

ESCOLA NAVAL

ta sãnto de biẽ-faire

Ana Filipa Teorgas Queirós

A Navegação Astronómica antes do Método
Marcq Saint-Hilaire

*Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude
pelo Ângulo Horário*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha



Alfeite
2022



ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Ana Filipa Teorgas Queirós

*A Navegação Astronómica antes do Método Marcq
Saint-Hilaire*

*Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude
pelo Ângulo Horário*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha

Orientação de: CMG RES António José Duarte Costa Canas

Coorientação de: Professora Teresa Maria Sousa

A Aluna Mestranda,

O Orientador,

Ana Queirós

António Canas

Alfeite
2022

“Ninguém escapa ao sonho de voar, de ultrapassar os limites do espaço onde nasceu, de ver novos lugares e novas gentes. Mas saber ver em cada coisa, em cada pessoa, aquele algo que a define como especial, um objeto singular, um amigo, é fundamental. Navegar é preciso, reconhecer o valor das coisas e das pessoas, é mais preciso ainda.”

Antoine de Saint-Exupéry

Dedico à minha mãe, Adélia, ao meu pai, José, e ao meu irmão, Gonçalo.

Agradecimentos

Após a realização da presente dissertação, existem algumas pessoas a quem gostaria de agradecer, por terem sido fundamentais para o meu percurso até aqui.

Começo por deixar um enorme agradecimento ao meu orientador, Capitão-de-Mar-e-Guerra António Costa Canas, por ter sido sempre incansável para todas as minhas dúvidas. Pela disponibilidade, pela paciência, pela persistência e pelo acompanhamento constante deste trabalho. Assim, agradeço também à minha co-orientadora, Professora Teresa Sousa, por todos os contributos técnicos, pela colaboração e, também, pela constante disponibilidade. Agradeço a ambos por terem sempre a porta aberta para me receber, por todo o empenho que dedicaram a esta dissertação e, principalmente, por me fazerem sentir que somos uma equipa.

Quero também agradecer ao curso Capitão-de-Mar-e-Guerra Fernando Amor Monteiro de Barros, por serem a minha primeira família naval. Em especial, quero agradecer à ASPOF AN Martins Gonçalves e ao ASPOF M Vicente Ferreira, pela forma como marcaram o meu percurso na Escola Naval, por estarem sempre presentes, e por se terem tornado amigos que levarei sempre comigo. No mesmo sentido, agradeço à 2TEN Leitão Torres, à GMAR Vidinha da Costa e às cadetes Pereira Sousa, Batista Santos e Santos Rocha, que foram fulcrais para o meu crescimento pessoal e profissional.

Agradeço a todos os meus amigos: aos que formam a minha família musical, da Banda de Música de Loureiro, e aos que formam a Adega Mota.

Agradeço à Jéssica Neves, por me mostrar que há amizades de sempre, que não só se mantêm, como se fortalecem de dia para dia. Por ser a irmã que escolhi com o coração.

Agradeço ao João Gonçalves, por ser o meu braço direito. Por me apoiar incondicionalmente, por acreditar em mim, por estar sempre presente, nos bons e maus momentos, e por trazer a bonança depois de cada tempestade.

Por último, mas não menos importante, quero deixar um agradecimento infinito aos meus pais e ao meu irmão, por serem os pilares da minha vida. Pelo amor, educação, confiança, carinho e respeito que pautam a pessoa que sou hoje. Vão ser sempre o meu porto de abrigo.

Resumo

Nos séculos passados, a única forma de se calcular a posição do navio era através dos astros. Ao longo dos tempos, foram vários os autores que tentaram desenvolver os métodos de cálculo do ponto astronómico. O Sol era o astro mais utilizado, porque permitia o cálculo da latitude pela passagem meridiana. Entretanto, face às limitações desse processo, foram criados métodos de cálculo dessa coordenada por extrameridianas. No final do século XVIII e ao longo do século XIX, calculava-se a longitude pelo ângulo horário, graças ao aparecimento do cronómetro, e a latitude pela passagem meridiana, em momentos diferentes do dia.

Posto isto, o trabalho que se segue apresenta um estudo do desenvolvimento histórico dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol e expõe matematicamente dois desses processos, o de Cornelis Douwes e o de James Ivory, simplificado por Edward Riddle. De seguida, aplica-os a dados de observações reais, em simultâneo com o cálculo da longitude pelo ângulo horário, já que não foram encontrados registos de nenhuma experiência semelhante. Com o objetivo de avaliar a fiabilidade desses métodos e procurar justificações para a falta de registos da sua aplicabilidade, os resultados são comparados com posições GPS (*Global Positioning System*), registadas no momento das observações. Finalmente, aponta os motivos que poderão ter levado os pilotos dos séculos XVIII e XIX a rejeitar os métodos de cálculo da latitude por extrameridianas — tendo em conta a quantidade de literatura que os expunha — continuando a preferir o cálculo da latitude pela passagem meridiana, quando possível, e o da longitude num instante diferente, cientes do erro que o resultado pudesse trazer.

Palavras-chave: Latitude por Extrameridianas, Cornelis Douwes, James Ivory, Edward Riddle, Longitude pelo Ângulo Horário

Abstract

In past centuries, the only way to calculate the ship's position was through the stars. Over time, several authors have tried to develop methods to calculate the astronomical point. The sun was the most used star, because it allowed the calculation of latitude by meridian passage. However, given the limitations of this process, methods of calculating this coordinate by extrameridians were created. At the end of the 18th century and throughout the 19th century, the longitude was calculated by the hour angle, thanks to the appearance of the chronometer, and the latitude by the meridian passage, obtained at different times of the day.

Having said this, the following paper presents a study of the historical development of the methods of calculating latitude by extrameridians of the Sun and mathematically exposes two of these processes, that of Cornelis Douwes and James Ivory, simplified by Edward Riddle. Then, applies them to data from real observations, simultaneously with the calculation of longitude by the hour angle, since no records of any similar experiment were found. In order to evaluate the reliability of these methods and seek justifications for the lack of records of their applicability, the results are compared with GPS (Global Positioning System) positions recorded at the time of observations. Finally, it points out the reasons that may have led 18th and 19th century pilots to reject the methods of calculating latitude by extrameridian — taking into account the amount of literature that exposed them — continuing to prefer the calculation of latitude by meridian passage, when possible, and that of longitude at a different instant, aware of the error that the result could bring.

Keywords: Latitude by Extrameridians, Cornelis Douwes, James Ivory, Edward Riddle, Longitude by Hour Angle

Índice

Lista de Figuras	XV
Lista de Tabelas	XVII
Introdução	1
1 Contexto Histórico	5
1.1 Determinação da latitude pela passagem meridiana do Sol	5
1.1.1 Cálculos matemáticos	6
1.1.2 O problema da passagem meridiana	9
2 A Latitude por Extrameridianas do Sol	13
2.1 Métodos de cálculo da latitude por extrameridianas	13
2.2 A evolução dos métodos ao longo dos séculos	14
3 Latitude por Extrameridianas — Método de Cornelis Douwes	21
3.1 Biografia de Cornelis Douwes	21
3.2 A obra de Douwes	22
3.2.1 O prefácio	23
3.2.2 Edição da obra de Douwes por Floryn	24
3.3 Método de cálculo da latitude por extrameridianas	28
3.3.1 Considerações iniciais	29
3.3.2 Tabela de Douwes	31
3.3.3 Resolução do método	32
3.3.4 Exemplo do método	34
4 Latitude por Extrameridianas — Ivory e Riddle	39
4.1 Contextualização do método	39
4.1.1 James Ivory — Introdução ao método	40
4.1.2 Edward Riddle — Aperfeiçoamento do método	43
4.2 Proposta de Riddle por Peregrino Leitão	44

4.2.1	Exemplo do método	48
5	Longitude	51
5.1	Abordagem histórica	51
5.2	Longitude pelo ângulo horário	53
5.2.1	Resolução do método	53
5.2.2	Exemplo do método	55
6	Aplicação Prática dos Métodos	59
6.1	Recolha de dados	59
6.2	Aplicação do método de Douwes	59
6.2.1	Desenvolvimento da ferramenta de cálculo	59
6.2.2	Tratamento de dados	62
6.3	Aplicação do método de Riddle por Peregrino Leitão	65
6.3.1	Desenvolvimento da ferramenta de cálculo	65
6.3.2	Tratamento de dados	66
6.4	Cálculo da longitude pelo método do ângulo horário	69
6.5	Posições geográficas	72
	Conclusão	75
	Bibliografia	81
A	3º Encontro de Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares	83
B	34º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática	87
C	XII Jornadas do Mar	91

Lista de Figuras

1.1	Esfera Celeste	6
1.2	Triângulo de Posição	7
2.1	Poma	14
2.2	Polímetro	16
3.1	Tabela de Douwes	25
3.2	Tabela de Maskelyne	26
3.3	Tabela de Steenstra	27
3.4	Exemplo 1 de Douwes	35
4.1	Método de Ivory	42
4.2	Exemplo de Peregrino Leitão	49
5.1	Exemplo do cálculo da longitude pelo ângulo horário	56

Lista de Tabelas

6.1	Pares de extrameridianas do Sol de 2021 com bons resultados de latitude pelo método de Douwes	64
6.2	Pares de extrameridianas do Sol de 2022 com bons resultados de latitude pelo método de Douwes	64
6.3	Pares de extrameridianas do Sol de 2021 com bons resultados de latitude pelo método de Riddle	68
6.4	Pares de extrameridianas do Sol de 2022 com bons resultados de latitude pelo método de Riddle	69
6.5	Resultados da longitude de 2021 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Douwes (tabela 6.1)	70
6.6	Resultados da longitude de 2022 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Douwes (tabela 6.2)	71
6.7	Resultados da longitude de 2021 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Riddle (tabela 6.3)	71
6.8	Resultados da longitude de 2022 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Riddle (tabela 6.4)	72
6.9	Resultado das posições geográficas de 2021, utilizando o método de Douwes	73
6.10	Resultado das posições geográficas de 2022, utilizando o método de Douwes	74
6.11	Resultado das posições geográficas de 2021, utilizando o método de Riddle	74
6.12	Resultado das posições geográficas de 2022, utilizando o método de Riddle	75

Introdução

Nos séculos passados, e principalmente na época dos descobrimentos, o cálculo da latitude era fundamental para a navegação. Porém, o único método de cálculo conhecido estava dependente da observação da passagem meridiana do Sol. Se, nesse instante, o céu estivesse encoberto e impossibilitasse a observação do Sol, tornava-se igualmente impossível calcular a latitude. Consequentemente, a informação sobre a posição do navio ficava comprometida, sendo que a única alternativa seria esperar pela passagem meridiana do dia seguinte.

Este problema foi, primeiramente, apontado por Pedro Nunes, no século XVI, que se comprometeu a resolvê-lo através de um processo de cálculo da latitude por duas alturas do Sol, fora da passagem meridiana, ou seja, por extrameridianas. Após esta proposta, e ao longo dos séculos seguintes, foram vários os autores que se dedicaram ao desenvolvimento de novos processos.

Durante essa procura por soluções cada vez mais simples e mais precisas, destacaram-se alguns autores, pelos métodos inovadores que apresentaram para o cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, nomeadamente, o neerlandês Cornelis Douwes, no século XVIII, e os ingleses James Ivory e Edward Riddle, no século seguinte. No final do século XIX surgiu o método de Marcq Saint-Hilaire, utilizado até aos dias de hoje. Trata-se de um método completamente diferente, pois permite calcular simultaneamente a latitude e a longitude, podendo ser utilizado em qualquer instante do dia ou da noite.

A quantidade de métodos desenvolvidos e a sua disseminação por vários manuais de navegação, ilude quanto à sua aplicação prática. Isto é, mesmo existindo estas alternativas, os navegadores continuavam a preferir calcular a latitude pela passagem meridiana do Sol, ainda que nem sempre fosse possível. Esta afirmação parte da dificuldade em encontrar registos da aplicação dos métodos que utilizam as extrameridianas do Sol.

De acordo com a necessidade de conhecimento da posição do navio, a longitude também exigiu que a comunidade científica se empenhasse para encontrar processos que a resolvessem. No entanto, depois da invenção do relógio, em meados do século XVIII, desenvolveu-se aquela que se considera a solução ideal para a calcular: pelo ângulo horário. A partir do aparecimento deste método, e tendo em conta

a facilidade e precisão da sua aplicação, assumiu-se que o problema de cálculo da longitude foi resolvido.

Sobre o cálculo da posição do navio, sabe-se que, durante as navegações, os pilotos calculavam a latitude pela passagem meridiana do Sol, ou seja, ao meio dia solar, e a longitude num outro momento do dia. Desses cálculos, resultavam as coordenadas, porém de forma independente e em diferentes instantes. O método de Marcq Saint-Hilaire veio permitir o cálculo das coordenadas em simultâneo, através do cruzamento de diversas linhas de posição.

Pelos aspetos supramencionados, foi levantada a primeira questão que levou ao desenvolvimento da presente dissertação: se, no século XIX, a literatura apresentava uma série de soluções para a latitude por extrameridianas, porque é que não foram encontrados registos da sua aplicação simultânea com o método de cálculo da longitude pelo ângulo horário, para se obter um ponto astronómico? Será que o cálculo da latitude por extrameridianas é demasiado complexo, tornando-o pouco acessível e praticável? Se a longitude era calculada pelo ângulo horário, o problema estaria no cálculo da latitude. Por conseguinte, o cálculo da latitude foi o foco inicial e principal da investigação.

No decorrer da leitura e análise de diferentes obras que apresentam métodos de cálculo da latitude por extrameridianas, foram reconhecidas várias semelhanças matemáticas e de procedimentos. Seguindo essas parecenças, concluiu-se que existia um grande número de métodos cuja base era a mesma: o método de Cornelis Douwes. Por esse motivo, dedicou-se uma grande parte do estudo a este autor e à sua proposta de resolução da latitude por extrameridianas do Sol.

Mais tarde, descobriu-se um outro método inovador e impactante para o cálculo da latitude: o método de James Ivory, aperfeiçoado e simplificado por Edward Riddle. Por esse motivo, e por ter sido adotado nos manuais de navegação de outros autores, nomeadamente do português Peregrino Leitão, tornou-se igualmente importante a sua abordagem neste trabalho.

Face aos aspetos mencionados, o objetivo da dissertação foi ajustado e pode ser dividido em dois pontos:

1. Testar os dois métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol e perceber se o método de Riddle é, efetivamente, uma melhoria do método de Douwes;
2. Testar a viabilidade de aplicação dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, em conjunto com o método de cálculo da longitude pelo ângulo horário, para obtenção de posições astronómicas.

Com base nas ideias mencionadas, a seguinte dissertação será iniciada com uma abordagem histórica do tema. Depois de ser exposto o método de cálculo da latitude pela passagem meridiana do Sol, assim como os problemas a este associados, abordar-se-á, de uma forma breve, o desenvolvimento dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, ao longo dos séculos. Para isso, serão referenciados quatro autores, um por século, começando pelo método de Pedro Nunes.

Posteriormente, pretende-se dedicar um capítulo a Cornelis Douwes, à sua obra e à apresentação da sua proposta para o cálculo da latitude por extrameridianas. De seguida, atuando de uma forma semelhante, será desenvolvido outro capítulo para a exposição do método de James Ivory e de Edward Riddle.

Após a abordagem da questão da latitude, tenciona-se criar um capítulo dedicado à longitude e ao método de cálculo desta coordenada pelo ângulo horário. O objetivo é disponibilizar a informação necessária para a aplicação da ideia inicial: cálculo simultâneo das coordenadas geográficas, recorrendo a métodos anteriores ao de Marcq Saint-Hilaire.

Na tentativa de encontrar respostas para a pergunta levantada inicialmente, sobre o cálculo das coordenadas em simultâneo, será exposta uma experiência real da aplicabilidade dos dois métodos principais deste trabalho. O objetivo é utilizar os dados recolhidos para pôr em prática os dois processos de cálculo da latitude por extrameridianas, juntamente com o cálculo da longitude pelo ângulo horário, e analisar os resultados obtidos. A análise dos resultados será efetuada através da comparação com as posições reais GPS, também recolhidas aquando das observações.

Por fim, serão apresentadas as conclusões deste estudo e espera-se poder aferir a viabilidade dos métodos de cálculo da posição geográfica do século XIX, antes do método de Marcq Saint-Hilaire, onde ambas as coordenadas podiam ser obtidas em simultâneo. Eventualmente, será possível perceber o porquê da aplicabilidade reduzida desses processos.

No âmbito da investigação em curso, foram escritos e apresentados três trabalhos diferentes: no 3º Encontro de Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares, no 34º Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática, e nas XII Jornadas do Mar, onde recebeu o 2º lugar na área de História, Geografia, Economia e Gestão. Como tal, esses mesmos trabalhos encontram-se expostos nos apêndices A, B e C, respetivamente.

Capítulo 1

Contexto Histórico

1.1 Determinação da latitude pela passagem meridiana do Sol

Atualmente, sabe-se que os primeiros navegadores capazes de obter a sua posição geográfica, conseguiram-no utilizando os astros, com especial atenção para a estrela polar, pela sua particularidade de indicar o norte. No entanto, com o avanço da navegação e a passagem para sul do Equador, puderam confirmar que essa estrela deixava de ser visível, e rapidamente aplicaram o seu foco noutros astros: o Sol e a Lua, já que, salvo raras exceções, pelo menos um deles era sempre visível. Para a obtenção da latitude, os métodos mais utilizados implicavam a observação do Sol, como iremos abordar ao longo do presente trabalho.

Através do movimento de rotação e translação da Terra, os dias do ano variam quanto à periodicidade diurna e, consequentemente, noturna. Além disso, a rotação da Terra cria a ilusão de que o Sol se move em torno desta, na direção Este para Oeste, atingindo a sua altura máxima a meio do dia. A essa altura dá-se o nome de passagem meridiana.

O cálculo da latitude pela passagem meridiana é uma prática antiga, muito importante para a navegação dos séculos passados e principalmente na época dos descobrimentos, que perdura até aos dias de hoje¹. Essa perpetuação deve-se à simplicidade e facilidade matemática que lhe está associada. Este assunto foi aprofundado em 2021, por Jorge Oliveira de Jesus Pires, na sua dissertação de mestrado¹,

¹Como o atesta Pedro Nunes, na sua obra *Tratado da Sphera*, onde afirma, e passa-se a citar, «Porque a cousa mais necessaria e mais proueitosa pera a nauegação: e o principal fundamento della: he o conhecimento da altura do polo sobre o horizonte: ou distancia do circulo equinocial que he o mesmo», no qual é sabido que a «altura do polo sobre o horizonte» corresponde à Latitude — Pedro Nunes. *Tratado da Sphera Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002, p. 160.

¹Jorge Oliveira de Jesus Pires. *Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol. Evolução Histórica do Processo*. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha. 2021.

a partir da qual foi construída a abordagem matemática que se segue.

1.1.1 Cálculos matemáticos

O desenvolvimento da navegação astronômica tem por base a consideração da esfera celeste, que é uma esfera imaginária, concêntrica com a Terra, onde se dispõem os astros, como o representa a figura 1.1.

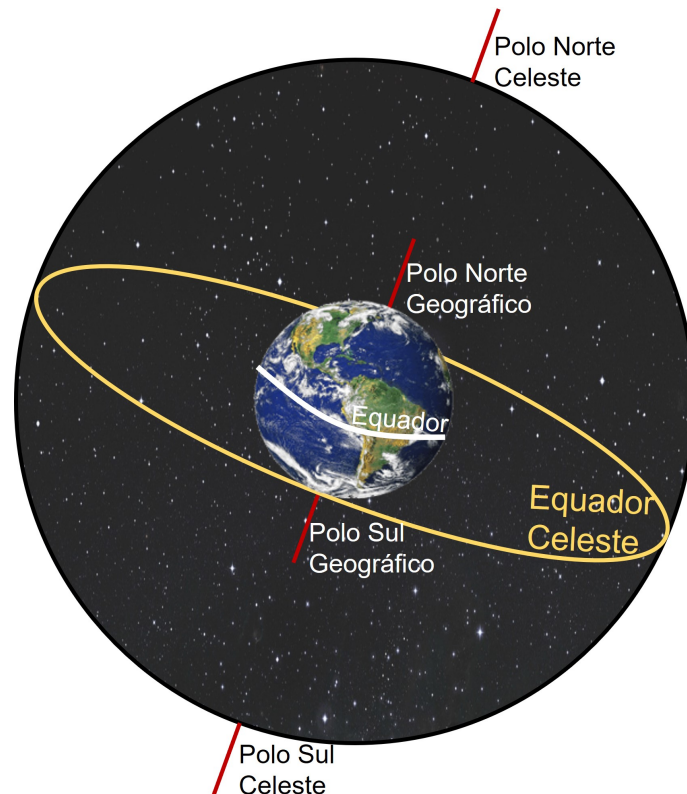


FIGURA 1.1: Representação da Esfera Celeste.²

A definição da esfera celeste é importante, porque é na sua superfície que se projeta o triângulo de posição. É através dessa projeção que se consegue perceber com maior facilidade a trigonometria esférica associada à sua resolução, para obtenção da latitude, ou de outro parâmetro que dele faça parte (figura 1.2).

Da figura 1.2, importa definir alguns aspetos, nomeadamente:

- Os pontos Z e Na representam o zénite e o nadir, respetivamente;
- A linha horizontal NS corresponde ao horizonte do observador;
- O círculo que contém os quatro pontos referidos anteriormente representa o meridiano do lugar;

²Fonte: Autora, adaptado de Dinah L. Moché, 1989

- A linha QQ' representa a projeção do equador terrestre;
- A linha PnP_s, perpendicular à linha QQ', é o prolongamento do eixo terrestre;
- A declinação, δ , é medida no meridiano³ PnP_s que passa pelo astro, do equador até ao astro;
- A altura, a , é medida no círculo vertical⁴ que passa pelo astro, do horizonte do observador até ao astro;
- A Latitude, φ , é o arco de meridiano entre o equador celeste e o zénite (Z).

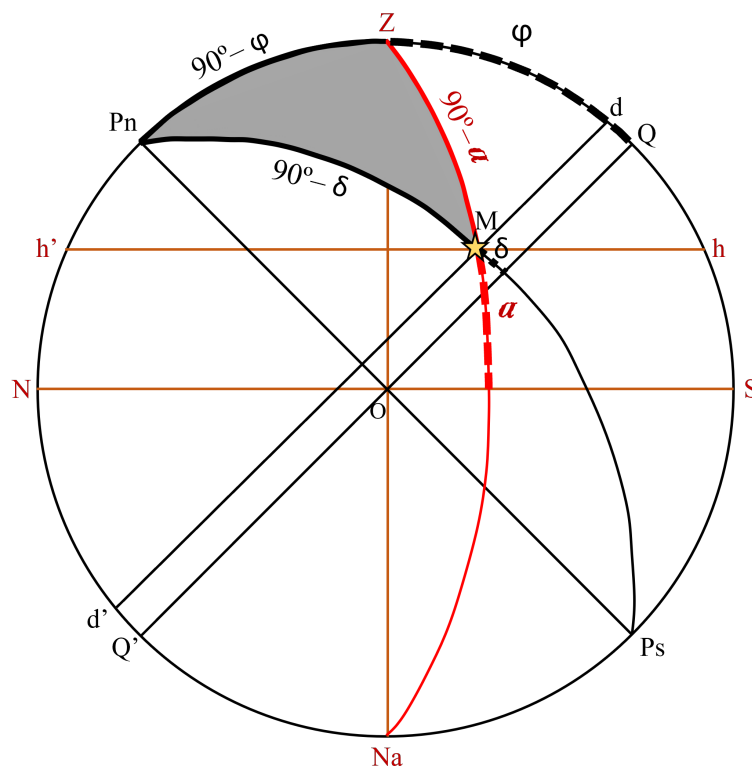


FIGURA 1.2: Triângulo de Posição na Esfera Celeste.⁵

No entanto, os lados do triângulo de posição não correspondem aos valores de declinação, altura e latitude, mas sim aos seus complementos. Isto é, no meridiano PnP_s, obtém-se a declinação através de tabelas, mas o lado do triângulo

³De uma forma rigorosa, usar-se-ia a palavra “semimeridiano”, no entanto, usar-se-á apenas “meridiano” por ser a forma mais comumente utilizada quando se abordam estas definições, e será esta a abordagem utilizada ao longo da dissertação.

⁴Círculo vertical, ou apenas vertical, é o nome dado aos arcos de círculo máximo que passam pelo zénite (Z) e pelo nadir (Na)

⁵Fonte: Autora, adaptado de Nathaniel Bowditch, *American Practical Navigator*, vol. I, p. 24 (<https://msi.nga.mil/Publications>)

inserido nesse meridiano é a chamada distância polar, ou complemento da declinação, calculado através da subtração algébrica⁶ do valor da declinação a noventa graus. Da mesma forma, no meridiano ZNa, retira-se o valor da altura do astro pela sua observação e, subtraindo esse valor a noventa graus, obtém-se a distância zenital ou complemento da altura, que corresponde a outro lado do triângulo de posição. Por fim, o arco entre ZPn corresponde à colatitude, ou complemento da latitude, que também se calcula subtraindo o valor da latitude a noventa graus.

Além dos lados do triângulo de posição, é também importante referir os ângulos a estes associados:

- Azimute (Z) - Arco do horizonte compreendido entre o ponto cardeal Norte e o vertical do astro. Mede-se de 0° a 360° , no sentido dos ponteiros do relógio;
- Ângulo no polo (P) - Arco do equador compreendido entre o meridiano superior do lugar e o meridiano do astro, contado de 0° a 180° para Leste ou para Oeste;
- Ângulo no astro (M) - Ângulo geralmente não utilizado nos cálculos.

Para a fórmula fundamental da trigonometria esférica consideram-se quatro variáveis, que são a declinação (δ), a altura (a), a latitude (φ) e o ângulo no polo (P), obtendo-se:

$$\cos(90 - a) = \cos(90 - \varphi) * \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \varphi) * \sin(90 - \delta) * \cos(P)$$

que, simplificando, equivale a:

$$\sin(a) = \sin(\varphi) * \sin(\delta) + \cos(\varphi) * \cos(\delta) * \cos(P)$$

As fórmulas apresentadas resolvem o triângulo esférico, no entanto, a passagem meridiana é um instante peculiar onde tudo se torna ainda mais simples. Observar o Sol na sua passagem meridiana implica que o astro se encontre no mesmo meridiano que o observador. Desta forma, o lado da distância polar e o lado da colatitude sobrepõem-se, e todos os vértices do triângulo ficam no mesmo arco. A particularidade que esta situação cria relativamente aos cálculos matemáticos, é a redução da amplitude do ângulo no polo para 0° . Consequentemente, o $\cos(P)$ terá valor 1 e a equação ficará reduzida a cálculos simples, com operações de somar e subtrair, apenas. À semelhança do conteúdo apresentado por Jorge Pires⁷, segue-se a demonstração desta simplificação, partindo da última equação apresentada e

⁶Caso o zénite do observador e o astro se encontrem em hemisférios diferentes, então a declinação assume sinal negativo e portanto deve ser somada a noventa graus.

⁷Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol.

aplicando a transformação de $\cos(P) = 1$:

$$\sin(a) = \sin(\varphi) * \sin(\delta) + \cos(\varphi) * \cos(\delta) * 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin(a) = \cos(\varphi - \delta)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cos(90 - a) = \cos(\varphi - \delta)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 90 - a = -\varphi + \delta \\ 90 - a = \varphi - \delta \end{cases}$$

O objetivo destes cálculos é a obtenção da latitude (φ), isto é:

$$\begin{cases} \varphi = -90 + a + \delta \\ \varphi = 90 - a + \delta \end{cases}$$

As soluções obtidas demonstram a simplicidade matemática associada ao cálculo da latitude pela passagem meridiana do Sol. De realçar que, caso a declinação e a latitude sejam de hemisférios diferentes, a declinação deverá apresentar sinal negativo.

1.1.2 O problema da passagem meridiana

Como já foi dito anteriormente, a passagem meridiana do Sol implica a sua observação nesse mesmo instante. O problema que vários autores apontaram foi precisamente quanto à dificuldade que pode ser a obtenção dessa altura específica. Isto, porque basta o céu estar encoberto no momento da passagem meridiana, para que o seu valor não possa ser retirado, mesmo que todo o resto do dia o céu esteja limpo. Não sendo essa observação possível, seria necessário esperar pelo dia seguinte para se poder obter a latitude. Na verdade, podiam seguir-se vários dias sem que

a passagem meridiana do Sol fosse visível, e consequentemente, seguir-se-iam vários dias sem que os navegadores conseguissem obter a sua latitude.

Posto isto, a própria observação da passagem meridiana do Sol para obtenção da latitude foi identificada como o problema deste método. Problema esse que vários autores reconheceram e tentaram solucionar, através de métodos de cálculo da latitude por alturas do Sol fora do momento da passagem meridiana, ou seja, por extrameridianas.

