



ANA
CATARINA LUIZ
PINTO RIGOR

**PROMOVER O RACIOCÍNIO
MATEMÁTICO DE ALUNOS DO 4.º
ANO DE ESCOLARIDADE**

Relatório de projeto de investigação do Mestrado
em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo
do Ensino Básico

ORIENTADORA

Professora Doutora Maria de Fátima Pista Calado
Mendes

ANA PROMOVER O RACIOCÍNIO
CATARINA LUIZ MATEMÁTICO DE ALUNOS DO 4.º
PINTO RIGOR ANO DE ESCOLARIDADE

JÚRI

Presidente:

Professora Doutora Ana Luísa da Piedade Melro
Blazer Gaspar Costa completar nome, Escola
Superior de Educação do Instituto Politécnico de
Setúbal

Arguente:

Professor Doutora Catarina Raquel Santana
Coutinho Alves Delgado, Escola Superior de
Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Orientadora:

Professora Doutora Maria de Fátima Pista
Calado Mendes, Escola Superior de Educação
do Instituto Politécnico de Setúbal

VERSÃO DEFINITIVA

fevereiro de 2022

Agradecimentos

Cinco anos após o primeiro dia, tudo começa a ganhar sentido. Caminho a passos largos para o fim de um percurso nem sempre fácil, por vezes sinuoso, mas com a certeza de que, embora tenha sido eu que apontasse caminho, nada foi feito de forma solitária. Por isso, agradeço, muito, a todos aqueles que de uma forma ou de outra me apoiaram e incentivaram a prosseguir um sonho que não era meu mas que passou a ser.

À minha família que nunca me disse que não, mesmo quando tudo parecia desmoronar, que fez das tripas coração para que nada me faltasse e pudesse chegar até aqui. Só espero um dia conseguir retribuir-vos todo o amor, esforço e dedicação.

À minha estrela mais brilhante que não partiu sem me ver licenciada e que do céu iluminou esta minha última caminhada.

À Cármen, Patrícia, Joana, Daniela, Inês e Raquel que tornaram este percurso mais leve. Da licenciatura ao mestrado, com alguns desvios na trajetória, demos as mãos e lado a lado aplaudimos, orgulhosamente, as conquistas de cada uma. Somos 7. Por muitos considerados o número da sorte, e é verdade, que sorte tenho eu de vos ter.

À “Guiduxa” que não veio desde sempre mas que ficará para sempre. Um exemplo de determinação e superação. Uma amiga sem hora marcada e sempre com a palavra certa na hora certa. Obrigada pelo apoio e por teres estado lá quando tudo parecia impossível.

Aos docentes da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, em especial à orientadora deste relatório, professora Maria de Fátima Mendes, que da licenciatura ao mestrado, me fizeram sentir em casa, numa casa que será para sempre minha.

A todas as educadoras e professoras cooperantes que me mostraram o caminho a seguir, com partilhas e ensinamentos que levo para a vida.

Às minhas “mães” Catarina e Rita que sempre acreditaram em mim e me motivaram diariamente a cumprir este objetivo. Não vou, nem posso, deixar-vos ficar mal. Quando for grande quero ser como vocês.

Este foi um caminho que parecia ser longínquo e irreal, mas chegou ao fim, e com ele, o meu destino: ser Educadora de Infância e Professora do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Resumo

O presente relatório surge no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) e tem como temática a promoção do raciocínio matemático em alunos do 4.º ano de escolaridade, recorrendo a práticas de ensino exploratório. Neste sentido, o objetivo da investigação é compreender quais os processos de raciocínio utilizados pelos alunos ao resolverem tarefas geométricas com grau de desafio elevado. Para que este objetivo fosse cumprido, foram desenvolvidas duas questões: (i) Que processos de raciocínio matemático usam os alunos quando resolvem tarefas de geometria com grau de desafio elevado?; (ii) Que dificuldades manifestam os alunos no uso de processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas geométricas com grau de desafio elevado?

A fundamentação teórica realça o aprofundamento teórico da temática em estudo, incluindo tópicos tais como: a aprendizagem da geometria e, em particular, no 4.º ano do 1.º CEB; o raciocínio matemático no que respeita à sua caracterização, tipos e processos; o desenvolvimento do raciocínio matemático em sala de aula e, por fim, um tópico referente ao ensino exploratório enquanto promotor do raciocínio matemático dos alunos.

No que respeita à metodologia adotada, o presente estudo enquadra-se no paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa de investigação-ação. O estudo decorreu numa turma de 4.º ano, sendo os seus participantes dois grupos compostos por quatro alunos cada. Estes foram selecionados considerando o facto de serem bons informantes. Foi construída uma proposta pedagógica constituída por quatro tarefas, com nível de desafio elevado e que incidiram sobre conceitos geométricos, que foram realizadas por toda a turma. Os dados relativos aos participantes do estudo foram recolhidos através da observação participante e da recolha documental, complementada através da gravação áudio, vídeo e de notas de campo. A análise dos dados foi realizada através da análise de conteúdo, nomeadamente, das produções escritas dos alunos, isto é, as respostas de cada grupo ao enunciado das quatro tarefas e das transcrições das discussões coletivas relacionadas com a resolução das tarefas propostas.

A análise dos dados recolhidos permitiu dar contributos de resposta às questões do estudo. No que respeita à mobilização de processos de raciocínio matemático, constatou-se que os alunos nem sempre recorreram a processos de raciocínio matemático para

responder às questões enunciadas. Contudo, foi sendo evidente a mobilização de alguns dos processos de raciocínio matemático, nomeadamente dos processos de justificação e generalização ao longo das tarefas, sobretudo, nas T3 e T4.

Relativamente à segunda questão do estudo, as dificuldades apresentadas pelos alunos foram, numa primeira fase, relativas à exploração de tarefas que se caracterizaram por ter um elevado grau de desafio. No entanto, este aspeto foi mais evidente nas primeiras duas tarefas, o que fez sobressair as dificuldades dos alunos ao nível do registo e exposição oral dos seus raciocínios como forma de justificação das suas respostas.

Palavras-chave: 1.º Ciclo do Ensino Básico; raciocínio matemático; processos de raciocínio matemático; ensino exploratório.

Abstract

This report is part of the Master's Degree in Pre-school Education and Primary School Teaching (1.º CEB) and its theme is the promotion of mathematical reasoning in 4th grade students, using exploratory teaching practices. In this sense, the aim of the research is to understand which reasoning processes are used by students when solving geometric tasks with a high level of challenge. In order to fulfill this goal, two questions were developed and are intended to be answered: (i) What mathematical reasoning processes do students use when solving high-challenge geometry tasks? (ii) What difficulties do students manifest in the use of mathematical reasoning processes in solving geometry tasks with a high degree of challenge?

The theoretical background highlights the theoretical deepening of the theme under study, including topics such as: the learning of geometry and, in particular, in the 4th grade of Primary School; mathematical reasoning with regard to its characterization, type, and processes; the development of mathematical reasoning in the classroom and, finally, a topic concerning exploratory teaching as a promoter of mathematical reasoning.

With regard to the methodology adopted, this study is framed within the interpretative paradigm following a qualitative action-research approach. The study took place in a 4th grade class, and its participants were two groups composed of four students each. These were selected considering the fact that they were good informants and comfortable in the subject of mathematics. A pedagogical proposal consisting of four tasks that focused on geometric concepts was constructed and carried out by the whole class. Data regarding the participants of the study was collected through participant observation and document collection, supplemented, through audio and video recording and field notes. The data analysis was performed through content analysis, namely, the students' written productions, i.e., each group's answers to the statement of the four tasks.

The analysis of the data collected allowed answering the study questions. With regard to the mobilization of reasoning processes, it was found that they did not always use mathematical reasoning processes to answer the questions posed. However, a development of their use was evident throughout the tasks, especially in T3 and T4, as a result of a greater habituation to this type of task and to the way of answering.

In relation to the second question of the study, the difficulties presented by students were, in a first approach, related to the exploration of tasks that are characterized by having a high degree of challenge. However, this aspect was only more evident in the first two tasks, which highlighted the students' difficulties in recording and orally exposing their reasoning as a way to justify their answers.

Keywords: 1st Cycle of Basic Education; mathematical reasoning; mathematical reasoning processes; exploratory teaching.

Índice

Introdução	1
Capítulo I – Revisão da Literatura.....	8
1. A aprendizagem da geometria	8
2. Raciocínio matemático.....	15
2.1. Caracterização e tipos de raciocínio matemático	15
2.2. Processos de Raciocínio	18
3. Desenvolver o Raciocínio Matemático na sala de aula.....	20
3.1. Raciocínio geométrico e o seu desenvolvimento	23
3.2 O Ensino Exploratório enquanto promotor do Raciocínio Matemático	25
Capítulo II – Metodologia de investigação	29
1. Abordagem qualitativa.....	29
2. Investigação-Ação	29
3. Contexto e participantes.....	30
3.1 Caracterização do contexto	30
3.2 Caracterização dos participantes	31
4. Procedimentos de recolha e tratamento de dados	32
4.1 Observação participante	33
4.2 Recolha documental	34
5. Procedimentos de análise de dados.....	35
Capítulo III – Intervenção pedagógica	36
Tarefa 1: “Quantos quadrados? (T1)” - Anexo 1	39
Tarefa 2: “Comparar perímetros (T2)” – Anexo 2	42
Tarefa 3: “Vamos descobrir as Pirâmides (T3)” – Anexo 3.....	45
Tarefa 4: “Vamos descobrir os Primas (T4)” – Anexo 4	47

Capítulo IV – Análise dos dados	52
A resolução da Tarefa 1 (T1): “Quantos quadrados?”	52
1. A resolução da Tarefa 2 (T2): “Comparar perímetros”	73
2. A resolução da Tarefa 3 (T3): “Vamos descobrir as Pirâmides”	85
3. A resolução da Tarefa 4 (T4): “Vamos descobrir os Prismas”	97
Capítulo V - Considerações finais	104
Síntese do estudo.....	104
Resposta às questões de estudo	105
Reflexão sobre o estudo	108
Referências	111
Anexos:	113

Índice de figuras

Figura 1 - Resposta final do grupo A à Q1 da T1	53
Figura 2 - Figura encontrada pela Leonor na Q2 da T1	62
Figura 3 - Quadrados encontrados pelo grupo A na Q2 da T1.....	63
Figura 4 - Resposta final do grupo A à Q3 da T1	64
Figura 5 - Losango mal decomposto pela aluna do grupo A para o cálculo da área	64
Figura 6 - Resposta final do grupo A à Q1 p.2 da T1	66
Figura 7 - Resposta final do grupo B à Q1 da T1.....	66
Figura 8 - Resposta final do grupo B à Q2 da T1.....	67
Figura 9 - Quadrados encontrados pelo grupo B na Q2 da T1	68
Figura 10 - Resposta final do grupo B à Q3 da T1.....	69
Figura 11 - Decomposição de um quadrado feita por Simão na Q1 p.2 da T1	70
Figura 12 - Decomposição dos quadrados pelo grupo B na Q1 p.2 da T1.....	70
Figura 13 - Resposta do grupo A à Q1 da T2.....	74
Figura 14 - Cálculo do perímetro das figuras A e B na Q1 da T2.....	74
Figura 15 - Resposta final do grupo A à Q1 da T2.....	75
Figura 16 - Resolução da Sara na Q2 da T2	75
Figura 17 - Resolução da Inês na Q2 da T2	75
Figura 18 - Resolução da Margarida da Q2 na T2	75
Figura 19 - Resolução da Leonor na Q2 da T2.....	76
Figura 20 - Dificuldades da Leonor em construir figuras com as características pretendidas na Q2 da T2.....	77
Figura 21 - Outras figuras encontradas pela Leonor	77
Figura 22 - Outras figuras encontradas pela Inês	78
Figura 23 - Resposta do grupo A à Q3 da T2.....	78
Figura 24 - Resolução da Sara na Q3 da T2	79
Figura 25 - Resolução da Margarida na Q3 da T2	79
Figura 26 - Figura B	80
Figura 27 - Resposta final do grupo B à Q1	81
Figura 28 - Figuras encontradas pelos vários elementos do grupo e que não correspondem aos critérios pedidos	82
Figura 29 - Figura encontrada pelo Pedro com os critérios pedidos	82

Figura 30 - Figuras encontradas pelos vários elementos do grupo 2 e que não correspondem aos critérios pedidos.....	83
Figura 31 - Resposta final do grupo à Q3 da T2	83
Figura 32 - Resposta de Sara à Q1b da T3	87
Figura 33 - Resposta de Leonor à Q1b da T3.....	87
Figura 34 - Resposta final do grupo A à Q1a da T3.....	87
Figura 35 - Resposta final do grupo A à Q1b da T3.....	88
Figura 36 - Resposta final do grupo A à Q2 da T3.....	89
Figura 37 - Resposta final do grupo A à Q3 da T3.....	90
Figura 38 - Resposta do grupo B à Q1a da T3	91
Figura 39 - Representação de uma pirâmide heptagonal pelo grupo B para responder à Q1b da T3	92
Figura 40 - Resposta final do grupo B à Q1b da T3.....	92
Figura 41- Resposta final do grupo B à Q2 da T3.....	93
Figura 42 - Representação do grupo B de uma pirâmide com nove arestas na base para responder à Q2 da T3.....	93
Figura 43 - Resposta final do grupo B à Q3 da T3.....	94
Figura 44 - Resposta final do grupo B à Q4 da T3.....	95
Figura 45 - Sistematização no quadro das descobertas realizadas na T3	96
Figura 46 - Resposta final do grupo A à Q3 da T4.....	100
Figura 47 - Resposta final do grupo A à Q4 da T4.....	100
Figura 48 - Descobertas do grupo A sobre prismas e pirâmides na Q5 da T4	100
Figura 49 - Resposta final do grupo B à Q4 da T4.....	102
Figura 50 - Descobertas do grupo B sobre prismas e pirâmides na Q5 da T4	103

Introdução

O presente relatório surge no âmbito do Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente da investigação realizada em contexto de estágio com uma turma de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB).

