientes de conexão, ou de Christoffel, que também entram na equação diferencial da geodésica. Se se correr o nome atribuído para os coeficientes de conexão, neste caso foi "coef\_conex\_0", na consola do Python, pode comprovar-se a listagem dos coeficientes, como se pode ver na Figura 4.3.

Existem outros módulos que se podem importar, que apesar de nesta rotina tão simples não serem relevantes, servem para mostrar a panóplia de ferramentas que a biblioteca "SymPy" nos disponibiliza, através do seu módulo "diffgeom". Por exemplo, é possível obter as componentes do tensor da curvatura de Riemann, ou até os do tensor de Ricci, sempre a partir da métrica que é o que se pretende. Na Figura 4.4 podem ver-se as componentes do tensor de Riemann, para a métrica de Schwarzschild, listadas.

Após a obtenção dos coeficientes de conexão, procede-se à atribuição de valores às quantidades físicas  $c$  e  $r_s$ . Na velocidade da luz vamos deixar sempre  $c = 1$  para generalizar as unidades todas em metros. É habitual em relatividade proceder a esta reformulação de unidades, porque a velocidade da luz é a referência e o limite de velocidade para tudo, logo atribuindo a unidade a  $c$ , todas as coordenadas, inclusive



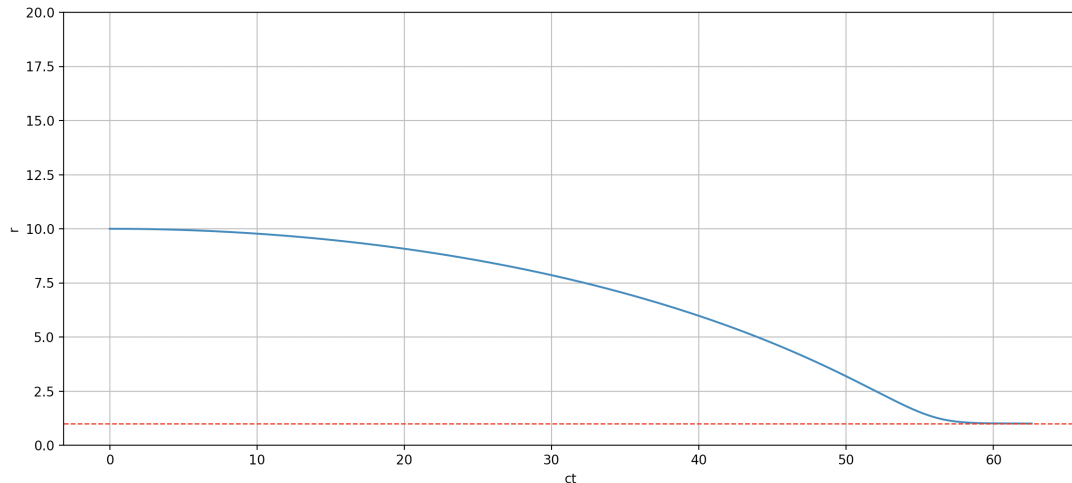


FIGURA 4.5: Geodésica que começa no evento de coordenadas  $(10, 0, 0, 0)$  e prossegue na direção do vetor tangente  $(1, 0, 0, 0)$ .

`t_eval.linspace(0, T, T*123 + 1))"`.

### Exemplo 1

Nestes primeiros exemplos não será mostrada a projeção polar, apenas um gráfico com um eixo a representar a coordenada tempo  $t$  e outro a representar a coordenada da distância radial  $r$ . O valor atribuído para o raio de Schwarzschild é a unidade. Considerando então a geodésica que começa no evento de coordenadas  $(0, 10, 0, 0)$  e prossegue na direção do vetor tangente  $(1, 0, 0, 0)$ , tem-se o gráfico representado na Figura 4.5

O resultado obtido é aceitável, dado que se tem um evento inicial apenas com coordenada radial, neste caso  $r = 10$ , na direção de um vetor tangente, em que a única componente não nula é a componente temporal, o que indica que esta partícula estará em queda livre, até atingir  $r$  se anular, ou seja, até cair na superfície do corpo esférico.

### Exemplo 2

Neste exemplo, numa primeira abordagem, o evento inicial tem coordenadas  $(0, 2, 0, 0)$  e a direção da geodésica é de acordo com a direção do vetor tangente de coordenadas  $(1, 0.3, 0, 0)$ . O resultado é o gráfico apresentado na Figura 4.6.

Neste caso o vetor tangente que dá a direção à geodésica já tem componente, diferente de zero, na coordenada temporal  $t$  e na coordenada radial  $r$ . Este

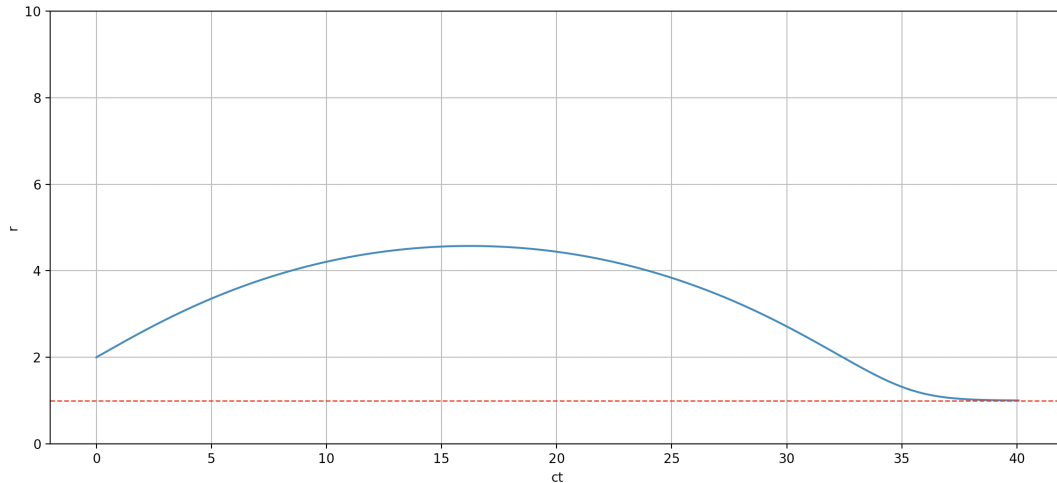


FIGURA 4.6: Geodésica que começa no evento de coordenadas  $(0, 2, 0, 0)$  e prossegue, inicialmente, na direção do vetor tangente  $(1, 0.3, 0, 0)$ .

resultado também é expectável, na medida em que representa uma eventual partícula situada no evento inicial, com  $r = 2$  apenas, que tem velocidade radial e, desse modo, inicialmente a sua trajetória mostra um afastamento radial do corpo esférico. Contudo, devido à interação gravítica exercida pelo corpo esférico, o espaço-tempo curva e a consequência é que a partícula não se move numa linha direita e acaba por descrever uma parábola e aterrar novamente na superfície do objeto esférico considerado.

Por outro lado, se se atribuir uma velocidade maior, dando um valor maior à componente radial do vetor tangente, é de esperar que o campo gravitacional do objeto não seja suficientemente grande para "atrair" a partícula, ou seja, a curvatura não é suficiente para influenciar de forma significativa a trajetória. Veja-se o exemplo, na Figura 4.7, em que se manteve o evento inicial inalterado, mas aumentou-se a componente radial da velocidade.

Como era de esperar, obteve-se uma linha quase direita a crescer radialmente e a afastar-se cada vez mais do objeto esférico.

### Exemplo 3

Um caso também muito interessante para aferir se realmente esta rotina produz resultados, de certa forma próximos da realidade, é anular o raio de Schwarzschild, isto é,  $r_s = 0$ . O que esperar desta alteração? Na verdade, se imaginarmos que o nosso objeto esférico desapareceu, na métrica a massa  $M$  ou no nosso caso o raio  $r_s$  ficam zero e o que acontece é que o espaço fica reduzido ao espaço plano de

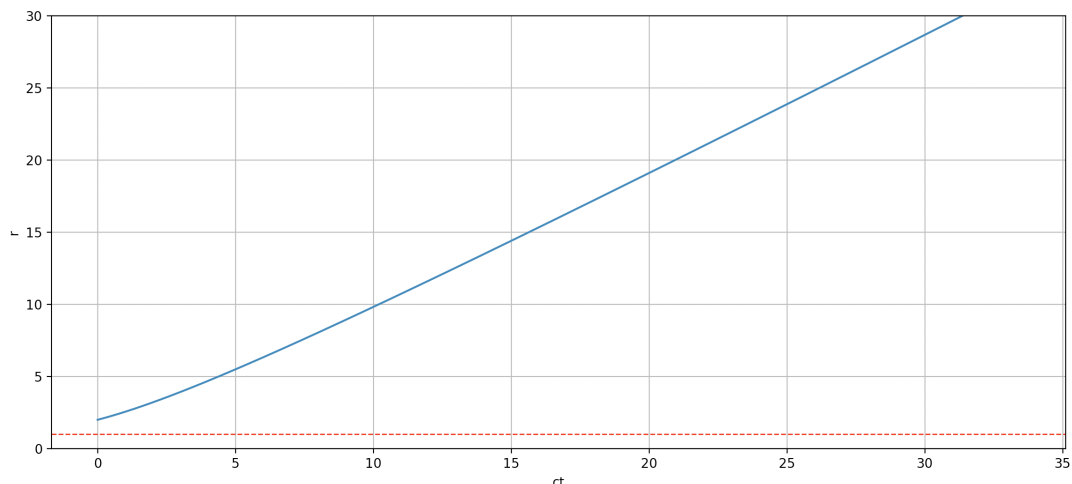


FIGURA 4.7: Geodésica que começa no evento de coordenadas  $(0, 2, 0, 0)$  e prossegue na direção do vetor tangente  $(1, 0.5, 0, 0)$ .

Minkowski. Um pouco para lembrar aquilo que já foi advertido, ao passo que em relatividade geral não podemos interpretar diretamente o valor métrico das coordenadas, este caso em que deixamos de ter corpo esférico ou no espaço de Minkowski em geral, trata-se da única situação em que as coordenadas  $t$  e  $r$  representam o valor real do tempo de relógio e da distância radial, respetivamente (Collier, 2012). Logo, anulando o raio  $r_s$  é expectável que, por passarmos a estar num espaço plano, a trajetória da partícula seja uma linha totalmente direita. Mantenham-se então os mesmos valores do primeiro caso do Exemplo 2, ou seja, um evento inicial de coordenadas  $(0, 2, 0, 0)$  na direção do vetor tangente  $(1, 0.3, 0, 0)$ , sendo a única diferença o valor de  $r_s$  que passa a ser nulo. O resultado pode ser observado na Figura 4.8.