Em 1537, Pedro Nunes, na sua obra *Tratado da Sphera*, reconhece a importância do Sol para a obtenção da latitude, a facilidade e fiabilidade do método para o seu cálculo pela passagem meridiana, mas também aponta o problema associado à observação desse instante e ele próprio se propõe a apresentar uma solução que permita obter a latitude pelo Sol, a qualquer hora do dia (extrameridianas):

Porque a cousa mais necessaria e a mais proueitosa pera a navegação: e o principal fundamêto dela: he o conhecimento da altura do polo sobre o horizonte: ou distancia do circulo equinocial que he o mesmo: e os antigos autores não nos deixarão escripto como se isso podese alcançar comente ao meo dia que he conta muy certa e sem falencia: mas que não basta principalmente pera as viagens compridas: nas quaes muitas vezes acôtece encobrirse o sol ao meo dia: e dahi a poucas oras amostrar-se-nos muito craro. Determiney eu despoys de ter estudado nas sciencias mathematicas e cosmographia: inquirir modo per que podese-mos em todo tẽpo que ouuer sol: assi no mar como na terra; saber em que altura do polo estamos.⁸

Já entre 1660 e 1669, o Padre Valentim Estancel também reconheceu o mesmo problema, e propôs o seu método, onde, sabendo os movimentos do Sol na esfera celeste — observando as suas sombras — e a declinação, obtém a altura do polo e calcula a latitude a qualquer hora do dia:

E assi o fundamento, em que este Nó Gordiano se estriba, (segundo tenho alcançado) vem a ser os círculos imaginários no Ceo undécimo (...). De baixo destes faz o Sol suas carreiras, caminhando de hum Tropico para o outro; e correndo o zodíaco todo, no espaço de 365 dias, 5 horas, e 48 minutos e tantos segundos (...). Os Circulos pois em que o Sol faz suas carreiras, andão tão encadeados entre si, que sabendose, o em que anda o Sol, e que lugar, ou grão nelle ocupa, logo tambem se

⁸Nunes, *Tratado da Sphera Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*, p. 160.

sabe o oposto circulo, em que o Apice da sombra caminha, e o grao que aponta, e tudo mais. Esta he a Theorica, em que se fundão as tres praxes Seg.^{tes} que envieí, p.^a tomar as Alturas, em qualquer hora ou tempo do dia.⁹

No século seguinte, em 1740, o neerlandês Cornelis Douwes, do qual falaremos posteriormente dada a importância do seu método, reconheceu o mesmo problema e apresentou uma solução. Assim o atesta a obra de Richard Harrison, que é uma tradução para inglês da obra de Douwes, e onde, na dedicatória inicial, também está explícito o problema da meridiana:

It is not intended that this should or ought to destroy the usual Method of finding the Latitude by Meridional Observations; it will certainly be right to take these as often as they can be taken, [...] but it frequently happens that this cannot be obtained by reason of foggy Weather, a Squal, or the interposition of a cloud, especially when near the Land; and after a long voyage for want of the true Latitude it too often proves fatal; whereas, if the true latitude was known, a true course could be shaped accordingly, [...] and a good landfall made, or the great dangers of a narrow channel avoided.¹⁰

A obtenção da latitude continuou a ser uma preocupação ao longo dos tempos, tanto que, no século XIX, Nathaniel Bowditch também apontou os problemas do seu cálculo pela passagem meridiana e sugeriu a solução das extrameridianas, propondo o seu método:

When by reason of clouds or other causes, a meridian observation cannot be obtained, you may find the latitude by means of two altitudes of the sun [...] taken either in the forenoon or afternoon, the intermediate time being measured by a common watch.¹¹

Todas estas transcrições foram expostas com o intuito de demonstrar a crença de vários autores na existência de um problema associado ao método de cálculo da latitude pela passagem meridiana do Sol. Aliás, era de tal forma um problema que foram muitos os que propuseram soluções para o resolver. Estas propostas tiveram início no século XVI, com Pedro Nunes, mas continuaram a surgir

⁹Valentim Estancel. *Orbe Affonsino, ou Horoscopio Universal*. Évora, 1658.

¹⁰Richard Harrison. *A New Set of Logarithmic Solar Tables*. 1781, p. 4.

¹¹Nathaniel Bowditch. *American Practical Navigator. An Epitome of Navigation*. Newburyport: Edmund M. Blunt, 1802, p. 159.

nos séculos seguintes, até finais do século XIX, quando apareceu o Método de Marcq Saint-Hilaire. É precisamente sobre alguns métodos de obtenção da latitude por extrameridianas do Sol que incidirá o trabalho apresentado.

Capítulo 2

A Latitude por Extrameridianas do Sol

2.1 Métodos de cálculo da latitude por extrameridianas

A alternativa ao uso do método da passagem meridiana do Sol para a obtenção da latitude, mantendo o mesmo astro, foram os métodos por extrameridianas. Ou seja, são consideradas alturas do Sol durante o dia, fora do momento da sua passagem meridiana.

Foram vários os métodos que surgiram, sendo que se acredita que o primeiro método¹² foi da autoria de Pedro Nunes, em 1537. A este seguiram-se outros métodos, como por exemplo o de Padre Valentim Estancel. Estes métodos tentam contornar os cálculos matemáticos analíticos com o intuito de facilitar a sua aplicação, mas o método que exponenciou o conceito da obtenção da latitude por extrameridianas foi o método de Cornelis Douwes, em 1740. O método de Douwes foi o primeiro método a recorrer às funções logarítmicas, já que os logaritmos vieram simplificar os cálculos associados à trigonometria esférica utilizada para a resolução do triângulo de posição. Tendo por base o método de Douwes, muitos outros autores apresentaram os seus métodos para a resolução do problema em questão.

No ano de 2021, Jorge Pires apresentou a sua dissertação de mestrado, onde abordou quatro métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, cada método de um século diferente, desde o século XVI até ao século XIX. É com base nesse trabalho que será apresentada uma síntese da evolução do processo para a obtenção da latitude por extrameridianas do Sol, pelo que se aconselha a consulta

¹²Ainda que a maioria dos historiadores assumam que Pedro Nunes foi o autor deste método, levantaram-se certas dúvidas, como o atesta Luís de Albuquerque, na sua obra *Curso de História da Náutica*, p. 132. (Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol, p. 16)

da referida dissertação caso se pretenda uma leitura mais pormenorizada de cada método.

2.2 A evolução dos métodos ao longo dos séculos

Tal como foi referido anteriormente, acredita-se que o primeiro método capaz de resolver a latitude por extrameridianas do Sol foi o método de Pedro Nunes. O Cosmógrafo-mor¹³, que entre vários estudos se dedicou à matemática e à navegação, apresentou dois regimentos¹⁴ para a obtenção da latitude por extrameridianas. No primeiro regimento, onde se conhece o valor da declinação magnética (ou tem valor nulo), só era necessário medir uma altura extrameridiana do Sol; no segundo, onde a declinação magnética é desconhecida, são necessárias duas alturas extrameridianas. O processo teórico que o autor fundamentou é equivalente para as duas situações e baseia-se em geometria, posteriormente aplicada num instrumento apelidado de poma¹⁵ (figura 2.1), permitindo assim realizar os cálculos matemáticos de forma mecânica.

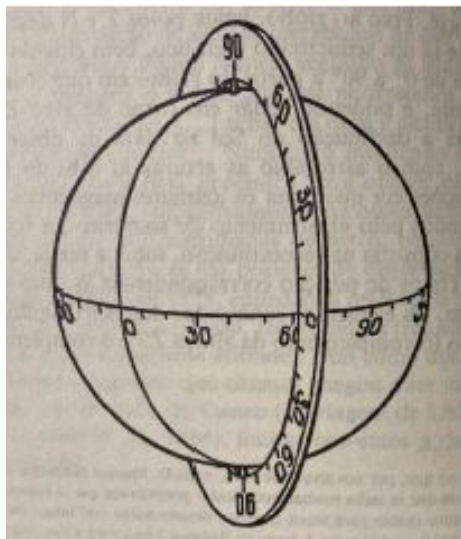


FIGURA 2.1: Poma — Instrumento utilizado para a determinação da latitude por extrameridianas do Sol.¹⁶

¹³Em Portugal, além de todos os contributos que deu à ciência, Pedro Nunes também se destacou positivamente na sociedade, tendo ocupado o cargo de Cosmógrafo-mor. (Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol)

¹⁴Segundo Luís de Albuquerque, Pedro Nunes abordou um terceiro método, onde eram utilizadas três alturas extrameridianas, em 1573. (ibid.)

¹⁵Globo que representava a esfera celeste e continha dois círculos máximos: um correspondente ao horizonte, graduado de 0° a 360°; e outro era constituído por um meridiano fictício que representava o meridiano do lugar, e um meridiano móvel graduado de 0° a 90°, respetivamente do horizonte para o zénite e para o nadir. (Paulo Jorge Antunes Nunes. *Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes*. Dissertação de Mestrado de História Marítima. 2012)

Além da poma, eram utilizados outros instrumentos para a aplicação do método do Cosmógrafo-mor: para a obtenção do valor da altura extrameridiana do Sol, através da sua observação, era utilizado um astrolábio; no momento da observação, o azimute do Sol era determinado através de um instrumento de sombras¹⁷; e o valor da declinação era retirado das tábuas de declinação.

Quer para o primeiro regimento, quer para o segundo, a base da sua resolução era a projeção da posição do Sol — ou das posições do Sol para o segundo caso — na poma. Através da aplicação de geometria, verificava-se as posições que o Sol poderia ocupar na esfera celeste, tendo em conta a declinação e a posição relativa entre o observador, o astro e o polo. Com essa informação e recorrendo a um compasso curvo com centro no astro, traçava-se um arco que marcava duas posições do polo. Cabia ao piloto selecionar a posição com o valor do polo verdadeiro e, finalmente, medir a altura entre o polo e o horizonte, o que corresponde à latitude¹⁸. Desta forma, era possível determinar a latitude, sem que fosse necessário recorrer a cálculos matemáticos analíticos.

No século seguinte, Padre Valentim Estancel apresentou um método para o cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, na sua obra *Tiphys Lusitano ov Regimento Navtico Novo*, manuscrito cuja data de redação deverá ser entre 1660 e 1669. No método de Estancel, à semelhança de Pedro Nunes, é feita uma divisão em dois regimentos nas condições idênticas ao método anterior. Da mesma forma, este autor também criou instrumentos próprios para a aplicação do seu método, assim como recorre a conceitos simples de geometria e astronomia. Ao contrário do Cosmógrafo-mor, Estancel constrói a sua fundamentação teórica através de cálculos baseados nas funções trigonométricas e da analogia dos senos¹⁹, ou seja, recorre a cálculos analíticos para a fundamentação do seu método, ainda que pô-lo em prática exija apenas uma vertente mecânica.

Quanto aos instrumentos utilizados pelo autor, inicialmente Estancel criou um instrumento que exigia um grande rigor e perfeição aquando da sua construção, por isso criou um outro instrumento, apelidado de polímetro (figura 2.2). O

¹⁶Fonte: Luís de Albuquerque, *Curso de História da Náutica*, p. 134.

¹⁷O instrumento de sombras pode ser também apelidado de lâmina circular.

¹⁸Com o auxílio da figura 1.2 apresentada no capítulo anterior, verifica-se que a latitude, QZ, corresponde ao mesmo valor que a elevação do polo celeste em relação ao horizonte, NPn, daí a possibilidade de, sabendo a altura entre o polo e o horizonte, saber-se a latitude.

¹⁹Tal como o indica Jorge Pires na sua dissertação de mestrado, esta analogia dos senos refere-se à explicação de Estancel sobre o método: “conhecendo-se três elementos (um ângulo e o lado oposto mais outro ângulo ou lado) de um triângulo esférico, conseguia-se calcular um quarto elemento, que seria o oposto ao ângulo ou lado conhecido”. (Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol)

polímetro era utilizado para calcular a latitude pelo primeiro regimento do seu método, onde o valor da declinação magnética era conhecido ou nulo. Para se obter a latitude, o instrumento tinha de estar nivelado com o horizonte, orientado por forma a garantir a perpendicularidade de certos constituintes e, através da observação da sombra da pérola suspensa, era possível aferir a altura do polo naquele lugar. Para o segundo regimento, já eram necessários vários instrumentos: o astrolábio, para a medição das alturas das extrameridianas; as tábuas de declinação; uma agulha magnética; uma tábua coberta com papel, colado com cera, onde era aplicada a geometria; uma “esquadra pequena”; uma régua; um compasso pequeno; e um livro chamado “Elementos Trigonométricos”. Ainda que sejam instrumentos diferentes, são idênticos aos de Pedro Nunes e têm o mesmo fim, pelo que se conclui que não houve inovação da parte de Estancel face à solução proposta pelo autor anteriormente referido.

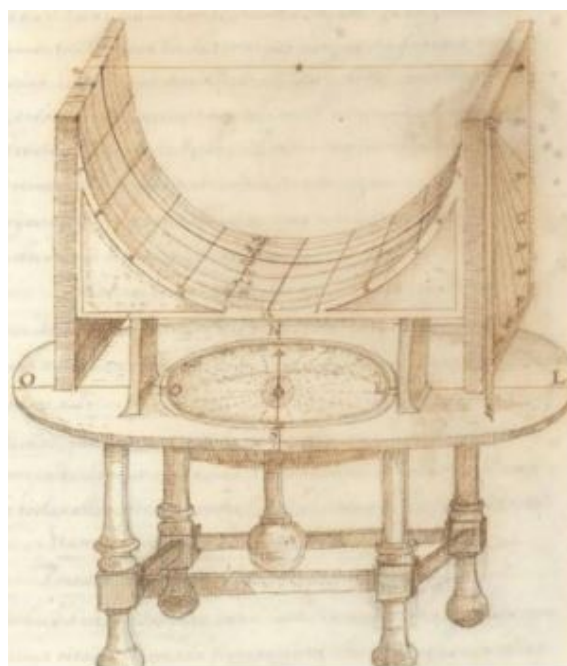


FIGURA 2.2: Polímetro.²⁰

Nesta fase, importa referir que a função logarítmica surgiu descrita na obra de John Napier, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, no ano de 1614²¹. Johannes Kepler, depois de apresentar as suas leis (1609 – 1619), revelou um trabalho importante para o tema em discussão, que foram as *Rudolphine Tables*. Esta obra incluía cálculos com o uso das funções logarítmicas.

²⁰Fonte: Valentim Estancel, *Tiphys Lusitano* [...], fol. 10.

²¹Carlos M. Lemos. «Os logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas – um apontamento histórico». Em: *Boletim da SPM* 66 (mai. de 2012), pp. 65–104.

Tendo em conta que Estancel publicou a sua obra *Tiphys Lusitano ou Regimento Nautico Novo* algures entre os anos de 1660 e 1669, pode-se afirmar que, quanto ao ambiente académico e aos conhecimentos matemáticos da época, e relativamente ao século de Pedro Nunes, Estancel estava em nítida vantagem. O autor poderia ter explorado as funções logarítmicas para uma possível aplicação na resolução da latitude por extrameridianas do Sol.

Em 1740, surgiu o método do neerlandês Cornelis Douwes. Considerado o primeiro método algorítmico capaz de resolver a latitude por extrameridianas do Sol, através de cálculos matemáticos com aplicação das funções logarítmicas, o método de Douwes tornou-se a base para os métodos que se seguiram. Assim, mantendo a abordagem de Jorge Pires na sua dissertação, foi graças a este método que Militão da Mata, com formação de piloto, publicou a sua proposta, em 1781, na obra *O Destro Observador* [...] ²².

Militão da Mata traduziu o método de Douwes, facilitando o seu uso em Portugal, já que já era praticado noutras marinhas. O objetivo do autor era apresentar um método mais fácil e acessível do que aqueles que já existiam e que permitisse solucionar o problema da obtenção da latitude pela passagem meridiana, a motivação para cada novo método que surgia. O método de Douwes será pormenorizadamente abordado no próximo capítulo, pelo que, sobre o método da obra de Militão, importa referir apenas as várias diferenças comparativamente aos autores dos dois séculos anteriores:

- A passagem para um método que não necessita de instrumentos para uma aplicação geométrica, já que a abordagem analítica é facilitada pela utilização dos logaritmos, simplificando os cálculos;
- Aplicação de correções à altura observada, considerando a elevação do observador, a refração e o semimeridiano do Sol, obtendo-se a chamada altura verdadeira;
- Utilização do octante para observação da altura do Sol, em substituição de instrumentos como o astrolábio e a balestilha;
- O aparecimento do relógio de algibeira, permitindo considerar uma nova variável, o tempo;

²²A obra de Militão da Mata, *O Destro Observador, ou Methodo Facil de Saber a Latitude a Qualquer Hora do Dia, Sem Dependencia da Observação Meridiana. Com Huma Prefação Analytica Sobre os Progressos da Pilotagem Em Portugal*, apresenta um título bastante extenso, pelo que se reconhece apenas por: *O Destro Observador* [...]. Pelo título completo nota-se de imediato que um dos assuntos centrais é o método de cálculo da latitude por extrameridianas, isto é, “a Latitude a Qualquer Hora do Dia”.

- A utilização de várias tábuas, das quais se retiravam diretamente os valores logarítmicos e trigonométricos necessários para o método, sem que tivessem de ser calculados;
- Definição dos intervalos de tempo mais favoráveis para a observação, na garantia de um resultado mais realista.

Para a aplicação do método apresentado por Militão da Mata, os pilotos precisavam apenas de compreender as tabelas e saber retirar os valores pretendidos das mesmas, o que era perfeitamente viável, tendo em conta a sua explicação e a quantidade de exemplos disponibilizados. Outro requisito prendia-se com o manuseamento dos instrumentos utilizados para a obtenção das variáveis necessárias com o maior rigor possível.

Finalmente, no século XIX, Peregrino Leitão, oficial da Marinha de Guerra Portuguesa, publicou um manual direcionado à prática da navegação. Nessa obra estavam presentes soluções para o cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, ainda que não fosse um assunto central. Leitão apresentou três métodos de cálculo da latitude, que diferiam nas variáveis necessárias, o que trazia uma certa flexibilidade para os pilotos que, caso não tivessem um parâmetro necessário para a resolução de um método, podiam optar por outro método onde esse dado não fosse necessário, e conseguiam calcular a latitude. Graças à pesquisa realizada em 2021²³, descobriu-se que o primeiro e o terceiro método que Peregrino Leitão apresentou foram traduzidos e transcritos das obras de Norie. Inclusive, esses dois métodos estão diretamente dependentes da utilização das tábuas de Norie, ao contrário do segundo, onde a utilização dessas tábuas é opcional.

Sobre os métodos apresentados na obra de Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação* (1865), importa realçar a utilização das tabelas das funções logarítmicas e das funções trigonométricas, assim como as propriedades dos logaritmos para simplificação dos cálculos.

Norie deve ser referenciado, não só pelo conteúdo teórico da sua obra — *A New and Complete Epitome of Practical Navigation*, onde aborda vários assuntos relevantes para a navegação, nomeadamente métodos de cálculo da latitude por extrameridianas —, como também por todas as tabelas que apresentou, quer de funções trigonométricas e dos seus logaritmos, como de muitos outros dados que vieram facilitar os cálculos matemáticos da época, e que são as tabelas utilizadas por Peregrino Leitão.

²³Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol.

A partir da obra de Norie, descobriu-se ainda dois autores com grande impacto no desenvolvimento dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas: James Ivory e Edward Riddle. Ambos serão abordados no capítulo quatro do presente trabalho, precisamente pelo facto de o seu método ser uma inovação ao método de Douwes. Aliás, um dos métodos apresentados na obra de Norie é da autoria de Riddle, que foi o mesmo método que Peregrino Leitão descreveu na sua obra, anteriormente mencionada.

Fazendo um apanhado geral dos assuntos abordados neste capítulo, assume-se que, numa fase inicial do reconhecimento do problema de cálculo da latitude pela passagem meridiana. Pedro Nunes inventou o seu próprio método, por extrameridianas do Sol, com uma fundamentação geométrica e com aplicação prática num instrumento original. Já no século seguinte, Valentim Estancel assumiu o mesmo problema e solucionou-o, apresentando o seu método, que também exigia uma vertente prática com recurso ao polímetro, o instrumento criado pelo autor, à semelhança de Pedro Nunes. No entanto, a fundamentação teórica de Estancel já se baseava nas funções trigonométricas e na analogia dos senos, ou seja, apresentava uma vertente analítica. A verdadeira mudança deveu-se ao aparecimento da função logarítmica, que Militão da Mata, no século XVIII, trouxe a Portugal, traduzindo o método de Douwes. Ivory e Riddle, no século XIX, apresentaram uma nova versão do método de Douwes, conferindo-lhe características significativas, divulgado por vários autores, nomeadamente por Norie, e que Peregrino Leitão transcreveu, trazendo-o para o nosso país. Outra grande inovação foi o aparecimento do relógio, que permitiu acrescentar uma nova variável aos métodos: o tempo.

Assim sendo, ao longo do século XVIII, assim como no século XIX, continuaram a surgir vários métodos analíticos com base na descoberta de Douwes. A resolução dos cálculos era apoiada por tabelas, para uma diminuição da exigência matemática. O único requisito prendia-se em saber utilizar as tabelas e como retirar os valores das mesmas. Por fim, no século XIX, Peregrino Leitão também apresentou alguns métodos, dois deles transcritos de Norie, baseados nos cálculos de Douwes e de Ivory e Riddle. Nesta época, a grande vantagem era a redundância dos métodos, pelo que a falta de certas variáveis não seria impeditiva para o cálculo da latitude.

Quanto aos instrumentos utilizados, a primeira grande diferença acontece do século XVII para o século XVIII, onde as resoluções mecânicas são substituídas por resoluções totalmente analíticas, eliminando a necessidade de transportar objetos como a poma e o polímetro para o navio. Posteriormente, existe também uma clara evolução no instrumento utilizado para retirar o valor da altura do Sol, desde o

astrolábio e da balestilha, até ao octante e ao sextante²⁴. Por último, o aparecimento do relógio foi uma inovação extraordinária para a ciência e para a população no geral, tal como se tornou imprescindível para a navegação.

²⁴Ainda que, em 1733, já existissem esboços deste instrumento, só em 1757 é que foi construído o primeiro sextante por John Campbell, um oficial da Marinha Inglesa.

Capítulo 3

Latitude por Extrameridianas — Método de Cornelis Douwes

3.1 Biografia de Cornelis Douwes

Através da *The Oxford Encyclopedia of Maritime History*²⁵, obtiveram-se algumas informações sobre o autor em estudo, tendo sido essa a referência base utilizada para obtenção dos dados que se seguem. Existem também alguns autores que referem Douwes, mas a informação biográfica mencionada é muito reduzida, uma vez que o foco é o método de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol.

Cornelis Douwes, um investigador neerlandês de assuntos náuticos, nasceu a 24 de agosto de 1712, em Terschelling. Estudou navegação e acredita-se que tenha praticado com o seu pai, que era capitão de navio mercante e navegava regularmente para Bremen. Estima-se que no ano de 1731 se tenha estreado como professor, em Amsterdão, onde ensinou navegação, matemática e artilharia. Mais tarde, perante a sua candidatura para o cargo de professor de artilharia do almirantado de Amsterdão, assim como a oferta para ensino das áreas de navegação, trigonometria, astronomia e manuseamento de instrumentos náuticos, foi fundada a *Algemeen Zeemans-Collegie*, a sua escola de navegação. Nesta escola eram formados, por Douwes, futuros oficiais das marinhas de guerra e mercante, assim como jovens orfãos das ruas de Amsterdão. A sua carreira enquanto professor e examinador dos cadetes da marinha continuou a progredir ao longo dos anos, e ainda se tornou membro da *Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen*²⁶, aquando da sua fundação, em 1752. Douwes morreu na cidade de Amsterdão, em 1773.

²⁵Willem F. J. Mörzner Bruyns. «Douwes, Cornelis». Em: *The Oxford Encyclopedia of Maritime History*. Vol. 1. 2007.

²⁶Cuja tradução corresponde a: Sociedade Real Holandesa de Ciências e Humanidades.

3.2 A obra de Douwes

Segundo Charles H. Cotter, na sua obra *A History of Nautical Astronomy*²⁷, Douwes desenvolveu o seu método em 1740, tal como outros autores o reconhecem, nomeadamente Militão da Mata. Aliás, Militão acrescenta que, na obra de Douwes, deveriam estar incluídas as outras tabelas necessárias à resolução dos cálculos, sendo estas a da declinação do Sol, a dos senos naturais, a dos logaritmos da secante menos o raio²⁸, e a dos logaritmos comuns, e não apenas as suas tabelas. Segundo este autor, um único volume com o método de Douwes e todas as tabelas necessárias à resolução do mesmo, surgiu em 1771, com muita procura²⁹. No entanto, de acordo com a *The Oxford Encyclopedia of Maritime History*³⁰, foi em 1749 que Douwes escreveu um manuscrito com a descrição do seu método. A primeira publicação oficial ocorreu em 1754, porém incompleta, por não apresentar as tabelas necessárias à resolução do método. A primeira edição completa foi publicada em 1760: *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*.

Um aspeto interessante sobre a edição de 1760 é a apresentação de uma página datada de 1761, logo a seguir à capa. Dentro das limitações para traduzir a língua neerlandesa, a ideia retirada é que foi dado ao autor um privilégio de quinze anos de exclusividade de publicação, com aplicação de multas para quem tentasse, de alguma forma, publicar ou vender a sua obra. Esta particularidade pode indicar que o livro foi realmente impresso em 1760, mas a sua comercialização só foi possível a partir de 1761, depois da inclusão da página referente ao privilégio referido.

A disseminação deste método foi sendo realizada através da circulação de cópias manuscritas, provavelmente em neerlandês, e foi publicado em Inglaterra, pela primeira vez, por Richard Harrison, que o transcreveu e traduziu para inglês, em 1759, nas chamadas *Taboas Solares de Harrison*³¹. Nos anos seguintes, foi alargado a outras partes do mundo, como França, Alemanha, Espanha e América, onde se acredita que tenha sido praticado. Chegou a Portugal graças à tradução e transcrição elaborada por Militão da Mata, em 1781, tal como foi referido no capítulo anterior.

Em 1760, Henry Pemberton expôs o método de Douwes à Sociedade Real de Londres, onde teceu algumas considerações sobre as particularidades e as limitações do mesmo. A análise da obra deste autor também se encontra na dissertação

²⁷Charles H. Cotter. *A History of Nautical Astronomy*. London: Hollis & Carter, 1968.

²⁸Termo abordado no ponto 3.3.1.

²⁹José Militão da Mata. *O Destro Observador. Método Fácil de Saber a Latitude a Qualquer Hora do Dia, Sem Dependência da Observação Meridiana*. Lisboa: Na Officina Luisiana, 1781, p. xx

³⁰Bruyns, «Douwes, Cornelis».

³¹Mata, *O Destro Observador*, p. xx

elaborada por Jorge Pires, de onde se retira que Pemberton salientou a utilização da variável *tempo*, assim como a simplificação dos cálculos através da “tabulação dos valores das funções trigonométricas e logarítmicas”³². No mesmo seguimento, é ainda positivamente referida a utilização da latitude estimada como contributo para tornar o método expedito e atenta para a consideração dos intervalos de tempo mais favoráveis para as observações, que influenciam a precisão dos resultados. Sobre o método de cálculo propriamente dito³³, o autor demonstra de que forma é que se poderia reduzir e simplificar os cálculos³⁴, recorrendo às relações trigonométricas, para que fosse obtido o valor da altura do Sol na sua passagem meridiana, sendo esse valor mais próximo do real, comparativamente ao valor obtido pelos cálculos apresentados por Douwes. Ora, aplicando o valor dessa altura no cálculo da latitude, o resultado seria igualmente mais realista. À semelhança de Douwes, uma das principais exigências prende-se ao rigor das observações, mas Pemberton salienta a escolha da hora apropriada para a realização das mesmas.

3.2.1 O prefácio

Face à leitura do prefácio da obra de Douwes, percebe-se que o objetivo do autor é providenciar um método de cálculo da latitude àqueles que sabem navegar e não querem ter aulas teóricas, assim como pretende que os professores o entendam e o transmitam aos seus alunos, com uma “certeza matemática do assunto”³⁵. Inclusive, o autor pede “gentilmente” a quem faça observações de forma correta e precisa e obtenha maus resultados com a aplicação do seu método, que lhe comunique, para que ele possa instruir os Marinheiros por forma a não confiarem totalmente no seu método. Até lá, todos devem confiar, ao abrigo das suas próprias observações. Douwes expõe alguns procedimentos utilizados para a elaboração das suas tabelas, enumerando vários aspetos e possíveis erros analisados, para garantir a precisão dos valores apresentados. Ao longo desta observação inicial do autor, é referido ainda que bastam duas a três horas de prática para se perceber o seu método, nomeadamente a procura pelos valores nas tabelas e os cálculos matemáticos (que se cingem a adições e subtrações). É também feita uma comparação com métodos anteriores, onde o próprio afirma que, o facto de ter que utilizar imagens e linhas geométricas, é confuso para todos, moroso e suscetível a erros, e aproveita para

³²Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol.

³³Isto é, a vertente analítica que o compõe.

³⁴Esta demonstração pode ser consultada em: Pires, Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol, páginas 68 e 69.

³⁵Todas as expressões entre aspas deste parágrafo são palavras ou expressões traduzidas da obra de Douwes — Cornelis Douwes. *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*. Amsterdam: Joannes van Keulen en Zoonen, 1760.

engrandecer a brevidade e facilidade do seu método. O autor está seguro de que, com esta solução, virá também a confiança para se “ousar navegar aqui”. “Aqui”, onde, geralmente, a latitude pela passagem meridiana é impossível de calcular — passagens por canais, estreitos e navegações no Mar do Norte durante o inverno, foram alguns dos exemplos tomados. Por fim, conta que se sentirá “afortunado” se o seu trabalho, “na continuação dos tempos, puder ser útil para os marítimos”. Termina o prefácio com a frase, “*Het groote schip, waar aan wy alle Reeden*”, cuja tradução corresponde a “o grande navio, em que todos nós navegamos”, da qual se entende uma dedicatória ao mundo da navegação, pela referência final do autor à exigência própria de amor universal e ao anseio pela prosperidade da sua pátria.