1. Motivações pessoais e profissionais

O caminho até à escolha do tema a trabalhar no presente projeto de investigação não foi propriamente rápido, existindo algumas dúvidas relativamente ao tema a abordar, dentro da matemática, tendo sido esse um desejo pessoal desde cedo. Numa primeira fase, depois de muito pensar, decidi trabalhar em torno do ensino da geometria e do seu ensino através de materiais manipuláveis, podendo ser este um caminho para uma perspetiva mais lúdica da área aos olhos das crianças. Neste processo de escolha do tema foi essencial a intervenção dos docentes Fernando Almeida e Jorge Pinto na unidade curricular “Seminário de Investigação sobre Práticas Pedagógicas” do 2.º ano do mestrado, que apoiaram as nossas escolhas em prol da sua exequibilidade. Uma vez que este projeto iria realizar-se durante uma fase pandémica (COVID-19) a possibilidade de este ter de ser executado à distância era grande e, por isso, fui alertada pelos docentes sobre a impossibilidade de recolher dados sendo esse o tema da investigação. Nesse momento, tudo voltou à estaca zero.

Foi, então, com a ajuda da docente Maria de Fátima Mendes, orientadora deste relatório, que fui encaminhada para trabalhar o tema do raciocínio matemático segundo uma abordagem de ensino da matemática, o ensino exploratório. Vi com interesse a alternativa apresentada, não só porque era algo familiar para mim enquanto estudante das aulas de Didática da Matemática do mestrado, mas também porque poderia experienciar esta metodologia por outra via, a de professora estagiária e investigadora.

A temática desta investigação tornou-se pertinente e significativa para mim, considerando o facto de enquanto estudante que sempre fui, agora, direcionada em específico para a área da Educação, considerar que o raciocínio matemático sempre foi muito pouco explorado durante a minha escolaridade obrigatória, isto é, do ensino básico ao secundário. Recordo-me que a ensino-aprendizagem da matemática limitava-se a ser

meramente expositivo e pouco desafiante, ao ponto de os alunos não serem desafiados nas aulas a pensarem o porquê das coisas e a exporem oralmente e/ou por escrito os seus raciocínios, sendo única exceção os testes de avaliação que em alguns momentos os alunos tinham de justificar o seu raciocínio. Apenas no ensino superior, já na licenciatura em Educação Básica e, mais recentemente, no Mestrado senti que o raciocínio era visto como indispensável à aprendizagem e, neste caso, à formação de futuros professores. Neste último ano de mestrado, senti a importância da capacidade de raciocinar sobre situações problemáticas, tendo sido uma constante nas aulas de Didática da Matemática de forma que, mais tarde, os estudantes enquanto profissionais, sejam capazes de promover o raciocínio matemático dos alunos nas suas práticas letivas.

Durante os períodos de estágio no 1.º CEB (1.º ano e 4.º ano), realizados em 2021, pude ainda constatar, desta vez no papel de professora estagiária, aquilo que sentia enquanto aluna: o desenvolvimento do raciocínio matemático continua a não pertencer à rotina escolar das crianças do ensino básico. No entanto, acredito que este aspeto não se deva apenas por ser opção do docente. Segundo a professora cooperante de 4.º ano, esta é uma área que deve ser priorizada no ensino da matemática, devendo estar implícita no ensino de qualquer conteúdo, manifestando-se assim como importante na aprendizagem dos alunos. No entanto, considera que seria necessário ‘mais tempo letivo’ e desvalorizar outras áreas “prioritárias” para o explorar.

Neste sentido, nesta investigação, pretende-se que seja privilegiado o desenvolvimento do raciocínio matemático das crianças, considerando que, apesar do raciocínio estar presente no currículo de matemática do 1.º CEB, nem sempre é visto como área integradora no ensino dos restantes conteúdos e que não necessita de ser explorado à margem dos mesmos. Este aspeto poderá resultar numa deficiente utilização de processos de raciocínio da turma, uma vez que os alunos do contexto em que foram recolhidos os dados para a presente investigação não se encontravam de todo familiarizados com uma prática em que a exposição oral e escrita dos seus raciocínios era a base da sua aprendizagem.

Nas Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 1.º CEB, em articulação com Perfil do aluno (Gomes, et al., 2017), a DGE-ME (2018), no que respeita à exploração do raciocínio matemático, refere que este surge como área integradora de todos os conteúdos de aprendizagem da matemática, isto é, surge associado aos temas dos “Números e

Operações”, “Geometria e Medida” e “Organização e Tratamento de Dados”. Neste sentido, e de acordo com o mesmo documento, o facto de se pretender que os alunos desenvolvam o raciocínio matemático e acrescentem igualmente a capacidade de ouvir e analisar os raciocínios dos seus pares é tido como algo necessário e transversal aos quatros anos de escolaridade. A comunicação matemática surge também associada à competência do raciocínio, uma vez que a capacidade de comunicar em matemática pode ser feita oralmente e/ou por escrito, sendo que a criança através dela poderá ver expressadas as suas ideias, procedimentos e raciocínios relativamente a determinado desafio matemático.

2. Pertinência da exploração do raciocínio matemático no 1.º CEB e do ensino exploratório

No Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (2013) o raciocínio matemático era referido de forma subentendida e, apenas, como objetivo de aprendizagem nos 2.º e 3.º ciclos. Atualmente, com o surgimento das aprendizagens essenciais, o raciocínio, a par de outras capacidades, foi assumido como transversal a todos os temas matemáticos e todos ciclos da escolaridade básica, sendo assumido que o raciocínio matemático seja promovido desde os primeiros anos de escolaridade nos vários níveis de ensino.

Relativamente à exploração do raciocínio matemático associado ao conteúdo da geometria, as Aprendizagens Essenciais (DGE-ME, 2018) consideram, a par das restantes áreas de conteúdo que, do 1.º ao 4.º ano de escolaridade, deve ser realizado um trabalho de continuidade e crescente em termos de aprendizagens. Este documento, ao nível da Geometria, identifica como pertinente o facto de alunos do 1.º CEB iniciarem no 1.º ano a exploração de processos de raciocínio, concebendo e aplicando “estratégias na resolução de problemas envolvendo a visualização (...) em contextos matemáticos e não matemáticos” avaliando igualmente a sua plausibilidade, exprimindo oralmente e por escrito as suas ideias, raciocínios, procedimentos e conclusões. No entanto, ao contrário de conteúdos de aprendizagem como os “Números e Operações” não é identificada uma evolução de objetivos essenciais de aprendizagem ao nível do raciocínio matemático.

Nas Aprendizagens Essenciais de 2021 (DGE-ME, 2021) são realçados aspetos que justificam a pertinência da aprendizagens da matemática no século XXI. Entre eles, surge o raciocínio matemático, na medida em que é considerado que os alunos devam “desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, de forma a compreender o

porquê de relações estabelecidas serem matematicamente válidas” (p. 3), justificando-as de uma forma cada vez mais sofisticada. Assim sendo, neste documento regulador de aprendizagens o raciocínio matemático é tido como “atividade central” da matemática, incluindo a “formulação de conjecturas, a justificação da sua validade ou refutação e a análise crítica de raciocínios produzidos por outros” (idem, p. 3).

Segundo o NTCM (2000), entre o 3.º e 5.º anos, os alunos devem desenvolver o seu raciocínio matemático, baseado em relações e propriedades que impulsionem a formulação de conjecturas e a sua avaliação perante as evidências. Este aspeto é apoiado por Yackel e Hanna (2003), citado por Brunheira (2019, p. 7), ao referirem o crescente interesse do raciocínio matemática na aprendizagem das crianças, apresentando como argumento o facto de este resultar de uma “evolução das teorias sobre aprendizagem e da escolha deliberada que os educadores matemáticos fizeram como resultado da melhor compreensão sobre a forma como os indivíduos adquirem conhecimento” (pp. 7-8).

Assim sendo, esta perspetiva evolutiva do ensino, considerando o raciocínio matemático como importante, manifesta-se não só nos documentos curriculares, mas também em perspetivas teóricas tornando cada vez mais pertinente a exploração do raciocínio matemático em crianças do 1.º CEB. Considerando, por exemplo, a visão construtivista em detrimento da perspetiva behaviorista que, segundo Brunheira (2019) “dominou o pensamento sobre educação durante décadas” (p. 8), o raciocínio matemático é considerado um “processo através do qual os indivíduos aprendem e que é impossível separar os conteúdos de aprendizagem do raciocínio.” (idem), comprovando, desta forma, o carácter integrador do raciocínio como impulsionador da aprendizagem de conteúdos matemáticos na sua globalidade.

Relativamente à sua exploração, o NCTM (2000) afirma que “o raciocínio matemático desenvolve-se nas aulas, onde os alunos são encorajados a exporem as suas ideias para serem verificadas” (p. 221). Ideias essas que devem ser concretizadas através de experiências variadas e, nesse sentido, como foi anteriormente referido, a implementação das propostas pedagógicas do presente estudo foram realizadas com base no ensino exploratório.

De acordo com Ponte, Quaresma e Pereira (2020), “um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar” (p. 7), considerando igualmente que são necessárias da parte do professor ações/práticas fundamentais para o

desenvolvimento desta capacidade matemática. Neste sentido, o ensino exploratório como prática que “defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva” Canavarro (2011, p. 11), proporciona que os alunos sejam levados a explicar oralmente e/ou por escrito os seus raciocínios, podendo até mesmo formular novos raciocínios após argumentarem o seu ponto de vista matemático e/ou ouvindo outros diferentes do seu.

Face ao exposto, numa aula que segue uma abordagem exploratória, com três momentos distintos, os alunos são sobretudo desafiados a explorar tarefas que se caracterizam por não ter resolução imediata, o que lhes permite que recorram a estratégias próprias e/ou conhecimentos matemáticos prévios para conseguirem resolvê-las. Assim, e continuando a ideia de Ponte, Quaresma e Pereira (2020), “os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução” (p. 10) sendo que tudo isto implica a mobilização de processos de raciocínio, tornando o ensino exploratório uma prática pertinente ao desenvolvimento e promoção do raciocínio em crianças do 1.º CEB.

3. Objetivos e questão de estudo

O objetivo da presente investigação é compreender quais os processos de raciocínio usados pelos alunos na resolução de tarefas geométricas com grau de desafio elevado, sendo que estará implícita uma perspetiva de ensino exploratório. Neste sentido, pretende-se não só caracterizar os processos de raciocínio matemático usados pelos alunos do 4.º ano de escolaridade na resolução das tarefas geométricas como também as dificuldades manifestadas pelos mesmos no uso dos processos de raciocínio matemático e na sua representação. Assim sendo, surge como objetivo geral da investigação: Compreender quais os processos de raciocínio utilizados pelos alunos ao resolverem tarefas geométricas com grau de desafio elevado.

Neste sentido, as questões que decorrem do objetivo e que serão respondidas neste relatório de investigação são:

- *Que processos de raciocínio matemático usam os alunos quando resolvem tarefas de geometria com grau de desafio elevado?*

- Que dificuldades manifestam os alunos no uso de processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas geométricas com grau de desafio elevado?

4. Organização do relatório

O presente relatório está organizado em seis capítulos, sendo que na introdução são referidas as motivações da temática em estudo, considerando numa primeira fase aspetos tanto de natureza pessoal como académicos; a pertinência do raciocínio matemática na aprendizagens das crianças do 1.º Ciclo do Ensino Básico e do ensino exploratório enquanto promovedor do raciocínio; o objetivo e as questões consideradas como mote do estudo e, por fim, a organização deste relatório.

No primeiro capítulo, denominado por Revisão da Literatura são revisitados tópicos essenciais à temática em estudo. O primeiro, a aprendizagem da geometria no 1.º CEB, numa referência sobretudo à forma como deve ser trabalhada segundo documentos didáticos e curriculares de referência. É igualmente discutida a temática do raciocínio matemático, sendo apresentada a sua definição, os tipos e processos de raciocínio, a forma como pode ser desenvolvido e, por fim, a importância que tem na aprendizagem da matemática e, em particular, na geometria.