Com efeito, o exemplo é exatamente o mesmo, apenas se considera o raio de Schwarzschild e portanto a massa do objeto nulos, mas o resultado é diferente, não é uma parábola, mas sim uma linha reta com uma certa velocidade e a afastar-se radialmente. Este exemplo é, na realidade, um dos mais importantes, devido à comprovação de que, na ausência de massa e conseqüentemente de campo gravitacional, o espaço é plano, o que nos leva a crer que estes resultados que têm vindo a ser obtidos são razoavelmente fidedignos.

#### Exemplo 4

No exemplo que se segue, inclui-se na rotina um comando que faz uma projeção polar do gráfico, o que permite visualizar uma órbita, por exemplo, se for o caso. Deste modo, considere-se uma geodésica a começar no evento de coordenadas

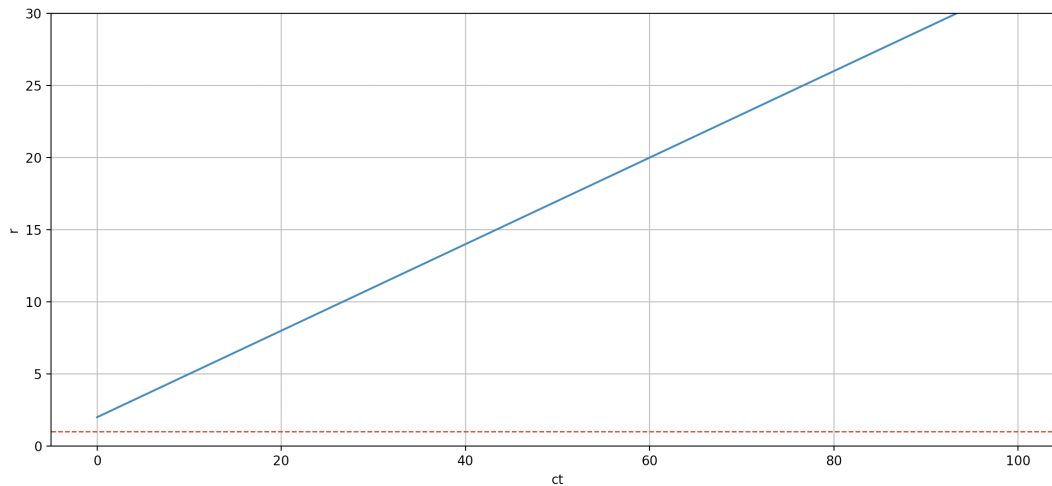


FIGURA 4.8: Geodésica que começa no evento de coordenadas  $(0, 2, 0, 0)$  e prossegue na direção do vetor tangente  $(1, 0.3, 0, 0)$  com  $r_s = 0$ .

$(0, 10, 0, 0)$ , na direção do vetor tangente  $(2, 0.1, 0.04, 0)$  e com  $r_s$  não nulo novamente,  $r_s = 1$ . O resultado é parte de uma órbita qualquer, especificada por esses valores, como se pode observar na Figura 4.9.

O que se pode observar neste caso é que, para uma certa gama de valores, a curvatura que este objeto origina no espaço-tempo, é suficiente para fazer uma partícula orbitar à sua volta. Isto não quer dizer que estes valores, que se atribuíram, sejam únicos. Na realidade, ao variar certas quantidades, como o raio de Schwarzschild por exemplo, ou até o evento inicial, é natural que se encontrem outras órbitas, a partir de valores diferentes. Não esquecer que uma das principais características da métrica de Schwarzschild é ser plana assintoticamente, o que significa, que no espaço longínquo estamos reduzidos ao espaço plano de Minkowski, e daí ser natural que geodésicas a começar em eventos, de distâncias radiais diferentes em relação à massa gravítica, tenham comportamentos distintos. A ideia é, sobretudo, ter noção de que a métrica de Schwarzschild permite estudar a curvatura do espaço-tempo, vazio, à volta de um objeto esférico, obrigando partículas que viajem na sua proximidade a descrever geodésicas, possivelmente entrando em órbita.

### Exemplo 5

Para o próximo exemplo, o código será a adaptação que realizamos da rotina original para a métrica de Minkowski, que se encontra no Apêndice C. Considero que este seja um dos testes mais importantes, porque permite aferir, mais uma vez, a credibilidade da rotina e da forma como resolve computacionalmente a geodésica, na

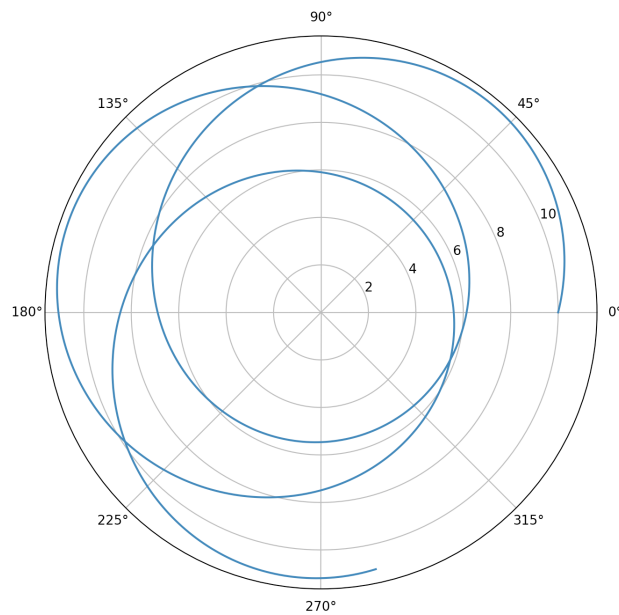


FIGURA 4.9: Geodésica que começa no evento de coordenadas  $(0, 10, 0, 0)$  e prossegue na direção do vetor tangente  $(2, 0.1, 0.04, 0)$ .

medida em que alterando totalmente a métrica, esperam-se resultados congruentes com essa alteração. Até porque, a sugestão de implementação futura da biblioteca "SymPy", e dos seus módulos adjacentes de geometria diferencial, na acústica submarina, parte justamente do pressuposto de que é a inserção da métrica, seja ela qual for, que irá ditar o comportamento das geodésicas.

A adaptação realizada alterou apenas a métrica, que na original era a de Schwarzschild, e agora passa a ser a de Minkowski, Equação (3.4). A métrica de Minkowski é realmente simples em relação à de Schwarzschild, com coeficientes  $(1, -1, -1, -1)$  no elemento de linha. Pode dizer-se que esta métrica não difere muito da, ainda mais simples, métrica Euclidiana, simplesmente tem a inclusão da coordenada temporal, por ser a métrica adoptada em relatividade especial. Portanto, alteramos a métrica para a métrica Minkowskiana, estamos num espaço plano. Os primeiros testes de comprovação dos resultados é, à semelhança de no início do caso anterior, correr os comandos que devolvem os coeficientes de conexão e as componentes do tensor de Riemann. Como se sabe, a função dos coeficientes de conexão é conectar diferentes pontos num espaço curvo, porque nesse caso os versores de base não são constantes, variam com as coordenadas, e por isso precisam de ser diferenciados. Num espaço plano isso não acontece e os versores são constantes unitários na direção dos eixos cartesianos em qualquer ponto do espaço. Por este motivo, num espaço plano como o de Minkowski, os coeficientes de conexão são todos

```
>>> coef_conex
[[[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]], [[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]]
>>> Rmn_components
[[[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]], [[0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0],
 [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0]]]
>>>
```

FIGURA 4.10: Coeficientes de conexão e componentes do tensor da curvatura de Riemann no espaço Minkowskiano.

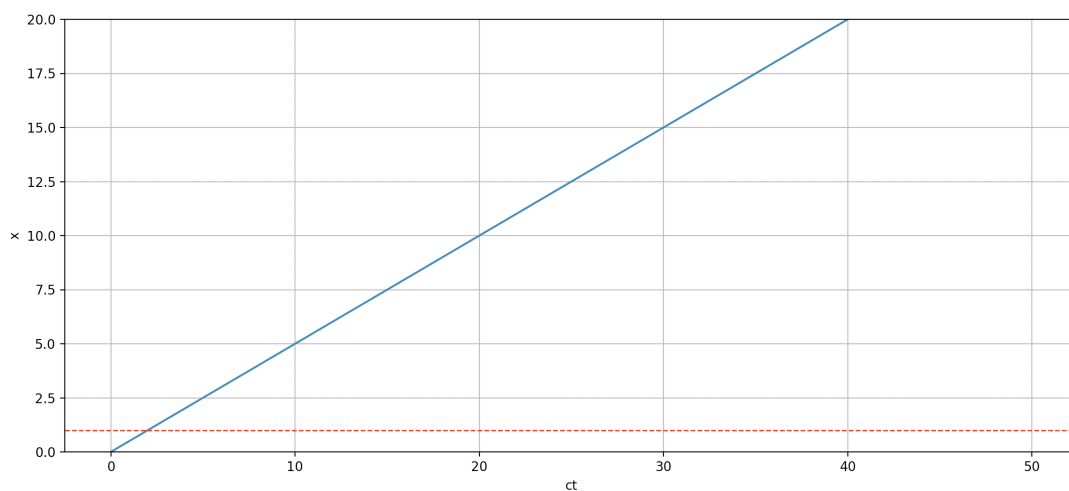


FIGURA 4.11: Geodésica com início no evento  $(0, 0, 0, 0)$  na direção do vetor tangente  $(1, 0.5, 0, 0)$  num espaço Minkowskiano.

culos, bem como as componentes do tensor da curvatura de Riemann, porque não há curvatura e nesse caso, em todos os pontos do espaço, o tensor de Riemann é zero. A métrica foi escrita em coordenadas cartesianas,  $(t, x, y, x)$  e na Figura 4.10 podem ver-se os resultados de correr os comandos, "coef\_conex" e "Rmn\_components" que devolvem os coeficientes de conexão e as componentes do tensor de Riemann.

De acordo com o previsto, todos os coeficientes de conexão e componentes do tensor de Riemann são nulos. O teste final é então traçar uma geodésica neste espaço, a fim de garantir que será uma linha direita. Considere-se um uma geodésica que comece no evento de coordenadas  $(0, 0, 0, 0)$  na direção do vetor tangente  $(1, 0.5, 0, 0)$ , representada na Figura 4.11.

O teste anterior é mais um indicativo da verosimilhança das simulações realizadas nesta rotina, uma vez que, para uma métrica de um espaço plano, temos uma "geodésica" totalmente plana. Rigorosamente já não é uma geodésica, por ser

uma linha direita.

Em suma, o foco era mostrar em que medida é que o código responde à mudança de sistema de coordenadas e, mais importante, à mudança de métrica, percebendo, graficamente e também através da disposição dos coeficientes de conexão e das componentes do tensor de Riemann nos dois casos, de que forma é que uma métrica de um espaço curvo interage com o percurso que as partículas irão seguir quando viajam numa região do espaço-tempo desse género.