3.2.2 Edição da obra de Douwes por Floryn

Numa fase embrionária do estudo desenvolvido para a presente dissertação, utilizou-se uma versão da obra de Douwes de 1799, da autoria de Jacob Floryn, para examinar o método em estudo. Uma das consequências desse estudo foi a ideia de que, a principal diferença na tradução de Harrison se prendia com os dados de entrada nas tabelas de Douwes — na primeira obra entra-se com valores em graus, enquanto que na de Harrison os valores são apresentados em tempo. No entanto, com o acesso à obra de Douwes de 1760, concluiu-se que Harrison copiou na íntegra a obra original, inclusive os valores de entrada nas tabelas, em tempo³⁶. Posto isto, procurou-se descobrir o motivo que terá levado Jacob Floryn a criar a versão de 1799.

O neerlandês Jacob Floryn, nascido em 1751, dedicou-se à matemática e, posteriormente, ao estudo de métodos de cálculo da longitude, como, por exemplo, o método das distâncias lunares. Foi professor e examinador de oficiais navais, tanto em Amsterdão como em Roterdão, e foi presidente do conselho municipal de Haia, até 1802. Morreu em 1818, em Amsterdão.

A partir do prefácio apresentado por Floryn, percebeu-se que lhe foi pedido que fizesse “refinamentos e melhorias”³⁷ à obra original de Douwes. Ainda que, inicialmente, tenha assumido que era desnecessária uma nova versão, o autor respondeu ao pedido e, as principais alterações são os valores de entrada nas tabelas originais do método e a sua organização. Deste texto introdutório, traduziu-se e adaptou-se um excerto, do qual resultou o seguinte:

³⁶Na altura em que foram escritos os dois artigos presentes nos apêndices A e B, assumia-se esta diferença, porém errada, como o prova a edição de Douwes de 1760

³⁷Traduzido e transcrito de: Jacob Floryn. *Zeemans-Tafelen van Cornelis Douwes*. Amsterdam: Gerard Hulst van Keulen, 1799, p. 2.

(59)
o Uur.

Min.	Log. $\frac{1}{2}$ ver- loopen Tyd	Gem. differ.	Logar. midd. Tyd.	Logar. Ryzing.	differ.
0	...		...	...	
.	2 . 66121		2 . 63982	— . 62346	60206
1	2 . 36018	30103	2 . 94085	— . 02140	35219
.	2 . 18409	17609	3 . 11694	* . 33079	24087
2	2 . 05916	12493	3 . 24187	0 . 58066	19382
.	1 . 96225	9691	3 . 33878	0 . 77448	15836
3	1 . 88307	7918	3 . 41796	0 . 93284	13389
.	1 . 81613	6694	3 . 48490	1 . 06673	11598
4	1 . 75814	5799	3 . 54289	1 . 18271	10231
.	1 . 70700	5114	3 . 59403	1 . 28502	9151
5	1 . 66125	4575	3 . 63978	1 . 37653	8278
.	1 . 61986	4139	3 . 68117	1 . 45931	7557
6	1 . 58208	3778	3 . 71895	1 . 53488	6952
.	1 . 54733	3475	3 . 75370	1 . 60440	6437
7	1 . 51515	3218	3 . 78588	1 . 66877	5992
.	1 . 48520	2995	3 . 81583	1 . 72869	5605
8	1 . 45718	2802	3 . 84385	1 . 78474	5205
.	1 . 43086	2632	3 . 87017	1 . 83739	4804
9	1 . 40605	2481	3 . 89498	1 . 88703	4406
.	1 . 38258	2347	3 . 91845	1 . 93399	4000

FIGURA 3.1: Primeiros dados da Tabela de Douwes.⁴⁰

Douwes só havia calculado isso³⁸ em meio minuto; mas Maskelyne tem, nas suas *Tables Requisite*, calculadas para 10 segundos, e Steenstra tem o mesmo, no trabalho citado, nas primeiras duas horas, calculado de 4 em 4 segundos e depois de 8 em 8; tornando o seu uso ainda mais preciso, principalmente para encontrar a hora verdadeira, a partir de uma única altura do Sol.³⁹

Face ao excerto apresentado, e após a consulta das tabelas de Maskelyne e de Steenstra, formulou-se uma linha lógica de pensamento de Floryn: em 1760, Douwes publicou as suas tabelas, com intervalos de meio em meio minuto de tempo (figura 3.1); em 1781, Maskelyne também as publicou, mas com intervalos de 10 em 10 segundos (figura 3.2); já em 1789, Steenstra publicou-as com intervalos de 4 segundos nas duas primeiras horas (figura 3.3), e depois de 8 em 8 segundos. Curiosamente, Floryn também aparece como autor da obra de Steenstra, onde foram publicadas as referidas tabelas. Assim, Floryn criou esta versão da obra de Douwes, onde inseriu as tabelas de acordo com a organização de Steenstra, com o objetivo de as tornar mais precisas e de evitar interpolações.

³⁸Referente aos valores dos logaritmos dos parâmetros apresentados nas tabelas criadas por Douwes.

³⁹Floryn, *Zeemans-Tafelen van Cornelis Douwes*, “Douwes hadt dezelve alleen op halve minuten berekend, doch Maskelyne heeft die, in zyne *Tables requisite*, op 10 seconden gebragt, en Steenstra heeft dezelve, in het zo even aangehaalde Werk, voor de twee eerfte uureri, van 4 tot 4 en vervolgens van 8 tot 8 seconden vervaardigd, waardoor derzelver gebruik des te naauwkeuriger is gemaakt, voornaamelyk tot het vinden van den waaren tyd, uit eene enkele Zons Hoogte.”, p. VIII.

⁴⁰Fonte: Cornelis Douwes, *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*, p. 59.

⁴¹Fonte: Nevil Maskelyne, *Tables Requisite*, p. 58.

[58]

TABLE XVI. For computing the Latitude of a Ship at Sea from two Altitudes of the Sun, &c.

• H O U R.

M.	S.	Log. Sine.	Log. Mid. Time.	Logarith. Rifing.	M.	S.	Log. Sine.	Log. Mid. Time.	Logarith. Rifing.
0	0				10	0	1.36032	3.94071	1.97854
	10	3.13833	2.16270	8.42230		10	1.35115	3.94788	1.99289
	20	1.83730	2.46373	9.02436		20	1.34609	3.95494	2.00699
	30	2.66121	1.63982	9.37654		30	1.33915	3.96188	2.02091
	40	2.53627	1.76476	9.62641		40	1.33231	3.96872	2.03458
	50	2.41936	2.86167	9.82014		50	1.32548	3.97545	2.04805
1	0	2.30018	1.94085	9.97800	11	0	1.31896	3.98207	2.06131
	10	2.29324	3.00779	0.11250		10	1.31243	3.98860	2.07437
	20	2.23525	3.06578	0.21848		20	1.30600	3.99503	2.08743
	30	2.18409	3.11694	0.33079		30	1.29967	4.00136	2.09991
	40	2.13834	3.16269	0.42230		40	1.29342	4.00761	2.11240
	50	2.09695	3.20408	0.50509		50	1.28727	4.01376	2.12472
2	0	2.05916	3.24187	0.58066	12	0	1.28120	4.01983	2.13687
	10	2.02440	3.27663	0.65019		10	1.27522	4.02581	2.14885
	20	1.99121	3.30882	0.71455		20	1.26931	4.03172	2.16066
	30	1.95825	3.33878	0.77448		30	1.26349	4.03754	2.17223
	40	1.93421	3.36681	0.83054		40	1.25774	4.04329	2.18382
	50	1.90790	3.39313	0.88319		50	1.25207	4.04896	2.19517

FIGURA 3.2: Parte superior da Tabela de Maskelyne.⁴¹

Os três autores mencionados — Maskelyne, Steenstra e Floryn — sempre se focaram mais no estudo da longitude e de métodos de cálculo da mesma. Segundo um texto de Karel Davis, na obra *Navigational Enterprises in Europe and its Empires*, é mencionada a atribuição de um prémio a Douwes pelo método desenvolvido para o cálculo da latitude por extrameridianas do Sol⁴², no âmbito do *Board of Longitude*. Tendo em conta que se trata de um evento para abordar temas relacionados com a longitude, é muito interessante que Maskelyne tenha concedido um prémio monetário a Douwes, sendo a sua área direcionada para a latitude. Aliás, no *Board of Longitude* existem referências ao trabalho de Cornelis Douwes e é dito que, com o seu método, o autor ganhou um prémio de cinquenta libras (£50), “for his trouble in correcting, improving and illustrating” as suas “solar tables”⁴³. Da mesma forma, Maskelyne menciona este mérito e este prémio na sua obra *Tables Requisite*⁴⁴.

Foi também encontrado o manuscrito da concessão do prémio a Dowes, apresentando-se de seguida o seu conteúdo:

A letter of the 14th of last month from Admiral Forbes was read inclosing one he had received from Captain Douglas in answer to what he had written to him at the request of this Board concerning Mr. Douwes

⁴²Karel Davids. «The Longitude Committee and the Practice of Navigation in the Netherlands, c. 1750–1850». Em: *Navigational Enterprises in Europe and Its Empires, 1730-1850*. 2015, p. 38.

⁴³Ibid., p. 38.

⁴⁴Nevil Maskelyne. *Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea*. Londres: Comissioners of Longitude, 1781, p. 9 e 10.

178

XXII. TAFEL. Voor het bereekenen vanden waaren Tyd, en de Breedte uit twee Hoogten.

O. G. O. Uur.	Log. ver.	L. Mid. T.	Log. Ry.	G. O. Uur.	Log. ver.	L. Mid. T.	Log. Ry.
M. M. S.	loop-Tyd.	& L. R.	sing-Tyd.	M. M. S.	loop-Tyd.	& L. R.	sing-Tyd.
0	0	Oneind.	0.00000	0	4	1.75814	3.54229
1	4	3.53627	1.76476	1	4	1.75097	3.55006
2	8	3.23524	2.06579	2	8	1.74391	3.55712
3	12	3.05915	2.24188	3	12	1.73696	3.56407
4	16	2.93421	2.36682	4	16	1.73012	3.57091
5	20	2.83730	2.46373	5	20	1.72339	3.57764
6	24	2.75812	2.54291	6	24	1.71676	3.58427
7	28	2.69118	2.60985	7	28	1.71023	3.59080
8	32	2.63312	2.66785	8	32	1.70379	3.59724
9	36	2.58203	2.71900	9	36	1.69745	3.60358
10	40	2.53627	2.76476	10	40	1.69121	3.60982
11	44	2.49168	2.80615	11	44	1.68505	3.61598
12	48	2.45709	2.84394	12	48	1.67897	3.62206
13	52	2.42233	2.87870	13	52	1.67298	3.62805
14	56	2.39035	2.91088	14	56	1.66708	3.63395
15	0	2.36018	2.94085	15	0	1.66125	3.63978
16	4	2.33216	2.96887	16	4	1.65550	3.64553
17	8	2.30583	2.99520	17	8	1.64982	3.65121
18	12	2.28100	3.02003	18	12	1.64422	3.65681
19	16	2.25752	3.04451	19	16	1.63869	3.66235

FIGURA 3.3: Parte superior da Tabela de Steenstra.⁴⁵

Solar Tables; And it appearing thereby that to the said Mr. Douwes solely belongs the merit of the utility wick the said Tables already have been, or may be, of, to navigation; And that, under the encouragement given him, he employed a great deal of time, and some money also, in correcting, improving and illustrating the Tables wick have been presented to this Board

Resolution

That £50 be paid to the said Mr. Douwes as a reward for his trouble in correcting, improving and illustrating those Tables;

And

That Captain Campbell's further improvements there of which was delievered to the Board at the same time with them, be printed and added to the next Ephemerius, under the direction of the Astronomer Royal.

Maskelyne era o astrónomo real de Inglaterra, ao qual o excerto do manuscrito se refere. Novamente, volta-se a reforçar a importância do método de Douwes, que começou por ser criado nos Países Baixos, foi traduzido para inglês e dado a conhecer a Inglaterra. Aí, foi estudado e analisado, inclusive por Maskelyne. O mais curioso é que Maskelyne era extremamente dedicado ao estudo do cálculo da

⁴⁵Fonte: Pybo Steenstra. *Benoodigde Tafels by den Zeemans-Almanach*. Amsterdam: Gerard Hulst van Keulen, 1789, p. 178

longitude, e na altura em que o método de Douwes foi divulgado, o inglês tinha outra preocupação: provar que o cálculo da longitude devia ser feito pelo método das distâncias lunares, e não pelo ângulo horário⁴⁶. Mesmo assim, não só analisou o método de Douwes e propôs um aprimoramento das suas tabelas, como lhe atribuiu o prémio já mencionado. Depois disso, de volta aos neerlandeses, Steenstra e Floryn optaram por simplificar as tabelas de Maskelyne. Mais uma vez, prova-se o grande interesse da parte da comunidade científica neste método de cálculo da latitude por extrameridianas, assim como a sua disseminação.

Resumindo, graças à versão de Jacob Floryn, foi descoberta mais uma forma de reconhecimento do mérito de Douwes e do método por ele desenvolvido. Quanto à versão de Floryn, a principal alteração foi a nova arrumação das tabelas de Douwes e o facto de as colocar de acordo com os intervalos de tempo de Steenstra, melhorando assim a precisão dos valores apresentados e evitando possíveis erros no cálculo das interpolações, já que, desta forma, existe pouca necessidade de as calcular.

3.3 Método de cálculo da latitude por extrameridianas

Tal como foi referido ao longo do presente trabalho, ao cálculo da latitude pela passagem meridiana do Sol foi apontado um problema relacionado com a visibilidade do astro no momento exato. Posto isto, desde o século XVI que vários autores se dedicam ao estudo de métodos de cálculo da latitude por extrameridianas. Toda esta procura foi revolucionada com o método apresentado por Cornelis Douwes, um método totalmente analítico, com uso de logaritmos para simplificação dos cálculos necessários para a trigonometria esférica associada à resolução do triângulo de posição. Este foi o primeiro método com recurso à função logarítmica⁴⁷.

Para uma abordagem mais correta do método em causa, utilizar-se-á como principal referência a tradução de Richard Harrison. Nesta edição inglesa, a obra pode ser dividida em três partes:

1. “Instruções para o leitor”⁴⁸ — aborda conceitos matemáticos específicos para o método de Douwes, apresentando exemplos, onde aproveita para demonstrar como se retiram os valores das tabelas; explica as diferenças dos cálculos

⁴⁶Método apresentado no capítulo 5.

⁴⁷A função logarítmica surgiu entre o final do século XVI e o início do século XVII, por obra de Napier, sendo as primeiras tabelas de Napier, Bürgi e Briggs — Lemos, «Os logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas – um apontamento histórico», p. 65.

⁴⁸Tradução do título atribuído por Harrison: “Instructions to the Reader” (Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*, p. 6)

conforme a hora das observações; e define os intervalos de tempo preferenciais para a realização das observações.

2. “Aplicação das instruções anteriores para a prática”⁴⁹ — enumera sete passos que explicam a resolução do método, seguidos de vários exemplos e provas da fiabilidade dos valores obtidos.
3. “As novas tabelas solares de logaritmos”⁵⁰ — apresentação das tabelas criadas por Douwes.

Nos próximos subcapítulos serão abordados os aspetos fundamentais para a compreensão de todo o método, assim como a resolução do mesmo, finalizando com a demonstração de um exemplo do autor.

3.3.1 Considerações iniciais

Existem alguns conceitos que importa mencionar, antes de se avançar para a explicação do método de cálculo da latitude.

Com o aparecimento dos logaritmos, e da função logarítmica associada às funções trigonométricas, surgiram duas formas de mencionar as funções trigonométricas: apenas o nome da função ou a função acompanhada pelo termo “artificial”, que difere da função acompanhada pelo termo “natural”. Quando é associado à palavra “natural”, o valor pedido é o valor da própria função. Caso apareça o nome da função isolado ou “artificial”, significa que o valor pedido é o logaritmo dessa função. Por exemplo, utilizando a função seno tem-se que: se for pedido o seno natural de x , entra-se nas tabelas trigonométricas e retira-se o valor de x , na coluna do seno; se for pedido o $\text{sen}(x)$, ou seno artificial de x , o valor pretendido é o $\log(\text{sen}(x))$. Richard Harrison demonstra como é que se obtém o seno natural através do seno artificial (ou simplesmente seno), e vice-versa.

Para encontrar um seno natural de um determinado valor (apresentado em graus e minutos), entra-se na tabela dos senos artificiais e retira-se o valor do seno associado aos graus e minutos pretendidos. No valor obtido, substitui-se o número das unidades por 2, pelo que se obtém um número decimal do tipo “2, ...”. Na tabela dos logaritmos de números naturais, procura-se o valor mais próximo do obtido anteriormente e retira-se o número que lhe corresponde. Este último será o seno natural pretendido. Pelo caminho inverso, substitui-se o valor das unidades por 9 e obtém-se um seno artificial a partir de um seno natural.

⁴⁹“The application of the foregoing instructions to practice” (ibid., p. 11)

⁵⁰“The new logarithmic solar-tables” (ibid., p. 21)

Por exemplo, pretende-se determinar o seno natural de $54^{\circ}07'$. Na tabela dos logaritmos do seno, retira-se que o seno artificial é 9,908599. Substitui-se o valor das unidades por 2 e obtém-se 2,908599. Na tabela dos logaritmos de números naturais, procura-se o valor mais próximo de 2,908599 e retira-se o número correspondente: 8102. Então, o seno natural de $54^{\circ}07'$ é 0,8102.⁵¹

Um outro aspeto que deve ser esclarecido é a função seno verso (*versin*) — o seu logaritmo — ou como Douwes lhe chama nas suas tabelas, *Rysing*. Matematicamente falando, o seno verso de x corresponde a $1 - \cos(x)$. Este conceito entra diretamente nos cálculos do método em estudo.

Na época do autor em estudo, quando os valores eram muito pequenos representavam-se por frações, o que dificultava os cálculos. Tendo em conta que as funções trigonométricas eram frequentemente utilizadas, a solução encontrada passou por atribuir ao raio do círculo trigonométrico um valor bastante superior a um. Esta adaptação justifica os valores apresentados na tabela da secante, da qual se calcula o valor da secante menos o raio⁵², ou seja, o seu logaritmo. Recorrendo ao exemplo de Harrison, para se encontrar o valor do logaritmo da secante menos o raio de $46^{\circ}25'$, entra-se na tabela da secante e procura-se o valor correspondente aos graus mencionados, que devolve o valor 10,164866. A este valor subtrai-se 10, o valor das unidades, e obtém-se o resultado do logaritmo da secante menos o raio, ou seja, 0,164866. Tal como os conceitos acima mencionados, a “secante menos o raio” também é um parâmetro do método de Douwes.

As observações das extrameridianas podem ser realizadas antes e depois da meridiana, ou seja, de manhã e de tarde. Conforme o par de observações utilizado, o cálculo do intervalo de tempo decorrido entre elas difere. Se as duas observações forem retiradas de manhã, ou ambas à tarde, o intervalo de tempo corresponde à diferença entre elas, e descrimina-se a navegação. Se forem utilizadas uma observação da manhã e outra da tarde, existem duas situações distintas a considerar, conforme a navegação decorra no sentido Este ou Oeste. Com o horário da tarde no formato de vinte e quatro horas, faz-se a diferença horária, à semelhança da situação anterior. No entanto, é necessário considerar a diferença de longitude decorrida entre as observações, em tempo, sabendo que 1° de longitude corresponde a 15 minutos. Ao valor do intervalo calculado anteriormente, soma-se a longitude em tempo se a navegação for para Este, ou subtrai-se se a navegação for para Oeste.

Outro aspeto importante a ter em conta é o horário mais favorável para as observações. Favorável, no sentido de tornar os resultados mais fiáveis. Segundo

⁵¹Primeiro exemplo da obra base deste estudo — Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*.

⁵²Segundo Harrison, *Secant less Radius* — *ibid.*, pg. 7.

Harrison, as observações devem ter, pelo menos, um espaço de quarenta e cinco minutos entre si. As observações realizadas entre as nove e as dez da manhã ficam sujeitas a um pequeno erro, mas entre as dez e as onze os resultados já serão mais exatos. No caso de uma das observações ser de manhã e outra de tarde, não devem exceder as cinco horas de intervalo de tempo entre si. As observações efetuadas depois das cinco da tarde ficam mais dependentes do valor da latitude estimada, que deve ser bastante próximo do real para compensar os erros derivados da observação tardia.

Por fim, resta apenas referir a correção aplicada à altura observada, relacionada com a elevação do observador. Da *Tabela de depressão* retira-se o valor da depressão⁵³, em minutos, e subtrai-se à altura registada pelo instrumento.

3.3.2 Tabela de Douwes

Tal como foi referido nos pontos anteriores, para a resolução do método de Douwes eram necessárias várias tabelas de logaritmos e de funções trigonométricas. Essas tabelas já eram comuns, e por isso Douwes não as incluiu no seu manuscrito inicial. No entanto, o autor criou as suas próprias tabelas, cujos valores correspondem a parâmetros necessários para os cálculos do método, originalmente denominados por: *Log. $\frac{1}{2}$ verloopen Tyd*, *Logar. midd. Tyd*, e *Logar. Rysing*. Estes parâmetros, na obra de Harrison, correspondem a *Half elapsed time*, *Middle time* e *Rising*, respetivamente.

O parâmetro do *Half elapsed time*, em português, “metade do intervalo de tempo”, é matematicamente traduzido por $\frac{t_2 - t_1}{2}$, onde, por sua vez, t_1 e t_2 simbolizam a hora da primeira e da segunda observação. Quanto ao parâmetro do *Middle time*, traduzido para “tempo médio”, é representado pela fração $\frac{t_1 + t_2}{2}$, onde t_1 e t_2 mantêm o seu significado. Sobre o terceiro parâmetro, o *Rising*, que corresponde ao seno verso, foi explicado nas considerações iniciais deste capítulo. Douwes manteve abreviaturas da palavra “logaritmo” junto dos parâmetros apresentados nas suas tabelas, e ainda que Harrison não o tenha feito, os valores correspondem, igualmente, aos logaritmos dos mesmos.

⁵³Este valor corresponde à imersão do horizonte, em relação ao observador. Por exemplo, se a altura for registada de um navio que coloque o observador cinco metros acima do nível da água, e, consequentemente, acima da linha do horizonte, o valor da depressão correspondente a essa elevação deve ser subtraído à altura, para que o valor final seja o correto, como se o observador estivesse no mesmo nível da linha do horizonte.

3.3.3 Resolução do método

Para a resolução do método de Douwes, e de acordo com a notação do próprio autor, as incógnitas consideradas são: as duas alturas observadas, h_1 e h_2 , obtidas no momento da observação pela leitura do valor indicado no instrumento utilizado (o sextante, por exemplo); o tempo até ao meio dia para as duas observações, t_1 e t_2 ; o valor da declinação, D , que é um valor tabelado, retirado das tábuas de declinação; a latitude estimada, L , estipulada pelo observador, conforme a sua noção geográfica; e a latitude calculada, que é o objetivo final do método. A latitude calculada também é representada por L , à semelhança da latitude estimada, mas para a explicação que se segue utilizar-se-á L_c para a latitude que se pretende calcular, com o intuito de garantir a distinção entre as duas.

Para a resolução dos triângulos de posição, é necessário conhecer o valor do ângulo no polo para cada uma das observações. No entanto, como esse valor é desconhecido, a solução para o aplicar foi considerá-lo em tempo. Para isso, em vez de se entrar com o valor do ângulo no polo para cada observação, assume-se o parâmetro do intervalo de tempo entre as observações, daí a importância de conhecer o tempo decorrido entre a observação e o meio dia (t_1 e t_2).

Tendo em conta as incógnitas apresentadas, o método utiliza três equações base para a sua resolução, seguidamente apresentadas. Essas equações representam, respetivamente, a resolução dos triângulos de posição da primeira (3.1) e da segunda (3.2) observação e a resolução da diferença de ângulos no polo (3.3), isto é, a diferença de tempo entre as observações:

$$\text{sen } h_1 = \text{sen } L \text{ sen } D + \cos L \cos D \cos t_1 \quad (3.1)$$

$$\text{sen } h_2 = \text{sen } L \text{ sen } D + \cos L \cos D \cos t_2 \quad (3.2)$$

$$\cos t_1 - \cos t_2 = 2 \text{sen } \frac{t_1 + t_2}{2} * \text{sen } \frac{t_2 - t_1}{2} \quad (3.3)$$

Numa primeira etapa, subtrai-se as equações 3.1 e 3.2,

$$\text{sen } h_1 - \text{sen } h_2 = \cos L \cos D (\cos t_1 - \cos t_2) \quad (3.4)$$

substitui-se a diferença de ângulos no polo (3.3),

$$\text{sen } h_1 - \text{sen } h_2 = \cos L \cos D \left(2 \text{sen } \frac{t_1 + t_2}{2} * \text{sen } \frac{t_2 - t_1}{2} \right) \quad (3.5)$$

e resolve-se em ordem a $2 \sin \frac{t_1+t_2}{2}$,

$$2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} = (\sin h_1 - \sin h_2) \sec L \sec D \csc\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right) \quad (3.6)$$

sendo que, na equação 3.6 se verifica a utilização dos parâmetros referentes ao “tempo médio” e a “metade do intervalo de tempo”, mencionados no subcapítulo anterior.

Tal como foi referido, esta primeira fase tem como objetivo a obtenção dos valores de t_1 e t_2 . Harrison enumera os passos necessários para a resolução destes parâmetros⁵⁴:

1. Entrar com o valor de “metade do intervalo de tempo” na tabela de Douwes, que devolve o valor do logaritmo da cossecante;
2. Somar os valores dos logaritmos das secantes de L e de D (tabelas de logaritmos);
3. Somar o logaritmo da diferença dos senos das alturas (tabelas de funções trigonométricas);
4. Procurar o valor obtido na coluna do “tempo médio” da tabela de Douwes, que corresponde ao valor do logaritmo do seno de duas vezes esse argumento — retirar o valor do “tempo médio” em horas, minutos e segundos;
5. Somar e subtrair ao “tempo médio” o valor de metade do intervalo de tempo — obtém-se os valores de t_1 e t_2 , respetivamente.

Numa segunda fase, depois de obtidos os valores de t_1 e t_2 , volta-se às equações 3.1 e 3.2 e seleciona-se a equação que utiliza o valor de t correspondente à observação da maior altura — para efeitos explicativos, assume-se que a maior altura foi observada em t_2 , ou seja, $h_2 > h_1$. Posto isto, do lado direito da equação 3.2, adiciona-se e subtrai-se $\cos L \cos D$ e resolve-se em ordem a $\cos(L - D)$, onde L será a latitude que se pretende calcular (L_c):

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 + \cos L \cos D - \cos L \cos D \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \sin h_2 = \cos(L_c - D) - \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \cos(L_c - D) = \sin h_2 + \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (3.9)$$

⁵⁴Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*, pgs. 11 e 12.

Por fim, Douwes considera que o ângulo no polo da observação com a maior altura tem um valor muito pequeno, ao ponto de poder ser desprezado, e resta apenas calcular L_c a partir dos cálculos que se utilizam aquando da observação da meridiana. Desta forma, assume-se que $(L - D)$ é equivalente à distância zenital (ζ) ⁵⁵, que, por sua vez, corresponde ao complemento da altura. Isto significa que o resultado obtido é o resultado do seno natural da altura do Sol na “passagem meridiana”.

Matematicamente falando, tem-se

$$L_c - D = \zeta_{meridiana} \quad (3.10)$$

e, sendo a distância zenital o complemento da altura observada,

$$\cos(L_c - D) = \cos(\zeta_{meridiana}) = \sin(h_{meridiana}) \quad (3.11)$$

Finalmente, descobre-se o valor da distância zenital e aplica-se a equação 3.10 em ordem a L_c ($L_c = D + \zeta$), obtendo-se assim a latitude pretendida.

A utilização, por parte do autor, dos termos “distância zenital meridiana” e “altura na passagem meridiana” é considerado um abuso de linguagem, porque, tal como foi explicado anteriormente, quando se considera a utilização de t associado à maior altura observada, considera-se também que o ângulo no polo é desprezável, ainda que este tenha valor. No entanto, Douwes implementa limitações horárias para as observações e, cumprido essas condições, é considerado aceitável o cálculo da latitude pela maior altura observada, utilizando os cálculos básicos associados à latitude pela passagem meridiana.

3.3.4 Exemplo do método

A partir da obra de Harrison, retirou-se o exemplo número um da aplicação do método de Douwes, exposto na figura 3.4, que será comparado com a explicação dada anteriormente, e entre os quais se fará a correspondência matemática.

Como as propriedades logarítmicas permitem a transformação de multiplicações e divisões em somas e subtrações, todos os cálculos foram simplificados. É também relevante referir novamente que Douwes, e, consequentemente, Harrison, não incluíram as tabelas das funções trigonométricas, nem as tabelas dos logaritmos

⁵⁵A distância zenital (ζ) corresponde, na maior parte dos casos, à subtração $\varphi - \delta$, sendo que δ assume o sinal negativo caso seja de nome (Norte/Sul) contrário do da φ . Nos casos em que a φ tem um valor menor que a δ , e são ambas do mesmo sinal, então será $\zeta = \delta - \varphi$.