No terceiro e quatro capítulos, denominados “Metodologia” e “Intervenção Pedagógica” respetivamente, será, primeiramente, apresentada a metodologia de investigação e, de seguida, descrita a intervenção pedagógica, isto é, o que foi realizado no contexto de estágio como objeto de estudo e como foi implementado. Neste último, serão apresentadas as planificações de cada uma das tarefas planeadas, tendo em conta a ordem e a forma como foram exploradas em sala de aula.

No capítulo “Análise dos dados” serão analisados os dados recolhidos durante a investigação realizada, sendo analisadas as evidências recolhidas, tais como transcrições de diálogos de sala de aula e registos escritos dos alunos sobre a resolução das tarefas propostas.

Por fim, no capítulo “Considerações Finais” é apresentada uma síntese do estudo bem como contributos de respostas às questões de partida, considerando não só a análise dos dados recolhidos mas também, em articulação, alguns contributos teóricos. No final do capítulo é, ainda, realizada uma reflexão geral sobre o estudo, considerando os desafios

encontrados, a implementação da metodologia em questão e, sobretudo, as minhas aprendizagens enquanto futura professora.

Capítulo I – Revisão da Literatura

O presente capítulo corresponde à revisão da literatura referente à temática investigada, no sentido de fundamentar, com documentos reguladores e autores de referência, tópicos essenciais à mesma.

Desta forma, no que respeita à temática em estudo neste relatório de investigação, surgem como pontos teóricos essenciais aspetos relacionados com a aprendizagem da geometria no 1.º Ciclo do Ensino Básico (1.º CEB) e a sua regulação enquanto conteúdo programático neste ciclo de ensino, considerando a sua organização curricular guiada pelos princípios definidos em documentos orientadores como o “Programa de matemática do Ensino Básico” publicado em 2007, o “Programa e Metas Curriculares” de 2013 e, mais recentemente, nas “Aprendizagens Essenciais de matemática” de 2018 e 2021. Além de diretrizes referentes ao ensino da matemática, nomeadamente da Geometria, nestes documentos são ainda descritos os conhecimentos e capacidades essenciais que os alunos à saída deste ciclo devem ter adquirido e desenvolvido em cada um dos anos de escolaridade.

Relativamente ao raciocínio matemático (RM) são fundamentados pontos que passam pela sua caracterização; tipos; processos e forma de ser desenvolvido e em sala de aula fazendo, por consequência, referência ao ensino exploratório como uma metodologia de trabalho na sala de aula que promove o RM. Por último, é discutida a importância do RM na aprendizagem da matemática e, em particular, na geometria.

1. A aprendizagem da geometria

Pode considerar-se que a geometria nos primeiros anos de escolaridade e, de alguma forma nos anos seguintes, foi considerada durante anos, voluntária ou involuntariamente, como o “parente pobre” da matemática no que respeita ao seu ensino. Esta é o entendimento de autores como Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) que referem que o conteúdo programático da geometria, presente inclusivamente nos documentos curriculares da disciplina de matemática, foi durante muito tempo considerado menos “interessante” numa perspetiva de progressão de estudos, tornando-o assim menos prioritário no que respeita ao seu ensino. Neste sentido, subentende-se que temas como “números e operações” e “resoluções de problemas” foram sendo sobrevalorizados fazendo com que o ensino da geometria fosse, por vezes, quase inexistente nas práticas

educativas dos docentes, por exemplo, pela escassez do tempo letivo. A geometria é, neste sentido, tida como “um meio privilegiado de desenvolvimento da intuição e da visualização espacial” (idem, p. 67), sendo igualmente um excelente condutor para o conhecimento do mundo físico e da percepção que as crianças têm dos objetos de uso quotidiano (idem).

Contudo, os mesmos autores, consideram que esta tendência está a alterar-se, sobretudo, pelo trabalho que tem vindo a ser feito, numa perspectiva de relacionar a aprendizagem da geometria com a vida pessoal e escolar dos alunos. É, assim, uma verdade inquestionável que a geometria está presente em diversos setores da nossa sociedade, nomeadamente nas artes, no âmbito do design e arquitetura, no entanto, é importante que noções relativas a formas geométricas não se cinjam apenas ao seu aspeto visual, pelo que o pensamento geométrico deve ser privilegiado desde cedo (Abrantes et al., 1999).

A pertinência do ensino da geometria desde os primeiros anos, deve-se ao facto de as crianças contactarem desde cedo com diversos estímulos geométricos, nomeadamente nas suas brincadeiras, sendo assim desenvolvido o pensamento geométrico a partir do manuseamento de objetos e de ações que se focam, sobretudo, em experiências espaciais. Neste sentido, o ensino da geometria deve ser iniciado em idade pré-escolar, considerando experiências geométricas enriquecedoras do sentido espacial em sala, por exemplo, partindo de brincadeiras e explorações oriundas do meio em que se insere a criança, ainda que de carácter informal, mas que envolvam capacidades percetuais importantes para um posterior início de escolaridade, onde é aprofundado o tema da geometria.

Através do ensino da geometria podem ser explorados diversos tópicos e capacidades matemáticas, como por exemplo, resolução de problemas e o raciocínio matemático, podendo ser a presente investigação um contributo nessa perspectiva. Desta forma, a geometria pode ser vista como uma área integradora no que respeita à globalidade do currículo da matemática. No mesmo sentido, NCTM (2000) citado por Breda et al. (2011, p. 13) afirma que “as ideias geométricas revelam-se muito úteis na representação e na resolução de problemas e a geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos”.

Segundo Abrantes et al. (1999, p. 68) “o estudo de propriedades e relações geométricas inicia-se com experiências concretas, amplia-se ao longo da escolaridade

caminhando para processos mais formalizados, o que leva ao desenvolvimento da capacidade de organização lógica do pensamento”. Neste sentido, é necessário que durante o 1.º CEB, as crianças tenham a oportunidade de experienciar práticas enriquecedoras ao nível da geometria, por exemplo, através do manuseamento, visualização e comparação de objetos, realizadas de forma evolutivas no que respeita, não só ao grau de dificuldade, mas também à enumeração crescente de noções e propriedades geométricas que permitam no último ano do ciclo estabelecer relações lógicas de pensamento geométrico.

No Programa de matemática para o Ensino Básico de 2007, a Geometria surge enquanto tema curricular associado a capacidades transversais e que se pretende que esteja presente nos três ciclos de ensino numa perspectiva de desenvolver o sentido espacial dos alunos. As propriedades geométricas e o estudo de figuras bi e tridimensionais apresentam-se assim como área preponderante neste programa uma vez que é associada aos três ciclos de ensino com a necessidade de ser desenvolvida num trabalho contínuo e evolutivo entre ciclos (DGE-ME, 2007). Para o 1.º CEB é favorecido o ensino e aprendizagem da Geometria com vista a desenvolver a “exploração, a manipulação e a experimentação, utilizando objectos do mundo real e materiais específicos, de modo a desenvolver o sentido espacial” (p. 20), considerando que os alunos devem ser capazes de “agir, prever, ver e explicar o que se passa no espaço que percebem” e em que, na realidade, vivem (idem).

No mesmo sentido, a brochura “Geometria e Medida no Ensino Básico” que apoia o Programa de matemática de 2007, confere à geometria um lugar de destaque no currículo, reconhecendo desta forma a importância e pertinência do seu ensino.

Segundo os autores do Programa de matemática de 2007, a geometria contribui com um vocabulário geométrico que se vai adquirindo, mas, a par disso, espera-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão dos conceitos e suas relações, da análise da informação, de resolução de problemas, de comunicação, mas também de abstração e generalização e de compreender e elaborar argumentações. (Breda et al., p. 15)

No programa de 2012, denominado “Programa e Metas Curriculares de Matemática” (DGE-ME, 2012), ainda em vigor à data do desenvolvimento deste projeto de

investigação, a par do que preconizava o Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, é apresentada a ideia de que aprendizagem da matemática deve “partir do concreto”, considerando que a passagem do concreto ao abstrato, um dos propósitos do ensino da Matemática, seja feita de forma gradual, de forma a “respeitar os tempos próprios dos alunos” (p. 1) e a promover o gosto pela matemática. As “Metas Curriculares de Matemática” surgem, assim, a partir do programa anterior no sentido de concretizar as intenções anteriormente referidas, considerando que as grandes alterações se apresentam ao nível dos objetivos gerais que passam a ser definidos através de descritores e explicitados de forma “concisa” apontando para desempenhos “precisos e avaliáveis” (DGE-ME, 2012).

Neste sentido, no que respeita ao ensino da Geometria, assim como a todos os temas em estudo no âmbito da matemática, os autores da Metas Curriculares de Matemática de 2012 referem, aquando da identificação pormenorizada dos conteúdos do 1.º Ciclo, novamente a importância de estes serem lecionados de forma progressiva, “começando-se por um tratamento experimental e concreto, caminhando-se faseadamente para uma conceção abstrata” (ibidem, p. 6), algo que do ponto de vista dos conteúdos associados à Geometria se torna bastante pertinente considerando que a aprendizagem, por exemplo, de figuras e sólidos geométricos se torna mais eficaz quando inicialmente associada a objetos concretos. Desta forma, a aprendizagem como processo é facilitada, uma vez que a apropriação do conteúdo pelo aluno é feita através da associação à realidade.

Ainda nas “Metas Curriculares de Matemática” (DGE-ME, 2012), ao contrário do que é indicado pelo documento orientador em vigor anteriormente, é recomendado que o ensino da geometria seja iniciado partindo de noções básicas da mesma. Isto é, começando pelo reconhecimento visual de objetos e conceitos elementares como, por exemplo, o ponto e a reta. Destes conceitos, partir-se-ia, então, para a construção de figuras e sólidos geométricos e o estudo das suas propriedades.

Mais recentemente, em 2018, foram publicadas as Aprendizagens Essenciais de matemática para o 1.º CEB, em que os seus autores caracterizam a aprendizagem da geometria, estabelecendo padrões de desenvolvimento invariáveis para os quatro anos de escolaridade do 1.º CEB. Assim sendo, no âmbito da geometria e medida, é referido que os alunos nos quatro anos de escolaridade devem desenvolver de forma contínua a “capacidade de visualização” e a “compreensão de propriedades de figuras geométricas” além da “noção de grandeza e processos de medida” (DGE-ME, 2018, p. 4).

Comparativamente com as Aprendizagens Essenciais anteriores, o mesmo documento publicado em 2021, atualmente em vigor, apresenta-se mais contextualizado e centrado na importância de promover e de como promover a aprendizagem da matemática, auxiliando de uma forma mais direta a ação do professor. Por exemplo, no que respeita ao ensino da geometria, nas Aprendizagens Essenciais de 2021, à semelhança de todos os temas do currículo de matemática, são definidos numa primeira abordagem ao documento, como nota introdutória, os principais focos de aprendizagem da geometria no 1.º CEB. No entanto, como já foi referido, este documento apresenta uma diferença no que se refere aos tópicos de aprendizagens e ações do professor para os concretizar, contrariando assim o apresentado no mesmo documento de 2018 e nos documentos relativos ao Programa de matemática cujos objetivos de aprendizagem se apresentavam de forma generalizada para o 1.º CEB.

Assim sendo, de um modo geral, as Aprendizagens Essenciais de 2021, recomendam que os alunos do 1.º CEB desenvolvam ao nível da Geometria: capacidades raciocínio espacial; contactem com um conjunto alargado de figuras no espaço e no plano, gerando assim a composição e a decomposição de figuras e o estabelecimento de relações espaciais entre si; abordem as isometrias de forma informal nos primeiros anos e mais sistematizada no 4.º ano com a abordagem às simetrias de reflexão e rotação; contactem com diferentes formas de medir diversas grandezas (DGE-ME, 2021). Assim sendo, os autores do documento assumem que estas são ferramentas que promovem a análise por parte das crianças da realidade circundante, uma vez que proporciona a oportunidade de os alunos “reconhecerem a relevância da Geometria na criação e construção de objetos de contextos diversos” (idem, p. 11).

Relativamente ao ensino da Geometria e Medida no 4.º ano, os objetivos de aprendizagem apresentados pelas atuais Aprendizagens Essenciais identificam como temas a abordar: os sólidos geométricos no que concerne à construção das suas planificações; as figuras planas, nomeadamente, quadriláteros, retas paralelas e perpendiculares, o círculo e a circunferência; operações com figuras, isto é, simetria de reflexão e de rotação e, por fim, o cálculo da área, capacidade e dinheiro, no que respeita aos seus usos e significados (DGE-ME, 2021, pp. 42-47).

Comparativamente às Aprendizagens Essenciais de 2018, o documento atualmente em vigor, assume a pertinência do ensino da geometria, atendendo à associação da geometria a um contexto familiar dos alunos. Deste modo, a geometria surge, assim,

contextualizada, assumindo a perspectiva de que a ‘matemática está em todo o lado’ válida também no âmbito da geometria. Ao nível de temas a serem abordados em sala de aula são evidentes mudanças entre os dois documentos relativamente a esta área curricular, pelo que o desenvolvimento de capacidades de visualização e estabelecimento de relações espaciais; o conhecimento das propriedades de figuras geométricas e suas relações no plano e no espaço e o estudo de grandezas passam a ter enfoque nos objetivos essenciais de aprendizagem da Geometria no 1.º CEB.