### Exemplo 6

Numa segunda abordagem, tal como foi referido no início da sub-secção, será mostrado um exemplo, também derivado da métrica de Schwarzschild e da sua aplicação em alguns tipos de órbitas simples, numa outra biblioteca do Python, o "EinsteinPy". O código a partir do qual foi produzido o exemplo, assim como toda a documentação relativa à biblioteca e aos vários casos práticos da relatividade que permite implementar, foi retirado do *website*<sup>8</sup>. Como se sabe, a métrica de Schwarzschild, apesar de se aplicar a massas esféricas sem rotação, constitui-se como uma boa aproximação para os campos gravitacionais de corpos de baixa rotação, como o Sol ou a Terra (Collier, 2012). Com efeito, nos exemplos anteriores pretendeu-se mostrar, de forma mais genérica e sem nenhuma especificação de um caso particular, de que modo é que diferentes métricas influenciavam o espaço-tempo, curvando-o ou não, e no caso da métrica de Schwarzschild, que representa um espaço-tempo curvo, de que modo é que essa curvatura influencia a trajetória das partículas ou da luz, podendo, no caso das partículas, dar origem a uma órbita.

No caso que será agora enunciado, escrito através da biblioteca "EinsteinPy", pode ver-se o exemplo de uma órbita específica, a órbita da Terra em torno do Sol, a partir da métrica de Schwarzschild (Equação). Prosseguindo então para o exemplo, escrito em Python e agora na outra biblioteca, na biblioteca "EinsteinPy" (o código encontra-se no Apêndice D). Este código é um dos exemplos base, presente na documentação existente no *website* já referenciado, e as únicas alterações foram a adição de alguns comentários e explicações em português. Como já foi referido, ao passo que os exemplos anteriores partem de uma biblioteca mais específica de geometria diferencial e mais abrangente ao nível da especificação dos seus elementos, este aqui trata-se de um exemplo concreto da órbita terrestre em torno do Sol. É

---

<sup>8</sup><https://docs.einsteinpy.org/en/stable/>

importante referir que os dados que a rotina utiliza relativos à órbita em questão encontram-se disponíveis no *website*<sup>9</sup>.

A biblioteca principal é, obviamente, o "EinsteinPy" mas são usadas outras para importação de unidades e para cálculo numérico, como o "AstroPy" e o "NumPy" respetivamente. Na parte inicial, a partir da biblioteca "EinsteinPy" importam-se alguns dos módulos mais importantes e, através deles, objetos como a métrica e o sistema de coordenadas que, neste caso, serão a métrica de Schwarzschild e as coordenadas esféricas, como é de esperar. De seguida, começam a preencher-se alguns dos requisitos para definir a órbita, ou seja, especifica-se a massa do objeto esférico que gera o campo gravitacional, o Sol, assim como a posição inicial da Terra, que será o periélio<sup>10</sup>, e a sua velocidade nessa posição. Todos estes valores são retirados da base de dados referenciada atrás. O passo seguinte foi especificar o  $\lambda$  e as respetivas unidades. Por se tratar da órbita terrestre, estamos perante uma geodésica tipo-tempo e, desse modo, a parametrização é feita em função do tempo próprio. Neste caso pode aproximar-se o tempo próprio à coordenada temporal e para este exemplo define-se um ano para o  $\lambda$ , que corresponde ao período que a Terra demora a percorrer a sua órbita em torno do sol.

Definidos os parâmetros característicos da órbita em si, importam-se os módulos "Bodies" e "Geodesic", para que se possa definir a geodésica que será descrita pelo corpo em órbita e pelo corpo que gera o campo gravitacional. No final, recorre-se à representação gráfica da geodésica computacionada, isto é, da trajetória que a Terra percorre em torno do Sol, como se pode ver na Figura 4.12.

Na Figura 4.12 o ponto pequeno representa a Terra no seu periélio e o ponto grande amarelo representa o objeto esférico que gera o campo gravitacional, o Sol. O gráfico é uma projeção vista de cima, em que nos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  se pode ver a distância a que a Terra se encontra do Sol. Na reprodução do código, inspecionando os valores no gráfico resultante é possível perceber que realmente a Terra não se encontra sempre à mesma distância do Sol e, desse modo, conferir os valores correspondentes ao periélio, onde ela se encontra no exemplo, e no afélio que será o ponto onde estará mais distante do Sol. Na documentação referenciada é possível encontrar outros exemplos de códigos particulares para certos casos vulgares da relatividade geral, como por exemplo a precessão de uma órbita planetária (Ver Figura 4.13).

---

<sup>9</sup><https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>

<sup>10</sup>O periélio corresponde ao ponto da órbita em que o corpo que descreve a órbita, a Terra por exemplo, está mais próximo do Sol.

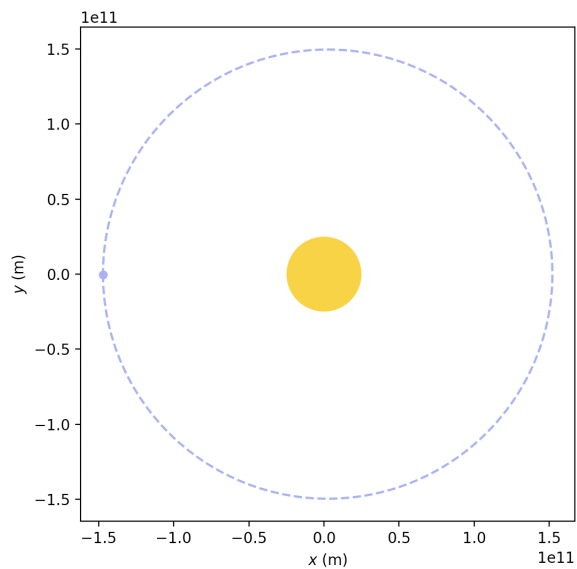


FIGURA 4.12: Órbita da Terra em torno do Sol.

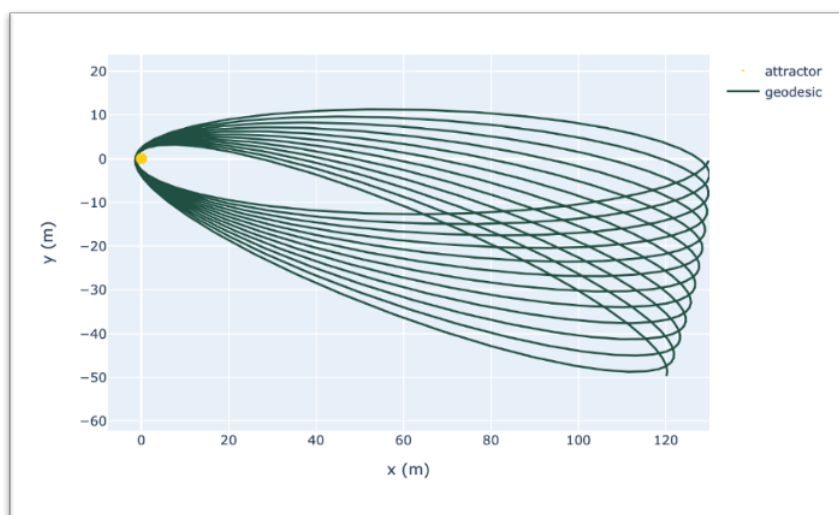


FIGURA 4.13: Precessão de uma órbita planetária.

Por conseguinte, tal como já tinha sido referido, o propósito desta biblioteca é justamente simular de forma simples e direta problemas característicos da relatividade geral, ao contrário da biblioteca usada nos exemplos anteriores, o "SymPy", que permite trabalhar de forma mais generalizada com a geometria diferencial. Em suma, é de considerar as duas bibliotecas e os exemplos mostrados, com destaque para o "SymPy", como um ponto de partida para, em trabalhos futuros, se proceder à implementação computacional da metodologia defendida neste trabalho, isto é, da aplicação dos métodos de geometria diferencial no estudo de acústica submarina, mais propriamente da propagação dos raios acústicos. A essência é perceber de que forma, a linguagem e as bibliotecas, permitem implementar os conceitos estudados da geometria diferencial que são análogos na relatividade e na acústica submarina, como foi sendo demonstrado ao longo deste trabalho.

# Conclusão

A motivação para este trabalho nasceu da conjugação de um enorme interesse pessoal pela Física com uma das temáticas mais íntimas à nossa condição de futuros Oficiais de Marinha, a Acústica Submarina. As áreas de interesse da acústica são vastas e, geralmente, pode dizer-se que são abordadas de uma forma mais clássica, assente nos princípios tradicionais de formulação e resolução de equações de onda ou de raios acústicos, para casos isolados, e sempre com algumas restrições impostas face ao comportamento real do mundo físico, no nosso caso, do mar. O factor mais preponderante é a arbitrariedade, que queremos que seja possível impor, nas correntes marítimas, ou na velocidade de um fluído no geral, porque é o que se passa, verdadeiramente, numa situação real.

Ao contrário dos métodos clássicos e mais vulgares, adoptados na investigação e no desenvolvimento de métodos numéricos para resolução de problemas e simulações, a metodologia que foi sugerida e defendida neste trabalho é uma boa proposta, não só para colmatar essa limitação, que restringe os estudos a velocidades de *background*, do fluído, constantes (ou nulas no caso das anteriores teses), mas também para encapsular diversos casos específicos, alvos de estudo na acústica, numa só expressão geral e completa, encontrada através de um caminho diferente, que dá primazia à geometria diferencial e à análise tensorial. Esta alternativa resulta de uma inspiração na teoria da relatividade e na forma como a geometria diferencial e a análise tensorial a sustentam. Consequentemente, o método de aplicação da geometria diferencial na acústica submarina, mais concretamente na aproximação por raios acústicos, vai buscar os conceitos basilares da geometria diferencial e dá-lhes um novo sentido na caracterização de um fluído, neste caso de um meio aquático. Se se encarar uma região de um oceano como o espaço-tempo da relatividade, isto é, um espaço pseudo-Riemanniano, a geometria de Riemann e os objetos matemáticos associados aparecem por si só.