⁵⁶Fonte: Richard Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*, p. 12 e 13.

EXAMPLE I.

AUGUST the 23d, 1758. Sun's Declination 11d. 17m. North, and at 10h. 02m. in the Forenoon Sun's Altitude was 46d. 55m. then again at 11h. 27m. the second Altitude was 54d. 07m. Latitude by Account is 46d. 50m. North, required the true Latitude, and true Time of the Day, when the greatest Altitude was taken?

	h.	m.	f.	
At	11	27	00	Lat. by Account, its Sec. less Rad. 0.16486
At	10	02	00	Sun's Declin. its Secant less Rad. 0.00847
Half	01	25	00	Added gives the Logarithm Ratio 0.17333
	00	42	30	
Half elapsed Time				

The Sun's gr. Alt. at 11h. 27m. is 54d. 07m. Nat. Sine 81020	
The Sun's Alt. taken at 10h. 02m. is 46d. 55m. Nat. Sine 73030	
Subtract	the Remainder 7990

The Logarithm of Ratio	0.17333
Common Logarithm of the Remainder	2.90255
New Table of Log. of half elapsed Time for 42m. 30s.	0.73429

The Sum is the Logarithm of Middle Time 4.81047

	h.	m.	f.
The Hour and Min. &c. for which by the New Table is	1	15	30
Subtract from it half elapsed Time		0	42
Their Difference is the true Space of Time the Sun			0
had to rise to the Mer. when the gr. Alt. was taken			33

By the Watch at 11h. 27m. Subtract from 12h. 00m. Remains 00h. 33m. So I find they agree, and the Watch must be exactly right.

Lastly, Enter the New Table with 33m. under Rising	3.01488
Ratio subtract from it	0.17333
Remains a Common Log. whose Natural Sine shews	
the deg. and min. which were wanting of the Sun's	
Mer. Alt. when the greatest Alt. was taken	2.84155

To the Natural Sine of the greatest Altitude	81020
Add the Natural Sine of the above Logarithm	694

Sum is the Natural Sine 81714
Whose Artificial Sine is the deg. and min. of the Sun's Meridian Altitude required.

	d.	m.
The Deg. &c. corresponding are	54	48
Subtract from		90
The Sun's Zenith Distance	35	12 S
Sun's Declination add	11	17 N
Lat. at 11h. 27m. in the Foren.	46	29 N

FIGURA 3.4: Exemplo de aplicação do método de Douwes.⁵⁶

dessas funções nas obras apresentadas, assim como não fazem referência às tabelas consultadas. O que é facto é que, nessa altura, essas tabelas já tinham sido difundidas por toda a comunidade científica. Posto isto, no presente trabalho, optou-se por recorrer às tabelas de Norie, expostas na obra *A new and complete epitome of practical navigation*, para a resolução do método, ainda que se note que apresentam mais uma casa decimal do que as que Douwes consultou e que os valores podem apresentar ligeiras diferenças.

No exemplo, vemos que, no dia 23 de agosto de 1758, realizaram-se duas observações extrameridianas do Sol, cuja declinação era $11^{\circ}17'N$. Às 10h02m, observou-se uma altura de $46^{\circ}55'$, e às 11h27m observou-se uma altura de $54^{\circ}07'$. A latitude estimada era $46^{\circ}50'N$. Pretende-se calcular o valor real da latitude e a hora do dia a que a maior altura foi retirada.

Os três primeiros retângulos assinalados na figura 3.4 são a tradução matemática dos três primeiros passos definidos na obra de Harrison, dos cinco acima mencionados, ainda que a ordem não corresponda. A equação 3.6 é então resolvida por esses retângulos, **A**, **B** e **C**, que calculam, respetivamente, $\sec L \sec D$ (passo n.º 2), $\sin h_2 - \sin h_1$ (passo n.º 3) e $\csc(\frac{t_2-t_1}{2})$ (passo n.º 1):

- O primeiro cálculo do exemplo é a soma dos logaritmos das secantes de L e de D , que, na equação 3.6 corresponde a $\sec L \sec D$:

$$\sec L \sec D = \log(\sec L) + \log(\sec D)$$

Para encontrar estes valores, entra-se nas tabelas de logaritmos das funções trigonométricas e retira-se os valores pretendidos. Neste caso, foi consultada a tabela XXV de Norie, *Logarithmic Sines, Tangents, and Secants*⁵⁷, da qual se retirou o valor da secante de $46^{\circ}50'$ (L): 10,164866. A este valor subtrai-se 10 (no exemplo, “Sec. less Rad.”) e considera-se apenas 0,164866. Na mesma tabela, consultou-se o valor da secante de $11^{\circ}17'$ (D), subtraiu-se 10 e obteve-se 0,008476. Faz-se a soma dos dois valores obtidos da qual resulta o “Logarithm Ratio”;

- No retângulo **B**, verifica-se o termo “natural” associado ao seno, “Nat. Sine”. Assim sendo, retira-se das tabelas das funções trigonométricas os valores dos senos de cada altura, ou seja, seno de $54^{\circ}07'$ e seno de $46^{\circ}55'$. Recorrendo à tabela XXVI, *Natural Sines*, de Norie⁵⁸, retira-se $\sin(54^{\circ}07') = 0.810212$

⁵⁷John William Norie. *A new and complete epitome of practical navigation*. Londres: Lords of Commissioners of the Admiralty, 1817, p. 108.

⁵⁸Ibid., p. 157 e 158.

e $\sin(46^\circ 55') = 0.730361$. Faz-se a subtração dos valores e, ao resultado, Douwes atribuiu o nome de “Remainder”. Na equação 3.6, esta etapa não sofre qualquer alteração: $\sin h_2 - \sin h_1$;

- O retângulo **C** contém o primeiro parâmetro a ser resolvido utilizando as tabelas originais de Douwes e corresponde também ao passo número 1, mencionado anteriormente. Posto isto, procura-se o valor do logaritmo de “half elapsed time” para 42m30s (metade do intervalo de tempo entre as observações, às 10h02m e às 11h27m), e obtém-se 0,73429⁵⁹. Neste caso, o valor corresponde totalmente ao valor presente no exemplo, por ser retirado das tabelas do próprio autor.

Destes três primeiros passos resulta a solução de $2 \sin(\frac{t_1+t_2}{2})$ (equação 3.6), pela soma do “Logarithm Ratio”, com o logaritmo de “Remainder” e com o logaritmo de “half elapsed time”.

No quarto retângulo, assinalado com a letra **D**, estão representados os passos número 4 e 5:

- Em primeiro lugar, a partir da tabela de Douwes, procura-se o valor obtido anteriormente na coluna da hora média das tabelas de Douwes (“Middle Time”, no Harrison) e retira-se o tempo que lhe corresponde (em horas, minutos e segundos);
- De seguida, é possível calcular os valores de t_1 e t_2 . No entanto, no exemplo, calcula-se apenas t_2 , subtraindo à hora média o valor de metade do intervalo de tempo. Esta decisão deve-se à utilização da maior altura, que foi registada na segunda observação, representada por t_2 .

Posto isto, considerando t_2 o tempo da maior altura, passa-se para a equação 3.9 (retângulos **E** e **F**):

- Da tabela de Douwes, retira-se o valor do *Log of Rising* correspondente a 33 minutos, obtendo-se 3.01488 — traduzido para linguagem matemática, é o valor de $(1 - \cos t_2)$. Assim sendo, o retângulo **E** calcula $\frac{(1 - \cos t_2)}{\sec L \sec D}$, que é equivalente a $\cos L \cos D (1 - \cos t_2)$:

$$\frac{(1 - \cos t_2)}{\sec L \sec D} = \log(1 - \cos t_2) - \log(\sec L \sec D)$$

Sendo que, o segundo termo da equação acima corresponde a Log of Rising – Logarithm Ratio.

⁵⁹Harrison, *A New Set of Logarithmic Solar Tables*, p. 22.

- No retângulo **F**, soma-se o $\text{sen } h_2$ ao resultado calculado em **E**, e obtém-se o valor de $\cos(L_c - D)$.

Por fim, existe o abuso de linguagem já mencionado, presente no retângulo **F**, em que o autor afirma: “*Sum is the natural sine whose artificial sine is the deg. and min. of the Sun’s Meridian Altitude required*”, o que lhe permite assumir a igualdade $\cos(L_c - D) = \text{sen}(h_{\text{meridiana}}) = \cos(\zeta_{\text{meridiana}})$. Desta forma, conclui os cálculos representados no retângulo **G**, que correspondem a $L_c = D + \zeta$.

Finalizados os cálculos e tratando-se de um método iterativo, a próxima fase seria comparar a latitude estimada com a latitude calculada, que, neste caso, correspondem a $46^\circ 50'$ (retirada do cabeçalho do exemplo, figura 3.4) e $46^\circ 29'$, respectivamente. Como os valores diferem em 21 minutos, seria aconselhável repetir todo o processo, utilizando $46^\circ 29'$ como o valor da latitude estimada. O processo deve ser repetido até que a diferença entre as latitudes consideradas seja desprezável.

Após a compreensão de todos os passos que constituem o processo de Douwes, foi realizada uma experiência com dados de observações reais, onde o método é posto em prática. Os resultados obtidos podem ser consultados no capítulo 6, assim como a análise dos mesmos, baseada na comparação com os valores das posições GPS dessas observações.

Capítulo 4

Latitude por Extrameridianas — Ivory e Riddle

4.1 Contextualização do método

Norie criou várias edições da sua obra, *A new and complete epitome of practical navigation*, e a cada edição acrescentava novas informações conforme a evolução dos conhecimentos da comunidade científica na área da navegação. Com o acesso à 11^a edição dessa obra, em 1835, além da apresentação do método de Douwes — à semelhança de edições anteriores — foi descoberto um novo método de cálculo da latitude por extrameridianas.

No prefácio da obra de Norie, lê-se uma referência a Douwes e ao seu método, posteriormente exposto e explicado: “The most approved Methods of ascertaining the Latitude and Longitude at Sea by Celestial Observations, [...] are explained by proper rules and examples; [...]. In this part of the work I have given Mr. Douwes’ Rules for finding Latitude by two Altitudes of the Sun”⁶⁰.

Da mesma obra, retirou-se uma outra referência importante, presente numa pequena nota, sobre outro método, de outros autores:

This method of finding the Latitude by two Altitudes of the Sun, which is much simpler and more general than the former, and independent of the Latitude by Account, was proposed by Mr. James Ivory, who has given an ingenious Solution of it in the Philosophical Magazine for August 1821. Mr. Riddle, of the Royal Naval Asylum, Greenwich, has since considerably improved Mr. I.’s Solution, and given a Rule, similar to the above, in the same work for September 1822.⁶¹

⁶⁰John William Norie. *A new and complete epitome of practical navigation*. Londres: Lords of Commissioners of the Admiralty, 1835, p. VII.

⁶¹Ibid., p. 198.

Face a este apontamento de Norie, consultou-se o método de James Ivory, exposto na revista científica *The Philosophical Magazine and Journal*⁶², em 1821, assim como o método de Edward Riddle, presente numa outra edição da mesma revista⁶³, em 1822, para verificar as melhorias efetuadas. Norie acabou por incluir a versão de Riddle na sua obra, que será exposta e analisada no ponto 4.2 da presente dissertação.

4.1.1 James Ivory — Introdução ao método

James Ivory (1765 – 1842), um matemático escocês de grande distinção, era reconhecido tanto pelos seus trabalhos na área da matemática, como na área da astronomia, muitos destes publicados nas *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Foi professor na *Royal Military College*, entre outras funções, e recebeu várias medalhas, nomeadamente a Medalha Copley⁶⁴ da *Royal Society*. Acabou por ser nomeado cavaleiro em 1831 e era membro da *Paris Academy of Science*⁶⁵.

De entre os vastos trabalhos do autor, Ivory teve um papel fundamental no aperfeiçoamento do método de Douwes para o cálculo da latitude por extrameridianas. Escreveu um artigo, publicado na revista *The Philosophical Magazine and Journal*, em 1821, onde apresenta as alterações aplicadas, mas antes, diz:

The method generally practised in the British Navy for solving this problem⁶⁶ was invented by Douwes, an examiner of sea officers and pilots at Amsterdam, who proposed it to the English Admiralty in 1740. It is however no more than a very limited solution; since it can only be applied with the desired success to correct the latitude by account when one of the observations is very near the meridian, or when the middle time is very little different from half the interval between the two observations.⁶⁷

⁶²James Ivory. *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them*. Em: *The Philosophical Magazine and Journal*. Ed. por Alexander Tilloch. Vol. LVIII. Londres: Richard e Arthur Taylor, 1821, pp. 81–90.

⁶³Edward Riddle. *Suggestions for simplifying Mr. Ivory's solution of double altitude problem*. Em: *The Philosophical Magazine and Journal*. Ed. por Alexander Tilloch e Richard Taylor. Vol. LX. Londres: Richard e Arthur Taylor, 1822, pp. 167–170.

⁶⁴A medalha mais antiga e de maior prestígio no domínio das ciências, atribuída pela *Royal Society*.

⁶⁵«Sir James Ivory, F. R. S. (1765 - 1842)». Em: *Nature* 150 (set. de 1942), p. 342. URL: <https://doi.org/10.1038/150342b0>.

⁶⁶O problema do cálculo da latitude por duas alturas extrameridianas do Sol.

⁶⁷Ivory, *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them*, p. 81.

Com esta introdução, Ivory critica o método de Douwes, porque o identifica como um método de correção do valor de uma latitude estimada, em vez de ser um método de cálculo do valor da latitude propriamente dito. De seguida, na mesma referência bibliográfica, Ivory ainda menciona outros dois astrónomos: Brinkley e Delambre.

Segundo Ivory, em 1791, Brinkley⁶⁸, criou um método de correção do resultado de uma das operações do método de Douwes, que lhe conferiu maior rigor. Salvo raras circunstâncias, com esta correção, Ivory considerou que era adequado o uso deste novo método, por parte dos pilotos. Mais tarde, Brinkley simplificou o seu método, tendo-o exposto no almanaque náutico de 1822, onde apresentou um caso prático para cada situação possível. Nessa fase, e de acordo com a opinião de Ivory, o facto do método ser extenso e moroso são as únicas críticas que lhe podem ser apontadas.

O segundo astrónomo mencionado, Delambre, examinou os diferentes métodos já existentes para a resolução do problema em questão, tanto quanto à exatidão dos resultados, como quanto à extensão dos processos. De acordo com o texto de Ivory, Delambre acabou por rejeitar todos os métodos indiretos utilizados, e concluiu que era preferível calcular diretamente a latitude a partir das fórmulas da trigonometria esférica, cuja solução era mais rigorosa. A principal objeção que o autor apontou aos outros métodos, prende-se com o valor da declinação: considerava-se que a declinação do Sol era a mesma para ambas as observações. Delambre encontrou uma solução para este erro, e introduziu-a nos seus cálculos. No entanto, devido à dificuldade da solução, esse acréscimo levou a que a sua proposta ainda se tornasse mais complexa, e, consequentemente, menos praticável.

Depois de apontar os seus pareceres ao método de Douwes, assim como aos de Brinkley e de Delambre, Ivory propõe-se a apresentar um método de cálculo direto da latitude, mais fácil e mais simples do que os anteriores:

I have now to propose a direct solution of the problem, simpler and easier in the calculation than that recommended by Delambre, and which, I conceive, will be found more convenient in practice than the indirect process commonly used. In explaining this solution I shall first assume that the sun's declination is the same at both the observations and equal to the mean quantity between the two times; and I shall afterwards point

⁶⁸John Brinkley nasceu em Inglaterra, em 1766, e tornou-se Astrónomo Real da Irlanda, em 1792 (W. Maziere Brady. *Clerical and Parochial Records of Cork, Cloyne, and Ross*. Dublin: Alexander Thom, 1864. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Brinkley_obituary/).

out an easy way of correcting the error which this assumption introduces in the result.⁶⁹

À semelhança do método de Delambre, Ivory também apresentou um método direto, ou seja, que não necessita de um valor estimado da latitude. Porém, utilizou o valor médio das declinações para a declinação, considerando esse mesmo valor para ambas as observações, que foi precisamente o que Delambre criticou, relativamente aos métodos anteriores. Para contornar os erros resultantes dessa condição, o autor apresentou uma solução bem mais simples e acessível do que a de Delambre.

Ivory avança para a demonstração dos princípios base do seu método e para a explicação teórica da proposta, apoiando-se na figura 4.1. De seguida, demonstra-o através dos exemplos do almanaque náutico de 1822, e explica que esta decisão tem como objetivo uma melhor comparação entre um método indireto (o de Brinkley) e um método direto. Através dos vários exemplos apresentados, o autor demonstra a precisão dos resultados obtidos através do método de Brinkley. No entanto, aponta a quantidade de cálculos necessária para a obtenção da latitude — onde se subentende a crítica à extensão dos métodos — assim como a dependência de várias tabelas:

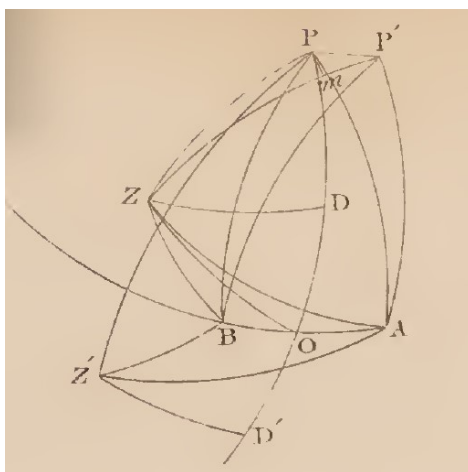


FIGURA 4.1: Figura utilizada como base para o método de James Ivory.⁷⁰

By the process here followed⁷¹, to find the latitude requires taking out fifteen numbers from the Tables. Now one operation of Douwes's

⁶⁹Ivory, *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them*, p. 82.

⁷⁰Fonte: James Ivory, *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them*, página sem numeração.

⁷¹Referente ao processo de Brinkley.

rules requires taking out twelve numbers, and the correction must double this labour: perhaps it does more, if we consider the length of the calculation, and the embarrassment of having to use different formulae. Delambre's method requires nineteen different logarithms, besides employing additions and subtractions of the arcs not wanted here.⁷²

Após a apresentação do seu método, Ivory conclui, dizendo que todos os passos calculam diretamente uma parte da figura 4.1, evitando cálculos intermédios. Termina, reforçando que o seu método é menos extenso do que todos os outros propostos até então, mas admite que não está livre de críticas e de não ser posto em prática, caso não se denote uma grande vantagem na sua utilização, como o comprovam as seguintes afirmações do autor: “*by far the shortest of any hitherto proposed*” e “*is not free from objection, and ought not to be adopted unless a great advantage is gained*”⁷³.

4.1.2 Edward Riddle — Aperfeiçoamento do método

Da revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, recolheram-se várias informações sobre Edward Riddle. O autor nasceu em 1788, em Northumberland, Inglaterra, e dedicou a sua vida ao estudo da matemática e da astronomia náutica. Foi Mestre da *Trinity House School*, em 1814, e, sete anos depois, foi Mestre da *Mathematical School, Royal Naval Hospital, Greenwich*, tendo-se tornado membro do Conselho dessa Sociedade, de 1825 a 1851. Riddle era extremamente respeitado e reconhecido, não só pelo seu trabalho exímio enquanto professor de navegação e astronomia náutica e pelos seus contributos para a comunidade científica, como também pela pessoa que sempre demonstrou ser. Morreu em 1854, deixando o filho, John Riddle, como seu sucessor.⁷⁴

Quanto à latitude por extrameridianas, Riddle teve também um papel importante, porque tornou a proposta de Ivory num método mais simples e acessível. Esta proposta do autor foi adotada e divulgada em várias obras e manuais, nomeadamente na revista *The Philosophical Magazine and Journal*, em 1822:

In 1822, Mr. Riddle communicated a short paper to the *Philosophical Magazine*, “On the Simplification of Ivory’s Solution of the Double Altitude Problem.” By a very simple trigonometrical transformation, he

⁷²Ivory, *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun’s altitude and the time elapsed between them*, p. 86.

⁷³Ibid., p. 90.

⁷⁴«Report of the Council to the Thirty-fifth Annual General Meeting of the Society». Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 15 (fev. de 1855), pp. 110–115.

adapted Ivory’s solution to logarithmic computation, and gave to it that practical working form now in use.⁷⁵

Em 1824, Riddle desenvolveu um manual de navegação e astronomia náutica, *A Treatise of Navigation, and Nautical Astronomy, adapted to practice, and to the purposes of elementary instruction*. Essa sua obra de excelência teve várias edições, para que toda a informação estivesse de acordo com as inovações e as necessidades dos pilotos. No manual também está presente a sua proposta de cálculo da latitude por extrameridianas, baseada no método de Ivory — “*The method of finding the latitude by double altitudes of the sun, is derived from a solution of the problem originally given by J. Ivory*”⁷⁶. Edward Riddle publicou cinco edições da obra mencionada, e o seu filho assumiu a continuação da mesma, a partir da sexta edição até à oitava.

À semelhança do método de Douwes, o processo proposto por Ivory e simplificado por Riddle, foi também adotado por outros autores, que o expuseram nas suas obras. Este é o caso de Norie, em *A Complete Epitome of Practical Navigation*, que tanto expõe o método de Douwes como o método de Riddle. Nathaniel Bowditch apresenta o método de Douwes, na obra *The New American Practical Navigator*, e na sua edição de 1837 também é referenciado o método de Brinkley e o de Ivory⁷⁷.

Comparando o método de Ivory com o de Riddle, assume-se que, efetivamente, o de Riddle é mais simples. Por esse motivo, no próximo tópico será apresentado o processo matemático da proposta de Riddle, através da obra de Peregrino Leitão, que o copiou da obra de Norie. Optou-se por esta referência, por se tratar de um autor português e por se acreditar que tenha sido o responsável pela tradução do método para a nossa língua. Além disso, Peregrino Leitão não incluiu o método de Douwes na sua obra, que tanto se pode justificar por já existir a tradução da autoria de Militão da Mata, como pela opinião pessoal do autor, que poderia considerar a proposta de Riddle melhor que a de Douwes. De referir ainda que, Peregrino Leitão apresentou a resolução do método de Riddle, utilizando apenas as tabelas de Norie.

4.2 Proposta de Riddle por Peregrino Leitão

Tal como foi dito anteriormente, o método de Ivory e de Riddle foi uma inovação, principalmente por se tratar de um processo que não requeria a latitude

⁷⁵ «Report of the Council to the Thirty-fifth Annual General Meeting of the Society», p. 113.

⁷⁶Edward Riddle. *A Treatise on Navigation, and Nautical Astronomy, adapted to practice, and to the purposes of elementary instruction*. Londres: Bardwin, Cradock, e Joy, 1824, p. iv.

⁷⁷Nathaniel Bowditch. *The New American Practical Navigator. Being an Epitome of Navigation*. New York: E. & G. W. Blunt, 1837, p. iv.

estimada para a realização dos cálculos, ao contrário do método de Douwes. Esta é a principal diferença na base da conceção dos cálculos.

Na obra de Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, é apresentada uma explicação introdutória de alguns conceitos do triângulo de posição e dos parâmetros a considerar para o resolver. De seguida, são expostas as condições necessárias para se efetuarem as observações, por forma a garantir o melhor resultado. Segundo o autor, caso as condições sejam cumpridas, o resultado “não differirá da verdade mais de 3’, pouco mais ou menos”⁷⁸, sendo estas:

- 1.^a Que a altura meridiana não possa ser maior que 84°.
- 2.^a Que a menor altura seja maior que 7°, e que o seu azimuth correspondente não seja maior que 75°.
- 3.^a Que a maior altura seja observada o mais próximo do meridiano, de maneira que o seu azimuth não seja muito maior que 15°.
- 4.^a Finalmente convém que seja pouco mais ou menos o maior azimuth, igual a duas vezes e meia o menor; isto é, duas vezes o maior, igual a cinco vezes o menor.⁷⁹

No final do exemplo que segue a explicação do método, ainda são referidas mais algumas condições para as observações. O autor dá a entender que essas restrições são a chave para o sucesso do método, quando diz “ha restrições para que se possa contar com a maxima exactidão”, e apresenta-as⁸⁰:

As observações devem ser feitas entre as 9 horas da manhã e as 3 da tarde. Se ambas as observações forem feitas de manhã, ou ambas de tarde, o intervallo de tempo não deverá ser menor do que o espaço entre o meio dia e a hora da maior altura. Sendo feitas uma de manhã e outra de tarde, o intervallo de tempo não deverá exceder a quatro horas e meia, em todo o caso, quanto mais perto estiver a maior altura do meio dia, tanto melhor será.

327. Se a distancia zenithal meridiana do sol fôr menor do que a latitude, os intervallos deverão ser ainda mais curtos. Se a latitude fôr o dobro da distancia zenithal meridiana, as observações deverão fazer-se entre as 9 horas e meia da manhã, e as duas da tarde; e o intervallo de tempo não deverá exceder a 3 horas e meia.

⁷⁸Onde 3’ equivale a 3 minutos de grau, de acordo com a notação comumente utilizada. João Peregrino Leitão. *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*. Lisboa: Sociedade Typographica Franco Portuguesa 6, 1865, p. 90.

⁷⁹Ibid., p. 90.

⁸⁰Ibid., p. 91.

328. As observações deverão ser feitas ainda mais próximas do meio dia se a latitude exceder a distancia zenithal meridiana em maior razão.

Riddle, na apresentação do seu método, não fez referência a quaisquer condições para o registo das observações. Norie, quando expôs o método de Douwes, mencionou também as condições ideais para a realização das observações, as mesmas que o autor do método definiu. No entanto, para o método de Riddle, Norie acrescentou uma nota onde diz que, para a aplicação do método, devem ser tidas em conta as mesmas considerações de observação que foram apresentadas para o método de Douwes⁸¹. Peregrino Leitão também apresenta as restrições a ter em conta nos momentos das observações, mas são diferentes das que Norie mencionou, e consequentemente, diferentes das de Douwes. O que é certo é que todos os autores afirmam que, regra geral, desde que as alturas sejam observadas com rigor, os resultados serão aceitáveis.

Partindo então para a explicação do método propriamente dito, remete-se para a dissertação elaborada por Jorge Pires, em 2021, que transcreveu e abordou os passos a seguir para o cálculo da latitude, segundo Peregrino Leitão⁸². Da mesma forma, segue-se a transcrição dos oito passos definidos por Peregrino Leitão⁸³, aos quais foi acrescentada a tradução para linguagem matemática, onde não é considerada a aplicação dos logaritmos. Ou seja, os cálculos apresentarão quocientes e divisões. A notação utilizada não corresponde à notação de Peregrino Leitão, mas sim à que foi apresentada no capítulo 1, presente na figura 1.2. De referir ainda que se considerou $a_2 > a_1$.

325. 1.º Sommem-se as alturas verdadeiras, e tome-se metade; tire-se a menor altura da maior, e tome-se metade da diferença.

$$\frac{a_1 + a_2}{2}; \frac{a_2 - a_1}{2}$$

2.º O meio intervallo de tempo entre as observações se reduzirá a gráus, pela taboa XIX.

$$\frac{t_2 - t_1}{2}$$

Cujo resultado é convertido para graus, através da tabela XIX, de Norie.

3.º Sommem-se a cosecante do meio intervallo de tempo e a secante da declinação; a somma será o logariihimo [sic] da cosecante do 1.º arco.

⁸¹Norie, *A new and complete epitome of practical navigation*, p. 198.

⁸²Pires, *Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol*, pp. 108-113.

⁸³Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, pp. 90 e 91.

$$\csc\left(\frac{t_2 - t_1}{2}\right) \sec(\delta) = \csc(1.^{\circ}\text{arco})$$

4.º Sommem-se, a cosecante do 1.º arco, o coseno da metade da somma das alturas, e o seno da metade da sua differença: a somma d'estes logarithimos será o logarithimo do seno do 2.º arco.

$$\csc(1.^{\circ}\text{arco}) \cos\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \sin\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right) = \sin(2.^{\circ}\text{arco})$$

5.º Sommem-se a secante do 1.º arco, o seno da metade das alturas, o coseno da metade da sua differença, e a secante do 2.º arco: a somma será o logarithimo do coseno do 3.º arco.

$$\sec(1.^{\circ}\text{arco}) \sin\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right) \cos\left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right) \sec(2.^{\circ}\text{arco}) = \cos(3.^{\circ}\text{arco})$$

6.º Sommem-se a secante do 1.º arco, e o seno da declinação: a somma será o coseno do 4.º arco, quando a latitude e a declinação forem da mesma denominação; mas sendo de differente nome, tome-se o supplemento para ter o 4.º arco.

$$\sec(1.^{\circ}\text{arco}) \sin(\delta) = \cos(4.^{\circ}\text{arco})$$

ou

$$\frac{\sec(1.^{\circ}\text{arco})}{\sin(\delta)} = \cos(4.^{\circ}\text{arco})$$

7.º A somma ou differença do 3.º e 4.º arcos, dará o 5.º arco.

$$3.^{\circ}\text{arco} \pm 4.^{\circ}\text{arco} = 5.^{\circ}\text{arco}$$

8.º Sommem-se as secantes dos 2.º e 5.º arcos, a somma será o logarithimo da cosecante da latitude.

$$\sec(2.^{\circ}\text{arco}) \sec(5.^{\circ}\text{arco}) = \csc(\varphi)$$

Nota. Quando a somma dos 3.º e 4.º arcos se veja ser igual ou maior que 90º, a sua differença será sempre o 5.º arco, porém quando a sua somma fôr menor que 90º, (o que poucas vezes acontecerá) fica duvidoso se se deve tomar para o 5.º arco, a sua somma ou differença. Por tanto faz-se o calculo nas duas hypotheses (sem difficuldade porque a secante do 5.º arco é o ultimo logarithimo que se procura, e os outros elementos

do calculo, não têm alteração): um dos dois resultados será sem duvida a latitude que se pede; e a estima em geral bastará para mostrar qual d'ellas se deverá adoptar.⁸⁴

Todos estes passos foram applicados a dados reais, à semelhança do processo de Douwes, cujos resultados são apresentados no capítulo 6 e analisados com base nas condições de observação definidas por Leitão, entre outros aspetos relevantes.