As orientações curriculares atuais, no que diz respeito ao ensino e aprendizagem da geometria, estão de acordo ao que tem vindo a ser preconizado, nas últimas décadas, em documentos internacionais. Van Hiele (1999) considera que a aprendizagem da geometria depende mais da forma como esta é lecionada do que da maturação biológica da criança, considerando que a geometria está muitas vezes associada ao brincar e à realização de jogos lúdicos. Neste sentido, este autor defende que com a implementação de diferentes tipos de experiências de ensino, neste caso de geometria, é mais facilmente promovida e desenvolvida pelas crianças.

Dina e Peter van Hiele constituíram uma teoria referente ao ensino e aprendizagem deste conteúdo, considerando que esta deve ser aprendida pelos alunos consoante “níveis de pensamento geométrico” (Hiele, 1999, p. 311). Este modelo apresenta vários níveis que explicitam o progresso dos alunos na aprendizagem da geometria, consequentes da realização de experiências que os orientem para essa mesma progressão. Van Hiele (1999) distingue, assim, cinco níveis que variam de forma crescente, isto é, desde noções mais elementares, como o reconhecimento de diferentes figuras geométricas, a aspetos mais complexos, como a compreensão de sistemas axiomáticos.

Desta forma, na tabela 1 e, de acordo com Hiele (1999), estão definidos os três níveis essenciais para a aprendizagem da geometria para o 1.º CEB:

Nível 1 Visual	Identificação, descrição visual e raciocínio acerca de uma figura, fazendo comparações entre objetos de uso quotidiano com a forma da figura. As figuras são julgadas pela sua aparência.
----------------------------------	--

	Por exemplo: “É um quadrado. Eu sei que é um quadrado porque eu vejo que é.” ou “É um retângulo porque parece uma caixa.”
Nível 2 Descritivo	Reconhecimento e caracterização de figuras através da mobilização de propriedades geométricas. As figuras deixam de ser identificadas porque se assemelha com algum objeto, mas sim porque tem determinadas propriedades. Por exemplo: “O triângulo é equilátero porque tem 3 lados iguais.”
Nível 3 Dedução informal	As propriedades de determinada figura são ordenadas de forma lógica, ou seja, são deduzidas uma da outra. Por exemplo: “Todos os quadrados são retângulos.”

Tabela 1 - *Níveis de aprendizagem da geometria por van Hiele (1999)*

De acordo com van Hiele (1999), os primeiros três níveis deste modelo tornam-se essenciais no ensino básico, sobretudo no que respeita à aprendizagem da geometria. Isto, porque, de acordo com a sua experiência profissional, sempre que um aluno não tenha alcançado o nível 3 “dedução informal” a sua aprendizagem no estudo da geometria pode vir a ser prejudicada, não evoluindo para o nível 4 “dedução formal” e o nível 5, aplicado geralmente em contextos de ensino superior.

Numa primeira fase da aprendizagem da geometria, os alunos, serão incapazes de deduzir e explicitar oralmente as relações entre as diferentes ‘famílias’ de figuras, no entanto, através de um trabalho continuado de experimentação e exploração de diferentes figuras, conseguirão analisar e reconhecer propriedades básicas de uma determinada figura geométrica.

Neste sentido, é possível considerar que tanto Abrantes et al. (1999) como Breda et al. (2011) referem a importância de conhecer estes níveis, para se poder propor atividades aos alunos que os ajudem a progredir na aprendizagem da geometria. Desta forma, Abrantes et al. (1999) referem deve ser explorada uma abordagem “intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e de desenvolvimento das formas mais

elementares de raciocínio geométrico” (p. 69) seguido de um aprofundamento do conhecimento das propriedades das figuras e das relações existentes entre si. Por conseguinte, os alunos tornar-se-ão, de ano para ano, mais capazes relacionar e classificar figuras geométricas de um modo lógico, na medida em que poderão atingir um patamar de aprendizagem da geometria que lhes permita “desenvolver argumentações e de provar conjecturas” (idem).

2. Raciocínio matemático

2.1. Caracterização e tipos de raciocínio matemático

Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 7) referem que o ato de raciocinar é partir de informação previamente retida para obter uma nova informação, tornando este um processo matemático fundamentado, sendo que aprimoram a sua definição de ‘raciocinar’ com recurso ao dicionário ‘Merriam-Webster’, afirmado que raciocinar “é estabelecer inferências ou conclusões a partir de factos conhecidos ou assumidos como verdadeiros” (p. 7).

Muito comumente, é relacionado o ato de raciocinar com a natureza da matemática, no entanto, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020), não entendem o raciocínio como domínio exclusivo da matemática, na medida em que também é necessário raciocinar para resolver eventuais situações do quotidiano, referentes aos mais diversos domínios do conhecimento que não a matemática. De um modo geral, podemos caracterizar raciocínio como a apresentação de razões que justifiquem ideias ou posicionamentos, ao argumentar para nos convenceremos a nós próprios e aos outros, da plausibilidade das conjecturas que apresentamos e da razoabilidade das afirmações que fazemos (Boavida, 2008).

Mais especificamente e, no que diz respeito ao raciocínio matemático, Mata-Pereira e Ponte (2017, p. 38) entendem por raciocínio matemático a realização de “inferências justificadas (...) com base em ideias, propriedades ou definições matemáticas”. No mesmo sentido, considera-se ser a capacidade de articulação de vários conteúdos matemáticos com vista a compreender determinado desafio matemático e tornar fundamentadas inferências que vão sendo feitas ao longo da sua exploração. Boavida (2008), por outro lado, define raciocínio matemático considerando-o como o uso da razão para “julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir” (p. 1), tornando dessa

forma os argumentos empregues plausíveis na procura de resolução de problemas matemáticos.

Isto é, raciocinar é utilizar informação matemática previamente retida com vista a justificar e criar um novo conhecimento.

Já Yakel e Hanna (2003), citados por Boavida e Menezes (2012), afirmam que raciocinar em matemática potencializa a interação entre crianças naquela que é a sua aprendizagem. Estes autores consideram, assim, que “o raciocínio matemático é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos” (p. 287).

Referindo-se ao raciocínio matemático, Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020) assumem a existência de tipos de raciocínio: o raciocínio dedutivo, indutivo e abduutivo.

O raciocínio dedutivo é aquele que, de acordo com diversos autores, mais se relaciona com a área da matemática, sendo também denominado por raciocínio lógico ou lógico-dedutivo. Para Oliveira (2002) é considerado como “o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático” (p. 178), de forma a provar determinado teorema (afirmação verdadeira) encadeando afirmações de forma lógica e justificadas. Afirmações essas que o autor refere como conclusões “necessariamente válidas” desde que sejam “isentas de erros” (idem, p. 7). Deste modo, de acordo com Aliseda (2003), que é citado por Mata-Pereira e Ponte (2017), é possível afirmar que o raciocinar dedutivamente é realizar inferências lógicas que se caracterizam pela “existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões” (p. 38).

Embora o raciocínio dedutivo seja incontornável na formulação de hipóteses matemáticas na fase decisiva de um ato investigativo e, por isso, ter para Oliveira (2008, p. 5) “um papel predominante”, estas na grande maioria são provenientes de raciocínios indutivos e abduativos aquando de uma fase caracterizada por interrogações e indefinições (“fase exploratória”).

Assim sendo, o raciocínio indutivo é para Silva (2009) citado por Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 7) “a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares” (p. 7). Neste sentido, entende-se por raciocínio

indutivo o inferir de uma regra geral (generalização) partindo da identificação de casos particulares.

Por outro lado, entende-se por abdução o processo de realizar uma inferência que “parte de um facto insólito ou invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência” (ibidem). Por ser um tipo de raciocínio em que são construídas “hipóteses explicativas que dão sentido a um conjunto de dados” (Oliveira, 2008, p. 5), este, é muitas vezes associado à criatividade, neste caso do aluno, durante o processo de raciocínio e que a leva à formulação e escolha de uma hipótese.

Rivera e Becker (2009), citados por Ponte, Quaresma, & Pereira (2020) consideram estes dois tipos de raciocínio matemático, o raciocínio indutivo e o raciocínio abdutivo, como complementares, referindo a sua utilização conjunta no processo de formulação de conjecturas e generalizações, explicitando que a formulação de uma conjectura “pode levar à identificação de casos particulares que permitem a observação de uma regra geral” (p. 7).

Mata-Pereira e Ponte (2017, p. 38) assumem a promoção do raciocínio matemático como algo pertinente na medida em que torna a matemática uma disciplina “lógica e coerente” ao longo de todo o ano letivo, fazendo com que os alunos passem a ter outra perspetiva da mesma. Considerando que o raciocínio matemático permite a articulação entre conceitos matemáticos e, sendo este carácter progressivo do raciocínio algo defendido nos documentos orientadores do ensino da matemática, é de se destacar o envolvimento e destaque crescentes que o mesmo foi tendo nestes documentos, nomeadamente, no “Programa e Metas Curriculares” (ME, 2012) e, atualmente, nas “Aprendizagens Essenciais” (DGE-ME, 2021).

No Programa e Metas Curriculares de 2012, são apresentados quatro níveis de desempenho (“Identificar/designar”; “Estender”; “Reconhecer”; “Saber”) para os três ciclos no ensino básico e que devem ser trabalhos conjuntamente e de forma integrada. No que respeita ao quarto nível estabelecido (“Saber”) para o 1.º ciclo é afirmado que “o aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta” pelo que o processo de justificar inerente ao raciocínio matemático é considerando dispensável nesta fase de escolaridade. Apenas no 3.º ciclo é proposto que o aluno justifique, embora, “de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.” (DGE-ME, 2012, pp. 3-4).

É possível, assim, considerar que no documento de 2012, apesar do raciocínio ser considerado um objetivo de desempenho no ensino básico, é apresentado como algo a trabalhar mais especificamente no 3.º ciclo. Além disso, não se apresenta no 1.º ciclo associado a um domínio de conteúdos a serem lecionados.

Por outro lado, nas Aprendizagens Essenciais de 2021, o raciocínio surge imediatamente a propósito do tópico “Como promover a aprendizagem da Matemática?” numa perspetiva que o documento apresenta de considerar um conjunto de orientações metodológicas indispensáveis à promoção de práticas que visam a aprendizagem da matemática em todos os anos de escolaridade e temas (DGE-ME, 2021, p. 6). Segundo este documento é estritamente necessário a disponibilização de tempo e espaço para que os alunos pensem, partilhem ideias e discutam as suas produções matemáticas aquando da exploração de uma tarefa, sistematizando coletivamente as aprendizagens que emergem (idem). Neste sentido, é possível concluir que nas aprendizagens essenciais, atualmente em vigor, são favorecidas práticas que promovam o raciocínio e comunicação matemática provenientes de tarefas que, referindo este documento, se querem “poderosas e desafiantes” (p. 6).

Neste documento salienta-se ainda, e logo na introdução, a importância de “desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, de forma a compreender o porquê de relações estabelecidas serem matematicamente válidas.” (DGE-ME, 2021, p. 3) Além disso, o raciocínio matemático é definido como uma “atividade central da Matemática que inclui a formulação de conjeturas, a justificação da sua validade ou refutação e a análise crítica de raciocínios produzidos por outros”, sendo ainda recomendado que todos os alunos devam ter a oportunidade de desenvolver de forma progressiva no ensino básico a capacidade de raciocinar tendo por base uma comunicação matemática adequada (DGE-ME, 2021, p. 3).

2.2. Processos de Raciocínio

O raciocínio matemático além de apresentar diferentes tipos inclui igualmente uma variedade de processos. Destes, os que mais se destacam são os processos de conjeturar; generalizar e justificar, centrais no raciocínio matemático, e exemplificar. Associado, sobretudo, ao raciocínio geométrico está ainda o processo de classificar. Estes processos de raciocínio correspondem à dinâmica de investigar porquê, desenvolver a ideia (conjetura) e avaliar os argumentos. (Oliveira, 2008)

Conjeturar é definido como sendo central no raciocínio abdutivo, considerando que este processo se caracteriza por definir uma hipótese para um determinado desafio matemático, a par da abdução. Neste sentido, ao conjeturar estabelecem-se relações matemáticas com vista a desenvolver afirmações que se pensam verdadeiras, comumente baseadas na identificação de padrões, após a exploração de exemplos, mas que requerem evidências para serem validadas. Lannin, Ellis e Elliot (2011) explicam que conjeturar “implica raciocinar sobre relações matemáticas de forma a produzir afirmações cuja validade ainda não foi estabelecida” (p. 14) sendo que existem dois tipos: “identificar pontos comuns em casos diferentes e estender o raciocínio além do domínio em que foi originado” (p. 16), isto é, associar a um nível mais vasto uma regra, relação, ideia ou propriedade identificada.