Em suma, a aplicação desta metodologia resulta numa evidente analogia entre os elementos da geometria diferencial e os elementos da acústica submarina, de tal forma que as vantagens, face aos métodos clássicos, se tornam claras:

- Génese de uma métrica acústica incorporando as variáveis acústicas de *background*, incluindo a velocidade do som, e suas variações. São portanto, funções do espaço e do tempo. Deste modo, podem contabilizar-se correntes marítimas de velocidades variáveis, e a métrica define completamente o espaço;
- Aparecimento de uma só expressão generalizada que encapsula os diversos casos de referência da acústica submarina, o caso mais geral linearizado focado nas perturbações das variáveis acústicas que representam as ondas sonoras, um caso mais simples, semelhante ao anterior, mas considerando o fluido irrotacional e um caso, mais complicado, no qual não se separam as perturbações das componentes não perturbadas do fluido e se mantem a não-linearidade das equações originais dos fluidos, sendo o caso mais geral, por se aplicar ao campo inteiro e não sofrer aproximações;
- Facilidade visual em perceber qual o caso de interesse, porque para cada caso há uma métrica diferente e substituindo essa métrica na equação diferencial de 2º ordem geral, fica-se automaticamente com a equação de interesse. Destaque para a funcionalidade da métrica que com a simples mudança de componentes, nos permite ir diretamente para a expressão que define o problema em questão;
- Demonstração de que, pelo método dos raios acústicos, é possível ter equação da geodésica, semelhante à que se encontra na relatividade, que descreve a propagação do som num espaço, que pode ou não ser curvado, dependendo da métrica adoptada. Da mesma forma que a matéria e a energia curvam o espaço-tempo na relatividade, também as variáveis acústicas de fundo curvam o espaço e codificam essa curvatura na métrica precisamente. Logo, os raios sonoros percorrem uma trajetória que é influenciada por essa curvatura e se traduz numa geodésica;

Finalmente, considera-se que poderá ser de grande interesse, em futuros trabalhos e investigações, dar continuidade ao estudo desta metodologia e ponderar uma possível implementação computacional. Nos dias de hoje a ciência encontra-se cada vez mais indissociável da tecnologia e das técnicas de programação, com grande relevo para a aplicação da física e da matemática através de programas. Posto isto, este trabalho termina com essa proposta, no âmbito da metodologia que é aqui defendida e obviamente, da geometria diferencial. Nesse sentido, foram mostrados alguns exemplos, na linguagem Python, que já existem, aplicados à relatividade, que é a área da física mais ligada à geometria diferencial. As rotinas foram adaptadas por nós para realizar testes em métricas diferentes, uma referente a um espaço-tempo curvo e outra referente a um espaço-tempo plano, e perceber a dinâmica

do código e se realmente a alteração de métrica tinha impacto nos resultados das geodésicas traçadas. De facto, foi possível notar que a curvatura da primeira métrica influenciava a trajetória das partículas, e que no caso da métrica plana, as trajetórias eram linhas direitas, o que leva a crer que a biblioteca "SymPy", e o seu módulo "diffgeom" permitem realmente, de raiz, especificar um espaço, atribuir um sistema de coordenadas, criar métricas, e portanto, poderão eventualmente ser aplicados ao caso da acústica submarina.

Ao nível de dificuldades sentidas durante a realização deste trabalho, pode dizer-se que a adaptação à complexidade da relatividade, especial e geral, necessária para perceber a razão de ser desta nova metodologia, foi um dos momentos mais árduos. Ao mesmo tempo foi, indubitavelmente, a fase mais interessante e satisfatória, não só deste processo, mas de todo o curso em si, a nível académico. Também a matemática associada aos procedimentos e demonstrações, que foram sendo acompanhados, constituiu-se como um dos maiores desafios, pelo grau de exigência que revela. Desta forma, uma grande parte do tempo foi despendida na habituação à realidade, extremamente abstrata, da relatividade e na interpretação e assimilação dos desenvolvimentos matemáticos que permitem aplicar a geometria diferencial à acústica submarina, o que impossibilitou um maior avanço na implementação computacional da metodologia, que fica assim como sugestão para alguém que demonstre interesse em pegar neste trabalho. O propósito foi, essencialmente, iniciar o estudo da aplicação da geometria diferencial à acústica, partindo da formação recebida na Escola Naval e com o intuito de poder servir de ponto de partida para trabalhos posteriores de Acústica Submarina, com métodos mais exigentes, mas também mais poderosos. Não menos importante, consideramos que este trabalho pode ser útil para, nas cadeiras de acústica submarina, introduzir outra forma de estudar acústica e métodos diferentes, que no meu entender, se tornam até mais ambiciosos que os tradicionais.



# Bibliografia

- Arfken, G. (1985). *Mathematical methods for physicists* (3<sup>a</sup> ed.). Oxford, Ohio, Academic Press.
- Bergman, D. (2005). *Application of Differential Geometry to Acoustics: Development of a Generalized Paraxial Ray-Trace Procedure from Geodesic Deviation* (Report). Naval Research Laboratory. Washington DC.
- Bergman, D. R. (2018). *Computational Acoustics: Theory and Implementation* (1<sup>a</sup> ed.). John Wiley & Sons.
- Collier, P. (2012). *A Most Incomprehensible Thing* (1<sup>a</sup> ed.). Incomprehensible Books.
- Crawford, F. (2011). *Waves (In SI Units): Berkley Physics Course* (1<sup>a</sup> ed.). McGraw Hill Education.
- Deus, J., Pimenta, M., Noronha, A., Peña, T. & Brogueira, P. (2014). *Introdução à Física* (3<sup>a</sup> ed.). Lisboa, Escolar Editora.
- Etter, P. (2018). *Underwater Acoustic Modeling and Simulation* (5<sup>a</sup> ed.). Boca Raton, CRC Press.
- Kornhauser, E. (1953). Ray Theory for Moving Fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
- Lambourne, R. J. A. (2010). *Relativity, Gravitation and Cosmology* (1<sup>a</sup> ed.). Cambridge University Press.
- Landau, L. & Lifshitz, E. (1976). *Mechanics* (3<sup>a</sup> ed.). Butterworth-Heinemann.
- Landau, L. & Lifshitz, E. (1987). *Fluid Mechanics* (2<sup>a</sup> ed.). Pergman Books.
- Lawrence, E. K., Austin, R. F., Alan, B. C. & James, V. S. (1982). *Fundamentals of Acoustics* (3<sup>a</sup> ed.). John Wiley & Sons.
- Porter, M. B. (2011). *The BELLHOP Manual and User's Guide: PRELIMINARY DRAFT*. Heat, Light, e Sound Research, Inc.
- Rodríguez, O. (2008). *General Description of the BELLHOP Ray Tracing Program*. Versão 1.0. FCTUA.
- Taylor, E. & Wheeler, J. (1992). *Spacetime Physics* (2<sup>a</sup> ed.). New York, W. H. Freeman; Company.
- Ugincius, P. (1970). Ray Acoustics and Fermat's Principle in a Moving Inhomogeneous Medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*.
- Urlick, R. (2013). *Principles of Underwater Sound* (3<sup>a</sup> ed.). Peninsula Publishing.

- Visser, M. (1993). Acoustic Propagation in Fluids: An Unexpected Example of Lorentzian Geometry. URL:<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311028v1>
- White, R. (1973). Acoustic Ray Tracing in Moving Inhomogeneous Fluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*.

# Apêndice A - Demonstrações Auxiliares do Capítulo 4

## Linearização das Equações da Mecânica dos Fluidos e Obtenção do Tensor Métrico Acústico

No seu formato inicial, não linear, as equações da continuidade e de Euler têm o seguinte aspeto, respetivamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \end{cases}$$

As ondas acústicas são associadas às perturbações de densidade, pressão e velocidade,  $\rho_1$ ,  $p_1$  e  $\vec{v}_1$  em relação aos valores de equilíbrio sem a propagação do som,  $\rho_0$ ,  $p_0$  e  $\vec{v}_0$ . Escrevemos então:

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}, t) + \rho_1(\vec{r}, t) \\ p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}, t) + p_1(\vec{r}, t) \\ \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(\vec{r}, t) + \vec{v}_1(\vec{r}, t) \end{cases}$$

A partir daqui é possível começar a simplificação e linearização das equações clássicas dos fluidos para situações específicas. A primeira aproximação consiste em tornar o termo de arrastamento, variação espacial da velocidade do fluido, termo  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ , tão pequeno que será desprezável e a equação de Euler simplificará, não considerando forças gravitacionais, e ficará na seguinte forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Além disso, considerando o fluido irrotacional,  $\nabla \times \vec{v} = 0$ , pode introduzir-se um campo escalar de velocidades, isto é, um campo escalar  $\psi(\vec{r}, t)$ , de tal modo que passamos a ficar com a relação:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \nabla \psi(\vec{r}, t)$$

Com esta consideração podem simplificar-se as duas equações dos fluidos. Começando pela equação da continuidade e tendo em conta as contribuições das

variáveis perturbadas, tem-se, com  $\rho_0$  fixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho_1) + \nabla \cdot [(\rho_0 + \rho_1)\vec{v}] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Como as variações resultantes da perturbação são muito pequenas.  $\rho_1 \ll \rho_0$ , tem-se  $\nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) \gg \nabla \cdot (\rho_1 \vec{v}) \equiv (\nabla \rho_1) \cdot \vec{v} + \rho_1 (\nabla \cdot \vec{v})$ , em que  $(\nabla \rho_1) \simeq 0$ , e portanto vem:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) \simeq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

Além das duas equações já mencionadas, há ainda uma terceira equação fundamental da mecânica dos fluidos, a equação de estado, que nos dá a dependência das variações de pressão com as variações de densidade:

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \rho_1$$

Pegando na equação anterior e multiplicando por este termo  $\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_1 \right] + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} [p_1] + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

Da termodinâmica dos fluidos tem-se que  $\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} = c^2$ , em que  $c$  é a velocidade das perturbações acústicas no fluido em estudo, isto é, a velocidade do som na água. Para finalizar a simplificação da equação da continuidade, lembrando que agora  $\vec{v} = \nabla \psi$ , a equação da continuidade simplificada e linear vem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} \rho_0 (\nabla \cdot \vec{v}) &\simeq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \rho_0 (\nabla \cdot \nabla \psi) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla^2 \psi &= 0 \end{aligned}$$

Quanto à equação de Euler, excluindo o termo de gravitação como já foi referido, pode-se começar por simplificar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 0 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= \frac{-1}{\rho_0 + \rho_1} \nabla(p_0 + p_1) \simeq \frac{-1}{\rho_0} (\nabla p_0 + \nabla p_1) \end{aligned}$$

O campo de pressão, na sua versão não perturbada, sofre pequenas variações espaciais,  $\nabla p_0 \simeq 0$  e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &\simeq -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \psi) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \simeq 0 \\ \Leftrightarrow \nabla \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_1 \right) &\simeq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_1 &= 0 \end{aligned}$$

Através das sucessivas simplificações que foram sendo feitas, chega-se finalmente às equações clássicas da mecânica dos fluídos nas suas versões lineares relativamente às variáveis perturbadas:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} + c^2 \rho_0 \nabla^2 \psi = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} p_1 = 0 \end{cases}$$

Se se isolar o termo  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  na segunda e se proceder à derivação temporal tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0} p_1 \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} (-c^2 \rho_0 \nabla^2 \psi)$$

Pelo que, a conjugação das duas resulta na habitual equação de onda linear, neste caso em função do campo escalar de velocidade que foi definido no princípio como sendo uma das simplificações.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= c^2 \nabla^2 \psi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \end{aligned}$$

De qualquer das formas, podem continuar-se a realizar aproximações às

equações da mecânica dos fluidos com vista a obter outro par de equações diferenciais de 1º ordem que servirão de ponto de partida para a obtenção, posteriormente, de equações diferenciais de 2º ordem, onde será possível identificar um operador diferencial comum e começar a abordagem pela geometria diferencial.