4.2.1 Exemplo do método

Para ilustrar a explicação do método, foi retirado um exemplo da obra de Peregrino Leitão. Neste caso, como a organização dos cálculos é feita por arcos, e estes se encontram perfeitamente assinalados no exemplo, a associação entre o exemplo da figura 4.2 e os cálculos apresentados na explicação anterior é totalmente direta.

Neste método, ainda que a latitude estimada não seja utilizada para os cálculos, pode ser necessária para a escolha do valor final da latitude calculada. Este aspeto deve-se à nota final, transcrita e apresentada no ponto acima, relativamente ao cálculo do 5º arco. No caso da soma dos 3º e 4º arcos ser inferior a 90º, como acontece no exemplo da figura 4.2, obtém-se dois valores para o 5º arco. Nesta situação, calcula-se a latitude para ambas as opções, e utiliza-se a latitude estimada para escolher o o resultado final.

No enunciado da figura 4.2, retira-se que a latitude estimada é de 6º30'N. Calculando a latitude para os dois valores do 5º arco, obtém-se dois valores possíveis para a latitude: 7º36'N ou 1º35'N. Pela proximidade dos dois valores possíveis para a latitude calculada com o valor da latitude estimada, conclui-se que o resultado a assumir para a latitude calculada é 7º36'N. Tal como Peregrino Leitão o disse, "um dos dois resultados será sem duvida a latitude que se pede"⁸⁵, já que os dois valores possíveis são muito distantes entre si.

⁸⁴Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, pp. 90 e 91.

⁸⁵Ibid., p. 93.

⁸⁶Fonte: Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, p. 92 e 93.

A 8 de setembro de 1861, na latitude estimada $6^{\circ} 30' N$, às 11 h. 7' 20" hora media em Greenwich, dada por um chronometro (a quem se applicou o seu estado n'esse dia) a altura observada do limbo inferior do sol era de $69^{\circ} 49' 30''$, e às 13 h. 27' 20" pelo mesmo chronometro, a altura era de $35^{\circ} 10' 30''$, e sendo 18 pés a altura do olho do observador, pede-se a latitude, á hora da maior altura.

Declin. a 8 de setembro ao $\frac{1}{2}$ dia de Greenw. $5^{\circ} 40' 36'' N$

Correcção para 11 h. 7' (hora em Greenw.

quando foi observada a maior altura) $-10 35$ (tab. XXI)

Declin. do sol á hora media em Greenwich $5 30 1 N$

1.ª alt. obs. do limb.	2.ª alt. obs. do limb.
inf. do sol. $69^{\circ} 49' 30''$	inf. do sol. $35^{\circ} 10' 30''$
Corr. tab. IX = . . . + 11 24	Corr. tab. IX = . . . + 10 30
Alt. verd. do centro	Alt. verd. do centro
do sol $70 00 54$	do sol $35 21 00$

Alt. verd.	Horas no chron.
$70 00 54$	$11 7 20$
$35 21 00$	$13 27 20$
Somma $105 22$	$2 20 00$ intervalo de tempo
Differ. $34 40$	
$\frac{1}{2}$ som. $52 41$	$1 10 00$ meio int. de temp. = $17^{\circ} 30'$
$\frac{1}{2}$ differ $17 20$	

Meio interv. $17^{\circ} 30' 00''$ cosec. $0,52186$ (tab. XXV)

Decl. á hora $5 30 00$ sec. $0,00200$ seno $8,98157$

1.º arco $17 25$	cosec. $0,52386$	sec. $0,02038$	sec. $0,02038$
$\frac{1}{2}$ s. das alt. $52 41$	cos. $9,78263$	sen. $9,90053$	
$\frac{1}{4}$ dif. das alt. $17 20$	sen. $9,47412$	cos. $9,97982$	
2.º arco $37 7 N$	sen. $9,78061$	sec. $0,09832$	
3.º arco $3 47$	cos. $9,99906$		
4.º arco $84 14$	cos. $9,00196$		
6.º arco $80 27$	(4.º - 3.º arcos) sec. $0,78013$		
	2.º arco . . . sec. $0,09832 N$		

Latitude N $7^{\circ} 36'$ cosec. $0,87845$

Outra hypothese, visto ser este o caso de que se trata na nota do § 325.

5.º arco = (3.º + 4.º arcos) $88^{\circ} 1'$ sec. $1,46081$
2.º arco . . . sec. $0,09832$

Latitude N $4^{\circ} 35'$ cosec. $1,55913$

FIGURA 4.2: Exemplo de aplicação do método de Riddle, pela obra de Peregrino Leitão.⁸⁶

Capítulo 5

Longitude

5.1 Abordagem histórica

A determinação da longitude resume-se ao cálculo da diferença horária entre dois locais, o que hoje é facilmente obtido. Esses dois locais são um meridiano de referência⁸⁷ e o meridiano do local para o qual se pretende saber a longitude. Sabendo as horas para cada um desses locais, é possível calcular a sua diferença que, convertida para graus, equivale ao valor da longitude no local. No entanto, até finais do século XVIII, não existiam meios que permitissem contabilizar a passagem do tempo no meridiano de referência a bordo, o que nos leva a um dos grandes problemas da comunidade científica dos séculos passados: como calcular a longitude no mar?

Se fosse possível calcular essa coordenada a bordo, as viagens tornar-se-iam mais rápidas, e tanto a vida dos homens, como os navios, seriam preservados. Isto levou a uma espécie de corrida para resolver o cálculo da longitude, pelo poder social, político e económico que traria ao país, ou à corte, responsável por esse feito. Por essa razão, começaram a ser divulgados prémios monetários de grande valor para quem o resolvesse. Inclusive, a corte britânica, em 1714, aprovou a criação de um grupo denominado por *Commissioners for the Discovery of the Longitude at Sea*, mais conhecido como *Board of Longitude*, já referido na presente dissertação. Este grupo tinha como objetivo a validação das propostas que surgissem e a sugestão de valores a atribuir a quem desse contributos para solucionar o problema.⁸⁸

Neste seguimento, começaram a surgir vários métodos, sendo de realce o método das distâncias lunares. Este método tinha por base o movimento da lua, mas era extremamente complexo, o que tornava muito complicada a sua aplicação, principalmente a bordo.

⁸⁷No nosso caso, o meridiano de Greenwich.

⁸⁸Derek Howse. *Britain's Board of Longitude: The Finances, 1714-1828*. Em: *The Mariner's Mirror*. Ed. por Alexander Tilloch e Richard Taylor. Vol. 84. 1998, pp. 400–417, pp. 401–403.

Foi então que, em 1736, o inglês John Harrison criou o seu relógio marítimo H1 (um cronómetro). John Harrison era relojoeiro e artesão mecânico, e por esta invenção recebeu 500 libras da parte do *Board of Longitude*, como incentivo para continuar a melhorar a sua invenção e criar um novo cronómetro de menores dimensões⁸⁹. Assim, em 1760, apresentou a quarta versão do seu relógio marítimo, o H4, que foi testado durante uma navegação de Inglaterra à Jamaica, no período de 18 de novembro de 1761 até 27 de janeiro de 1762, da qual resultou um atraso de apenas cinco segundos⁹⁰.

O sucesso do relógio de bordo de Harrison era evidente. O único senão a apontar era a sua disseminação, pela dificuldade de produção e pelo custo elevadíssimo, já que era uma novidade muito cobiçada. Por esses motivos, o método das distâncias lunares continuou a ser mais utilizado, pelo menos até à vulgarização da invenção de John Harrison, que se deu apenas no século XIX.

Nesta fase, entre os vários métodos existentes, já foram mencionadas duas formas de conhecer a hora do meridiano de referência. Fazendo um apanhado geral, por um lado, podem-se observar fenómenos astronómicos, nomeadamente, as distâncias lunares, que permitem comparar valores de medições de distâncias no local com valores de distâncias tabeladas para o meridiano de referência. Aos valores tabelados está associada uma hora, que corresponde à hora do meridiano de referência no momento da medição. Conhecendo a hora local, determina-se a longitude pela diferença horária entre a hora local e a hora tabelada. Por outro lado, pode-se utilizar o relógio de Harrison (um cronómetro) que esteja certo com a hora do meridiano de referência, pelo que basta comparar a hora desse relógio com a hora local para se descobrir a longitude.

O que é facto é que, após a determinação da hora no meridiano de referência, é necessário calcular a hora no local, processo esse que é comum aos dois métodos mencionados anteriormente. Para isso, resolve-se o triângulo de posição, de modo a obter o ângulo horário do astro. Para calcular o ângulo horário, é necessário conhecer três elementos do triângulo: a altura do astro, a sua declinação e a latitude do local (normalmente, estimada). O valor do ângulo horário dará a hora verdadeira no local, se o astro for o Sol, ou a hora sidereal, se for uma estrela. Com qualquer um desses valores é possível calcular a hora média no local, e comparar com a hora média no meridiano de referência (obtida pelas distâncias lunares ou pelo cronómetro).

No próximo subcapítulo, será feita uma abordagem ao método de cálculo da longitude pelo ângulo horário, incluindo a apresentação dos cálculos matemáticos

⁸⁹Howse, *Britain's Board of Longitude: The Finances, 1714-1828*, p. 403.

⁹⁰Fernando B. Figueiredo. «Longitude. Uma Longa e Fascinante História». Em: *Gazeta de Matemática* (jul. de 2014), pp. 26–35, p. 32.

que o método exige e um exemplo de Peregrino Leitão.

5.2 Longitude pelo ângulo horário

Com base na obra de Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, retiraram-se as primeiras considerações do método em estudo. Neste caso, como se trata de um método que não necessitou de aperfeiçoamentos e simplificações, seria relativamente indiferente a referência selecionada, porque a sua resolução não sofreu alterações.

Numa primeira fase, é importante saber que o cronómetro deve estar regulado para um determinado meridiano, e no momento da observação deve ser feito o registo das horas, minutos e segundos que o cronómetro marca. Desta forma, é possível conhecer a diferença em tempo entre os dois meridianos — o de referência e o da observação — e converter o seu valor para graus e minutos de grau, com base na razão de 15° por hora⁹¹.

Um outro aspeto interessante referido pelo autor, é a decisão de se registarem várias alturas seguidas e o tempo que o cronómetro marca para cada uma delas. O objetivo é salvaguardar a precisão das observações, sendo que depois é necessário fazer a média das alturas e a média dos tempos marcados para assumir apenas um valor para cada um dos parâmetros.⁹²

Para o método do ângulo horário, além do valor de uma altura do Sol⁹³ e do tempo do cronómetro no momento da observação, é necessário retirar das tabelas — por exemplo, do almanaque náutico — o valor da declinação para o dia em causa.

Quanto a restrições a ter em conta para a observação, Peregrino Leitão afirma que a observação do Sol deve ser efetuada no período de uma hora e meia a três horas de intervalo de tempo, em relação ao momento da passagem meridiana⁹⁴.

5.2.1 Resolução do método

Com apoio na figura 1.2, torna-se mais fácil perceber a definição dos parâmetros a considerar. Para isso, utilizar-se-á a mesma notação que a figura apresenta, o que não corresponde à notação que Peregrino Leitão utilizou na sua obra.

⁹¹Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, p. 116.

⁹²Ibid., p. 116.

⁹³O método pode ser referente a outro asto. No entanto, para posterior aplicação do cálculo da longitude, conjuntamente com o cálculo da latitude por duas extrameridianas do Sol, este astro será a referência utilizada.

⁹⁴Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, p. 117.

Tal como o nome indica, a longitude é calculada pelo ângulo horário. No triângulo de posição, o ângulo horário corresponde ao ângulo ZP_nM . Para a resolução do método é necessário calcular primeiro os lados do triângulo, cujos complementos são o ponto de partida para o método:

- A partir da observação, regista-se o valor da altura, cujo complemento dará a distância zenital, ZM ;
- Das tabelas de declinação, retira-se o valor da declinação para o dia da observação, cujo complemento dará a distância polar, P_nM ;
- Conhecendo-se o valor da latitude estimada, obtém-se o seu complemento, a colatitude, ZP_n ;
- Do cronómetro, retira-se o intervalo de tempo decorrido entre os meridianos, posteriormente convertido para graus.

Uma nota importante sobre a latitude é que, no caso do seu valor ter sido obtido pela passagem meridiana, seria necessário estimar um novo valor para o momento da observação efetuada para o cálculo da longitude. Quando não era calculada a latitude pela impossibilidade de observação do Sol no instante da sua altura máxima, utilizava-se igualmente uma latitude estimada, conforme o conhecimento do piloto, com consciência do erro que poderia originar.

Para o cálculo da longitude pelo ângulo horário, aplica-se a fórmula fundamental da trigonometria esférica:

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A) \quad (5.1)$$

Sendo que, o triângulo é composto por três lados, a , b e c , e três ângulos, A , B e C .

Conhecendo três parâmetros dos seis que compõem o triângulo esférico, é possível calcular os outros três, cujo valor é desconhecido. Assim sendo, pela enumeração exposta acima, tem-se os valores dos três lados do triângulo de posição (ZM , P_nM e ZP_n), e pretende-se calcular o ângulo no polo (P_n). Pela fórmula fundamental da trigonometria esférica:

$$\cos P_n = \frac{\sin a - \sin \varphi \sin \delta}{\cos a \cos \varphi} \quad (5.2)$$

Com a aplicação dos logaritmos às funções trigonométricas, a resolução da fórmula anterior seria dificultada pela presença de uma subtração no numerador. Por esse motivo, Peregrino Leitão apresentou uma fórmula diferente na sua obra⁹⁵:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}P = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(ZS + PS + ZP) - ZP) * \operatorname{sen}(\frac{1}{2}(ZS + PS + ZP) - SP)}{\operatorname{sen} ZP * \operatorname{sen} SP} \quad (5.3)$$

onde, $ZP = C\varphi$ (colatitude), $SP = \Delta$ (distância polar) e $ZS = \zeta$ (distância zenital). Tendo isto em conta, segundo a notação atual, a equação 5.3 tomaria este aspeto:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}P_n = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}(\zeta + \Delta + C\varphi) - C\varphi) * \operatorname{sen}(\frac{1}{2}(\zeta + \Delta + C\varphi) - \Delta)}{\operatorname{sen} \zeta * \operatorname{sen} \Delta} \quad (5.4)$$

Com a aplicação dos logaritmos na equação 5.3, o cálculo da longitude tornou-se fácil e rápido, o que justifica a aceitação imediata deste método pela comunidade científica e pelos pilotos, sem que houvesse necessidade de criação de uma alternativa.

Antes de se avançar para o último capítulo deste trabalho, segue-se um exemplo da aplicação do método de cálculo da longitude pelo ângulo horário, como complemento da explicação decorrida.

5.2.2 Exemplo do método

Recorrendo, novamente, à obra de Peregrino Leitão, retirou-se o exemplo que o autor utiliza como complemento da explicação do método de cálculo da longitude pelo ângulo horário. Transcreveu-se diretamente o enunciado do problema, exposto em seguida, e apresenta-se a sua resolução na figura 5.1.

A 19 de maio de 1864 depois do meio dia em que tínhamos achado a latitude pela altura meridiana do sol, $42^{\circ}31'N$, observamos as alturas em seguida notadas bem como as horas que lhe corresponderam no chronometro, que no dia 17 de março ao meio dia, estava adiantado do tempo médio de Greenwich $1^{\circ}18''$, tendo por marcha diaria $+1'',8$; sendo a altura do olho do observador 26 pés. Pede-se a longitude exacta do navio.⁹⁶

⁹⁵Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, p. 118.

⁹⁶Ibid., p. 118.

Horas do chronometro		Alt. obs. do limbo inf. do sol	
6h.58'40"		44° 7'00"	
6 59 36		43 57 00	
7 00 51		43 54 00	
7 2 12		43 33 00	
7 3 21		43 24 00	
35 4 40		218 45 00	
Media	7 00 56	Alt. media	43 45 00
Estado do chr. em		(tab. V) depr. do hor. —	4 52
17 março	— 1 18		43 40 8
	6 59 38 (tab. XVIII) refr.— paral. —		53
Erro acumulado de			43 39 15
17 março a 19 de	(Alman.) sem. diam do sol +		15 49
maio	— 8 14	Alt. verd. do centro do sol	43 55 4
H. med. em Gr. . .	6 51 24		90
		SZ	46 4 56

Decl. do sol a 19 maio = 19°47'43" N	Eq. do tem. em 19 de m. ao 1/2 dia. . . 3'49",5 ad. ao t. m.
Correc. para 6 h. 51' (tab. XXI) . . + 3 44	Correc. para 6 h. 51'. — 0,9 (tab. LI)
Decl. á h. em Gr. 19 51 27 N	Eq. do temp. ad. ao t. m. á hora. . . 3 48,6
90	
Dist. polar SP . . 70 8 33	

402. Supponhamos que tínhamos navegado 21 milhas ao rumo verdadeiro de 43° SO, e então, acharíamos para differença de latitude 15' para o sul, que subtraindo de 42°31' N, nos daria para latitude á hora da observação. . . 42°16' N
90
Compl. da latitude Z P . . . 47 44

Procurando a semisomma dos tres arcos teremos: 1/2 (ZP + SZ + SP) = 1/2 (47°44'46" + 46°4'56" + 70°8'33") = 84°58'44", e substituindo estes valores na formula do sen. 1/2 P, acharemos: Sen. 1/2 P = $\frac{\text{Sen. } (81^{\circ}58'44'' - 47^{\circ}44'46'') \times \text{sen. } (81^{\circ}58'44'' - 70^{\circ}8'33'')}{\text{Sen. } 47^{\circ}44' \times \text{sen. } 70^{\circ}8'33''}$ O que feito por logarithmos, será: Log. do sen. 34°14'44". . . 9.750308 " " sen. 11 50 11 . . . 9.311893 " ar. sen. 47 44 00 . . . 0.130753 " ar. sen. 70 8 33 . . . 0.026623 2) 19.219579 = 2 sen. 1/2 P 24° 1'41". . . 9.609789 = sen. 1/2 P 48 3 22 = P em graus 3h.12'13". = P em temp. verd. Equ. do tempo. — 3 49 3 8 24 tempo médio a bordo á hora da obs. 6 51 24 tempo médio em Gr. á hora da obs. Long. em tempo 3 43 00 = 55°45' OG.
--

FIGURA 5.1: Exemplo de Peregrino Leitão para o cálculo da longitude pelo ângulo horário⁹⁷

A partir da figura 5.1 verifica-se que foram registadas cinco alturas (à direita) e respetivas horas do cronómetro (à esquerda). Como foi dito anteriormente, a intenção destes múltiplos registos é a salvaguarda da precisão das observações. Por baixo dos registos, está calculada a média dos tempos marcados no cronómetro e a média das alturas, que serão os valores utilizados.

A figura pode ser dividida em quatro partes, como o demonstram os retângulos que lhe foram acrescentados:

1. Cálculo da distância zenital (SZ ou ζ);
2. Cálculo da distância polar (SP ou Δ);
3. Cálculo da colatitude (ZP ou $C\varphi$);
4. Cálculo da longitude.

No retângulo número 1, existem dois cálculos importantes: o cálculo da hora média em Greenwich no momento da observação, e o cálculo da distância zenital. Para o cálculo da hora, é necessário considerar o erro do cronómetro, tanto o erro conhecido a 17 de março, como o erro acumulado pela sua marcha diária até ao dia da observação. No caso da distância zenital, como se trata do complemento da altura verdadeira, é necessário efetuar todas as correções necessárias à altura média observada e, por fim, subtrair-se o resultado a 90° que dará, precisamente, a distância zenital ($SZ \equiv ZS \equiv \zeta = 46^\circ 4' 56''$).

No segundo retângulo, o foco prende-se com o cálculo da distância polar. Como este parâmetro é o complemento da declinação, e a declinação é um valor tabelado, deve apenas calcular-se o seu valor para a hora média em Greenwich, e subtrai-se o resultado a 90° , obtendo-se o valor da distância polar ($SP \equiv PS \equiv \Delta = 70^\circ 8' 33''$), à semelhança do que é feito para a distância zenital.

Em terceiro lugar, vem calculada a colatitude. Seguindo o mesmo raciocínio dos dois parâmetros anteriores, calcula-se a latitude estimada com base na navegação praticada e subtrai-se o resultado a 90° , obtendo-se o seu complemento, a colatitude ($ZP \equiv C\varphi = 47^\circ 44'$).

Por último, no retângulo número 4, verifica-se a resolução da equação 5.3, com o uso dos logaritmos. Como as funções do denominador passam a subtrações, o autor utiliza o chamado complemento aritmético (“ar. sen.”), que resolve $-\log(x)$. Este complemento é necessário porque, nas tabelas, os valores resultam do somatório do logaritmo com 10, para evitarem os valores negativos. Então, obtém-se o valor

⁹⁷Fonte: Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*, pp. 118 e 119.

pretendido da seguinte forma: $-\log(x) = 10 - (10 + \log(x))$, onde $(10 + \log(x))$ é o valor retirado das tabelas. Desta forma, as funções seno do denominador passam para uma soma como “ar. sen.”. Recorrendo ao exemplo, utilizando os valores que o mesmo apresenta e sabendo que $\frac{1}{2}(ZS + PS + ZP) = 81^\circ 58' 44''$, vemos que o cálculo

$$\text{sen}^2 1/2P = \frac{\text{sen}(81^\circ 58' 44'' - 47^\circ 44') * \text{sen}(81^\circ 58' 44'' - 70^\circ 8' 33'')}{\text{sen } 47^\circ 44' * \text{sen } 70^\circ 8' 33''}$$

é resolvido, através dos logaritmos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \log(\text{sen}^2 1/2P) = \\ \log(\text{sen } 34^\circ 14' 44'') + \log(\text{sen } 11^\circ 50' 11'') + \log(\text{ar. sen } 47^\circ 44' 00'') + \log(\text{ar. sen } 70^\circ 8' 33'') \end{aligned}$$

Pelas propriedades logarítmicas, e resolvendo a soma dos logaritmos, a equação anterior passa a $2 \log(\text{sen } 1/2P) = 19.219579$. A partir deste ponto, basta retirar o valor de $\log(\text{sen } 1/2P)$, dividindo o resultado anterior por 2. De seguida, obtém-se o valor de $1/2P$ em graus, através das tabelas, e multiplica-se por 2 para descobrir P , ou seja, o valor do ângulo no polo, que, neste caso, corresponde a $48^\circ 3' 22''$.

Finalmente, converte-se o valor de P para tempo, também através das tabelas, corrige-se de acordo com a equação do tempo e subtrai-se o resultado à hora média da observação em Greenwich, calculada no retângulo número 1. O valor final dessa subtração corresponde ao valor da longitude em tempo, que deve ser convertido para graus — como se vê no exemplo, onde $3h.43'00''$ passaram para $55^\circ 45'$.

Dado por concluído o estudo do método utilizado para o cálculo da longitude, após o cálculo da latitude das observações reais, quer pelo método de Douwes, quer pelo método de Riddle, foi calculada a longitude para cada par de observações, precisamente para estudar a viabilidade de aplicação de um método de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol e do cálculo da longitude pelo ângulo horário, para a obtenção de ambas as coordenadas geográficas para um mesmo instante. Para este cálculo, utilizou-se diretamente a fórmula apresentada na equação 5.2.

Capítulo 6

Aplicação Prática dos Métodos

6.1 Recolha de dados

Com o intuito de pôr em prática os métodos de Douwes e de Riddle, e de testar a sua fiabilidade, foi realizada uma navegação, durante o mês de agosto de 2021, durante a qual foram retiradas várias alturas do Sol, utilizando um sextante. Ao mesmo tempo, foram também registadas as posições GPS para cada observação. Com isto, foram aplicados os valores observados nos métodos em estudo e, posteriormente, fez-se a comparação entre os resultados obtidos e as posições reais, para cada método. Desta navegação resultou um conjunto de 41 dados de diferentes alturas extrameridianas do Sol, com registos de tempo e da posição GPS. À medida que se registavam estes dados, eram também retirados os valores da declinação, através do almanaque náutico.

Em 2022, entre o fim de julho e o início de agosto, foi realizada outra navegação, da qual se retiraram 34 dados, com toda a informação referida anteriormente. Como estas observações são muito recentes, não foi possível tratar destes dados da mesma forma que se fez com os dados de 2021. Posto isto, quanto a estas observações, serão apenas apresentados os resultados de latitude obtidos numa primeira fase do seu cálculo.

Independentemente do estudo que se segue, prefaz-se um total de 75 dados de alturas observadas. De relembrar que, para o cálculo da latitude por qualquer um dos métodos, é necessário utilizar um par de alturas.

6.2 Aplicação do método de Douwes

6.2.1 Desenvolvimento da ferramenta de cálculo

Para aplicação do método de Douwes, recorreu-se a um ficheiro Excel onde foram inseridos os vários passos que o método exige. Os cálculos inseridos nesse

ficheiro foram retirados de um documento francês, *Calculs de Latitude (double-altitude problem)*, de autor desconhecido, baseado na obra de Cotter, *A History of Nautical Astronomy*, que, por sua vez, expôs o método de Douwes. Esta decisão foi tomada após a confirmação da equivalência matemática entre o documento francês e a obra de Harrison. Curiosamente, nesse documento vem também mencionado o trabalho de Maskelyne — “des tables particulières de calcul furent publiées sous l’autorité de N. Maskelyne (Astronomer Royal)”⁹⁸.

No documento mencionado, *Calculs de Latitude*, a notação utilizada para a representação das variáveis é:

- Z — Zénite;
- D — Declinação;
- P_x e P_y — Ângulos no polo da primeira e da segunda observação, respectivamente;
- H_x e H_y — Alturas do astro na primeira e na segunda observação, respectivamente;
- φ — Latitude⁹⁹.

À semelhança das fórmulas apresentadas no capítulo 3, no documento francês também começam por ser apresentadas as equações que resolvem os triângulos de posição de ambas as observações (primeira e segunda observação, respectivamente). De seguida, apresenta-se a diferença entre essas equações, onde se assume que $H_y > H_x$:

$$\sin H_x = \sin \varphi \cdot \sin D + \cos \varphi \cdot \cos D \cdot \cos P_x \quad (6.1)$$

$$\sin H_y = \sin \varphi \cdot \sin D + \cos \varphi \cdot \cos D \cdot \cos P_y \quad (6.2)$$

$$\sin H_y - \sin H_x = \cos \varphi \cdot \cos D \cdot (\cos P_y - \cos P_x) \quad (6.3)$$

Destas equações resulta a fórmula aplicada no Excel, começando por descobrir o valor de $\frac{P_x + P_y}{2}$:

$$\sin \frac{P_x + P_y}{2} = \frac{\cos \frac{H_x + H_y}{2} \cdot \sin \frac{H_y - H_x}{2}}{\cos \varphi \cdot \cos D \cdot \sin \frac{P_x - P_y}{2}} \quad (6.4)$$

⁹⁸ *CALCULS De Latitude (Double-Altitude Problem)*, p. 6.

⁹⁹ Tal como acontece na explicação do método de Douwes apresentada anteriormente, neste documento não se usam notações distintas para diferenciar a latitude estimada da latitude a calcular.

Após a obtenção do valor de $\frac{P_x + P_y}{2}$, retira-se o valor de P_y , ou seja, do ângulo no polo correspondente à maior altura e, conseqüentemente, de valor inferior a P_x . No documento utilizado para referência, este valor é calculado através da equação:

$$\cos P_y = 1 - 2 \left(\sin \frac{P_y}{2} \right)^2 \quad (6.5)$$

No entanto, os cálculos aplicados no ficheiro Excel para obtenção de P_y foram deduzidos de uma forma mais prática. Sabendo $\frac{P_x + P_y}{2}$, retirou-se o valor de $P_x + P_y$, multiplicando por 2. De seguida, calculou-se o valor de P_y pelas seguintes considerações:

- É possível considerar o intervalo de tempo decorrido entre as observações, então optou-se por considerar esse novo parâmetro: ΔT ;
- Um ângulo no polo de uma determinada observação, pode ser dado em tempo, quando convertidos para a mesma unidade. Por esse motivo, o intervalo de tempo decorrido entre as duas observações é equivalente à diferença existente entre os ângulos no polo dessas mesmas observações;
- Quanto maior for a distância temporal entre uma observação e o meio dia solar (passagem meridiana), menor é a altura observada e maior é o ângulo no polo. Como consideramos $h_2 > h_1$, P_y será menor do que P_x .