Também relacionado com o raciocínio indutivo e abdutivo está o processo de generalizar sendo que torna as conjeturas definidas como gerais, considerando a afirmação de uma ideia, uma propriedade ou procedimento para um determinado conjunto de objetos, tornando-a propriedade comum ao grupo.

Por outro lado, a justificação é essencial à dedução, uma vez que justificando, com base em ideias matemáticas, são validadas ou refutadas de forma lógica e encadeada as conjeturas apresentadas. Para Lannin et al. (2011), citado por Brunheira (2019, p. 10) o processo de justificar significa que com base no conhecimento previamente estabelecido seja construída “uma sequência lógica de afirmações (...) de forma a chegar a uma conclusão.” No mesmo sentido, o processo de refutar, isto é, considerar que uma afirmação é falsa, também se constitui como forma de justificação apresentado se para tal um contraexemplo.

Neste sentido, a exemplificação está associada a todos os processos de raciocínio, uma vez que o recurso a exemplos ou contra-exemplos determina a validação/refutação de determinada hipótese, constituindo-se assim uma justificação da qual surge a ideia de que se exemplifica para justificar.

No âmbito da geometria, Brunheira (2019) entende que classificar vai além de identificar propriedades comuns e pertinentes que culminam no estabelecimento de uma categoria. Para si, classificar significa “estabelecer uma organização entre objetos diferentes, tendo por referência a identificação das suas características comuns – os

atributos críticos” pelo que, atendendo a esta organização, “um objeto pertence a uma classe se respeitar todos os seus atributos críticos.” (p. 24).

Nas Aprendizagens Essenciais de 2021, o raciocínio matemático encontra-se para todos os anos de escolaridade do 1.º CEB, sem exceção, no entanto é mais associado ao tema “Resolução de problemas”. Este aspeto demonstra a vontade de promover o raciocínio matemático desde os primeiros anos de escolaridade, estando este, assim, associado inevitavelmente a um tema do programa. Neste sentido, nas Aprendizagens Essenciais atualmente em vigor encontram-se estabelecidos para todo o 1.º CEB os seguintes processos de raciocínio: conjecturar/generalizar; classificar e justificar. Todos estes processos têm inerentes os mesmos objetivos de aprendizagem do aluno e ações estratégicas de ensino para os promover.

3. Desenvolver o Raciocínio Matemático na sala de aula

O desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático podem ser estimulados em sala de aula partindo do envolvimento dos alunos em experiências ricas e diversificadas com oportunidade para exporem as suas ideias e desenvolverem as suas capacidades de argumentação. Deste modo, segundo o (NCTM, 2000) os alunos deverão ser orientados, neste caso, pelos professores de forma a seja dada liberdade de oportunidades no que respeita à apresentação de diferentes raciocínios e opiniões relativamente a uma tarefa matemática. Isto é, torna-se implícita a capacidade do aluno, durante uma aula em que é potencializado o raciocínio matemático, detetar falácias e criticar os raciocínios contrários ao seu.

Neste sentido, as Aprendizagens Essenciais atuais, fazendo jus à importância que tem sido manifestada no âmbito da promoção do raciocínio geométrico em sala de aula, incluem como subtemas do raciocínio matemático os seus processos de raciocínio enquanto tópico a trabalhar em qualquer uma das áreas da matemática (DGE-ME, 2021).

Assim sendo, no que respeita à aprendizagem da matemática o raciocínio matemático assume-se como uma “ferramenta” de construção do pensamento matemático com vista a assumir como válida uma conjectura apresentada e, necessariamente, relacionar conceitos matemáticos anteriormente apreendidos e outros que o aluno acabara de conhecer e aprofundar. De acordo com o NCTM (2017) a aprendizagem da matemática deve “centrar-se no desenvolvimento e compreensão dos conceitos e procedimentos,

através da resolução de problemas, do raciocínio e do discurso” (p. 11). Neste sentido, o raciocínio matemático caracteriza-se por ser importante no processo de ensino/aprendizagem que se quer progressivo e, ao mesmo tempo, exploratório considerando que o pensamento matemático pode implicar várias fases, permitindo que o aluno tenha em si um instinto investigativo. Isto é, até serem retiradas conclusões face a uma questão matemática, o raciocínio, através dos seus processos, podem apresentar avanços e recuos decorrentes de uma fase de investigação relativamente ao porquê “das coisas”, justificando esses porquês que se querem como validação ou refutação de hipóteses.

Neste sentido, Boavida (2008) realça a importância de que, desde cedo, os alunos se envolvam em desafios matemáticos que envolvam a formulação, teste e prova de hipóteses, tornando esta uma prática de discussão de diferentes perspetivas matemáticas, levando a que em conjunto sejam formuladas novas ideias matemáticas e/ou reformuladas outras que, até em então, careciam de significado através do poder de comunicação matemática. Hanna e Yackel (2000), citado por NCTM (2000) também argumentam a este respeito referindo que alunos do 1.º Ciclo do Ensino Básico, necessitam de experiências onde “aprendam o que constitui um argumento convincente” (p. 222). Além disso, o recurso a uma prática em que os alunos aprendem a explicar e a defender os seus pensamentos, argumentando, permite, também, desenvolver outras capacidades importantes relativas à formação pessoal e social.

Nas Aprendizagens Essenciais disponibilizadas em 2021, o recurso a práticas diferenciadas é salientada e, sobretudo, recomendada na medida em que são estas que promovem e “contribuem decisivamente para a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento das capacidades matemáticas transversais consideradas, como o raciocínio ou a comunicação matemática”, assim como de outras capacidades gerais transversais ao currículo.” (DGE-ME, 2021, p. 6).

No mesmo documento aquando estabelecimento de capacidades matemáticas, são apresentados objetivos de aprendizagem de forma generalizada para o 1.ºCEB no que respeita ao ensino do tema “resolução de problemas” recorrendo ao raciocínio matemático. Isto é, no que respeita aos processos de conjecturar e generalizar, as Aprendizagens Essenciais (DGE-ME, 2021) preconizam que o aluno deve “formular e testar conjecturas/generalizações a partir da identificação de regularidades comuns a objetos em estudo” (p. 14). Além disso, no processo de classificar, o documento pretende

que os alunos organizem essas características de forma a classificar um grupo de objetos. Já no processo de justificar, pretende-se que o aluno saiba distinguir o testagem e validação de uma conjectura, considerando que este deverá recorrer a uma “linguagem simbólica” para a considerar verdadeira ou falsa, reconhecendo a existência de diferentes formas de justificar (idem, p. 16).

Como foi referido anteriormente, nas Aprendizagens Essenciais (DGE-ME, 2021) são também estabelecidas ações estratégicas a serem desenvolvidas pelo professor, por exemplo, no que se refere ao ensino do tema “resolução de problemas” tendo por base o recurso a processos de raciocínio matemático. Neste sentido, segundo o que é preconizado por este documento, o professor além ter o papel de “proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático (...) solicitando, de forma explícita, processos como conjecturar, generalizar e justificar” (p. 14) deverá ainda “apoiar os alunos na procura e reconhecimento de regularidades em objetos de estudo” (idem) procurando proporcionar tempo suficiente de trabalho para que os alunos não desistam facilmente deste processo.

Por outro lado, associado ao processo de classificar, o professor deverá agir no sentido de incentivar os alunos a identificarem semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos no sentido de serem agrupados com base nas suas características matemáticas. Aquando do processo de justificar, deverá ser privilegiada a promoção de comparações pelos alunos, a partir da análise das suas resoluções, considerando o teste e validação de determinada conjectura. Os alunos deverão, assim, desenvolver igualmente as diferentes formas de justificar, recorrendo a exemplos, contraexemplos ou por exaustão, sendo que após ser estabelecido um conhecimento mais profundo destas diferentes formas de justificação, o professor deverá “orquestrar uma discussão com toda a turma sobre as suas diferenças e sua adequação, promovendo o sentido crítico dos alunos” (DGE-ME, 2021, p. 15).

Associado ao processo de justificar, o professor deverá proporcionar momentos de análise a pares ou em grupo, de justificações apresentadas por outros, “incentivando o fornecimento de feedback aos colegas, valorizando a aceitação de diferentes pontos de vista e promovendo a autorregulação pelos alunos.” (DGE-ME, 2021, p. 15).

3.1. Raciocínio geométrico e o seu desenvolvimento

No que respeita à aprendizagem da geometria, Freudenthal (1973) citado por Brunheira (2019, p. 21) sugere que, ao contrário do que é realizado num tipo de ensino meramente transmissivo em que os alunos não contactam com a temática aprendida do ponto de vista prático, em geometria, os alunos têm de ser envolvidos na atividade de definir. No mesmo sentido, surgem autores como De Villers (1998) que Brunheira (2019) também cita, considerando que para um aluno compreender realmente o significado e as características de determinada definição geométrica deve, realmente, envolver-se na construção dessa mesma definição. Por conseguinte, Brunheira (2019) refere que

A construção de uma definição para um conjunto de objetos geométricos implica assim identificar os atributos que são comuns ao conjunto e fazer uma generalização de modo a chegar a uma condição necessária, usando raciocínio indutivo; para que a condição seja também suficiente, é necessário que a mesma implique o conjunto de objetos em causa, o que envolve raciocínio dedutivo. (p. 23)

Desta forma, é possível concluir segundo Brunheira (2019), que a atividade de definir é, ao fim ao cabo, estabelecer quais as características de determinado objeto que lhe conferem a particularidades passíveis de ser classificado e organizado por classes (“famílias”).

Por outro lado, a par de definir, classificar também tem a sua importância no que respeita à aprendizagem da geometria. Entende-se por classificar a organização dos conceitos geométricos por categorias, estabelecendo uma “equivalência entre objetos com características visuais comuns, mas também diferentes com vista a uma generalização” (Mariotti & Fischbein, 1997, citado por Brunheira, 2019, p. 24).

Os processos anteriormente referidos acabam por ser dependentes um do outro, considerando que para determinado conjunto de objetos ser classificado, isto é, organizado em categorias atendendo às suas propriedades terá, inicialmente, de ser definido enquanto conceito geométrico. No entanto, o contrário também poderá acontecer, na medida em que para definir conceitos é necessário que esse objeto seja classificado (Villiers et al, 2009, citado por Brunheira, 2019).

Em geometria subentende-se ainda o processo de justificar que remete para a validação de resultados, no sentido de procurar legitimidade para uma determinada afirmação matemática (Brunheira, 2020). A este processo associa-se, na maioria das vezes, a demonstração pelo facto de ser aquilo que estabelece a verdade aquando da justificação. Hanna (2000) citado por Brunheira (2019, p. 27) refere que a demonstração em geometria apresenta, por isso, uma “posição especial” tendo em conta que a maioria das demonstrações são “explicativas” pois, facilitam a compreensão no que respeita à verdade da conjectura formulada.

Neste sentido, torna-se pertinente incluir o raciocínio geométrico na formação inicial, em particular, no ensino da matemática, uma vez que na geometria estão implícitos conceitos geométricos que se querem relacionados entre si para que um determinado objeto de estudo seja validado.

Partindo do exemplo apresentado por Brunheira (2019, p. 22), aquando da definição de retângulo, muitas vezes este é associado a uma representação visual de uma porta enquanto objeto e não pela sua definição formal, isto é, geométrica. Por consequência Battista, 2009, citado por Brunheira (2009, p. 22) revela que nestas situações é assim deixado de parte a perceção do conceito “retângulo” associado ao conceito de “porta” em detrimento da sua definição. Neste contexto,

Brunheira (2019) refere que o conceito-imagem pode incluir várias representações que o indivíduo recorda como exemplos do conceito e um conjunto de propriedades a ele associadas. Evocar o conceito-imagem ao invés da definição formal pode ocorrer em particular incidência no caso de muitas figuras geométricas com as quais nos familiarizamos desde crianças, da mesma forma com que nos familiarizamos com os conceitos naturais.
(p. 22)

Assim sendo, torna-se pertinente o desenvolvimento do raciocínio geométrico como forma de estabelecer-se relações entre conceitos geométricos que proporcionem ao aluno uma resposta “mais completa”, isto é, com recurso a noções relativas à definição geométrica de um retângulo como figura com quatro lados paralelos dois a dois e com quatro ângulos retos. Tornando-se, assim, uma definição/classificação válida e que respeita as suas propriedades geométricas, considerando que “a construção de uma definição para um conjunto de objetos geométricos implica assim identificar os atributos

que são comuns ao conjunto e fazer uma generalização de modo a chegar a uma condição necessária” (ibidem, p. 23). Condição essa que, recorrendo ao raciocínio matemático sugere uma maior relação entre propriedades geométricas e, naturalmente, uma maior aprendizagem dessas propriedades que se categorizam, por exemplo, por ‘famílias’.