Voltando à equação original da continuidade e introduzindo a relação  $d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp$ , podemos também dizer que  $d\rho = \frac{1}{c^2} dp$ , visto que  $d\rho$  e  $dp$  serão pequenas variações em torno dos valores de equilíbrio da densidade e da pressão respetivamente. Deste modo, no que toca à equação da continuidade original, obtêm-se as seguintes aproximações, com  $\nabla \rho = \frac{1}{c^2} \nabla p$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = (\nabla \rho) \cdot \vec{v} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

A assunção feita na última linha do parágrafo anterior pode ser demonstrada com o exemplo da dimensão espacial  $x$ . Sabendo que  $\nabla \rho = \hat{x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \rho}{\partial z}$  temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

Sendo assim, pode dizer-se que:

$$\begin{aligned} \hat{x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \hat{x} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \hat{y} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{z} \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial z} = \\ &= \frac{1}{c^2} \left( \hat{x} \frac{\partial p}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial p}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

De facto, pelos exemplos anteriores, podemos concluir que  $\nabla \rho = \frac{1}{c^2} \nabla p$ , como era suposto. Agora já podemos usar estas propriedades e continuar a manipular a equação da continuidade até chegar a uma nova aproximação. Procedendo à substituição na equação da continuidade ficamos com:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + \left[ \frac{1}{c^2} (\nabla p) \right] \cdot \vec{v} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

No lado esquerdo temos apenas a variável densidade  $\rho$  e no lado direito

temos as variáveis densidade e pressão  $p$ . Multiplicando a última expressão por  $c^2(\vec{r})$  vem:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\nabla p) \cdot \vec{v} + c^2 \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$

Com efeito, temos mais uma versão da equação da continuidade, também linear, mas contendo a variável pressão em cada ponto, além da densidade e da velocidade de fluido, ao contrário da original que é escrita apenas em função da velocidade e da densidade.

A equação de Euler sofrerá um tratamento semelhante, com as forças externas, por exemplo gravíticas, conservativas, pelo que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] &= -\nabla p + \rho \vec{g} \end{aligned}$$

Na próxima abordagem, com base na relação já mencionada  $\frac{\partial p}{\partial \rho} d\rho = \frac{1}{c^2} dp$ , substituímos os diferenciais  $dp$  e  $d\rho$  e passamos a usar as perturbações  $p_1$  e  $\rho_1$  para escrever as equações. Ou seja, o ponto de partida agora é usar a igualdade  $p_1 = \frac{1}{c^2} \rho_1$ . Aplicando estas condições à equação da continuidade, na sua última versão aproximada, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (p_0 + p_1) + [\nabla (p_0 + p_1)] \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + c^2 (\rho_0 + \rho_1) \nabla \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_1 + \\ c^2 [\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_1] &= 0 \end{aligned}$$

Desprezando os termos de 2º ordem, isto é, os termos  $(\nabla p_1) \cdot \vec{v}_1$  e  $\rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_1$ , sobra:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + \\ + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + c^2 [\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 + \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0] \simeq 0 \end{aligned}$$

Interessa agora separar os termos perturbados dos não perturbados, uma vez que as ondas acústicas estão associadas aos perturbados como já foi referido. Fica então:

$$\left[ \frac{\partial p_0}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 \right] + \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + c^2 (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0) \simeq 0$$

Do lado esquerdo, dentro dos parêntesis retos, temos termos não perturbados. Também para os termos não perturbados exclusivamente, já tinha sido encontrada a seguinte equação:

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_0 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0$$

Aplicando essa equação ao desenvolvimento que tem vindo a ser feito, anulamos o termo dos parêntesis retos e ficamos, tal como é pretendido, apenas com os termos perturbados, que são os que realmente estão associados à perturbação causada pela onda acústica:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + (\nabla p_1) \cdot \vec{v}_0 + c^2 (\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{v}_0) \simeq 0$$

A equação de Euler será abordada da mesma forma.

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] &= -\nabla p + \vec{F} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\rho_0 + \rho_1) \left[ \frac{\partial (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)}{\partial t} + ((\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot \nabla) (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \right] &= -\nabla (p_0 + p_1) - \nabla \Psi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\rho_0 + \rho_1) \left[ \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_1 \right] &= \\ = -\nabla p_0 - \nabla p_1 - \nabla \Psi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[ \rho_0 \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right) + \nabla p_0 + \nabla \Psi \right] + \rho_1 \left( \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right) + \\ + \rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \nabla p_1 &\simeq 0 \end{aligned}$$

O  $\vec{F}$  são as tais forças conservativas, já mencionadas e que podem, portanto, ser escritas como um gradiente de uma função potencial  $\vec{F} = -\nabla \Psi$ . Voltando ao desenvolvimento da equação de Euler, em que também se negligenciaram os termos

de ordem superior, à semelhança dos casos anteriores, anulando o 1º termo que é a equação de base, não perturbada e dá zero, os parêntesis retos, ficamos tal como no caso anterior, com a versão perturbada, agora da equação de Euler.

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \nabla p_1 \simeq 0$$

Neste momento já temos as duas equações dos fluidos nas suas novas versões. É aqui que é introduzido o operador diferencial através da abreviatura, para reduzir as expressões,  $\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \equiv D_0$ , ou seja,  $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot (\nabla f) \equiv D_0 f$ , a título de exemplo, sendo  $f$  um campo escalar. Pela mesma razão, temos também:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \right] \vec{v}_0 = D_0 \vec{v}_0 \\ \frac{\partial p_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) p_1 = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \right] p_1 = D_0 p_1 \end{cases}$$

Da mesma forma, importa notar que  $(\vec{v}_0 \cdot \nabla) p_1$  é o mesmo que escrever  $\vec{v}_0 \cdot (\nabla p_1)$ . Passando a aplicar este novo operador diferencial nas equações que temos vindo a tratar, assumindo também que  $c^2 \rho_1 = p_1$ , pois de trás já se sabe que  $dp = c^2 d\rho$ , com  $dp \simeq p_1$  e  $d\rho \simeq \rho_1$ , reagrupamos a equação da continuidade, na sua última forma encontrada, e ficamos com:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial p_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot (\nabla p_1) + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 \right] + [(\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + p_1 (\nabla \cdot \vec{v}_0)] = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + [(\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + p_1 (\nabla \cdot \vec{v}_0)] = 0 \end{aligned}$$

A mesma substituição será aplicada na equação de Euler, na sua última versão claro, ficando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left[ \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 \right] + \nabla p_1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \rho_1 [D_0 \vec{v}_0] + \rho_0 [D_0 \vec{v}_1 + (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0] + \nabla p_1 = 0 \end{aligned}$$

Dividindo tudo por  $\rho_0$  e recorrendo novamente à relação entre as variáveis densidade e pressão perturbadas,  $c^2 \rho_1 = p_1$ , vem:

$$\begin{aligned} & \left[ D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right] + \left[ (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{\rho_1}{\rho_0} D_0 \vec{v}_0 \right] = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[ D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right] + \left[ (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{p_1}{c^2 \rho_0} D_0 \vec{v}_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

Como já foi mencionado, a grande vantagem de chegar a estas versões bastante trabalhadas matematicamente das duas equações fundamentais da mecânica dos fluidos, a da continuidade e a de Euler, é que são escritas em termos daquilo que mais nos interessa, as componentes perturbadas das variáveis do fluido, e mais importante, é que essas variáveis,  $p_1$  e  $\vec{v}_1$  passam a estar afetadas por operadores diferenciais de 1º ordem nos primeiros parêntesis retos, e surgem diretamente, em 1º ordem, nos segundos parêntesis retos. Ou seja, ainda antes de chegar, através de nova diferenciação, às equações de 2º ordem, já se começa a identificar o operador diferencial que será comum nas várias equações características de casos particulares de estudo. Os restantes elementos nas equações anteriores são os valores de fundo, característicos do fluido e precedentes das perturbações,  $\rho_0$  e  $\vec{v}_0$ . Deste modo, nesta fase, temos um par de equações diferenciais parciais, lineares e homogêneas, de 1º ordem.

Para além das simplificações que têm vindo a ser feitas, serão agora introduzidas mais duas igualdades que permitem reduzir as expressões, nas quais  $\vec{v}_1$  e  $p_1$  não são diferenciados.

$$\begin{cases} (\nabla p_0) \cdot \vec{v}_1 + p_1 (\nabla \cdot \vec{v}_0) \equiv F_1 \\ (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0 + \frac{p_1}{c^2 \rho_0} D_0 \vec{v}_0 \equiv \vec{F}_2 \end{cases}$$

Nas expressões anteriores  $F_1$  é escalar e  $F_2$  vetorial e, como é de esperar, a aplicação destas nas últimas formas encontradas das equações dos fluidos permite condensá-las ainda mais. Não esquecer que nesta última abordagem nada foi imposto em termos da irrotacionalidade do fluido, como tinha sido feito inicialmente para encontrar a primeira equação de onda. Aqui apenas se considerou que as perturbações são muito mais pequenas que os valores de equilíbrio  $\rho_0$ ,  $p_0$  e  $v_0$ .

$$\begin{cases} [D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + F_1 = 0 \\ [D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1] + \vec{F}_2 = 0 \end{cases}$$

Nesta fase, temos as equações prontas para ir ao encontro de novas equações, mas de 2º ordem, tal como é pretendido. À semelhança do que se pode ver no corpo principal deste trabalho, a partir das equações diferenciais anteriores podem tomar-se dois caminhos, um em que não se exige que o fluido seja irrotacional, e outro em que se assume que seja irrotacional, podendo, nesse caso, recorrer-se à aproximação por um potencial escalar de velocidades.

Nesse sentido, a primeira demonstração corresponde ao caso em que o campo de velocidades não tem necessariamente de ser irrotacional. Começando pela equação da continuidade, tem-se:

$$\begin{aligned} & [D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + F_1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 + \nabla \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0 c^2} F_1 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Agora procede-se à multiplicação, também da equação no formato  $[D_0 p_1 + c^2 \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1] + F_1 = 0$  por  $\vec{v}_0$  e seguidamente aplica-se a divergência ao resultado.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_0 c^2} (D_0 p_1 + \rho_0 c^2 \nabla \cdot \vec{v}_1) + \frac{F_1}{\rho_0 c^2} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \vec{v}_0 \frac{D_0 p_1}{\rho_0 c^2} + \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) + \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \frac{D_0 p_1}{\rho_0 c^2} + \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) + \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

Tanto o resultado anterior como o atrás deste dá zero, pelo que podemos igualar as duas expressões. E ser após igualarmos uma à outra, juntarmos tudo do lado esquerdo ficamos com uma nova expressão:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \frac{D_0 p_1}{\rho_0 c^2} + \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) + \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right] = 0$$

Agora vai-se fazer desaparecer o termo  $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1)$  a partir de uma das relações obtidas atrás, a  $[D_0 \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1] + \vec{F}_2 = 0$ , de onde podemos retirar o seguinte:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \right) \vec{v}_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right] + \vec{F}_2 = 0$$

Da anterior extrai-se o termo que pretendemos eliminar, na forma  $\frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_1 = (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 - \vec{F}_2 = 0$ . Aplicando a divergência, vem:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}_1 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1) = -\nabla \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2$$

Passamos a substituir o termo  $\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \vec{v}_1)$ , na sua nova forma, na equação diferencial que temos vindo a tratar acima.