Face às considerações apresentadas, converteu-se ΔT em radianos e subtraiu-se ao somatório entre P_x e P_y . O resultado são dois ângulos iguais, cuja divisão por dois dará o valor de P_y :

$$P_y = \frac{(P_x + P_y) - \Delta T}{2} \quad (6.6)$$

Por fim, e à semelhança da equação 3.9, determina-se $\varphi - D$ através da equação:

$$\cos(\varphi - D) = \sin H_y + 2 \cos \varphi \cos D \left(\sin \frac{P_y}{2} \right)^2 \quad (6.7)$$

As diferenças em relação à equação 3.9 justificam-se pela utilização do lado direito da equação 6.5, em vez de se utilizar diretamente o valor de $\cos P_y$, o que não altera o resultado.

No ficheiro desenvolvido, obtido o valor de $\varphi - D$, calculou-se o valor da latitude somando a esse resultado o valor da declinação.

Este método é iterativo. No entanto, verificou-se que as iterações não melhoram os resultados. Se os erros são grandes, continuam com a mesma ordem de

grandeza; se são pequenos, continuam pequenos, mas muitas vezes até pioram ligeiramente. Por esse motivo, os resultados que se seguem correspondem aos primeiros resultados obtidos.

Após a aplicação destes cálculos a todos os pares de observações possíveis, verificou-se que foram testados 68 pares de observações, independentemente de cumprirem ou não as condições definidas pelo autor.

6.2.2 Tratamento de dados

Os resultados obtidos com esta experiência são muito variáveis entre si. Tanto existem resultados muito bons, ou seja, latitudes calculadas muito próximas das latitudes reais, como existem valores calculados extremamente distantes dos esperados. Estes dados, assim como todo o processo de tratamento dos mesmos, podem ser consultados num documento fornecido juntamente com a dissertação, onde estão reunidos todos os ficheiros Excel desenvolvidos para este estudo. Esses ficheiros não se encontram em apêndice pela sua quantidade e dimensão elevadas.

Após o cálculo da latitude para todos os pares possíveis, foi feito um estudo dos resultados obtidos. Numa primeira fase, o objetivo foi definir os chamados bons resultados. Ficou definido que um bom resultado seria aquele que originasse um erro igual ou inferior a 5 milhas — o equivalente a 5 minutos de grau — por ser o valor aceitável para a navegação astronómica nos dias de hoje. Assim sendo, de todos os pares, apenas 12 apresentaram erro igual ou inferior a 5 minutos de latitude.

Tirando os bons resultados da tabela, numa segunda fase, foram analisados quais os pares que respeitavam todas as considerações de observação que o autor mencionou, já referidas no capítulo 3 do presente trabalho:

- Garantir um intervalo mínimo de 45 minutos entre as observações;
- Evitar observações entre as nove e as dez da manhã — mais suscetíveis a erros;
- Privilegiar as observações entre as dez e as onze da manhã — resultados mais exatos;
- No caso de uma das observações ser de manhã e outra de tarde, não devem exceder as cinco horas de intervalo de tempo entre si;
- Evitar observações após as cinco da tarde.

Destas condições, existiram duas que não foram consideradas decisivas, sendo estas as referentes aos períodos menos favoráveis, entre as nove e as dez

da manhã, e os mais favoráveis, entre as dez e as onze da manhã. Após a seleção, resultaram 27 pares, cujos erros eram superiores a cinco milhas, mas cumpriam as condições enumeradas anteriormente.

Posto isto, numa última fase, foi feita uma avaliação sobre possíveis erros do utilizador, ou seja, erros na medição das alturas do Sol. Para tal, através das posições GPS e de outras informações, calculou-se a altura do Sol no momento das observações e comparou-se com o valor observado. Para os 27 pares em questão, substituiu-se as alturas observadas pelos valores calculados. Desses pares, 13 reduziram o seu erro, apesar de continuar superior a cinco milhas, e apenas 2 pares diminuíram o erro de latitude para um valor inferior a cinco milhas.

De referir que, dos 27 pares mencionados anteriormente, existem 8 que, apesar de terem um intervalo de tempo inferior a cinco horas, esse intervalo é superior a quatro horas, nalguns casos muito próximo das cinco horas. Sobre os bons pares, é também relevante mencionar que um deles não cumpre a condição do intervalo de tempo entre as observações ser superior a 45 minutos.

Finalizada toda a análise, retiram-se 14 pares de extrameridianas do Sol com bons resultados de latitude, presentes na tabela 6.1, sendo que dois deles foram obtidos pela altura calculada e não pela altura observada, assumindo-se um erro da parte do utilizador no momento da medição da altura do astro (dia 20, par das 10,17h – 12,14h; dia 22, par das 10,72h – 12,07h). Nas tabelas, “OBS” significa “observação” e “Min.” significa “minutos”.

Relativamente aos dados recolhidos em 2022, foi aplicado o método a todos os pares, dos quais resultaram 18 pares com bons resultados. Quanto a estes dados, não foi efetuado um estudo pormenorizado, mas, ainda assim, optou-se por expô-los para uma possível comparação com os resultados diretos do método seguinte. Na tabela 6.2 é possível visualizar os pares cujas latitudes calculadas são muito próximas das latitudes reais.

TABELA 6.1: Pares de extrameridianas do Sol de 2021 com bons resultados de latitude pelo método de Douwes

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Latitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
05/ago	14,17	15,25	36,6275	36,5583	0	4
06/ago	15,01	15,65	36,8330	36,7633	0	4
07/ago	15,15	16,14	37,1511	37,0817	0	4
09/ago	10,92	13,34	37,6465	37,5817	0	4
20/ago	10,17	12,14	38,6158	38,6917	0	5
20/ago	11,22	15,07	38,8859	38,8717	0	1
20/ago	12,14	15,07	38,8621	38,8717	0	1
20/ago	12,14	16,46	39,0372	38,9517	0	5
21/ago	12,29	16,06	39,4778	39,4033	0	4
22/ago	10,72	12,07	39,1719	39,2133	0	2
22/ago	12,07	14,52	39,2227	39,1883	0	2
22/ago	12,07	15,51	39,2498	39,1750	0	4
23/ago	9,81	13,57	38,9252	38,8650	0	4
23/ago	10,48	13,57	38,9063	38,8650	0	2

TABELA 6.2: Pares de extrameridianas do Sol de 2022 com bons resultados de latitude pelo método de Douwes

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Latitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
26/jul	12,42	14,14	35,0443	35,0833	0	2
26/jul	12,42	15,60	34,9737	35,0100	0	2
27/jul	10,01	12,56	33,8524	33,8317	0	1
27/jul	10,70	12,56	33,8236	33,8317	0	0
27/jul	12,56	14,32	33,6879	33,7117	0	1
27/jul	12,56	16,49	33,5523	33,5900	0	2
01/ago	11,09	12,56	32,3351	32,3533	0	1
01/ago	11,09	14,23	32,1448	32,1900	0	3
01/ago	12,56	14,23	32,2201	32,1900	0	2
02/ago	10,64	14,72	30,1304	30,1083	0	1
02/ago	10,64	16,01	29,8934	29,9650	0	4
02/ago	12,53	14,72	30,1727	30,1083	0	4
03/ago	12,49	14,59	27,6407	27,6100	0	2
03/ago	12,49	15,82	27,5113	27,5017	0	1
03/ago	12,49	17,76	27,2880	27,3250	0	2
04/ago	11,25	13,08	25,5406	25,4800	0	4
04/ago	13,08	16,45	25,3282	25,2500	0	5
05/ago	13,14	15,79	23,2226	23,1533	0	4

6.3 Aplicação do método de Riddle por Peregrino Leitão

6.3.1 Desenvolvimento da ferramenta de cálculo

Para pôr em prática o método de Riddle, à semelhança do método anterior, recorreu-se a um ficheiro Excel, onde foram inseridos os vários cálculos que constituem todo o processo. Para isso, a referência utilizada foi a obra de Peregrino Leitão, *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*.

O ficheiro foi desenvolvido com base nos passos apresentados no último ponto do capítulo 4. Os cálculos seguiram os pontos descritos, inclusive, foram criadas três hipóteses para o resultado final, que correspondem às três situações da nota do método.

No caso deste método, utilizou-se a mesma matemática que se usava na época do autor: os logaritmos. A diferença é que, através das propriedades computacionais, os valores não foram retirados de tabelas, mas sim diretamente calculados no Excel.

Mantendo a mesma notação utilizada para a apresentação do método no capítulo 4, tem-se como dados de entrada as duas alturas retiradas pelo observador, a_1 e a_2 (considera-se $a_2 > a_1$), os dois momentos, em tempo, de cada observação, t_1 e t_2 , e a declinação, δ .

O primeiro ponto do método calcula metade da soma das alturas verdadeiras e metade da sua diferença. No desenvolvimento do ficheiro, este passo não se realizou por não haver necessidade de fazer essa simplificação inicial. Assim sendo, começou por ser calculado o valor de metade do intervalo de tempo,

$$\frac{t_2 - t_1}{2}$$

cujo valor final foi designado como $T/2$.

De seguida, calcularam-se os cinco arcos que compõem o método:

- $1.^{\circ}arco = \arcsen(10^{-\log(\csc(T/2)) - \log(\sec(\delta))})$
- $2.^{\circ}arco = \arcsen(10^{\log(\csc(1.^{\circ}arco)) + \log(\cos(\frac{a_1 + a_2}{2})) + \log(\sin(\frac{a_2 - a_1}{2}))})$
- $3.^{\circ}arco = \arccos(10^{\log(\sec(1.^{\circ}arco)) + \log(\sin(\frac{a_1 + a_2}{2})) + \log(\cos(\frac{a_2 - a_1}{2})) + \log(\sec(2.^{\circ}arco))})$
- $4.^{\circ}arco = \arccos(10^{\log(\sec(1.^{\circ}arco)) + \log(\sin(\delta))})$

- $5.^{\circ}arco = \arccos(10^{-\log(\sec(4.^{\circ}arco-3.^{\circ}arco))})$, se $3.^{\circ}arco + 4.^{\circ}arco \geq 90^{\circ}$; ou
 $5.^{\circ}arco = \arccos(10^{-\log(\sec(4.^{\circ}arco \pm 3.^{\circ}arco))})$, sendo necessário calcular tanto para a subtração, como para a soma do $3.^{\circ}$ e $4.^{\circ}arco$ e, no final, avaliar o resultado da latitude pela estima.

Obtidos todos os arcos, resta apenas o cálculo da latitude. Como existem três opções para o valor do $5.^{\circ}arco$, também existem três opções para o valor da latitude. Curiosamente, o autor afirma que a situação mais comum é a soma do $3.^{\circ}$ e $4.^{\circ}arco$ ser igual ou superior a 90° , mas nos dados recolhidos essa situação só se verifica em 3 pares de extrameridianas. Todos os restantes carecem de uma seleção da latitude pela proximidade ao seu valor estimado. A fórmula de cálculo não varia, o que varia é apenas o valor do $5.^{\circ}arco$. Para a latitude, a fórmula utilizada no Excel foi,

$$\varphi = \arcsen(10^{-\log(\sec(2.^{\circ}arco)) - \log(\sec(5.^{\circ}arco))})$$

repetindo-se três vezes, para testar as três possibilidades de cálculo.

6.3.2 Tratamento de dados

À semelhança do que acontece no método de Douwes, os resultados do método de Riddle também são muito variáveis, ou seja, tanto se obtiveram resultados excelentes, como resultados muito distantes dos valores reais. Estes valores podem ser consultados no documento que será entregue juntamente com a dissertação, já referido anteriormente.

Após o cálculo da latitude para todos os pares de observações, analisaram-se os valores dos erros e selecionaram-se os bons resultados. Neste caso, e numa primeira fase, resultaram apenas 10 pares com erro de latitude igual ou inferior a 5 milhas.

Retiraram-se os 10 pares acima mencionados da tabela e foi feita uma análise sobre o cumprimento das restrições que Peregrino Leitão mencionou para as observações. Este autor apresenta mais condições do que as que foram apresentadas no método de Douwes, e que estão mencionadas no capítulo 4 (ponto 4.2).

De seguida, são apresentadas as restrições de Leitão quanto ao intervalo de tempo a considerar para as observações, utilizando uma linguagem mais prática:

- As observações devem ser realizadas entre as 9 horas da manhã e as 15 horas, isto é, entre $PML - 3$ e $PML + 3$, onde PML significa passagem meridiana local, que ocorre às 12 horas;

- Se ambas as observações forem de manhã, ou ambas à tarde, o intervalo de tempo entre as observações (ΔT) deve ser maior do que o intervalo de tempo entre as 12 horas e a hora da maior altura, ou seja, $\Delta T > |PML - t_1|$, onde, t_1 representa a hora da observação da maior altura;
- Se uma das observações for de manhã e outra de tarde, $\Delta T < 4$ horas e 30 minutos.

No entanto, existe uma outra restrição, sobre a distância zenital meridiana (DZM), que, caso se verifique, altera as restrições supramencionadas. O autor afirma que, se a DZM for menor do que a latitude, os intervalos diminuem. Esta situação verifica-se para todas as observações. Especificando as alterações, tem-se:

- Se a latitude (φ) for o dobro da DZM, isto é, $\varphi = 2 * DZM$, as observações devem ser realizadas entre as 9 horas e meia da manhã e as 14 horas, e $\Delta T < 3$ horas e 30 minutos;
- Se φ for muito superior a $2 * DZM$, as observações devem ser realizadas ainda mais próximas da meridiana.

Outra restrição a considerar é relativamente ao azimute, que para a maior altura, não deve ser muito superior a 15° , e para a menor altura não deve ser muito superior a 75° . Quanto à maior altura, só existe uma observação que cumpre esta restrição. Todas as outras falham. Quanto à menor altura, o número de observações que cumpre a restrição é superior ao número de observações que não cumpre. No entanto, como se utilizam sempre pares, existem apenas dois pares que verificam as duas condições. Todos os outros falham, pelo menos na que diz respeito à maior altura. Este aspeto deve ser tido em conta, pois pode ter influenciado todos os resultados. De qualquer forma, prosseguiu-se com o tratamento dos dados nestas condições, sem se considerar a restrição para a maior altura.

Após a seleção das observações que cumpriam as restrições, dentro do que foi estipulado, obtiveram-se 12 pares, cujos erros eram superiores a cinco milhas, mas cumpriam as condições desejadas.

Tal como se procedeu no método anterior, procurou-se possíveis erros do utilizador. Para isso, foram substituídos os valores das alturas observadas pelos valores das alturas calculadas, nos 12 pares selecionados anteriormente. Depois de efetuado o novo cálculo da latitude, verificou-se que 6 pares diminuíram o erro, dos quais 2 diminuíram para um erro igual ou inferior a 5 minutos de latitude.

Antes da apresentação dos bons resultados, é relevante mencionar que, de entre esses pares existem 5 que não cumprem a totalidade das restrições: dois excedem o intervalo de tempo máximo definido entre as observações, sendo que um desses também excede consideravelmente os 75° de azimuth para a menor altura; os outros três pares são totalmente constituídos por observações realizadas após as 14 horas, ou seja, fora do intervalo definido.

Após este estudo, obtiveram-se então 12 pares de extrameridianas que originam bons resultados de latitude (tabela 6.3), sendo que 2 desses foram conseguidos utilizando os valores das alturas calculadas, em vez das observadas, assumindo-se um erro na medição da altura do Sol (dia 22, par das 10,72h – 12,07h; dia 23, par das 13,57 – 14,78). Um aspeto muito interessante é que, desta tabela, existem 10 pares que são comuns com a tabela 6.1, ou seja, que são comuns com os resultados de Douwes. Destes pares comuns, 3 apresentam o mesmo erro, 4 apresentam menor erro em Douwes e 3 apresentam menor erro em Riddle.

TABELA 6.3: Pares de extrameridianas do Sol de 2021 com bons resultados de latitude pelo método de Riddle

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Latitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
05/ago	9,31	14,17	36,4877	36,5367	0	3
05/ago	14,17	15,25	36,6131	36,5583	0	3
06/ago	15,01	15,65	36,8469	36,7633	0	5
07/ago	15,15	16,14	37,1489	37,0817	0	4
09/ago	10,92	13,34	37,6422	37,5817	0	4
20/ago	11,22	15,07	38,8929	38,8717	0	1
20/ago	12,14	15,07	38,9124	38,8717	0	2
22/ago	10,72	12,07	39,1708	39,2133	0	3
22/ago	12,07	14,52	39,2453	39,1883	0	3
23/ago	9,81	13,57	38,8815	38,8650	0	1
23/ago	10,48	13,57	38,8769	38,8650	0	1
23/ago	13,57	14,78	38,7629	38,8467	0	5

Quanto aos dados de 2022, fez-se apenas o primeiro cálculo da latitude, tal como no método de Douwes, e desta primeira fase resultaram 15 pares com erros iguais ou inferiores a 5 milhas. Estes resultados encontram-se na tabela 6.4. Neste caso, quase todos os valores são comuns com os de Douwes, uma vez que dos 15 pares, 14 são comuns com a tabela 6.2. Desses pares comuns, 2 apresentam o mesmo erro, 7 apresentam menor erro em Douwes e 5 apresentam menor erro em Riddle.

TABELA 6.4: Pares de extrameridianas do Sol de 2022 com bons resultados de latitude pelo método de Riddle

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Latitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
26/jul	12,42	14,14	35,0627	35,0833	0	1
26/jul	12,42	15,60	35,0049	35,0100	0	0
27/jul	10,01	12,56	33,8452	33,8317	0	1
27/jul	10,70	12,56	33,8228	33,8317	0	1
27/jul	12,56	14,32	33,7083	33,7117	0	0
27/jul	12,56	16,49	33,5937	33,5900	0	0
01/ago	11,09	12,56	32,3429	32,3533	0	1
01/ago	11,09	14,23	32,1309	32,1900	0	4
01/ago	12,56	14,23	32,2398	32,1900	0	3
02/ago	10,64	14,72	30,1347	30,1083	0	2
03/ago	12,49	14,59	27,6699	27,6100	0	4
03/ago	12,49	15,82	27,5719	27,5017	0	4
03/ago	12,49	17,76	27,3857	27,3250	0	4
04/ago	10,16	13,08	25,5539	25,4800	0	4
04/ago	11,25	13,08	25,5287	25,4800	0	3

6.4 Cálculo da longitude pelo método do ângulo horário

Para a aplicação do método do ângulo horário, também se recorreu a ficheiros Excel, onde foi inserida a equação 5.2, para o cálculo do ângulo no polo, ou, se for convertido em tempo, será o “tempo médio a bordo à hora da observação”, como lhe chama Peregrino Leitão. De seguida, pela diferença entre o momento da observação e a hora da passagem meridiana, obtém-se o chamado polo em Greenwich, ou “tempo médio em Greenwich à hora da observação”. Pela diferença entre o polo no lugar e o polo em Greenwich, obtém-se a longitude. Este processo pode ser consultado com os métodos anteriores, no documento fornecido juntamente com a dissertação.

Assim sendo, a partir dos bons resultados de latitude, calculou-se a longitude para os mesmos instantes, através do método do ângulo horário. Para isso, em vez de se fazer uma estima da latitude, utilizou-se os valores de latitude obtidos para cada par de observação.

Para a comparação da longitude calculada com a longitude real, calculou-se diretamente a diferença entre esses dois valores. Este procedimento foi efetuado para todos os bons resultados de latitude, tanto pelo método de Douwes com os dados de

2021 (tabela 6.5) e de 2022 (tabela 6.6), como pelo método de Riddle com os dados de 2021 (tabela 6.7) e de 2022 (tabela 6.8).

Quanto aos 10 pares comuns dos dados de 2021, 9 pares demonstram menor erro de longitude quando calculada com os valores de latitude obtidos pelo método de Douwes, ou seja, as latitudes da tabela 6.1, e apenas 1 par tem o mesmo erro para os dois casos. Sobre os 14 pares comuns dos dados de 2022, 3 apresentam o mesmo erro de longitude, 6 têm menor erro quando calculados com as latitudes obtidas pelo método de Douwes (tabela 6.2) e 5 têm menor erro quando calculadas com as latitudes obtidas pelo método de Riddle (tabela 6.4).

Sobre o método de cálculo da longitude, resta lembrar que existe uma restrição mencionada por Peregrino Leitão, e já referida no capítulo 5, que defende que a observação deve ser efetuada no período de uma hora e meia a três horas de intervalo de tempo, em relação ao momento da passagem meridiana, o que pode justificar a existência de alguns erros extremamente elevados.

TABELA 6.5: Resultados da longitude de 2021 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Douwes (tabela 6.1)

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Longitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
05/ago	14,17	15,25	14,3394	14,3450	0	0
06/ago	15,01	15,65	16,7904	16,7900	0	0
07/ago	15,15	16,14	19,6704	19,6517	0	1
09/ago	10,92	13,34	12,7012	25,2383	12	32
20/ago	10,17	12,14	20,4247	22,7217	2	18
20/ago	11,22	15,07	22,4928	22,3033	0	11
20/ago	12,14	15,07	22,4601	22,3033	0	9
20/ago	12,14	16,46	22,1259	22,1067	0	1
21/ago	12,29	16,06	18,7566	18,7117	0	3
22/ago	10,72	12,07	15,2507	15,7917	0	32
22/ago	12,07	14,52	15,5631	15,4583	0	6
22/ago	12,07	15,51	15,5023	15,3233	0	11
23/ago	9,81	13,57	12,4582	12,0667	0	23
23/ago	10,48	13,57	12,4298	12,0667	0	22

6.4. Cálculo da longitude pelo método do ângulo horário

TABELA 6.6: Resultados da longitude de 2022 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Douwes (tabela 6.2)

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Longitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
26/jul	12,42	14,14	12,4538	12,4817	0	2
26/jul	12,42	15,60	12,6001	12,6267	0	2
27/jul	10,01	12,56	0,9371	14,6917	13	45
27/jul	10,70	12,56	1,0048	14,6917	13	41
27/jul	12,56	14,32	14,8461	14,8800	0	2
27/jul	12,56	16,49	15,1039	15,0700	0	2
01/ago	11,09	12,56	3,4831	17,0733	13	35
01/ago	11,09	14,23	17,1391	17,1783	0	2
01/ago	12,56	14,23	17,2238	17,1783	0	3
02/ago	10,64	14,72	18,5015	18,5000	0	0
02/ago	10,64	16,01	18,5753	19,5000	0	55
02/ago	12,53	14,72	18,5283	20,5000	0	58
03/ago	12,49	14,59	19,9248	19,9183	0	0
03/ago	12,49	15,82	20,0189	20,0000	0	1
03/ago	12,49	17,76	20,1871	20,1433	0	3
04/ago	11,25	13,08	8,3446	21,2100	12	52
04/ago	13,08	16,45	21,3577	21,2100	0	9
05/ago	13,14	15,79	22,4965	22,2100	0	17

TABELA 6.7: Resultados da longitude de 2021 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Riddle (tabela 6.3)

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Longitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
05/ago	9,31	14,17	14,1271	14,2067	0	5
05/ago	14,17	15,25	14,3161	14,3450	0	2
06/ago	15,01	15,65	16,7543	16,7900	0	2
07/ago	15,15	16,14	19,5974	19,6517	0	3
09/ago	10,92	13,34	12,6788	25,2383	12	34
20/ago	11,22	15,07	22,5037	22,3033	0	12
20/ago	12,14	15,07	22,4664	22,3033	0	10
22/ago	10,72	12,07	15,1158	15,7917	0	41
22/ago	12,07	14,52	15,5736	15,4583	0	7
23/ago	9,81	13,57	12,4500	12,0667	0	23
23/ago	10,48	13,57	12,4349	13,0667	0	38
23/ago	13,57	14,78	11,7491	12,0667	0	19

TABELA 6.8: Resultados da longitude de 2022 a partir dos bons resultados de latitude pelo método de Riddle (tabela 6.4)

DIA	1ª OBS	2ª OBS	Longitude		Erro	
	Horas	Horas	Calculada	GPS	Graus	Min.
26/jul	12,42	14,14	12,4727	12,4817	0	1
26/jul	12,42	15,60	12,6093	12,6267	0	1
27/jul	10,01	12,56	0,9541	14,6917	13	44
27/jul	10,70	12,56	1,0066	14,6917	13	41
27/jul	12,56	14,32	14,8646	14,8800	0	1
27/jul	12,56	16,49	15,1079	15,0700	0	2
01/ago	11,09	12,56	3,4700	17,0733	13	36
01/ago	11,09	14,23	17,1236	17,1783	0	3
01/ago	12,56	14,23	17,2461	17,1783	0	4
02/ago	10,64	14,72	18,5042	18,5000	0	0
03/ago	12,49	14,59	19,9431	19,9183	0	1
03/ago	12,49	15,82	20,0303	20,0000	0	2
03/ago	12,49	17,76	20,1772	20,1433	0	2
04/ago	10,16	13,08	8,3646	21,2100	12	51
04/ago	11,25	13,08	8,3269	21,2100	12	53

6.5 Posições geográficas

Uma vez que foram calculados vários valores de latitude por extrameridianas do Sol, assim como os valores das longitudes correspondentes aos mesmos instantes, podem ser comparadas posições geográficas calculadas com posições geográficas reais. Aliás, conjugar um método de cálculo de latitude por extrameridianas do Sol com o cálculo da longitude para a obtenção de uma posição geográfica, num mesmo instante, foi precisamente o que impulsionou a presente dissertação. Assim sendo, compilaram-se todos os dados demonstrados ao longo deste capítulo e calculou-se a distância entre as posições calculadas e as posições GPS.

Para o cálculo da distância entre duas posições, constrói-se um triângulo retângulo, onde essas posições são dois dos vértices. O cateto horizontal corresponde a um paralelo de latitude, e o cateto vertical corresponde a um meridiano de longitude. A particularidade deste cálculo é que estas posições são marcadas na carta de Mercator, onde as escalas das latitudes e das longitudes utilizam diferentes unidades. Para que o cálculo seja possível, é necessário definir a mesma unidade de medida, que será a escala das latitudes, ou seja, milhas náuticas.

Posto isto, o primeiro cálculo é a diferença de latitudes, $\Delta\varphi = |(\varphi_{obtida} - \varphi_{GPS}) * 60|$, onde a multiplicação por 60 faz a passagem de graus para minutos, ou

seja, milhas. De seguida, calcula-se a diferença de longitudes: $\Delta L = |L_{obtida} - L_{GPS}|$. Esta diferença é calculada nas unidades da escala da longitude, isto é, graus de longitude, cujo tamanho varia em função da latitude, uma vez que o tamanho dos paralelos entre dois meridianos vai diminuindo à medida que a latitude cresce. A razão entre os graus de latitude e os graus de longitude é dada pelo cosseno da latitude. Então, é necessário fazer o cálculo do tamanho da diferença de longitude, medido em graus de latitude, que é dado pelo apartamento (*apart.*): $apart. = \Delta L * \cos(\varphi_{GPS}) * 60$. Finalmente, obtidos os valores dos catetos, calcula-se a distância entre as posições, pelo Teorema de Pitágoras, da mesma forma que se calcula uma hipotenusa: $Distância = \sqrt{apart.^2 + \Delta\varphi^2}$

Aplicando os cálculos anteriores a todos as posições obtidas, constuíram-se mais quatro tabelas: latitude por Douwes e longitude, com dados de 2021 (tabela 6.9); latitude por Douwes e longitude, com dados de 2022 (tabela 6.10); e, da mesma forma, latitude por Riddle e longitude, com dados de 2021 (tabela 6.11); e latitude por Riddle e longitude, com dados de 2022 (tabela 6.12). Nestas tabelas, “MN” significa “milhas náuticas”, e importa ainda referir que todas as observações foram retiradas em latitudes Norte e longitudes Oeste.