Como foi referido anteriormente, o processo de classificar está diretamente relacionado com o raciocínio geométrico, pelo que segundo as Aprendizagens Essenciais de 2021 (DGE-ME, 2021) este processo deverá ser promovido em sala de aula com base na classificação de objetos matemáticos considerando as suas características matemáticas, de forma a poderem ser agrupados pelos alunos conforme as suas semelhanças e/ou diferenças. Este processo encontra-se definido de forma generalizada para todos os anos de escolaridade do 1.º CEB, não existindo qualquer tipo de exceção no que respeita tanto aos conhecimentos/capacidades que os alunos devem adquirir como às ações do professor para os promover.

3.2 O Ensino Exploratório enquanto promotor do Raciocínio Matemático

Pelo que foi referido nas secções anteriores, é fundamental a prática do professor em sala de aula para o desenvolvimento da capacidade de raciocínio matemático na sua globalidade, isto é, considerando todos os seus tipos e processos. O ensino exploratório é uma prática que, numa aula com três momentos distintos, permite desenvolver o raciocínio matemático através de tarefas desafiantes, planeadas sem resolução imediata e suscetíveis de promover a mobilização de processos de raciocínio matemático para a sua resolução, considerando a construção de conceitos através da formulação de conjeturas, generalizações e justificações. Além disso, Canavarro (2011) refere que recorrendo a práticas de ensino exploratório, é permitido que os alunos tenham “a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.” (p. 11).

A realização de uma aula em que o ensino exploratório é implementado deve passar por determinados momentos que são essenciais à sua prática. Primeiramente, o professor deve escolher, de forma criteriosa, uma tarefa que apresente um elevado grau de dificuldade permitindo o cumprimento do seu propósito matemático. Segundo Canavarro (2011) a escolha de tarefas com potencial de serem desenvolvidas num contexto de ensino

exploratório, proporcionam aos alunos “aprendizagens matemáticas sofisticadas, que vão além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos” (p. 16). No mesmo sentido, o NCTM (2017) defende que um ensino eficaz da matemática deve passar pela seleção e proposta regular de tarefas que promovam o raciocínio matemático e a resolução de problemas. Assim sendo, estas tarefas “encorajam e viabilizam o acesso à matemática por meio de múltiplas abordagens, entre as quais o uso de diferentes representações e ferramentas e promovem a resolução de problemas através de estratégias variadas” (p. 17). Além disso, com o acesso a tarefas que se caracterizam por ser desafiadoras, os alunos acabam por se envolver mais fortemente com o “sentido de identidade” nas resoluções, levando assim a um “aumento do empenho e motivação para a matemática (idem).

Posteriormente, já em sala de aula, o professor deverá preparar a sua exploração com a distribuição dos enunciados e/ou outros materiais que sejam necessários à prática, sendo que de seguida apresentará a forma como a aula decorrerá considerando o enunciar das durações dos quatro momentos da aula. A exploração autónoma da tarefa e o trabalho em pequenos grupos não deverá ultrapassar os 25-30 minutos; a discussão coletiva das resoluções dos vários grupos com a duração de cerca de 40 minutos e, por fim, a sistematização dos conteúdos adjacentes durante 10-15 minutos (Canavarro, 2011).

Num primeiro momento, o professor deverá proceder à introdução da tarefa sendo que o professor deverá pedir aos alunos que leiam e interpretem o enunciado do problema, com a posterior explicitação deste por palavras dos mesmos. Neste momento, é importante que a turma esteja ciente do que se trata a tarefa e da forma como esta deverá ser explorada, pelo que o professor deverá certificar-se disto, pedindo aos alunos que exponham as suas possíveis dúvidas. Imediatamente a seguir, os alunos dividem-se em grupos e iniciam o trabalho autónomo pelo que devem efetuar registos das suas resoluções. Durante este momento o professor circula pela sala com vista a inteirar-se das produções dos alunos de forma a antecipar e preparar o momento da discussão coletiva, sem interferir nas mesmas e sem explicitar algum procedimento que suscite alguma dúvida por parte dos alunos, devendo, assim, optar por intervir no sentido de deixá-los a pensar sobre. É também importante manter os grupos informados pelo que o professor deverá ir indicando os mesmos sobre o tempo que resta até findar esta fase da aula. (Canavarro, 2011)

Segue-se o momento de discussão coletiva em que de acordo com Canavarro (2011) “o professor poderá ter vantagem em tomar umas notas breves sobre as produções matemáticas que vai observando nos alunos, nomeadamente sobre erros ou ideias erróneas que identifica e que importa discutir no coletivo” (p. 14). Neste momento, é importante que seja fomentado o debate entre grupos de trabalho, por parte do professor que se apresenta como mediador do mesmo. Neste momento, para que o ensino do conteúdo em questão seja eficaz, o professor, segundo o NCTM (2017), deve “utilizar questões pertinentes para avaliar e incrementar o raciocínio e a criação de sentido, por parte dos alunos, acerca das ideias e as relações matemáticas. (p. 10). Por fim, na fase de sistematização de conteúdos, são estabelecidas conexões entre este momento da aula e o anterior, algo que é para Canavarro (2011) um procedimento que proporciona o “desenvolvimento coletivo de ideias matemáticas poderosas que sintetizam as aprendizagens matemáticas dos alunos” (p. 16).

Segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 10), com a abordagem exploratória, “os alunos assumem um papel ativo na interpretação das questões, na representação da informação apresentada e na conceção e concretização de estratégias de resolução”. Assim, através de uma prática em que é dada voz aos alunos, com a implicação de um bom ambiente de comunicação em sala de aula em que é favorecida a discussão coletiva, estes veem a sua compreensão dos conceitos matemáticos serem melhorados partindo, não só, da sua participação e reflexão, como também a dos colegas.

No entanto, é possível afirmar que a implementação de práticas de ensino exploratório da matemática ainda não é tão recorrente como poderia ser e, nesse sentido, Canavarro (2011) menciona a urgência da sua prática considerando que este é um “desafio a perseguir de forma continua por todos” (p. 17). A mesma autora refere ainda que

É importante que o ensino exploratório da Matemática não seja encarado como algo que se experimenta esporadicamente alguma vezes para realizar umas tarefas especiais. O ensino exploratório da Matemática precisa de tempo e de continuidade para que o professor possa melhorar e aperfeiçoar a sua prática, o mesmo tempo e continuidade que são necessários para que os alunos lhe correspondam e desenvolvam aquilo que ele proporciona: aprender conteúdos matemáticos mas também modos de produção do

conhecimento matemático no contexto de uma comunidade da qual são parte integrante. (p. 17)

Capítulo II – Metodologia de investigação

O presente capítulo refere a metodologia adotada durante a prática investigativa do projeto, nomeadamente, as opções metodológicas, a caracterização do contexto e participantes, os procedimentos de recolha e tratamento dos dados e, por fim, as técnicas utilizadas para analisar esses mesmos dados.

1. Abordagem qualitativa

Considerando a relação existente entre a teoria e a prática, uma vez que “as construções teóricas emergem da situação” (Coutinho, 2016, p. 15), procurou-se, com base no paradigma qualitativo, descrever, compreender, interpretar, descobrir significados e definir hipóteses a partir das respostas dos alunos às propostas de tarefas geométricas apresentadas. Assim, o investigador adota uma postura seletiva, sendo que “pretende substituir as noções científicas de explicação, previsão e controlo do paradigma positivista pelas de compreensão, significado e ação.” (ibidem, p.9)

2. Investigação-Ação

A presente investigação segue um modelo de Investigação-ação, considerando o facto de a pesquisa realizada estar intimamente relacionada com a ação tendo por base a abordagem a uma temática passível de ser melhorada na prática docente, a promoção do raciocínio matemático. Além disso, nesta metodologia a investigadora, enquanto professora estagiária, está envolvida no processo de forma participante podendo definir estratégias, reajustar caminhos, conforme necessita, de modo a trazer vantagens a este processo. Neste sentido, Carr e Kemmis citados por Afonso (2005, p. 74) definem a investigação-ação como “um questionamento auto-reflexivo, auto-crítico e crítico, levado a cabo por profissionais para melhorarem a racionalidade (...) das suas próprias práticas, a sua compreensão sobre elas, e sobre o contexto mais amplo em que se inserem”.

Considerando o facto de, enquanto investigadora, acumular também a função de professora estagiária presente no contexto e, em particular, diretamente envolvida nas práticas, sendo assim participante, pressupõe-se que siga o paradigma qualitativo/interpretativo. Como foi referido anteriormente pretende-se com esta investigação perceber quais os processos de raciocínio matemático utilizados pelos alunos na resolução de tarefas que promovam o raciocínio, sobretudo no âmbito da Geometria,

e qual o seu contributo para o desenvolvimento desses mesmos processos. Assim sendo e, considerando que a Investigação-Ação é “uma atividade com vista à realização de uma mudança baseada no ciclo de diagnóstico-plano-intervenção-avaliação” (Ponte, 2002), pretendia-se implementar numa turma de 4.º ano tarefas diferenciadas que levassem os alunos a desenvolver o raciocínio matemático e a experienciar uma metodologia de ensino diferente da sua, o ensino exploratório.

Esta investigação, apesar de não ser uma investigação diretamente relacionada com o Projeto REASON¹, acaba por ter presente as suas ideias, uma vez que uma das intencionalidades é promover o raciocínio matemáticos dos alunos de uma turma do 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Além disso, são usadas e adaptadas tarefas construídas no âmbito do projeto referido.

3. Contexto e participantes

3.1 Caracterização do contexto

Como foi anteriormente referido neste relatório, o presente estudo foi realizado em contexto de estágio no 4.º ano do 1.º CEB, no âmbito do 2.º ano do mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º Ciclo do Ensino Básico. As dez semanas de estágio decorreram sob orientação da professora cooperante da turma do 4.º ano e o estágio foi realizado a pares com uma colega de turma. O contexto de estágio foi uma escola pública, relativamente recente, com valências de Jardim de Infância e 1.º CEB, inserida num agrupamento de cinco escolas, situado numa localidade do distrito de Setúbal.

A escola está inserida numa localidade composta por três freguesias que, apesar de ter uma área regional relativamente grande, é um dos menos populosos da Área Metropolitana de Lisboa. Neste sentido e, segundo o Projeto Educativo do agrupamento de escolas, pode-se considerar que o contexto onde foi realizado o projeto é caracterizado por ser frequentado na grande maioria por crianças provenientes de uma das freguesias do concelho com cerca de 18172 habitantes e que se caracteriza por abranger a maior parte dos aglomerados populacionais do meio rural.

¹ O Projeto REASON é um projeto do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, do Instituto Politécnico de Lisboa e do Instituto Politécnico de Setúbal. Tem o objetivo de estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores do ensino básico e secundário.

O estabelecimento de ensino é composto por um único piso, o que o torna de fácil acessibilidade por parte de toda a sua comunidade escolar. Relativamente à valência de 1.º CEB, a escola conta com oito turmas de 1.º Ciclo, uma sala de professores/sala de reuniões, uma sala de arrumos com material didático, um refeitório, uma biblioteca escolar, uma reprografia, uma sala de informática, uma sala polivalente e dois espaços exteriores com campo de jogos e espaços verdes. A escola é sobretudo caracterizada pelo seu aspeto e infraestruturas modernas, no entanto, posso considerar que sendo uma escola relativamente recente carece um pouco de recursos tecnológicos como, por exemplo, projetores embutidos nas salas de aula. Este aspeto foi evidente uma vez que necessitámos deste tipo de recurso, de modo a lecionarmos aulas mais interativas e apenas pudemos recorrer a um dos dois projetores portáteis da instituição, que não se encontrava nas melhores condições de utilização.

Segundo o Projeto Educativo do agrupamento onde se insere este estabelecimento de ensino, que se afirma como uma “instituição de ensino de referência”, a sua principal missão é “prestar um serviço educativo de qualidade, que tenha como objetivo principal formar cidadãos para um mundo globalizado e em constante transformação” (Projeto Educativo, 2019, p. 6). Além disso, na senda do que é definido pelo perfil do aluno no que respeita ao que os mesmos devem ter presente à saída da escolaridade obrigatória, este agrupamento refere a importância da promoção de valores nas crianças e jovens, considerando que as escolas na sua globalidade têm um papel importante na prática e desenvolvimento desses mesmos valores que pautam a cultura das suas escolas. Neste sentido, o presente agrupamento é pautado por valores como: “responsabilidade e integridade”; excelência e exigência; “curiosidade, reflexão e inovação”; “cidadania e participação” e “liberdade” (ibidem, p. 7).

3.2 Caracterização dos participantes

A turma do 4.º ano era composta por vinte e três crianças, doze do sexo feminino e onze do sexo masculino, sendo que 3 destas se encontravam referenciadas e apresentavam medidas de apoio especial à aprendizagem. Estas crianças que necessitam de apoio específico além do apoio de uma professora de ensino especial e uma auxiliar que se deslocam periodicamente à sala de aula, são acompanhadas em Salas de Ensino Estruturado inseridas no Centro de Apoio à Aprendizagem, com apoios de carácter multidisciplinar. Assim sendo, importa referir que o Agrupamento refere no seu Projeto

Educativo a especial atenção para com estas crianças, considerando que contam com a intervenção de diferentes parceiros educativos locais para corresponder às necessidades destes alunos, apoiando igualmente a sua inclusão em atividades escolares e de promoção da sua autonomia enquanto cidadão.