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) + \left[ \nabla \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) + \nabla \cdot \vec{F}_2 \right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} (D_0 p_1) + \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) + \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} F_1 \right] = 0 \end{aligned}$$

Agora proceder-se-á à combinação de dois termos presentes na expressão anterior, os termos  $\nabla \cdot (\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1$  e  $\nabla \cdot \vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)$ . Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot [(v_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1] - \nabla \cdot [\vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)] = \\
& = \nabla \cdot \left[ \left( v_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}_1 \right] - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \right] = \\
& = \nabla \cdot \left( v_{0x} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial z} \right) - \\
& - \left[ \nabla \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \cdot \vec{v}_0 + (\nabla \cdot \vec{v}_0) \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \right] = \\
& = \nabla \cdot \left[ v_{0x} \left( \hat{x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + \hat{z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} \right) + v_{0y} \left( \hat{x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \hat{y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} \right) + (\dots) \right] - \\
& - \left[ v_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + (\dots) + \left( \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \right] = \\
& = \nabla \cdot \left[ \hat{x} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) + \hat{y} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \right) + (\dots) \right] - \\
& - [resto] = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) - [resto] =
\end{aligned}$$

O termo intitulado de "resto", precedido do sinal (-) e inserido dentro de parêntesis retos, que tem sido omitido por questões de condensar a demonstração corresponde ao seguinte:

$$\begin{aligned}
& v_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + v_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + \\
& + v_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Voltando ao desenvolvimento antes do esclarecimento anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} \right) + \\
&\frac{\partial}{\partial z} \left( v_{0x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) - [resto] = \\
&= \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} + v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial x \partial z} + \\
&+ \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y^2} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial z} + v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y \partial z} + \\
&+ \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial y} + v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2} - \\
&- v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial x^2} - v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial x \partial y} - v_{0x} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial x \partial z} - v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial y \partial x} - v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial y^2} - v_{0y} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial y \partial z} - \\
&- v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1x}}{\partial z \partial x} - v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1y}}{\partial z \partial y} - v_{0z} \frac{\partial^2 v_{1z}}{\partial z^2} - \\
&- \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \\
&- \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} = \\
&= \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} + \\
&+ \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \\
&- \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y}
\end{aligned}$$

De forma ordenada, em termos de sinal, fica-se com duas partes. A primeira parte precedida de sinal positivo:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial v_{0x}}{\partial y} \frac{\partial v_{1y}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial x} \right) + \\
&+ \left( \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

E a segunda parte, precedida de sinal negativo, que afeta todos os termos claro, vem:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial v_{0x}}{\partial x} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0y}}{\partial y} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial z} \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Tanto a componente precedida de sinal positivo como a precedida de sinal negativo podem ser escritas numa nova forma bastante mais condensada, onde, obviamente,  $x_i$  representa as coordenadas que neste caso, por serem cartesianas, será  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ . A positiva pode vir:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k}$$

Da mesma forma, a componente precedida de sinal negativo vem:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_k} \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_i}$$

Posto isto, podemos agora escrever os termos que estivemos a combinar da seguinte forma:

$$\nabla \cdot [(\vec{v}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1] - \nabla \cdot [\vec{v}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1)] = \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right)$$

Regressando à equação da continuidade, temos agora mais uma forma de a escrever.

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} (D_0 p_1) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} F_1 = 0 \end{aligned}$$

Continuando o cálculo anterior, temos:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) + \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) = \\
 & = -\sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} F_1 \right) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{-1}{\rho_0} \nabla p_1 + \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 - \sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right)
 \end{aligned}$$

Se chamarmos  $F_3$  ao termo  $\sum_{k=1}^3 \sum_{i \neq k} \left( \frac{\partial v_{0k}}{\partial x_i} - \frac{\partial v_{1i}}{\partial x_k} \right)$ , podemos reduzir ainda mais a expressão para a equação da continuidade e ficamos com:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 - F_3
 \end{aligned}$$

Estes novos termos que se foram introduzindo,  $F_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $F_3$ , para reduzir a expressão, encontram-se todos do lado direito da última equação, como se pode ver. É importante reparar que nesse lado direito não existem operadores diferenciais de 2º ordem a atuar sobre as variáveis de interesse, as tais componentes perturbadas  $p_1$  e  $\vec{v}_1$ . Mas esses operadores estão presentes do lado esquerdo, o que será importante para perceber, no fim, o tal operador diferencial de 2º ordem que se pode considerar comum nas diferentes equações.

Depois de encontrar uma equação diferencial de 2º ordem sem exigir que se opte pelo potencial escalar de velocidade, agora vamos encontrar uma equação diferencial para esse caso, que na verdade é mais uma simplificação como já foi referido, em que se troca o vetor velocidade  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  por um potencial escalar  $\nabla \psi(\vec{r}, t)$ . Já é sabido que esta assunção é válida apenas para fluidos irrotacionais, ou seja, com vorticidade zero (outra forma de chamar),  $\nabla \times \vec{v}_0 = 0$ . Para além disso, também as forças externas, consideradas na equação de Euler, serão desprezadas.

Portanto, retomando a equação da continuidade numa das formas já vistas, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \rho) \cdot \vec{v} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot (\nabla \rho) + \nabla \cdot \vec{v} = 0\end{aligned}$$

E, para a de Euler,

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Assumindo o fluido irrotacional,  $\nabla \times \vec{v}(\vec{r}, t) = 0, \forall(\vec{r}, t)$  e sabendo que:

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}),$$

temos:

$$\begin{aligned}\nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}),\end{aligned}$$

e substituindo na equação de Euler, vem:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Agora, na equação da continuidade, introduz-se a função auxiliar  $\sigma = \ln(\rho)$ , ficando:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\ln \rho) + (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \ln \rho) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \sigma + (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \sigma) = 0\end{aligned}$$

Voltando à equação de Euler e definindo uma função potencial  $\varphi(\vec{r}, t)$  de tal forma que  $d\psi = \frac{1}{\rho}dp \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\varphi$ , temos:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p,$$

que na sua última forma vem:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

Mas, pelas considerações que estão a ser feitas, sabemos que  $\vec{v} = \nabla\psi$ , em que  $\vec{v}$  é agora hipoteticamente irrotacional, e que  $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\varphi$ , em que  $\varphi$  é a entalpia por unidade de volume de fluido em processos isentrópicos. Também podemos escrever  $\varphi$  como função de  $\sigma$ ,  $\varphi(\sigma)$ , pois  $\varphi = \varphi(\rho) = \varphi(\ln(\sigma)) = \varphi(\sigma)$ .

Substituindo na última versão da equação de Euler.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\psi) + \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \nabla\varphi = 0 \end{aligned}$$

Com o operador gradiente em evidência, fica:

$$\nabla \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \varphi(\sigma) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \varphi(\sigma) = 0$$

Ficamos assim com as equações diferenciais parciais de 1º ordem, onde  $\vec{v} = \nabla\psi$  e  $\nabla\varphi = \frac{1}{\rho}\nabla p$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla\sigma) = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\vec{v} \cdot \vec{v}) + \varphi(\sigma) = 0 \end{cases}$$

Vai agora recorrer-se a um procedimento semelhante ao início das demonstrações, no qual distinguimos as variáveis não perturbadas e as variáveis perturbadas, admitindo então que o valor instantâneo da variável correspondia à soma do valor

perturbado ao valor de equilíbrio. Para estas novas grandezas que foram definidas, faz-se agora o mesmo:

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + \psi_1 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \nabla\psi_1 \\ \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \ln\rho_0 + \frac{1}{\rho_0}\rho_1 \end{cases}$$

Pois  $\sigma = \ln(\rho)$ ,  $d\sigma = \frac{1}{\rho}d\rho$  e  $\sigma_1 = \frac{1}{\rho_0}\rho_1$  e também, tal como já se viu de trás, podemos fazer a aproximação  $d\sigma \simeq \sigma_1$ ,  $d\rho \simeq \rho_1$ , por exemplo. Para além disso,  $\varphi(\sigma) \simeq \varphi(\sigma_0) + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}d\sigma$  e como  $d\varphi = \frac{1}{\rho}dp$  tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) d\rho = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \left( \frac{1}{\rho} d\rho \right)$$

Pelo que, no final, temos:

$$d\varphi = c^2 d/\ln\rho = c^2 d\sigma \Leftrightarrow \varphi(\sigma) \simeq \varphi(\sigma_0) + c^2 \sigma_1$$

Fazendo novamente uso do operador diferencial especial  $D_0$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla\sigma &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\sigma_0 + \sigma_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot (\sigma_0 + \sigma_1) &\simeq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{\partial\sigma_0}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_0 \cdot \nabla\sigma_0 \right] + \frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla\sigma_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\sigma_0 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\sigma_1 &\simeq 0 \end{aligned}$$

Anulando os primeiros parêntesis retos, correspondentes às equações das variáveis não perturbadas, vem:

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla\sigma_1 + (\nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\sigma_0) = 0 \Leftrightarrow D_0\sigma_1 + (\nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla\sigma_0) = 0$$

Mas,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) &= \rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) &= \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} = \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \sigma_0\end{aligned}$$

Logo  $\nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \sigma_0 = \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1)$ . Substituindo na equação da continuidade, vem:

$$D_0 \sigma_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) = 0 \Leftrightarrow D_0 \sigma_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) = 0$$

Passando à outra equação, a de Euler, fica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\psi_0 + \psi_1) + \frac{1}{2} (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \cdot (\vec{v}_0 + \vec{v}_1) + [\varphi(\sigma_0 + c^2 \sigma_1)] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} (\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1) + \varphi(\sigma_0) + c^2 \sigma_1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[ \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0 + \varphi(\sigma_0) \right] + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 + c^2 \sigma_1 &= 0\end{aligned}$$

Mais uma vez se anula a parte não perturbada e vem, com  $\vec{v}_1 = \nabla \psi_1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 + c^2 \sigma_1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1 + c^2 \sigma_1 &= 0 \Leftrightarrow \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \right) \psi_1 + c^2 \sigma_1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow D_0 \psi_1 + c^2 \sigma_1 &= 0\end{aligned}$$

Tem-se, neste momento, as duas equações dos fluidos, nas seguintes formas:

$$\begin{cases} D_0 \sigma_1 + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) = 0 \\ D_0 \psi_1 + c^2 \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

Agora, multiplica-se a da continuidade por  $\rho_0$  e a de Euler por  $\frac{\rho_0}{c^2}$ , ficando-se com:

$$\begin{cases} \rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) = 0 \\ \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 = 0 \end{cases}$$