TABELA 6.9: Resultado das posições geográficas de 2021, utilizando o método de Douwes

DIA	1 ^a OBS	2 ^a OBS	Posição Obtida		Posição GPS		Distância
	Horas	Horas	Lat.	Long.	Lat.	Long.	MN
05/ago	14,17	15,25	36,63	14,34	36,56	14,35	4
06/ago	15,01	15,65	36,83	16,79	36,76	16,79	4
07/ago	15,15	16,14	37,15	19,67	37,08	19,65	4
09/ago	10,92	13,34	37,65	12,70	37,58	25,24	596
20/ago	10,17	12,14	38,55	20,42	38,69	22,72	108
20/ago	11,22	15,07	38,89	22,49	38,87	22,30	9
20/ago	12,14	15,07	38,86	22,46	38,87	22,30	7
20/ago	12,14	16,46	39,04	22,13	38,95	22,11	5
21/ago	12,29	16,06	39,48	18,76	39,40	18,71	5
22/ago	10,72	12,07	39,03	15,25	39,21	15,79	27
22/ago	12,07	14,52	39,22	15,56	39,19	15,46	5
22/ago	12,07	15,51	39,21	15,50	39,18	15,32	9
23/ago	9,81	13,57	38,91	12,46	38,87	12,07	19
23/ago	10,48	13,57	38,91	12,43	38,87	12,07	17

TABELA 6.10: Resultado das posições geográficas de 2022, utilizando o método de Douwes

DIA	1 ^a OBS	2 ^a OBS	Posição Obtida		Posição GPS		Distância
	Horas	Horas	Lat.	Long.	Lat.	Long.	MN
26/jul	12,42	14,14	35,04	12,45	35,08	12,48	3
26/jul	12,42	15,60	34,97	12,60	35,01	12,63	3
27/jul	10,01	12,56	33,85	0,94	33,83	14,69	686
27/jul	10,70	12,56	33,82	1,00	33,83	14,69	682
27/jul	12,56	14,32	33,69	14,85	33,71	14,88	2
27/jul	12,56	16,49	33,55	15,10	33,59	15,07	3
01/ago	11,09	12,56	32,34	3,48	32,35	17,07	689
01/ago	11,09	14,23	32,14	17,14	32,19	17,18	3
01/ago	12,56	14,23	32,22	17,22	32,19	17,18	3
02/ago	10,64	14,72	30,13	18,50	30,11	18,50	1
02/ago	10,64	16,01	29,89	18,58	29,97	19,50	48
02/ago	12,53	14,72	30,17	18,53	30,11	20,50	102
03/ago	12,49	14,59	27,64	19,92	27,61	19,92	2
03/ago	12,49	15,82	27,51	20,02	27,50	20,00	1
03/ago	12,49	17,76	27,29	20,19	27,33	20,14	3
04/ago	11,25	13,08	25,54	8,34	25,48	21,21	697
04/ago	13,08	16,45	25,33	21,36	25,25	21,21	9
05/ago	13,14	15,79	23,22	22,50	23,15	22,21	16

TABELA 6.11: Resultado das posições geográficas de 2021, utilizando o método de Riddle

DIA	1 ^a OBS	2 ^a OBS	Posição Obtida		Posição GPS		Distância
	Horas	Horas	Lat.	Long.	Lat.	Long.	MN
05/ago	9,31	14,17	36,49	14,13	36,54	14,21	5
05/ago	14,17	15,25	36,61	14,32	36,56	14,35	4
06/ago	15,01	15,65	36,85	16,75	36,76	16,79	5
07/ago	15,15	16,14	37,15	19,60	37,08	19,65	5
09/ago	10,92	13,34	37,64	12,68	37,58	25,24	597
20/ago	11,22	15,07	38,89	22,50	38,87	22,30	9
20/ago	12,14	15,07	38,91	22,47	38,87	22,30	8
22/ago	10,72	12,07	39,17	15,12	39,21	15,79	32
22/ago	12,07	14,52	39,25	15,57	39,19	15,46	6
23/ago	9,81	13,57	38,88	12,45	38,87	12,07	18
23/ago	10,48	13,57	38,88	12,43	38,87	13,07	30
23/ago	13,57	14,78	38,76	11,75	38,85	12,07	16

TABELA 6.12: Resultado das posições geográficas de 2022, utilizando o método de Riddle

DIA	1 ^a OBS	2 ^a OBS	Posição Obtida		Posição GPS		Distância
	Horas	Horas	Lat.	Long.	Lat.	Long.	MN
26/jul	12,42	14,14	35,06	12,47	35,08	12,48	1
26/jul	12,42	15,60	35,00	12,61	35,01	12,63	1
27/jul	10,01	12,56	33,85	0,95	33,83	14,69	685
27/jul	10,70	12,56	33,82	1,01	33,83	14,69	682
27/jul	12,56	14,32	33,71	14,86	33,71	14,88	1
27/jul	12,56	16,49	33,59	15,11	33,59	15,07	2
01/ago	11,09	12,56	32,34	3,47	32,35	17,07	689
01/ago	11,09	14,23	32,13	17,12	32,19	17,18	5
01/ago	12,56	14,23	32,24	17,25	32,19	17,18	5
02/ago	10,64	14,72	30,13	18,50	30,11	18,50	2
03/ago	12,49	14,59	27,67	19,94	27,61	19,92	4
03/ago	12,49	15,82	27,57	20,03	27,50	20,00	5
03/ago	12,49	17,76	27,39	20,18	27,33	20,14	4
04/ago	10,16	13,08	25,55	8,36	25,48	21,21	696
04/ago	11,25	13,08	25,53	8,33	25,48	21,21	698

Das tabelas apresentadas, salienta-se que, dos pares comuns de 2021, existem 2 com a mesma distância à posição real, 7 que são mais próximos quando a latitude foi calculada pelo método de Douwes e apenas 1 par onde a distância é menor e a latitude foi calculada pelo método de Riddle. Para os pares comuns de 2022, também existem 2 com a mesma distância à posição real, 7 que são mais próximos quando a latitude foi calculada pelo método de Douwes e 5 cuja distância é menor e a latitude foi calculada pelo método de Riddle.

Conclusão

O primeiro objetivo da presente dissertação, consistiu em procurar possíveis justificações para a falta de registos da aplicação dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, durante o século XVIII e ao longo do século XIX, até ao aparecimento do método de Marcq Saint-Hilaire, tendo em conta dois grandes fatores: por um lado, a quantidade de manuais e literatura que expunha e explicava esses métodos; por outro lado, o facto de poderem ser utilizados em simultâneo com o cálculo da longitude e permitir a obtenção de um ponto astronómico para um mesmo instante.

Ao longo do desenvolvimento histórico que envolve o tema, concluiu-se que foi a partir do método de Cornelis Douwes que surgiram inúmeros outros métodos, com a promessa de que seriam mais simples e acessíveis. A verdade é que, dos métodos encontrados, existiu um que se sobressaiu, pela particularidade de não necessitar de um valor de latitude estimada para o cálculo final da latitude, como acontece no método de Douwes. Esse método foi desenvolvido por James Ivory e aperfeiçoado por Edward Riddle.

Com a descoberta do método de Riddle, esta dissertação apoiou-se em dois objetivos: testar os dois métodos de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol e perceber se o método de Riddle trazia melhorias ao método de Douwes; e testar a viabilidade de aplicação desses métodos em conjunto com o cálculo da longitude pelo ângulo horário, para obtenção de posições astronómicas.

Quanto aos dois métodos de cálculo da latitude, e tendo por base os resultados obtidos pela aplicação prática de ambos, conclui-se que:

- Tanto nos dados de 2021, como nos dados de 2022, existe um maior número de pares com bons resultados no método de Douwes do que no método de Riddle, ainda que a diferença não seja grande;
- Relativamente aos pares comuns, verifica-se que o número de pares que apresenta menor erro no método de Douwes para a latitude é superior ao número de pares que apresenta menor erro no método de Riddle, ainda que a diferença também não seja grande;

- No cálculo da longitude pelo ângulo horário, utilizando as latitudes calculadas pelos métodos, nota-se que a grande maioria dos dados de 2021 apresenta menor erro quando a longitude é calculada com os valores de latitude obtidos pelo método de Douwes (9 em 10);
- No cálculo da longitude pelo ângulo horário, para os dados de 2022, o número de pares cuja longitude é calculada com os valores de latitude obtidos pelo método de Douwes é superior aos de Riddle por apenas por 1 par;
- No cálculo da distância entre as posições obtidas e as posições reais, também se verifica um maior número de pares com menor erro, quando a latitude é calculada a partir do método de Douwes, principalmente, nos dados de 2021.

Sobre estes resultados é importante realçar o facto de quase todos os pares com bons resultados de Riddle serem comuns com resultados de Douwes (10 em 12 para dados de 2021; 14 em 15 para dados de 2022), o que pode indicar algum problema nos restantes dados recolhidos, seja de incumprimento das restrições, da hora, da altura, ou de outro fator impactante.

Pelos resultados obtidos para a longitude pelo ângulo horário, também se conclui que a restrição mencionada por Peregrino Leitão deve ser respeitada, porque, regra geral, os pares que não a cumprem apresentam erros enormes. Ou seja, para o cálculo da longitude pelo ângulo horário, as observações devem ser efetuadas no período de uma hora e meia a três horas de intervalo de tempo da passagem meridiana.

Quanto aos objetivos definidos para este trabalho, ainda que o número de bons resultados possa ser considerado reduzido, com base nesses valores, é possível afirmar que o método de Riddle não melhorou o método de Douwes, porque em todas as tabelas, os bons resultados de Douwes são superiores aos bons resultados de Riddle. Com isto, considera-se esclarecido o primeiro objetivo.

Relativamente ao segundo objetivo, ou seja, à conjugação dos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas com o método de cálculo da longitude pelo ângulo horário, pelos resultados apresentados, assume-se que era possível a sua utilização. Mesmo que fosse exigente relativamente ao cumprimento das restrições para garantir bons resultados, esta conjugação era mais uma forma válida e aplicável para o cálculo do ponto astronómico, e permitia aos pilotos uma menor dependência da visualização da passagem meridiana do Sol. Assim sendo, a única justificação encontrada para a falta de registos destes cálculos estará direcionada para a complexidade dos mesmos e a existência de uma alternativa muito mais simples: pela passagem meridiana.

Para terminar, resta mencionar alguns aspetos a melhorar, assim como outros assuntos relevantes dentro do mesmo tema, que não foram abordados por motivos de tempo, de estrutura e de dimensão da dissertação:

- Nos cálculos pelo método de Douwes, reparou-se que, para dois pares onde a segunda observação é a mesma, os valores de Px e Py são ligeiramente diferentes, o que não devia acontecer. Inclusive, na obra francesa utilizada como referência, *Calculs de Latitude*, é dito que os resultados obtidos em vários cálculos são aproximados. Pode ser importante perceber até que ponto é que estes pequenos erros acumulados ao longo dos passos, como é o caso dos valores de Px e Py , podem implicar um erro significativo no resultado final.
- Seria interessante aplicar os métodos a outras observações, noutras condições daquelas que foram testadas, para perceber se originavam bons resultados. Por exemplo, com latitudes Sul, ou nas situações que Douwes mencionou na sua obra: “canais, estreitos e navegações no Mar do Norte durante o Inverno”.
- Numa vertente mais direccionada para a área da matemática, seria interessante desenvolver uma análise da complexidade algorítmica dos métodos em estudo, e até de outros que se possam considerar relevantes, e fazer a sua comparação.
- Por fim, e ainda que o assunto não tenha sido abordado ao longo da dissertação, existe um outro método do século XIX, para o cálculo do ponto astronómico, que vale a pena estudar: o método de Sumner. Este método tem muitos aspetos interessantes, nomeadamente o cruzamento de retas de posição, que é a base do método de Marcq Saint-Hilaire. Por se considerar que este assunto, por si só, tem material para construir uma dissertação, não se incluiu neste estudo e deixa-se como proposta para trabalho futuro.

Bibliografia

- BOWDITCH, Nathaniel. *American Practical Navigator. An Epitome of Navigation*. Newburyport: Edmund M. Blunt, 1802.
- *The New American Practical Navigator. Being an Epitome of Navigation*. New York: E. & G. W. Blunt, 1837.
- BRADY, W. Maziere. *Clerical and Parochial Records of Cork, Cloyne, and Ross*. Dublin: Alexander Thom, 1864. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Brinkley_obituary/.
- BRUYNS, Willem F. J. Mörzer. «Douwes, Cornelis». Em: *The Oxford Encyclopedia of Maritime History*. Vol. 1. 2007.
- CALCULS De Latitude (Double-Altitude Problem)*.
- COTTER, Charles H. *A History of Nautical Astronomy*. London: Hollis & Carter, 1968.
- DAVIDS, Karel. «The Longitude Committee and the Practice of Navigation in the Netherlands, c. 1750–1850». Em: *Navigational Enterprises in Europe and Its Empires, 1730-1850*. 2015.
- DOUWES, Cornelis. *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*. Amsterdam: Joannes van Keulen en Zoonen, 1760.
- ESTANCEL, Valentim. *Orbe Affonsino, ou Horoscopio Universal*. Évora, 1658.
- FIGUEIREDO, Fernando B. «Longitude. Uma Longa e Fascinante História». Em: *Gazeta de Matemática* (jul. de 2014), pp. 26–35.
- FLORYN, Jacob. *Zeemans-Tafelen van Cornelis Douwes*. Amsterdam: Gerard Hulst van Keulen, 1799.
- HARRISON, Richard. *A New Set of Logarithmic Solar Tables*. 1781.
- HOWSE, Derek. *Britain's Board of Longitude: The Finances, 1714-1828*. Em: *The Mariner's Mirror*. Ed. por Alexander TILLOCH e Richard TAYLOR. Vol. 84. 1998, pp. 400–417.
- IVORY, James. *On the problem in Nautical Astronomy for finding the latitude by means of two observations of the Sun's altitude and the time elapsed between them*. Em: *The Philosophical Magazine and Journal*. Ed. por Alexander TILLOCH. Vol. LVIII. Londres: Richard e Arthur Taylor, 1821, pp. 81–90.

- LEITÃO, João Peregrino. *Guia Nautica ou Tratado Pratico de Navegação*. Lisboa: Sociedade Typographica Franco Portuguesa 6, 1865.
- LE MOS, Carlos M. «Os logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas – um apontamento histórico». Em: *Boletim da SPM 66* (mai. de 2012), pp. 65–104.
- MASKELYNE, Nevil. *Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea*. Londres: Commissioners of Longitude, 1781.
- MATA, José Militão da. *O Destro Observador. Método Fácil de Saber a Latitude a Qualquer Hora do Dia, Sem Dependência da Observação Meridiana*. Lisboa: Na Officina Luisiana, 1781.
- NORIE, John William. *A new and complete epitome of practical navigation*. Londres: Lords of Commissioners of the Admiralty, 1817.
- *A new and complete epitome of practical navigation*. Londres: Lords of Commissioners of the Admiralty, 1835.
- NUNES, Paulo Jorge Antunes. *Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes*. Dissertação de Mestrado de História Marítima. 2012.
- NUNES, Pedro. *Tratado da Sphaera Astronomici Introductorii de Spaera Epitome*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2002.
- PIRES, Jorge Oliveira de Jesus. *Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol. Evolução Histórica do Processo*. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha. 2021.
- «Report of the Council to the Thirty-fifth Annual General Meeting of the Society». Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 15 (fev. de 1855), pp. 110–115.
- RIDDLE, Edward. *A Treatise on Navigation, and Nautical Astronomy, adapted to practice, and to the purposes of elementary instruction*. Londres: Bardwin, Cradock, e Joy, 1824.
- *Suggestions for simplifying Mr. Ivory's solution of double altitude problem*. Em: *The Philosophical Magazine and Journal*. Ed. por Alexander TILLOCH e Richard TAYLOR. Vol. LX. Londres: Richard e Arthur Taylor, 1822, pp. 167–170.
- «Sir James Ivory, F. R. S. (1765 - 1842)». Em: *Nature* 150 (set. de 1942), p. 342. URL: <https://doi.org/10.1038/150342b0>.
- STEENSTRA, Pybo. *Benoodigde Tafels by den Zeemans-Almanach*. Amsterdam: Gerard Hulst van Keulen, 1789.

Apêndice A

3º Encontro de Investigação e Desenvolvimento em Ciências Militares

A Navegação Astronómica antes do Método de Marcq de Saint Hilaire — Latitude
pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário

A Navegação Astronómica antes do Método de Marcq de Saint Hilaire – Latitude pela Meridiana e Extrameridianas e Longitude pelo Ângulo Horário

Autores: A. Queirós (Escola Naval, ana.filipa.queiros@marinha.pt), A. Canas (CMG RES, Escola Naval), T. Sousa (Professora, Escola Naval)

Resumo: Este artigo serve para expor um tema de dissertação de mestrado, em desenvolvimento ao longo do presente ano letivo, que pretende estudar e analisar a fiabilidade de métodos antigos de obtenção da posição astronómica. Para isso, serão estudados vários métodos de obtenção da latitude, pela meridiana e por extrameridianas do Sol, assim como da longitude pelo ângulo horário. Além disso, será posta em prática a aplicação de métodos de obtenção da latitude e da longitude em simultâneo, já que não foram encontrados registos de nenhuma experiência semelhante. No final, serão analisadas todas as posições obtidas e comparadas com posições GPS para aferir a fiabilidade dos métodos estudados.

Palavras-chave: Latitude, meridiana, extrameridianas, Longitude, ângulo horário.

1. INTRODUÇÃO

A Navegação Astronómica consiste na obtenção de medidas angulares entre um corpo celeste (sol, lua, estrela ou planeta) e um ponto no horizonte, para determinar a posição onde o navio se encontra no globo terrestre. Esta prática foi extremamente útil nos séculos passados, principalmente na Época dos Descobrimentos. E como a necessidade leva ao engenho, foram sendo desenvolvidos vários métodos para o cálculo da posição astronómica, cada um com os seus cálculos e as suas aplicações, até chegarmos ao método de Marcq Saint-Hilaire, o qual continua a ser utilizado até aos nossos dias.

Antes do desenvolvimento do método de Marcq Saint-Hilaire, os navegadores dispunham de processos de cálculo das coordenadas geográficas, latitude e longitude, mas que geralmente permitiam a obtenção destas coordenadas de forma independente e em diferentes instantes. O método de Marcq Saint-Hilaire veio permitir que as coordenadas sejam obtidas em simultâneo, através do cruzamento de diversas linhas de posição. Neste artigo pretende-se expor as linhas de pesquisa de uma dissertação de mestrado que visa compreender e analisar alguns desses métodos utilizados antes do método de Marcq Saint-Hilaire, nomeadamente a latitude pela passagem meridiana do Sol e por alturas extrameridianas e a longitude pelo cálculo do ângulo horário.

1.1. A Latitude

Antes do desenvolvimento de quaisquer instrumentos de navegação, os astros eram as referências para os rumos a praticar. Rapidamente foi notada a particularidade da estrela polar, por indicar o Norte, mas com o avanço das navegações, os navegantes

perceberam que esse astro deixava de ser visível a partir do Equador para Sul. Posto isto, começaram então a dar maior relevância ao Sol e à Lua por serem astros visíveis em ambos os hemisférios, e, a partir daí, surgiu a necessidade de encontrar métodos e instrumentos que permitissem obter a posição do navio, a partir desses astros.

No final do século XV já se calculava a latitude, tanto pela estrela polar, como pelo Sol. No caso do Sol, a particularidade do método utilizado era a observação deste astro na sua passagem meridiana, isto é, quando o astro atinge a sua altura máxima. No entanto, a altura máxima do Sol vai depender do dia do ano e, por esse motivo, considerava-se também a declinação, que é a forma de expressar a posição do Sol em cada dia.

O processo para obtenção da latitude, através da altura meridiana do Sol e da sua declinação, era um processo matematicamente simples, apenas constituído por somas e subtrações. No entanto, este processo implicava a observação do Sol naquele preciso instante, que facilmente era perdido devido a fatores meteorológicos, por exemplo. Sem esta observação, os navegantes já não conseguiam obter a latitude naquele dia, e teriam de esperar pelo dia seguinte para obter uma nova latitude.

Face à limitação observacional do processo acima mencionado, alguns autores acreditavam que isso era um problema para os marinheiros, e tentaram encontrar alternativas e novos processos para a determinação da latitude.

Pedro Nunes, no século XVI, assumindo a insuficiência do método de obtenção da latitude pela passagem meridiana do Sol, procurou um método que lhe permitisse calcular a latitude a qualquer hora do dia. Para este cálculo era necessário o valor da altura da extrameridiana do Sol (com recurso ao astrolábio náutico), a determinação do azimute do Sol no mesmo

instante da observação da altura da extrameridiana (com recurso a um instrumento de sombras), e a declinação, determinada pelas tábuas da declinação. Para o método deste autor era indispensável um globo, que representava a esfera celeste, onde se aplicava o seu método e através do qual se obtinha a latitude – método mecânico. Pedro Nunes apresenta duas opções de resolução, cuja diferença é que numa situação só se utiliza uma altura, enquanto na outra eram utilizadas duas alturas de duas extrameridianas, sendo que neste último se pressupõe o desconhecimento da declinação magnética.

Adiante, tal como Pedro Nunes, vários autores como Padre Valentim Estancel (séc. XVII), Militão da Mata (séc. XVIII), com apoio no método de Cornelis Douwes, e já no século XIX Peregrino Leitão, Costa e Almeida, Dantas Pereira, Norie, Nathaniel Bowditch, entre outros, continuaram a procurar métodos que possibilitassem a obtenção da latitude por alturas extrameridianas. No fundo, a motivação era comum a todos: resolver o problema que os marinheiros tinham, caso não conseguissem tirar a altura do Sol na sua passagem meridiana.

A evolução dos processos de cálculo da latitude pode-se dividir em dois: de um lado os métodos mecânicos e os primeiros métodos analíticos sem recurso a logaritmos, e do outro lado os processos analíticos com logaritmos. E porque é que o uso de logaritmos tem relevância, ao ponto de criar uma divisão tão significativa?

Antes do aparecimento dos logaritmos, a trigonometria esférica exigia cálculos complexos com produtos e divisões de funções trigonométricas, o que tornava o seu cálculo num processo moroso e muito suscetível a erros. Por esse motivo, não se recorria a este tipo de cálculos a bordo, já que a intenção é obter os resultados de forma simples e expedita, sem que o raciocínio exigido seja de elevada complexidade.

A partir dos logaritmos, esses cálculos complexos puderam ser transformados em somas e subtrações, daí a importância do seu aparecimento: simplificaram a trigonometria esférica e permitiram a acessibilidade dos seus cálculos. Além disso, foram criadas tabelas de logaritmos em junção com as funções trigonométricas, que forneciam diretamente os resultados necessários para aplicar em somas e subtrações.

Posto isto, acredita-se que o primeiro método com recurso a operações logarítmicas foi da autoria de Cornelis Douwes, em 1740, e, portanto, o impulsionador de todos os outros métodos que se seguiram.

Numa primeira fase da pesquisa, a intenção é estudar a fiabilidade dos métodos de alguns autores, comparando os valores obtidos para a latitude com os valores de latitude retirados do GPS.

1.2. A Longitude

A determinação da longitude resume-se ao cálculo da diferença horária entre dois locais, o que hoje parece, e é, facilmente obtido. No entanto, até finais do século XVIII, não existiam meios para considerar o tempo a bordo e esse era um dos maiores problemas da humanidade. Inclusive, começaram a surgir prémios por parte das cortes para quem conseguisse encontrar um método que calculasse a longitude, já que esse conhecimento seria preponderante para as viagens marítimas, e consequentemente para o poder social, político e económico do país em questão.

Neste seguimento, começaram a aparecer as propostas de vários métodos, alguns com menos sentido do que outros, até que surgiram as abordagens sérias: os métodos lunares. Estes métodos tinham como base os eclipses dos satélites de Júpiter ou o movimento da lua. No entanto, eram métodos extremamente complexos e morosos, o que tornava muito complicada a sua aplicação, principalmente a bordo.

Finalmente, no final do século XVIII, aparece o cronómetro que, depois de testado em longas viagens, mostrou grande precisão e utilidade no cálculo da longitude, pelo que veio simplificar muito a sua obtenção. Aliás, foi-lhe atribuído o nome de relógio de bordo quando o aperfeiçoaram, para que fosse tão preciso no mar como em terra. Contudo, a sua disseminação foi feita lentamente, tanto pela dificuldade da sua produção, como pelo custo elevadíssimo para a época, já que era uma novidade muito cobiçada. Por esses motivos, os métodos lunares continuaram a ser utilizados até grande parte do século XIX.

Com a vulgarização do cronómetro e a sua disseminação, os métodos lunares foram, obviamente, postos de parte, e a longitude passou a ser definitivamente calculada através do cronómetro, de uma forma rápida e precisa. É importante acrescentar que os instrumentos de medição das alturas dos astros também tiveram grande relevância nesta vitória, porque era necessária uma grande precisão para estas medições, aspeto este que o aparecimento do octante e do sextante vieram garantir.

Em relação à longitude, não existiram tantos processos como no caso da latitude, pelo contrário. Assim que foi determinado o método denominado por *Time Sight*, pelo ângulo horário, foi imediatamente aceite e, pela sua simplicidade e acessibilidade, seria inútil tentar criar novos processos. Assim sendo, admite-se a prática deste processo a partir das décadas finais do século XIX.

1.3. A fiabilidade dos métodos para a obtenção da posição astronómica

Após toda esta pesquisa, e da aplicação de alguns dos métodos da latitude e do *Time Sight*, surgiu uma questão pertinente: sabendo que a literatura disponibilizava métodos para obtenção da latitude e da longitude, porque é que não foram encontrados registos da sua aplicação? Qual será a possibilidade de conjugar os dois métodos para obter posições ao longo de uma navegação, e qual será a sua precisão?

Estranhamente, não foram encontrados quaisquer registos sobre este estudo. Precisamente por esse motivo, faz também parte desta dissertação a análise das posições obtidas através do método de Douwes para o cálculo da latitude e do método do *Time Sight* para o cálculo da longitude, sendo que para cada nova posição é considerada a posição obtida anteriormente. Será que conseguiremos assegurar uma navegação através deste processo?

Agradecimentos

Um enorme agradecimento ao meu orientador, CMG António Costa Canas, por todo o apoio e disponibilidade para o desenvolvimento da minha dissertação de mestrado e para a participação neste encontro, assim como noutros eventos. Da mesma forma, à Professora Teresa Sousa, por toda a colaboração.

REFERÊNCIAS

- BOWDITCH, Nathaniel, *The American Practical Navigator: An Epitome of Navigation*, vol. I, Springfield, Virginia, National Geospatial – Intelligence Agency, 2019.
- COTTER, Charles H., *A History of Nautical Astronomy*, London, Hollis & Carter, 1957.
- LEITÃO, João Peregrino, *Guia Náutica ou Tratado Prático de Navegação*, Lisboa, 1865
- MATA, José Melitão da, *O Destro Observador: Methodo Facil de Saber a Latitude no Mar a Qualquer Hora do Dia, Sem Dependência da Observação Meridiana*, Lisboa, Na Officina Luisiana, 1781.
- MIGUENS, Altineu Pires, *Navegação: A Ciência e a Arte*. 3 volumes. 1.ª edição atualizada, [Rio de Janeiro], Marinha do Brasil. Hidrografia e Navegação, 2019.
- NUNES, Pedro, *Obras: Tratado da Sphaera Astronomici Introductorii de Sphaera Epitome*, vol. I, Fundação Calauste Gulbenkian, novembro de 2002.
- UMLAND, Henning, *A Short Guide to Celestial Navigation*, em linha, disponível em: <https://www.celnv.de/>.

Apêndice B

34^o Encontro do Seminário Nacional de História da Matemática

Latitude por Duas Alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

LATITUDE POR DUAS ALTURAS DO SOL — PROPOSTA DE CORNELIS DOUWES

Ana Queirós

Escola Naval

e-mail: ana.filipa.queiros@marinha.pt

A partir de finais do século xv, os pilotos passaram a determinar a latitude pela passagem meridiana do Sol. O processo utilizado, com cálculos bastante simples, tinha o inconveniente da necessidade de observação do astro no instante em que atingia a sua altura máxima. Caso não fosse possível, era necessário esperar pelo dia seguinte. Daí que diversos autores tenham sugerido soluções para determinar a latitude pela altura do Sol a qualquer hora do dia, tendo sido Pedro Nunes um dos primeiros a avançar com uma solução. Em 1740, o holandês Cornelis Douwes apresentou uma solução, divulgada pela tradução para inglês feita por Richard Harrison, em 1759. Segue-se a descrição do mesmo.

Para a resolução do seu método, Douwes criou as suas próprias tabelas de logaritmos (ver figura 1), para facilitar a obtenção dos valores necessários. Este método é iterativo, pelo que, para se efetuarem os cálculos, é necessário conhecer um valor estimado da latitude e, no final, o valor obtido deve ser comparado com o valor estimado e é avaliada a sua diferença (é aceite uma diferença de até dez minutos).

No método de Douwes, as incógnitas consideradas são as duas alturas observadas (h_1 e h_2) obtidas através de instrumentos próprios para o efeito (por exemplo, o sextante), o tempo para o meio dia das duas observações (t_1 e t_2) contabilizado aquando das observações, a declinação (D) cujo valor é retirado das tábuas de declinação e a latitude (L) que é o objetivo final do método.

Tendo em conta as incógnitas apresentadas, utilizam-se três equações base que resolvem, respetivamente, o triângulo de posição da primeira (1) e da segunda (2) observação e a diferença de ângulos no polo (3), ou seja, a diferença de tempo entre as observações:

$$\sin h_1 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_1 \quad (1)$$

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 \quad (2)$$

$$\cos t_1 - \cos t_2 = 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} * \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \quad (3)$$

Numa primeira etapa, subtrai-se as equações (1) e (2),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D (\cos t_1 - \cos t_2) \quad (4)$$

substitui-se a diferença de ângulos no polo (3),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D \left(2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} * \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \right) \quad (5)$$

e resolve-se em ordem a $2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2}$,

$$2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} = (\sin h_1 - \sin h_2) \sec L \sec D \csc \left(\frac{t_2 - t_1}{2} \right) \quad (6)$$

onde importa referir que $\frac{t_1 + t_2}{2}$ representa a hora média e $\frac{t_2 - t_1}{2}$ representa metade do intervalo de tempo, que são parâmetros que fazem parte da tabela de Douwes (ver figura 1).

Utiliza-se a equação (6) para obtenção dos valores de t_1 e t_2 , da seguinte forma:

1. Entrar com o valor de metade do intervalo de tempo na tabela de Douwes, que devolve o valor do logaritmo da cossecante;
2. Somar os valores dos logaritmos das secantes de L e de D (tabelas de logaritmos);
3. Somar o logaritmo da diferença dos senos das alturas (tabelas de funções trigonométricas);
4. Procurar o valor obtido na coluna da “hora média” da tabela de Douwes, que corresponde ao valor do logaritmo do seno de duas vezes esse argumento — retirar o valor da hora média em horas, minutos e segundos;
5. Somar e subtrair à hora média o valor de metade do intervalo de tempo — obtém-se os valores de t_1 e t_2 , respetivamente.