Relativamente à concretização do projeto de investigação é de referir que as crianças com dificuldades de aprendizagem não fizeram parte do conjunto de participantes, uma vez que a realização das tarefas acontecia às quartas-feiras de manhã e, nesse período, as crianças tinham escalado no seu horário atividades no gabinete de apoio. Além disso, estes alunos pelas suas dificuldades de aprendizagem apresentavam noções e ritmos de trabalho distintos comparativamente com a restante turma e, nesse sentido, tornavam-se mais complexos a organização e desenvolvimento das tarefas e, consequentemente do projeto, caso estes participassem no mesmo.

No que respeita ao restante grupo, esta turma de 4.º ano caracteriza-se essencialmente por ser uma turma bastante participativa nas tarefas propostas, independentemente do nível de compreensão dos conceitos, uma vez que é uma turma com diferentes níveis e ritmos de aprendizagem. No entanto, na sua globalidade, é uma turma que gosta de intervir e partilhar as suas ideias e resoluções algo que, neste projeto, se torna bastante pertinente considerando a necessidade dessas partilhas para a recolha de dados.

Apesar de toda a turma ter participado na prática de ensino exploratório, com a exploração das quatro tarefas que visam promover o raciocínio matemático em pequenos grupos de quatro/cinco elementos, apenas foram analisados os dados recolhidos de dois desses grupos. Estes dois grupos constituídos por rapazes e raparigas, foram reunidos inicialmente, em consonância com a organização dos restantes grupos, por um critério de proximidade de mesas. No entanto, a seleção dos grupos que viriam a ter um papel importante na recolha e análise de dados para responder às questões de investigação, teve como critérios o facto de estes alunos serem bons informantes, com boas capacidades comunicativas, propícios à recolha e posterior análise dos dados.

4. Procedimentos de recolha e tratamento de dados

São várias as técnicas metodológicas associadas aos procedimentos de recolha e tratamento de dados, mas pretende-se que as técnicas selecionadas sejam “compatíveis com os recursos disponíveis, e que não perturbem as práticas da organização” (Afonso,

2005, p. 75). Neste sentido, Colás, citado por Aires (2015, p. 14), refere a existência de diferentes fases do processo de investigação qualitativa, sendo que estas “não se desencadeiam de forma linear mas interactivamente”. Ou seja, para cada momento desta investigação existiram diferentes procedimentos de recolha e tratamento de dados, no entanto, todos funcionaram em paralelo para culminar na análise da informação recolhida de forma a serem apresentados os resultados do projeto.

4.1 Observação participante

Segundo Carmo e Ferreira (2008, p. 111), “observar é selecionar informação pertinente, através dos órgãos sensoriais e com recurso à teoria e à metodologia científica, a fim de poder descrever, interpretar e agir sobre a realidade em questão”. Neste sentido, a observação é essencial nesta investigação, uma vez que todo o processo de resolução das tarefas pelos alunos teve de ser observado, registado e posteriormente analisado.

A observação como técnica de recolha de dados é dividida em dois tipos quanto ao modo da observação, podendo ser estruturada/sistemática ou não estruturada. Nesta investigação trata-se de uma observação estruturada/sistemática, uma vez que foi realizada partindo de fatores a ter em consideração. Para Afonso (2005, p. 92) na observação estruturada “o seu ponto de partida é sempre um questionamento específico do contexto empírico em causa, orientado, ou seja, estruturado, a partir das questões de partida e dos eixos de análise da investigação”. Neste caso particular, existindo questões de investigação que orientam o estudo, pretendeu-se que a observação também fosse orientada pelas questões do estudo. Isto é, durante a implementação das tarefas selecionadas, coube ao investigador reter informações, auxiliado pelo registo de evidências observadas e/ou ouvidas, sobre os processos de raciocínio enunciados mobilizados pelos alunos durante os diferentes momentos da prática exploratória.

Afonso (2005, p. 92) refere ainda que este tipo de observação “inclui geralmente a utilização de fichas ou grelhas concebidas previamente em função dos objetivos de pesquisa, nas quais se regista informação anteriormente pré-codificada de teor quantitativo”, contudo este procedimento não se verificou no estudo realizado, uma vez que as aulas foram videogravadas.

A nível de participação do investigador na situação a observar, esta pode ser: observação participante ou observação não participante. Neste caso particular, a

investigadora adotou uma postura de observação participante uma vez que pertence ao contexto, neste caso, enquanto professora estagiária. Além de pertencer ao contexto, esteve em constante interação com os alunos nos vários momentos da prática.

A observação resultou na recolha de evidências de todo o processo que, mais tarde, foram analisadas de forma a agir sobre a realidade do contexto, nomeadamente, no que respeita aos processos de raciocínio utilizados pelos alunos. Afonso (2005) revela que os produtos da observação poderão ser registos escritos pelo investigador e/ou por outro membro presente no contexto desde que sob a sua orientação. Neste sentido, considero a presença da colega de estágio e do(a) professor(a) cooperante como essenciais, uma vez que nem sempre consegui atender a possíveis esclarecimentos de todos os pares ou grupos de trabalho e, sobretudo, ao registo de observações que se considerem pertinentes para a investigação.

Foram executados registos de áudio e vídeo em momentos chave da prática. Neste sentido, foram eleitos previamente dois dos cinco grupos de trabalho para serem gravados durante a exploração das tarefas, tendo sido assim registados diálogos entre colegas potencialmente manifestadores da utilização de processos de raciocínio matemático. No que respeita ao registo em vídeo, este foi recurso somente no 1.º e 3.º momentos da aula de carácter exploratório. Este aspeto deve-se ao facto de serem momentos em que é necessariamente pedida a intervenção dos alunos no que respeita, respetivamente, a eventuais dúvidas sobre a tarefa e à partilha/discussão dos resultados obtidos em pequenos grupos com o restante grupo.

Estes registos requerem uma visão meramente observadora alheada da interpretação do observador, visto que “destinam-se a apoiar o desenvolvimento e validação de hipóteses explicativas do material recolhido, estruturando o trabalho interpretativo que acompanha necessariamente o quotidiano da observação” (Afonso, 2005, p. 93).

4.2 Recolha documental

A recolha documental consiste no procedimento de utilizar informação já existente em documentos oficiais, públicos e/ou privados para responder, com dados relevantes, à questão de investigação (Afonso, 2005). São documentos, entre eles as produções dos alunos, outros registos efetuados a partir da observação e outros procedimentos de recolha de dados (Ex: fotografia e vídeo) que, ao serem consultados/analizados pelo investigador

permitem analisar e entender, de acordo com o seu conhecimento prévio e de outros estudos e/ou documentos científicos consultados, concepções sobre a prática pedagógica envolvidas neste caso particular de investigação. No caso desta investigação, a recolha documental incide fundamentalmente nas produções dos alunos no âmbito das resoluções das tarefas e documentos importantes para a caracterização da turma e dos contexto.

5. Procedimentos de análise de dados

A análise dos dados recolhidos durante a investigação, nomeadamente, as produções escritas dos alunos relacionadas com as tarefas foram analisadas considerando, também os registos escritos, de áudio e vídeo recolhidos ao longo de toda a exploração das quatro tarefas de raciocínio matemático. Esta análise teve como base a identificação e caracterização dos processos de raciocínio (justificar, generalizar, exemplificar, classificar e conjecturar) utilizados pelos alunos em cada uma das tarefas implementadas, bem como as dificuldades manifestadas pelos alunos.

O capítulo da Análise dos dados foi organizado tarefa a tarefa, grupo por grupo, sendo que a análise dos dados recolhidos teve por base a descrição e interpretação de episódios de sala de aula e a análise das produções escritas dos alunos. A estes dados juntaram-se evidências provenientes da discussão coletiva concretizada na última fase da abordagem exploratória.

Capítulo III – Intervenção pedagógica

No presente capítulo são apresentadas as quatro tarefas que constituem a proposta pedagógica implementada em contexto de estágio, e que serviram de mote para a recolha de dados essencial à concretização desta investigação. Neste sentido, além de identificar cronologicamente as quatro tarefas geométricas, estão presentes nas planificações aspetos como a referência ao tópico matemático a trabalhar, os objetivos de aprendizagem da tarefa em questão, a previsão de resoluções e dificuldades dos alunos e potenciais ações do professor para as ultrapassar. Por fim, é apresentada a descrição/planeamento da forma como foram exploradas as tarefas em turma, considerando o planeamento de uma aula que promove o raciocínio matemático recorrendo ao ensino exploratório. Importa, ainda, referir que o planeamento das aulas de ensino exploratório deste contexto investigativo em específico, seguiu os mesmos moldes pelo que a planificação seguida foi sempre a mesma.

1. A preparação das tarefas e a sua implementação

As tarefas foram apresentadas à turma no decorrer das dez semanas de estágio, nomeadamente no período de 28 de abril de 2021 a 2 de junho de 2021 (tabela X). A implementação das tarefas foi planeada de forma a ser realizada uma vez por semana durante quatro semanas, pelo que, neste período de tempo, as mesmas fizeram parte integrante da planificação semanal da turma. Estas tarefas caracterizam-se por apresentar um elevado grau de desafio, de forma a desenvolver nos alunos o raciocínio matemático.

28/04/2021	11/05/2021	26/05/2021	02/06/2021
Tarefa 1: “Quantos quadrados?”	Tarefa 2: “Comparar Perímetros”	Tarefa 3: “Vamos descobrir as pirâmides”	Tarefa 4: “Vamos descobrir os prismas”

Tabela 2 - Planeamento das tarefas implementadas no contexto

As tarefas foram planeadas com o intuito de desenvolver conceitos geométricos e, ao mesmo tempo, o raciocínio matemático considerando que o objetivo do estudo é identificar e caracterizar os processos de raciocínio utilizados pelos alunos, bem como as dificuldades que manifestam. Para tal, as tarefas foram dinamizadas sob uma perspetiva de ensino exploratório, num ambiente propício à comunicação coletiva, algo que proporciona um ensino da Matemática com compreensão sendo esta “uma base

importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático” (Ponte, Quaresma, & Pereira, 2020, p. 11). Neste sentido, as quatro aulas em que foram propostas as tarefas mencionadas organizaram-se em três momentos distintos, considerando que a exploração de cada tarefa não devia ultrapassar uma duração de, aproximadamente, 1h15min/1h30min:

- 1.º - apresentação da tarefa aos alunos (15 a 30 minutos);
- 2.º - exploração autónoma da tarefa e, posteriormente, em grupos de trabalho (25 minutos);
- 3.º - discussão coletiva das resoluções e sistematização (10 a 15 minutos).

Em todas as intervenções, num primeiro momento, após ser explicado tanto o funcionamento da aula como a tarefa, com um momento dedicado à leitura autónoma dos alunos do enunciado e esclarecimento posterior de dúvidas em relação à mesma, considerando a pertinência de serem os próprios alunos a explicar aquilo que entenderam do enunciado. Este momento manifesta-se como essencial, na medida em que é fundamental que todos os alunos tenham apreendido completamente o funcionamento da aula.

A organização dos alunos em grupos foi realizada previamente (quatro grupos de quatro elementos e um de cinco elementos), considerando que os grupos foram imutáveis de aula para aula. De forma a não causar demasiada instabilidade na turma aquando da sua organização, os grupos foram formados consoante um critério de proximidade de mesas, isto é, os alunos sentados, por exemplo, à frente ficaram com os colegas imediatamente sentados atrás de si.

Relativamente à distribuição do material pelos grupos, foram sempre disponibilizados por grupo dois enunciados da tarefa e duas folhas de papel quadriculado (folha de rascunho) à exceção das duas primeiras tarefas (“Quantos quadrados?” e “Comparar Perímetros”) que, por opção pessoal, foram dados um enunciado e uma folha de rascunho a cada elemento do grupo para que a dinâmica das tarefas fosse o mais rica possível. Desta forma, estas tarefas foram numa primeira fase de carácter individual, sobretudo na procura de figuras pedidas nos enunciados e, depois, coletivo na discussão dos resultados de cada elemento que compõe o grupo.

A gestão do tempo é um fator importante na medida em que os três momentos devem ser rigorosamente controlados considerando que é necessário que todos os objetivos da prática sejam atingidos no fim da aula.

Num segundo momento, os grupos de trabalho procederam à exploração autónoma da tarefa e à discussão em grupo sobre a mesma. Neste momento, o professor deve circular pela sala, no sentido de apenas orientar, em caso de dúvida, os alunos durante a tarefa fomentando sempre que necessário a reflexão individual e em grupo a partir de pequenas orientações previamente previstas por si, sem “reduzir o nível de desafio cognitivo da tarefa” (Stein & Smith, 2009, citado por Canavarro, 2011, p.12) e revelar a resposta. Neste momento da aula, é importante alertar os alunos para o registo escrito dos seus raciocínios, uma vez que estes tendem a responder e apenas oralmente às questões enunciadas. Este aspeto não só facilita o professor no que respeita à análise da prestação de cada aluno/grupo, como também orienta o aluno relativamente ao seu raciocínio e às situações por si já consideradas. Após informar os alunos do tempo restante até à fase seguinte da aula, pretende-se que o dinamizador da discussão dos resultados e sistematização, tenha, não só, presente as várias resoluções dos grupos, como previamente selecionados (registo escrito) e de forma cronológica os grupos a intervir durante este momento.