Aplica-se o operador definido a meio do desenvolvimento,  $D_0 = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla$  à segunda equação, a de Euler:

$$\begin{aligned}
 D_0 \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) &= 0 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) - \vec{v}_0 \cdot \nabla \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Mas como  $\frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 = 0$  podemos somar o factor  $(\nabla \cdot \vec{v}_0) \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) = 0$ , pelo que:

$$\vec{v}_0 \cdot \nabla \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) + (\nabla \cdot \vec{v}_0) \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) = 0 + 0 = 0$$

Aplicando estes últimos desenvolvimentos à expressão anterior, fica:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) - \vec{v}_0 \cdot \nabla \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) - (\nabla \cdot \vec{v}_0) \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) \right] &= 0
 \end{aligned}$$

Sabe-se também que  $\nabla \cdot [\vec{v}_0 f(\vec{r})] = \vec{v}_0 \cdot (\nabla f(\vec{r})) + (\nabla \cdot \vec{v}_0) f(\vec{r})$  e como  $(\rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot \rho_0 \nabla \psi_1) = 0$ , podemos, com  $D_0 \sigma_1 = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \sigma_1$ , juntar tudo à igualdade acima:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 + \rho_0 \sigma_1 \right) \right] + \\
 + [\rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1)] &= 0
 \end{aligned}$$

Partindo a equação anterior e desenvolvendo os vários termos, vem:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \sigma_1) - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) \right] - \nabla \cdot (\vec{v}_0 \rho_0 \sigma_1) + \\
 + \rho_0 D_0 \sigma_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \nabla \psi_1) &= 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \nabla \psi_1 \right) + \\
 + \rho_0 D_0 \sigma_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \sigma_1) - \nabla \cdot (\vec{v}_0 \rho_0 \sigma_1) &= 0
 \end{aligned}$$

Extraímos os três últimos termos para lhes dar outra forma:

$$\begin{aligned}
 & \rho_0 D_0 \sigma_1 - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \sigma_1) - \nabla \cdot (\vec{v}_0 \rho_0 \sigma_1) = \\
 & = \rho_0 D_0 \sigma_1 - \rho_0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \sigma_1 \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) - (\rho_0 \vec{v}_0) \cdot \nabla \sigma_1 = \\
 & = \rho_0 D_0 \sigma_1 - \sigma_1 \frac{\partial \rho_0}{\partial t} - \sigma_1 \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) - \rho_0 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - (\rho_0 \vec{v}_0) \cdot \nabla \sigma_1 = \\
 & = \rho_0 D_0 \sigma_1 - \sigma_1 \left[ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) \right] - \rho_0 \left[ \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \sigma_1 \right] = \\
 & = \rho_0 D_0 \sigma_1 - \sigma_1 \left[ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) \right] - \rho_0 [D_0 \sigma_1] = \\
 & = \rho_0 D_0 \sigma_1 - \sigma_1 \left[ \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_0) \right] - \rho_0 D_0 \sigma_1 = 0
 \end{aligned}$$

Dado que os três últimos termos se anulam, sobram os dois primeiros e fica-se com:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \nabla \psi_1 \right) = 0$$

Onde  $\rho_0 = \rho_0(\vec{r}, t)$ ,  $c = c(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{r}, t)$ ,  $\psi_1 = \psi_1(\vec{r}, t)$  e  $\vec{v}_1$  (tal como  $\vec{v}_0$ ) é irrotacional e, por isso,  $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_1 = \nabla \psi_1$ .

Nos diversos casos anteriores, que se têm vindo a desenvolver, é conseguida a tal linearização, referida inicialmente como um dos objetivos, que é obtida através de uma separação perturbativa ( $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$ ,  $p = p_0 + p_1$ ), quer para fluídos possivelmente rotacionais, quer para fluídos irrotacionais. No final, é possível confirmar que existe algo em comum nas formas finais dos diversos casos e que se obtiveram operadores diferenciais da forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 f \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 f - a \nabla f \right)$$

Onde se tem:

$$\begin{cases} a = a(\vec{r}, t) \\ c = c(\vec{r}, t) \\ \vec{v}_0 = \vec{v}_0(\vec{r}, t) \\ f = f(\vec{r}, t) \\ D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla \end{cases}$$

É esta forma matemática geral, do operador diferencial especial visto atrás, que servirá de ponto de partida para uma formulação única, mas de aplicação geral.

Para conseguirmos chegar a essa formulação, que permitirá encapsular todos os casos e tornar o problema muito mais simples, começamos pelos casos mais simples de propagação de uma onda sobre um meio homogêneo e sem variações espaço-temporais da velocidade da propagação, neste caso da onda sonora. No entanto, o factor oscilante vai ser aqui uma função qualquer  $f(\vec{r}, t)$ , não necessariamente a perturbação da pressão no fluido em questão.

A equação de onda para este caso simples que estamos a falar, ou seja, para um campo escalar  $f(\vec{r}, t)$ , é, como já se sabe, da forma  $\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ , com  $\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$  em coordenadas cartesianas e em 3D.

Um dos aspetos interessantes deste processo é que nada nos impede de juntarmos ao operador linear espacial  $\nabla$  também a componente temporal. Na realidade, o que vamos fazer é, partindo do operador diferencial vetorial tridimensional (apenas componentes espaciais),  $\nabla$  em coordenadas cartesianas:

$$\nabla \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T,$$

passar para um operador vetorial quadridimensional que inclui a coordenada temporal:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$$

Depois é introduzida a abreviatura  $\partial_\nu$ , em que o índice grego  $\nu$  percorre os valores 0, 1, 2, 3, correspondentes, obviamente, às variáveis  $t, x, y, z$ . Tem-se dessa forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] = f(t, x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \equiv \partial_\nu[f]$$

Chamamos então ao operador  $\partial_\nu$  "gradiente 4-dimensional". O próximo passo consiste em fatorizar a equação diferencial parcial das ondas, acima escrita, na forma:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f$$

De facto,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

E também,

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Multiplicando pelo vetor linha  $[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}]$  vem:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \nabla^2 f$$

Com  $c$  constante em  $(\vec{r}, t)$ .

Naturalmente que não será esta mera substituição de notação que nos interessa. O nosso objetivo é descrever o factor diferencial geral

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 f \right) - \left( \nabla \cdot \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 f - a \nabla f \right) = \\ & = \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 \right) - \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 - a \nabla \right) \right] f = 0 \end{aligned}$$

por uma matriz que generalize o produto de operadores vetoriais e matriciais cuja composição é, como vimos atrás,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

O operador diferencial geral anterior, que se tem vindo a trabalhar, faz-nos perceber que  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\nabla$  atuam à esquerda e temos, de facto:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{a}{c^2} D_0 \right) + \nabla \cdot \left( \vec{v}_0 \frac{a}{c^2} D_0 - a \nabla \right) \right] f$$

Onde  $f(\vec{r}, t)$  é um campo escalar e  $D_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla$ , como já sabemos. Notamos que o conjunto dos operadores à esquerda, mencionados atrás, podem ser associados num só operador diferencial quadri-dimensional  $[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}]$ . Com a definição do operador  $D_0$  temos portanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) - a \nabla f \right]$$

O último parêntesis reto, que está sujeito à divergência, pode-se expandir da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) \frac{\partial f}{\partial t} + \left( v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - a \left( \hat{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ & \hat{x} \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x}^2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right] + \\ & + \hat{y} \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0y} v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \\ & + \hat{z} \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0z} v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0z} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z}^2 \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

E ao tomarmos a divergência indicada, vem:

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) - a \nabla f \right] = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x}^2 \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial x} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0y} v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y}^2 \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0z} v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0z} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z}^2 \frac{\partial f}{\partial z} - c^2 \frac{\partial f}{\partial z} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Vamos agora juntar o primeiro termo, da forma  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) \right]$ .  
Temos, para já:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla f \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]$$

Juntando então os primeiro e segundo termos, vem:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f \right] + \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f - a \nabla f \right] = \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} - (c^2 - v_{0x}^2) \frac{\partial f}{\partial x} - v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} - v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial x} - (c^2 - v_{0y}^2) \frac{\partial f}{\partial y} - v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial y} - (c^2 - v_{0z}^2) \frac{\partial f}{\partial z} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Notemos que do lado esquerdo está o conjunto de operadores  $\left[ \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]$  que podem ser dispostos segundo um vector-linha, como já vimos. Em contrapartida, os quatro termos entre chavetas podem ser vistos como as quatro componentes de um vector coluna, podendo então todo o somatório de quatro termos ser posto na forma do produto de um vector linha por um vector coluna na forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} - (c^2 - v_{0x}^2) \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial x} - (c^2 - v_{0y}^2) \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \right] \\ \left( \frac{a}{c^2} \right) \left[ v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial y} - (c^2 - v_{0z}^2) \frac{\partial f}{\partial z} \right] \end{bmatrix}$$

Podemos agora pôr o fator  $\left( \frac{a}{c^2} \right)$  fora do vetor coluna, já que é comum a todas as suas entradas e obtemos:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \left( \frac{a}{c^2} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_{0x} \frac{\partial f}{\partial t} - (c^2 - v_{0x}^2) \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_{0y} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0y} \frac{\partial f}{\partial x} - (c^2 - v_{0y}^2) \frac{\partial f}{\partial y} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial z} \\ v_{0z} \frac{\partial f}{\partial t} + v_{0x} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial x} + v_{0y} v_{0z} \frac{\partial f}{\partial y} - (c^2 - v_{0z}^2) \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Notamos de seguida que todos os 4 elementos deste vetor coluna contêm as derivadas  $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ , o que nos pode conduzir a escrever este vetor como o produto de uma matriz  $4 \times 4$  por um vetor coluna com aqueles 4 elementos, pelo que vem:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \left( \frac{a}{c^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & v_{0x} & v_{0y} & v_{0z} \\ v_{0x} & -(c^2 - v_{0x}^2) & v_{0x} v_{0y} & v_{0x} v_{0z} \\ v_{0y} & v_{0x} v_{0y} & -(c^2 - v_{0y}^2) & v_{0y} v_{0z} \\ v_{0z} & v_{0x} v_{0z} & v_{0y} v_{0z} & -(c^2 - v_{0z}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Chegamos portanto à re-expressão da expressão geral atrás obtida,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f \right] - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \left( \frac{a}{c^2} \right) D_0 f - a \nabla f \right]$$

Incorporando o campo escalar de interesse  $f(\vec{r}, t)$ , representando quer a perturbação de pressão  $p_1(\vec{r}, t)$ , quer o campo de velocidade  $\psi(\vec{r}, t)$ , ou mesmo outras grandezas associáveis a ondas sonoras ( $\vec{v}_1$ , por exemplo), e aparecendo no lado esquerdo de equações diferenciais de 2º ordem que, recordando, são as seguintes:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} D_0 p_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \frac{\vec{v}_0}{\rho_0 c^2} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1 \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{F_1}{\rho_0 c^2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\vec{v}_0 F_1}{\rho_0 c^2} \right) - \nabla \cdot \vec{F}_2 - F_3$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 \right) - \nabla \cdot \left[ \vec{v}_0 \frac{\rho_0}{c^2} D_0 \psi_1 - \rho_0 \nabla \psi_1 \right] = -\rho_0 D_0 \sigma_1 + \frac{\partial(\rho_0 \sigma_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}_0 \rho_0 \sigma_1)$$

Concluimos que os operadores diferenciais do lado esquerdo das igualdades acima actuando sobre um campo escalar  $f(\vec{r}, t)$  podem ser postos na forma:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \left( \frac{a}{c^2} \right) \begin{bmatrix} -1 & -v_{0x} & -v_{0y} & -v_{0z} \\ -v_{0x} & c^2 - v_{0x}^2 & -v_{0x}v_{0y} & -v_{0x}v_{0z} \\ -v_{0y} & -v_{0x}v_{0y} & c^2 - v_{0y}^2 & -v_{0y}v_{0z} \\ -v_{0z} & -v_{0x}v_{0z} & -v_{0y}v_{0z} & c^2 - v_{0z}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Onde  $\left( \frac{a}{c^2} \right) [\dots]$  constituirá um tensor métrico acústico, no qual  $c(\vec{r}, t)$  será a velocidade local do som,  $\vec{v}_0$  a velocidade do fluido subjacente e  $a(\vec{r}, t)$  uma função que pode ser a densidade, por exemplo.