Obtidos os valores de t_1 e t_2 , volta-se às equações (1) e (2) e seleciona-se a equação que utiliza o valor de t correspondente à observação da maior altura — para efeitos explicativos, assume-se que a maior altura foi observada em t_2 , ou seja, $h_2 > h_1$. Então, do lado direito da equação (2), adiciona-se e subtrai-se $\cos L \cos D$ e resolve-se em ordem a $\cos(L - D)$:

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D - \cos L \cos D + \cos L \cos D \cos t_2 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sin h_2 = \cos(L - D) - \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \cos(L - D) = \sin h_2 + \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (9)$$

Douwes criou também o chamado *LogRising*(x), que é equivalente ao *senoverso*(x) e que corresponde a $1 - \cos(x)$. Inclusive, nas suas tabelas de logaritmos, criou uma coluna para o *Rising* (ver figura 1). Na equação (9), o valor de L do lado esquerdo da equação é o valor que se pretende obter, enquanto que o valor de L do lado direito da equação corresponde ao valor da latitude estimada. Recorrendo novamente às tabelas de logaritmos e à particularidade dos logaritmos transformarem multiplicações em somas, resolve-se facilmente a última equação, obtendo-se o valor da latitude. Tratando-se de um processo iterativo, avalia-se a proximidade entre os valores da latitude estimada e da latitude obtida e aceita-se o resultado, ou repete-se o processo, utilizando como latitude estimada o valor obtido na primeira iteração.

The New LOGARITHMIC SOLAR TABLES. 21											
H	M	S	$\frac{1}{2}$ Elapsed Time.	Middle Time.	Rising.	H	M	S	$\frac{1}{2}$ Elapsed Time.	Middle Time.	Rising.
1	36	20	0.38927	4.91176	3.93975	1	48	20	0.34172	4.95931	4.04003
1	36	30	0.38856	4.91247	3.94123	1	48	30	0.34110	4.95993	4.04134
1	36	40	0.38786	4.91317	3.94271	1	48	40	0.34048	4.96055	4.04265
1	37	00	0.38646	4.91457	3.94466	1	49	00	0.33925	4.96178	4.04526
1	37	20	0.38506	4.91597	3.95859	1	49	20	0.33803	4.96300	4.04786
1	37	30	0.38436	4.91667	3.95005	1	49	30	0.33742	4.96361	4.04916

Figura 1: Excerto da Tabela de Douwes, traduzida por Richard Harrison[1].

Este método, o primeiro que se conhece no qual se usaram logaritmos para o cálculo das equações, tem um interesse particular porque se tornou a base para os inúmeros métodos que se seguiram durante o século XVIII e ao longo do XIX, até ao aparecimento do Método de Marq Saint-Hilaire, no final desse século.

Referências

- [1] Richard Harrison, *A New Sett of Logarithmic Solar Tables, Calculated and Constructed for Determining the Latitude at Sea*, London, 1759.

Apêndice C

XII Jornadas do Mar

Latitude por Duas Alturas do Sol — Proposta de Cornelis Douwes

Latitude por Duas Alturas do Sol – Proposta de Cornelis Douwes

Ana Queirós

Escola Naval

ana.filipa.queiros@escolanaval.pt

Resumo: Desde o século XV que se propuseram soluções para o cálculo da latitude fora da passagem meridiana. Em 1740, o holandês Cornelis Douwes apresentou uma solução, divulgada pela tradução para inglês por Richard Harrison, em 1759, a qual serviu de base para várias propostas apresentadas no século XIX. Neste artigo, será explicado o método de Douwes, indicando os principais passos do cálculo, assim como um exemplo prático de utilização do mesmo.

INTRODUÇÃO

O presente artigo surge no âmbito da dissertação de mestrado desenvolvida ao longo deste ano letivo, que pretende estudar e avaliar a fiabilidade de métodos antigos de cálculo da posição astronómica. Para isso, foram estudados vários métodos de obtenção da latitude pela meridiana e por extrameridianas do Sol, assim como da longitude pelo ângulo horário, utilizados a partir de finais do século XVIII e ao longo do século XIX.

Em relação aos métodos de cálculo da latitude por extrameridianas, e pela investigação já realizada, percebeu-se que muitos dos métodos que surgiram no período acima mencionado se baseia no método de Cornelis Douwes. Posto isto, o trabalho que se segue é direcionado para esse autor, sendo apresentada a sua biografia, a sua obra e o seu método, assim como um exemplo do mesmo.

1. Biografia de Cornelis Douwes

Através da *Enciclopédia de História Marítima de Oxford*, obtiveram-se algumas informações sobre o autor em estudo, tendo sido essa a referência base utilizada para a obtenção dos dados que se seguem. Existem também alguns autores que referem Douwes, mas a informação biográfica é muito reduzida, uma vez que o foco é o método de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol.

Cornelis Douwes, um investigador holandês de assuntos náuticos, nasceu a 24 de agosto de 1712, em Terschelling. Estudou navegação e acredita-se que tenha praticado com o seu pai, que era capitão de navio mercante e navegava regularmente para Bremen. Estima-se que no ano de 1731 se tenha estreado como professor, em Amsterdão, onde ensinou navegação, matemática e artilharia. Mais tarde, perante a sua candidatura para o cargo de professor de artilharia do almirantado de Amsterdão, assim como a oferta para ensino das áreas de navegação, trigonometria, astronomia e manuseamento de

instrumentos náuticos, foi fundada a *Algemeen Zeemans-Collegie*, a sua escola de navegação. Nesta escola eram formados, por Douwes, futuros oficiais das marinhas de guerra e mercante, assim como jovens órfãos das ruas de Amsterdão. A sua carreira enquanto professor e examinador dos cadetes da marinha continuou a progredir ao longo dos anos, e ainda se tornou membro da *Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen* – Sociedade Real Holandesa de Ciências e Humanidades –, aquando da sua fundação, em 1752. Douwes morreu na cidade de Amsterdão, em 1773.

2. A obra de Douwes

Segundo Charles H. Cotter, na sua obra *A History of Nautical Astronomy* (Cotter, 1968), Douwes desenvolveu o seu método em 1740, tal como outros autores o reconhecem, nomeadamente Militão da Mata. Aliás, Militão acrescenta que, na obra de Douwes, deveriam estar incluídas as outras tabelas necessárias à resolução dos cálculos, sendo estas a da declinação do Sol, a dos senos naturais, a dos logaritmos da secante menos o raio, e a dos logaritmos comuns, e não apenas as tabelas criadas pelo holandês. Segundo este autor, um único volume com o método de Douwes e todas as tabelas necessárias à resolução do mesmo, surgiu em 1771, com muita procura (Mata, 1781). No entanto, de acordo com a *Enciclopédia de História Marítima de Oxford*, foi em 1749 que Douwes escreveu um manuscrito com a descrição do seu método. A primeira publicação oficial ocorreu em 1754, porém incompleta, por não apresentar as tabelas necessárias à resolução do método. A primeira edição completa foi publicada em 1760: *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden* (Douwes, 1760).

Um aspeto interessante sobre a edição de 1760 é a apresentação de uma página datada de 1761, logo a seguir à capa. Dentro das limitações para traduzir a língua holandesa, a ideia retirada é que foi dado ao autor um privilégio de quinze anos de exclusividade de publicação, com aplicação de multas para quem tentasse, de alguma forma, publicar ou vender a sua obra. Esta particularidade pode indicar que o livro foi realmente impresso em 1760, mas a sua comercialização só foi possível a partir de 1761, depois da inclusão da página referente ao privilégio referido.

A disseminação deste método foi sendo realizada através da circulação de cópias manuscritas, provavelmente em holandês, e foi publicado em Inglaterra, pela primeira vez, por Richard Harrison, que o transcreveu e traduziu para inglês, em 1759, nas chamadas *A New Set of Logarithmic Solar Tables* (Harrison, 1759). Nos anos

seguintes, foi alargado a outras partes do mundo, como França, Alemanha, Espanha e América, onde se acredita que tenha sido praticado. Chegou a Portugal graças à tradução e transcrição elaborada por Militão da Mata, em 1781.

Em 1760, Henry Pemberton expôs o método de Douwes à Sociedade Real de Londres, através da obra *Some Considerations on a late Treatise intituled, A New Set of Logarithmic Solar Tables* (Pemberton, 1760), onde teceu algumas considerações sobre as particularidades e as limitações do mesmo. A análise da obra deste autor também se encontra na dissertação elaborada por Jorge Pires, de onde se retira que Pemberton salientou a utilização da variável *tempo*, assim como a simplificação dos cálculos através da “tabulação dos valores das funções trigonométricas e logarítmicas” (Pires, 2021). No mesmo seguimento, é ainda positivamente referida a utilização da latitude estimada, como contributo para tornar o método expedito, e atenta para a consideração dos intervalos de tempo mais favoráveis para as observações, que influenciam a precisão dos resultados. Sobre o método de cálculo propriamente dito, isto é, a vertente analítica do método, o autor demonstra de que forma é que se poderia reduzir e simplificar os cálculos (Pires, 2021), recorrendo às relações trigonométricas, para que fosse obtido o valor da altura do Sol na sua passagem meridiana, sendo esse valor mais próximo do real, comparativamente ao valor obtido pelos cálculos apresentados por Douwes. Ora, aplicando o valor dessa altura no cálculo da latitude, o resultado seria igualmente mais realista. À semelhança de Douwes, uma das principais exigências prende-se ao rigor das observações, mas Pemberton salienta a escolha da hora apropriada para a realização das mesmas.

2.1. O prefácio

Face à leitura do prefácio da obra de Douwes, percebe-se que o objetivo do autor é providenciar um método de cálculo da latitude àqueles que sabem navegar e não querem ter aulas teóricas, assim como pretende que os professores o entendam e o transmitam aos seus alunos, com uma “certeza matemática do assunto”. Inclusive, o autor pede “gentilmente” a quem faça observações de forma correta e precisa e obtenha maus resultados com a aplicação do seu método, que lhe comunique, para que ele possa instruir os Marinheiros para não confiarem totalmente no seu método. Até lá, todos devem confiar, ao abrigo das suas próprias observações. Douwes expõe alguns procedimentos utilizados para a elaboração das suas tabelas, enumerando vários

aspectos e possíveis erros analisados, para garantir a precisão dos valores apresentados. Ao longo desta observação inicial do autor, é referido ainda que bastam duas a três horas de prática para se perceber o seu método, nomeadamente a procura pelos valores nas tabelas e os cálculos matemáticos (que se cingem a adições e subtrações). É também feita uma comparação com métodos anteriores, onde o próprio afirma que, o facto de ter que utilizar imagens e linhas geométricas, é confuso para todos, moroso e suscetível a erros, e aproveita para engrandecer a brevidade e facilidade do seu método. O autor está seguro de que, com esta solução, virá também a confiança para se “ousar navegar aqui”, onde, geralmente, a latitude pela passagem meridiana é impossível de calcular — passagens por canais, estreitos e navegações no Mar do Norte durante o inverno, foram alguns dos exemplos tomados. Por fim, conta que se sentirá “afortunado” se o seu trabalho, “na continuação dos tempos, puder ser útil para os marítimos”. Termina o prefácio com a frase, “*Het groote schip, waar aan wy alle Reeden*”, cuja tradução corresponde a “o grande navio, em que todos nós navegamos”, da qual se entende uma dedicatória ao mundo da navegação, pela referência final do autor à exigência própria de amor universal e ao anseio pela prosperidade da sua pátria.

3. Resolução do método

Para a resolução do seu método, Douwes criou as suas próprias tabelas de logaritmos (ver figura 1), para facilitar a obtenção dos valores necessários. Este método é iterativo, pelo que, para se efetuarem os cálculos, é necessário conhecer um valor estimado da latitude e, no final, o valor obtido deve ser comparado com o valor estimado e é avaliada a sua diferença. Se esta diferença for grande, repete-se o processo, usando para latitude estimada o valor obtido na iteração anterior.

No método de Douwes, as incógnitas consideradas são as duas alturas observadas (h_1 e h_2) obtidas através de instrumentos próprios para o efeito (por exemplo, o sextante), os intervalos de tempo entre o meio-dia e cada uma das observações (t_1 e t_2), a declinação (D) cujo valor é retirado das tábuas de declinação e a latitude estimada (L). Da mesma forma, L também é usado para a latitude que se pretende calcular, e que é o objetivo do método. Posto isto, para garantir a distinção de ambas ao longo da explicação, utilizar-se-á L_c para a latitude a calcular.

Para a resolução dos triângulos de posição, é necessário conhecer o valor do ângulo no polo para cada uma das observações. No entanto, como esse valor é desconhecido, a

solução para o aplicar foi considerá-lo em tempo. Para isso, em vez de se entrar com o valor do ângulo no polo para cada uma das observações, assume-se o parâmetro do intervalo de tempo entre as observações, daí a importância de conhecer o tempo decorrido entre as observações e o meio-dia (t_1 e t_2).

Tendo em conta as incógnitas apresentadas, o método utiliza três equações base para a sua resolução. Essas equações representam, respetivamente, a resolução dos triângulos de posição da primeira (3.1) e da segunda (3.2) observação, e a resolução da diferença de ângulos no polo (3.3), isto é, a diferença de tempo entre as observações:

$$\sin h_1 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_1 \quad (3.1)$$

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 \quad (3.2)$$

$$\cos t_1 - \cos t_2 = 2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} * \sin \frac{t_2 - t_1}{2} \quad (3.3)$$

Numa primeira etapa, subtrai-se as equações 3.1 e 3.2,

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D (\cos t_1 - \cos t_2) \quad (3.4)$$

substitui-se a diferença de ângulos no polo (3.3),

$$\sin h_1 - \sin h_2 = \cos L \cos D (2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} * \sin \frac{t_2 - t_1}{2}) \quad (3.5)$$

e resolve-se em ordem a $2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2}$,

$$2 \sin \frac{t_1 + t_2}{2} = (\sin h_1 - \sin h_2) \sec L \sec D \csc(\frac{t_2 - t_1}{2}) \quad (3.6)$$

onde importa referir que $\frac{t_1 + t_2}{2}$ representa a hora média e $\frac{t_2 - t_1}{2}$ representa metade do intervalo de tempo, que são parâmetros que fazem parte da tabela de Douwes (ver figura 1).

Como foi referido anteriormente, esta primeira fase tem como objetivo a obtenção dos valores de t_1 e t_2 . Harrison enumera os passos necessários para a resolução destes parâmetros (Harrison, 1759):

1. Entrar com o valor de metade do intervalo de tempo na tabela de Douwes, que devolve o valor do logaritmo da cossecante;

2. Somar os valores dos logaritmos das secantes de L e D (tabelas de logaritmos);
3. Somar o logaritmo da diferença dos senos das alturas (tabelas de funções trigonométricas);
4. Procurar o valor obtido na coluna da “hora média” da tabela de Douwes, que corresponde ao valor do logaritmo do seno de duas vezes esse argumento – retirar o valor da hora média em horas, minutos e segundos;
5. Somar e subtrair à hora média o valor de metade do intervalo de tempo – obtém-se os valores de t_1 e t_2 , respectivamente.

Numa segunda fase, depois de obtidos os valores de t_1 e t_2 , volta-se às equações 3.1 e 3.2 e seleciona-se a equação que utiliza o valor de t correspondente à observação da maior altura — para efeitos explicativos, assume-se que a maior altura foi observada em t_2 , ou seja, $h_2 > h_1$. Posto isto, do lado direito da equação 3.2, adiciona-se e subtrai-se $\cos L \cos D$ e resolve-se em ordem a $\cos(L - D)$, onde L será a latitude que se pretende calcular (L_c):

$$\sin h_2 = \sin L \sin D + \cos L \cos D \cos t_2 + \cos L \cos D - \cos L \cos D \quad (3.7)$$

$$\Leftrightarrow \sin h_2 = \cos(L_c - D) - \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \cos(L_c - D) = \sin h_2 + \cos L \cos D(1 - \cos t_2) \quad (3.9)$$

Douwes criou também o $\text{LogRising}(x)$, que é equivalente ao $\text{senoverso}(x)$ e que corresponde a $1 - \cos(x)$. Inclusive, nas suas tabelas de logaritmos, criou uma coluna para os valores do Rising (ver figura 1).

The New LOGARITHMIC SOLAR TABLES. 21											
H	M	S	† Elapsed Time.	Middle Time.	Rising.	H	M	S	† Elapsed Time.	Middle Time.	Rising
1	36	20	0.38927	4.91176	3.93975	1	48	20	0.34172	4.95931	4.04003
1	36	30	0.38856	4.91247	3.94123	1	48	30	0.34110	4.95993	4.04134
1	36	40	0.38786	4.91317	3.94271	1	48	40	0.34048	4.96055	4.04265
1	37	00	0.38646	4.91457	3.94406	1	49	00	0.33925	4.96178	4.04526
1	37	20	0.38506	4.91597	3.95859	1	49	20	0.33803	4.96300	4.04786
1	37	30	0.38436	4.91667	3.95005	1	49	30	0.33742	4.96361	4.04916

Figura 1 - Excerto da Tabela de Douwes, traduzida por Richard Harrison (Harrison, 1781)

Por fim, Douwes considera que o ângulo no polo da observação com a maior altura tem um valor muito pequeno, ao ponto de poder ser desprezado, e resta apenas calcular L_c a partir dos cálculos que se utilizam aquando da observação da meridiana. Desta forma, assume-se que $(L - D)$ é equivalente à distância zenital (ζ), que, por sua vez, corresponde

ao complemento da altura. Isto significa que o resultado obtido é o resultado do seno natural da altura do Sol na passagem meridiana. Matematicamente falando, tem-se

$$L_c - D = \zeta_{meridiana} \quad (3.10)$$

e, sendo a distância zenital o complemento da altura observada,

$$\cos(L_c - D) = \cos(\zeta_{meridiana}) = \text{sen}(h_{meridiana}) \quad (3.11)$$

Finalmente, descobre-se o valor da distância zenital e aplica-se a equação 3.10 em ordem a L_c ($L_c = D + \zeta$), obtendo-se assim a latitude pretendida.

A utilização, por parte do autor, dos termos “distância zenital meridiana” e “altura na passagem meridiana” é considerada um abuso de linguagem, porque, quando se considera a utilização de t associado à maior altura observada, o valor do ângulo no polo pode ser reduzido, mas não é nulo, como acontece no momento da verdadeira passagem meridiana. No entanto, Douwes implementa limitações horárias para as observações e, cumprindo essas condições, é considerado aceitável o cálculo da latitude pela maior altura observada, desprezando o valor do ângulo no polo, utilizando os cálculos básicos associados à latitude pela passagem meridiana.

3.1. Exemplo do método

A partir da obra de Harrison, retirou-se o exemplo exposto na figura 2, que será comparado com a explicação dada anteriormente e efetuada a correspondência matemática entre ambos.

O uso das propriedades logarítmicas veio transformar as divisões e multiplicações das equações apresentadas anteriormente, em somas e subtrações. Importa também referir que, pela linguagem do autor, quando são mencionadas as funções trigonométricas, está implícito que ele se refere ao logaritmo das mesmas. No caso de se querer utilizar apenas a função trigonométrica, coloca-se o termo “natural” associado ao nome da função. Em situações em que possa ocorrer dúvidas, o autor usa o termo “artificial” associado a uma função trigonométrica, para indicar que aquele valor corresponde ao logaritmo dessa função.

EXAMPLE I.

AUGUST the 23d, 1758. Sun's Declination 11d. 17m. North, and at 10h. 02m. in the Forenoon Sun's Altitude was 46d. 55m. then again at 11h. 27m. the second Altitude was 54d. 07m. Latitude by Account is 46d. 50m. North, required the true Latitude, and true Time of the Day, when the greatest Altitude was taken?

	h.	m.	f.		
At	11	27	00	Lat. by Account, its Sec. less Rad.	0.16486
At	10	02	00	Sun's Declin. its Secant less Rad.	0.00847
Half	01	25	00	Added gives the Logarithm Ratio	0.17333
			00 42 30		
Half elapsed Time					

The Sun's gr. Alt. at 11h. 27m. is 54d. 07m. Nat. Sine	81020	
The Sun's Alt. taken at 10h. 02m. is 46d. 55m. Nat. Sine	73030	
Subtract		the Remainder 7990

The Logarithm of Ratio	0.17333	
Common Logarithm of the Remainder	9.00255	
New Table of Log. of half elapsed Time for 42m. 30s.	0.73429	
The Sum is the Logarithm of Middle Time	4.81047	

	h.	m.	f.	
The Hour and Min. &c. for which by the New Table is	1	15	30	
Subtract from it half elapsed Time			0 42 30	
Their Difference is the true Space of Time the Sun had to rise to the Mer. when the gr. Alt. was taken			0 33 00	

By the Watch at 11h. 27m. Subtract from 12h. 00m. Remains 00h. 33m. So I find they agree, and the Watch must be exactly right.

Lastly, Enter the New Table with 33m. under Rising	3.01488	
Ratio subtract from it	0.17333	
Remains a Common Log. whose Natural Sine shews		
the deg. and min. which were wanting of the Sun's Mer. Alt. when the greatest Alt. was taken	2,84155	

To the Natural Sine of the greatest Altitude	81020	
Add the Natural Sine of the above Logarithm	694	
Sum is the Natural Sine	81714	
Whose Artificial Sine is the deg. and min. of the Sun's Meridian Altitude required.		

	d.	m.	
The Deg. &c. corresponding are	64	48	
Subtract from		90 00	
The Sun's Zenith Distance	35	12 S	
Sun's Declination add	11	17 N	
Lat. at 11h. 27m. in the Forenoon	46	29 N	

Figura 2 - Exemplo de aplicação do método de Douwes

Os três primeiros retângulos assinalados na imagem são a tradução matemática dos três primeiros passos definidos na obra de Harrison, acima mencionados, ainda que a ordem não corresponda. A equação 3.6 é então resolvida por esses retângulos, A, B e C, que calculam, respetivamente, $\sec L \sec D$ (passo n.º 2), $\sin h_2 - \sin h_1$ (passo n.º3) e $\csc \frac{t_2 - t_1}{2}$ (passo n.º1):

- Pelas propriedades logarítmicas tem-se que:

$$\begin{aligned} & \sec(46^\circ 50') \sec(11^\circ 17') \\ & \equiv \\ & \log(\sec 46^\circ 50') + \log(\sec 11^\circ 17') \end{aligned}$$

- Através da consulta das tabelas de logaritmos das funções trigonométricas, neste caso retiradas da obra de Norie – *A new and complete epitome of practical navigation*, tabela XXV, *Logarithmic Sines, Tangents and Secants*, p.108 –, retira-se que o valor do logaritmo da secante de $46^\circ 50'$ é de 10,164866, e o de $11^\circ 17'$ é de 10,008476. No exemplo está escrita a abreviatura de *Secant less radius* (“Sec. Less Rad.”), porque, na época em estudo, os valores das funções trigonométricas eram, geralmente, representados por números inteiros, e não fracionários, como se faz hoje em dia. Para isso, atribuía-se ao raio do círculo trigonométrico um valor muito superior a um, o que justifica os valores presentes na tabela mencionada, cujo valor das unidades é 10. Quando o autor utiliza o termo “secante menos o raio”, quer, precisamente, calcular o valor real da secante, subtraindo 10 ao valor tabelado. Desta forma, os valores das secantes de $46^\circ 50'$ e de $11^\circ 17'$ são, respetivamente, 0,164866 e 0,008476. Por fim, importa ainda mencionar que estas tabelas já eram comuns na sociedade científica e Douwes não menciona as tabelas que consultou para a recolha dos valores. Sem essa referência, optou-se por utilizar as tabelas de Norie, daí a diferença no número de casas decimais dos valores da explicação em curso, em relação aos valores apresentados no exemplo (figura 2 – retângulo A). O resultado obtido é chamado de “Logarithm Ratio”;
- No retângulo B, onde se calcula $\sin h_2 - \sin h_1$, verifica-se a abreviatura do termo “natural” associado ao seno (*Nat. Sine*). Para encontrar os valores, consulta-se as tabelas das funções trigonométricas – tal como no ponto

anterior, utilizou-se a tabela XXVI de Norie, *Natural Sines*, p. 157 e 158 –, e obtém-se os senos de 54°07' e de 46°55' que correspondem, por sua vez, a 0,810212 e 0,730361. Faz-se, por fim, a diferença entre os dois valores e, ao resultado obtido, o autor atribui o nome de “Remainder”;

- O retângulo C é o primeiro a ser resolvido utilizando as tabelas originais de Douwes. Assim sendo, procura-se o valor de “half elapsed time” para 42m30s (metade do intervalo de tempo entre as observações, às 10h02m e às 11h27m), e obtém-se 0,73429. Neste caso, o valor corresponde totalmente ao valor presente no exemplo, por ser retirado das tabelas do próprio autor.

Destes três primeiros passos resulta a solução de $2\text{sen} \frac{t_1+t_2}{2}$ (equação 3.6), pela soma do “Logarithm Ratio”, com o “Remainder” e com valor do “half elapsed time”.

No quarto retângulo, assinalado com a letra D, estão representados os passos número 4 e 5:

- Em primeiro lugar, a partir da tabela de Douwes, procura-se o valor obtido anteriormente na coluna da hora média (“Middle Time” na figura 1) e retira-se o tempo que lhe corresponde (em horas, minutos e segundos);
- De seguida, é possível calcular os valores de t_1 e t_2 . No entanto, no exemplo, calcula-se apenas t_2 , subtraindo à hora média o valor de metade do intervalo de tempo. Esta decisão deve-se à utilização da maior altura, que foi registada na segunda observação, representada por t_2 .

Posto isto, considerando t_2 o tempo da maior altura, passa-se para a equação 3.9 (retângulos E e F):

- Da tabela de Douwes, retira-se o valor do *Log of Rising* correspondente a 33 minutos, obtendo-se 3,01488 – traduzido para linguagem matemática, é o valor de $(1 - \cos t_2)$. Assim sendo, o retângulo E calcula $\frac{(1-\cos t_2)}{\sec L \sec D}$, que é equivalente a $\cos L \cos D (1 - \cos t_2)$:

$$\frac{(1-\cos t_2)}{\sec L \sec D} = \log(1 - \cos t_2) - \log(\sec L \sec D) = \text{Log of Rising} - \text{Logarithm Ratio}$$

- No retângulo F, soma-se o $\text{sen } h_2$ ao resultado calculado em E, e obtém-se o valor de $\cos(Lc - D)$.

Por fim, existe o abuso de linguagem já mencionado, presente no retângulo F, em que o autor afirma: “Sum is the natural sine whose artificial sine is the deg. and min. of

the Sun's Meridian Altitude required", o que lhe permite assumir a igualdade $\cos(Lc - D) = \sin(h_{\text{meri}}) = \cos(\zeta_{\text{meri}})$. Desta forma, conclui os cálculos representados no retângulo G, que correspondem a $Lc = D + \zeta$.

Finalizados os cálculos e tratando-se de um método iterativo, a próxima fase seria comparar a latitude estimada com a latitude calculada, que, neste caso, correspondem a $46^{\circ}50'$ (retirada do cabeçalho do exemplo, figura 2) e $46^{\circ}29'$, respetivamente. Como os valores diferem em 21 minutos, seria necessário repetir todo o processo, utilizando $46^{\circ}29'$ como o valor da latitude estimada. O processo deve ser repetido até que a diferença entre as latitudes consideradas seja desprezável.

CONCLUSÃO

Cornelis Douwes, fundador e professor da *Algemeen Zeemans-Collegie*, criou um método analítico de cálculo da latitude por extrameridianas do Sol, em 1740, cuja disseminação foi impulsionada por Richard Harrison, em 1759.

Utilizando logaritmos, Douwes contornou a dificuldade da trigonometria esférica inerente à resolução do triângulo de posição para obtenção da latitude. Da mesma forma, para simplificar os cálculos necessários ao seu método, o autor criou tabelas que devolvem os valores dos parâmetros utilizados, além de recorrer a outras tabelas já existentes. Para melhor compreensão do processo, concluimos este artigo com a apresentação de um exemplo.

Agradecimentos

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador, António Canas, pelo incentivo, colaboração e dedicação do seu tempo à minha dissertação de mestrado e a todos os artigos desenvolvidos; à minha coorientadora, Teresa Sousa, pela disponibilidade e contributos técnicos; e à Escola Naval, essencial no meu processo de formação profissional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COTTER, C. H. (1968). *A History of Nautical Astronomy*. Londres: Hollis & Carter.

DOUWES, C. (1760). *Zeemans-Tafelen en Voorbeelden*. Amsterdão: Joannes van Keulen en Zoonen.

HARRISON, R. (1759). *A New Set of Logarithmic Solar Tables*. Londres: W. and J. Mount.

MATA, J. M. (1781). *O Destro Observador: Método Fácil de Saber a Latitude a Qualquer Hora do Dia, Sem Dependência da Observação Meridiana*. Lisboa: Na Officina Luisiana.

NORIE, J. W. (1817). *A new and complete epitome of practical navigation*. Londres: Althor.

PEMBERTON, H. (1760). *Some Considerations on a late Treatise intituled, A New Set of Logarithmic Solar Tables*.

PIRES, J. O. J. (2021). *Determinação da Latitude por Alturas Extrameridianas do Sol: Evolução Histórica do Processo*. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola Naval para obtenção do Grau de Mestre em Ciências Militares Navais, na especialidade de Marinha.