# Apêndice B - Rotina para a Métrica de Schwarzschild

```
#Teste de exemplo de traçado de geodésica, a partir da métrica de Schwarzschild

# Importação de módulos necessários
import matplotlib #Para permitir representar graficamente as geodésicas
import numpy as np #Módulo de cálculo numérico
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math
from sympy import latex, symbols, sin, cos, pi, simplify #Alguns módulos de importação de símbolos matemáticos e para simplificação de expressões
from scipy.integrate import solve_ivp #Módulo de resolução de equações diferenciais

# Criação de um manifold onde se vai trabalhar, 4D
from sympy.diffgeom import Manifold, Patch
m = Manifold('M', 4)
p = Patch('P', m)

#Estabelecimento do sistema de coordenadas para o manifold definido
from sympy.diffgeom import CoordSystem
schwarzschild_coord = CoordSystem('Schwarzschild', p, ['t', 'r', 'theta', 'phi'])

#Funções das coordenadas
t, r, theta, phi = schwarzschild_coord.coord_functions()

#Obtenção dos diferenciais das coordenadas que integram o elemento de linha
dt, dr, dtheta, dphi = schwarzschild_coord.base_oneforms()

#Especificações de quantidades físicas da métrica de Schwarzschild
c, r_s = symbols('c r_s') #Velocidade da luz e raio de Schwarzschild

#Preparação do elemento de linha
from sympy.diffgeom import TensorProduct as TP
dt_2 = TP(dt, dt)
dr_2 = TP(dr, dr)
dtheta_2 = TP(dtheta, dtheta)
dphi_2 = TP(dphi, dphi)
factor = (1 - r_s / r) #Um dos fatores que aparece na métrica de Schwarzschild

#Criação de versores de base
e_t = schwarzschild_coord.base_vector(0)
e_r = schwarzschild_coord.base_vector(1)
e_theta = schwarzschild_coord.base_vector(2)
e_phi = schwarzschild_coord.base_vector(3)
```

```

# Construção da métrica
metric = factor * c ** 2 * dt_2 - 1 / factor * dr_2 - r ** 2 * (dtheta_2 + sin(theta)**2 * dphi_2)

# Importar o módulo que cria os coeficientes de conexão a partir da métrica
from sympy.diffgeom import metric_to_Christoffel_2nd
coef_conex_0 = metric_to_Christoffel_2nd(metric)

for i in range(4):
    for j in range(4):
        for k in range(4):
            if coef_conex_0[i, j, k] != 0:
                display(Math('\Gamma^{\{i\}}_{\{j\}\{k\}} = '.format(i, j, k) + latex(coef_conex_0[i, j, k])))

#Obtenção das componentes do tensor da curvatura de Riemann
from sympy.diffgeom import metric_to_Riemann_components
Rmn_components_0=metric_to_Riemann_components(metric)

#Atribuição de valores à velocidade da luz e ao raio de Scharzschild
christoffel_ = coef_conex_0.subs({c: 1, r_s: 1})

#Definição da equação da geodésica
def F(t, y):
    u = y[0:4]
    v = y[4:8]

    du = v
    dv = [0, 0, 0, 0]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            for k in range(4):
                dv[i] -= christoffel_.subs({r: u[1]})[i,j,k] * v[j] * v[k]

    return np.concatenate((du, dv))

#Resolução da equação da geodésica
T = 50
sol = solve_ivp(F, [0, T], [0, 10, 0, 0, 1, 0, 0, 0], t_eval=np.linspace(0, T, T * 123 + 1))

plt.figure(figsize=(14, 6),)
plt.plot(sol.y[0], sol.y[1])
ax = plt.gca()
ax.axhline(1, color="red", ls='--', lw=1)
plt.grid()
plt.ylim((0, 20))
plt.xlabel('ct')
plt.ylabel('r')

#Projeção polar
T = 200
sol = solve_ivp(F, [0, T], [0, 10, 0, 0, 2, 0, 0.04, 0], t_eval=np.linspace(0, T, T * 123 + 1))

plt.figure(figsize=(14, 14),)
ax = plt.subplot(111, projection='polar')
ax.plot(sol.y[2], sol.y[1])
ax.grid(True)

```

# Apêndice C - Rotina para a Métrica de Minkowski

```
#Primeiro draft de rotina para cálculo de geodésicas num dado manifold

#Importações dos módulos necessários
import matplotlib #Para permitir representar graficamente as geodésicas
import numpy as np #Módulo de cálculo numérico
import matplotlib.pyplot as plt
from IPython.display import display, Math
from sympy import latex, symbols, sin, cos, pi, simplify #Alguns módulos para declarar símbolos matemáticos e para simplificação de expressões
from scipy.integrate import solve_ivp #Resolução de equações diferenciais

#Criação de um manifold onde se vai trabalhar, 4D
from sympy.diffgeom import Manifold, Patch
m=Manifold('M',4) #Manifold 4D
p=Patch('P',m)

#Estabelecimento dos sistemas de coordenadas no manifold definido
from sympy.diffgeom import CoordSystem
c, t, x, y, z = symbols('c,t,x,y,z')
minkowski_coord = CoordSystem('Minkowski', p, ['t', 'x', 'y', 'z'])

#Funções das coordenadas
t, x, y, z = minkowski_coord.coord_functions()

#Diferenciais das coordenadas
dt, dx, dy, dz = minkowski_coord.base_oneforms()

#versores de cada coordenada no vetor definido
e_t = minkowski_coord.base_vector(0)
e_x = minkowski_coord.base_vector(1)
e_y = minkowski_coord.base_vector(2)
e_z = minkowski_coord.base_vector(3)

#Preparação do elemento de linha
from sympy.diffgeom import TensorProduct as TP
dt_2 = TP(dt, dt)
dx_2 = TP(dx, dx)
dy_2 = TP(dy, dy)
dz_2 = TP(dz, dz)
```

```

#Construção da métrica de Minkowski
metric=c**2*dt_2-1*dx_2-1*dy_2-1*dz_2

#Importar o módulo que cria os coeficientes de conexão a partir da métrica

from sympy.diffgeom import metric_to_Christoffel_2nd

coef_conex = metric_to_Christoffel_2nd(metric)

for i in range(4):
    for j in range(4):
        for k in range(4):
            if coef_conex[i, j, k] != 0:
                display(Math('\Gamma^{\{\},\{\}}_{\{\},\{\}} = '.format(i, j, k) + latex(coef_conex[i, j, k])))

#Confirmação de que não existe curvatura pelas componentes do Tensor de Riemann

from sympy.diffgeom import metric_to_Riemann_components

Rmn_components=metric_to_Riemann_components(metric)

#Especificação da velocidade da luz. Como todas as coordenadas devem ser expressas em unidades
#de tempo a velocidade da luz fica c=1, dado que percorre 1 metro de distância em 1 metro de
#tempo
christoffel_ = coef_conex.subs({c: 1})

def F(t, y):
    u = y[0:4]
    v = y[4:8]

    du = v
    dv = [0, 0, 0, 0]
    for i in range(4):
        for j in range(4):
            for k in range(4):
                dv[i] -= christoffel_.subs({x: u[1]})[i,j,k] * v[j] * v[k]

    return np.concatenate((du, dv))

#Resolução da equação da geodésica
T = 50
sol = solve_ivp(F, [0, T], [0, 0, 0, 0, 3, 0.5, 0, 0], t_eval=np.linspace(0, T, T * 123 + 1))

plt.figure(figsize=(14, 6),)
plt.plot(sol.y[0], sol.y[1])
ax = plt.gca()
ax.axhline(1, color="red", ls='--', lw=1)
plt.grid()
plt.ylim((0, 30))
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.show()

```

# Apêndice D - Rotina para Órbita Terrestre

```
#Importação de módulos essenciais que permitem usar
#a métrica de Schwarzschild com coordenadas esféricas
from astropy import units as u #importação de unidades
import numpy as np
from einsteinpy.metric import Schwarzschild
from einsteinpy.coordinates import SphericalDifferential

# Definição do vetor posição e velocidade em coordenadas esféricas
# A terra encontra-se no seu periélio
M = 1.989e30 * u.kg # massa do sol
distance = 147.09e6 * u.km #Distância ao sol no ponto onde se encontra
speed_at_perihelion = 30.29 * u.km / u.s #Velocidade no periélio
omega = (u.rad * speed_at_perihelion) / distance
sph_obj = SphericalDifferential(distance, np.pi / 2 * u.rad, np.pi * u.rad, 0 * u.km / u.s, 0 * u.rad / u.s, omega)

# Lambda é o tempo próprio e vem em segundos
#Especificação do mesmo para completar um ano
#Um ano é a duração da órbita da terra em torno do sol

end_lambda = ((1 * u.year).to(u.s)).value
stepsize = ((5 * u.min).to(u.s)).value

#Importação de mais módulos para definir os corpos Terra e Sol
#O sol é o campo gravitacional
from einsteinpy.bodies import Body
from einsteinpy.geodesic import Geodesic
Sun = Body(name="Sun", mass=M, parent=None)
Object = Body(name="Earth", differential=sph_obj, parent=Sun)
geodesic = Geodesic(body=Object, time=0 * u.s, end_lambda=end_lambda, step_size=stepsize)
from einsteinpy.plotting import GeodesicPlotter
sgp = GeodesicPlotter()
sgp.plot(geodesic)
sgp.show()
```