Num terceiro e último momento realizou-se a discussão coletiva das resoluções dos respetivos grupos e fomentada a discussão das mesmas, resultando numa sistematização dos conteúdos abordados. (Canavarro, 2011, p. 13) denomina este momento de “orquestrar produtivamente as discussões matemáticas” e caracteriza a prática de discussões coletivas como “difícil de concretizar mas muito compensatória em termos de dinâmica coletiva que proporciona na turma e das próprias aprendizagens matemáticas que permite aos alunos”. Neste momento, pretende-se que os alunos expliquem os seus raciocínios e/ou formulem novos raciocínios (Ponte, Quaresma, & Pereira, 2020), considerando que o moderador da discussão (professor) tem como principal função fazer com que os alunos expressem oralmente os seus raciocínios, mobilizando processos de raciocínio e, de alguma forma, fomentando a discussão entre pares para a confirmação ou refutação das conjecturas apresentadas. É importante referir que o professor deve considerar e valorizar todas as intervenções dos alunos, sejam elas ideias matematicamente corretas ou não, corrigindo “subtilmente” através de uma “linguagem matemática apropriada” (ibidem, p. 9).

De seguida, são apresentadas as planificações das tarefas anteriormente enunciadas.

Tarefa 1: “Quantos quadrados? (T1)” - Anexo 1

Planificação da tarefa:

Tópico a trabalhar: - Conceito de quadrado;

- Área.

Objetivos de aprendizagem:

- Desenvolver o conceito de quadrado;
- Desenhar quadrados de diferentes tamanhos e posições no plano, no papel pontado 5x5;
- Identificar e justificar o porquê da existência de diferentes quadrados na folha de papel pontado 5x5;
- Identificar propriedades que caracterizem um quadrado, tendo uma perceção global da figura;
- Desenvolver o conceito de área;
- Mobilizar processos de raciocínio matemático (justificar, exemplificar, generalizar).

Previsão de dificuldades:

- Dificuldade na visualização de diferentes figuras, identificando-as como quadrados, relativamente à sua posição no plano;
- Dificuldade no cálculo da área de alguns quadrados, considerando a decomposição das figuras no papel pontado 5x5;
- Dificuldade em distinguir perímetro e área;
- Dificuldade em encontrar o maior número possível de quadrados (8) no papel pontado 5x5;
- Dificuldade em explicar e justificar os seus raciocínios.

Possíveis resoluções dos alunos:

Parte 1:

Questão 1:

- O aluno afirma que os quadrados desenhados são diferentes pelo seu tamanho (comprimento dos lados ou área) ser igualmente diferente;
- “São diferentes porque são de tamanhos diferentes.”

Questão 2:

- O aluno consegue apenas desenhar quatro quadrados (na posição horizontal/vertical relativamente ao pontado do plano);
- “- São iguais, só estão em posições diferentes.”
- “- São diferentes.”

Questão 3:

- “- Concordo.”
- “- Não concordo, porque não consigo/não dá para desenhar mais quadrados diferentes.”
- O aluno desenha um quadrado numa posição oblíqua, identifica-o como losango, mas não afirma o facto de este também ser um quadrado;
- O aluno desenha um quadrado numa posição oblíqua, identifica-o como losango e afirma que este é um quadrado também atendendo ao facto de estar apenas noutra posição no plano.

Parte 2:

- O aluno calcula o perímetro em vez da área, considerando que o lado do quadrado é 1 cm;
- O aluno calcula a área considerando a unidade de medida de área e o menor quadrado possível de desenhar no papel pontado;

- O aluno é incapaz de proceder ao cálculo da área de um losango, não considerando que dois triângulos retângulos isósceles compõem um quadrado do papel pontado.

Ações do professor para ultrapassar as dificuldades dos alunos:

- Colocar a folha de papel pontado em diferentes posições, de forma que os alunos tenham a perceção de que os quadrados não variam consoante a sua posição no plano;
- Questionar o aluno sobre a decomposição de um quadrado, no que respeita ao cálculo da área de um quadrado (dois triângulos formam um quadrado);
- Questionar o aluno sobre o conceito de área e perímetro;
- Promover a cooperação entre pares;
- Confrontar os alunos com diferentes perspetivas e resoluções, pedindo que justifiquem e que exemplifiquem;
- Promover o debate de diferentes opiniões e perspetivas entre os alunos.

A exploração da tarefa 1 na sala de aula:

Na presente tarefa cinco grupos de trabalho, compostos por 4/5 crianças, desenharam à priori, num papel pontado 5x5 previamente distribuído por cada elemento, dois quadrados diferentes, justificando posteriormente o porquê deste facto. De seguida, e de forma a tornar a tarefa mais interessante, os alunos foram desafiados a encontrar mais quadros diferentes no mesmo papel pontado, com base na questão: “*São diferentes ou são os mesmos? Explica porquê?*”.

Neste sentido, à medida que iam explorando a tarefa e desenhando os quadrados em grupo, os alunos, entre si, tinham de discutir as suas próprias elaborações e justificar o porquê da existência de determinado número de quadrados possíveis de serem desenhados no papel pontado. Importa referir que, após esta partilha de descobertas, os vários grupos teriam de chegar a um consenso relativamente à resposta final do mesmo.

Ao longo da tarefa foram sendo igualmente enunciados desafios, de forma a proporcionar a mobilização de processos de raciocínio matemático pelos alunos na medida em que teriam de concordar ou discordar com a opinião de um sujeito

relativamente à questão inicialmente proposta, como por exemplo: “*O Rui diz que há mais de 6 quadrados diferentes que se podem construir no papel pontado 5x5. Concordas? Explica porquê.*”

Após o desenho de diferentes quadrados, os alunos tiveram de proceder ao cálculo da área das figuras encontradas pelo grupo, considerando a unidade de medida de área estabelecida no enunciado.

Tarefa 2: “Comparar perímetros (T2)” – Anexo 2

Planificação da tarefa:

Tópico a trabalhar: - Perímetro.

Objetivos de aprendizagem:

- Determinar o perímetro de figuras geométricas;
- Comparar perímetros de figuras geométricas;
- Identificar e construir figuras isoperimétricas;
- Mobilizar processos de raciocínio matemático (justificar, exemplificar, generalizar).

Previsão de dificuldades:

- Diferença entre área e perímetro;
- Dificuldade em calcular o perímetro quando não estão assinalados todos os comprimentos dos lados da figura;
- Perceber que a diagonal de uma quadricula não mede o mesmo que o lado dessa quadricula;
- Entender e representar a figura protótipo de um hexágono (hexágono “regular”);
- Desenhar figuras com 28 de perímetro que não seja um hexágono;
- Dificuldade em explicar e justificar os seus raciocínios.

Possíveis resoluções dos alunos:

Questão 1:

Resolução 1:

- “A figura A tem maior perímetro do que a figura B, porque olhei para a figura A e vi que ela estava inteira e era maior.”

Resolução 2:

- Figura A: “ $6+8=14$ ”

Figura B: “Não sei, só tenho o 8, não sei os outros comprimentos.”

Resolução 3:

- Figura A: “O retângulo tem os lados iguais dois a dois e, por isso, dois lados têm o mesmo comprimento. Logo, o perímetro é $8+8+6+6=28$.”
- Figura B: “As figuras A e B têm o mesmo perímetro porque se arrastarmos o meio da figura B para baixo, a figura B fica igual à figura A. Ou seja, ficam com a mesma medida de comprimento.”

Resolução 4:

- “A figura A ia ser $6 \times 8=48$, ou seja, o perímetro da figura será 48.”
- “Na figura B não consigo calcular o perímetro porque só tenho uma medida de comprimento.”

Questão 2:

Resolução 1:

- Desenhar figuras com 6 lados, mas com perímetro diferente de 28 unidades de comprimento.

Resolução 2:

- Considerar que a diagonal de um quadrado tem o mesmo comprimento do que o seu lado.

Resolução 3:

- Desenhar figuras com perímetro 28, mas em que o número de lados não seja 6.

Resolução 4:

- Desenhar figuras com 6 lados e com perímetro 28.

Questão 3:

- “Concordo porque consegui fazer muitas figuras com 6 lado e 28 de perímetro.”
- “Não concordo porque não consegui fazer nenhuma figura com 6 lados e 28 de perímetro.”
- “Eu concordo.”
- “Eu não concordo.”

Ações do professor para ultrapassar as dificuldades dos alunos:

- Dar uma figura física ao aluno e questionar sobre o que fazer para calcular a sua área e o perímetro;
- Questionar o aluno sobre o conceito de área e perímetro;
- Alertar o aluno para as suas resoluções, desafiando e colocando questões;
- Partir de um quadrado de lado 4 e questionar os alunos sobre a sua divisão em duas partes, relacionando com a possibilidade de na figura B ser igualmente possível para obter medidas de comprimento não estabelecidas;
- Pedir ao aluno para calcular e comparar a área e o perímetro de dois hexágonos desenhados, ou seja, uma figura irregular com 6 lados e outra regular, compará-las e concluir que não são iguais apesar de terem 6 lados.
- Promover a cooperação entre pares;
- Confrontar os alunos com diferentes perspectivas e resoluções, pedindo que justifiquem e que exemplifiquem.
- Promover o debate de diferentes opiniões e perspectivas entre os alunos.

Exploração da tarefa 2 em sala de aula

A tarefa “Comparar perímetros” consiste na comparação de duas figuras com o mesmo perímetro, mas que, pelas suas diferentes formas, poderiam levar os alunos a entender que os seus perímetros eram diferentes. Os alunos, em grupo, tiveram de chegar à conclusão de que as figuras A e B têm o mesmo perímetro recorrendo ao debate e ao registo por meio de cálculos, considerando e relacionando entre figuras as medidas de comprimentos apresentadas no enunciado.

No segundo e terceiros questões o grupo de trabalho teria de desenhar no papel quadriculado somente figuras que correspondessem às mesmas características que as figuras A e B, isto é, que tivessem 6 lados e perímetro 28. Neste sentido, os alunos caso conseguissem desenhar ou não, teriam de concordar ou discordar com a “Maria” que, no exercício 3, refere a existência de muitas figuras deste tipo. Neste processo as crianças, tanto em pequenos grupos ou coletivamente (com toda a turma), tiveram de explicar os seus raciocínios e formas de resolução tarefa.

Tarefa 3: “Vamos descobrir as Pirâmides (T3)” – Anexo 3

Planificação da tarefa:

Tópico a trabalhar: - Propriedades e classificação de sólidos geométricos (pirâmides)

Objetivos de aprendizagem:

- Identificar propriedades do sólido geométrico pirâmide, estabelecendo relações entre arestas e vértices, justificando os critérios utilizados;
- Mobilizar processos de raciocínio matemático (justificação e generalização).

Previsão de dificuldades:

- Dificuldade na contabilização das arestas e vértices em falta na pirâmide ilustrada;
- Dificuldade em nomear a base do sólido e, assim, designar o tipo de pirâmide apresentada;
- Dificuldade no processo de generalização, no que respeita à construção de pirâmides considerando um determinado número de vértices e/ou arestas.

Possíveis resoluções dos alunos:

Questão 1:

- “- Faltam 3 pauzinhos”;
- “- Faltam 5 pauzinhos”;

Questão 2:

- “- A base vai ser um heptágono, porque são 7 vértices mais um em cima”;
- “- A base vai ser ter oito vértices”;
- “- A base vai ser um octógono”.

Questão 3:

- “- Vai precisar de mais 9 palitos e de mais 10 palitos”;
- “- Vai precisar de mais 1 palito” (confusão entre arestas e vértices);

Questão 4:

- “- Concordo com o Pedro, mas não sei explicar porquê”;
- “- Não concordo, mas não sei explicar porquê;
- “- Concordo, porque 13 e 15 são números ímpares e não dá para construir pirâmides com números ímpares de arestas, fica sempre a faltar uma”;
- “Concordo, porque 13 e 15 são ímpares e precisamos de números pares de arestas porque o número total de arestas de uma pirâmide é o dobro do número de arestas da sua base”.

Questão 5:

- “- Os vértices das pirâmides são sempre o total dos vértices das pirâmides, mais um”;
- “- As arestas das pirâmides são sempre o dobro do número de arestas da base”;
- “- As pirâmides têm sempre número par de arestas”.

Ações do professor para ultrapassar as dificuldades dos alunos:

- Apresentar aos alunos vários tipos de pirâmides, por exemplo, através de materiais manipuláveis;
- Incentivar os alunos a desenhar pirâmides ou ajudar nesse sentido;
- Incentivar à contagem de arestas e vértices do sólido do enunciado e, assim, partir para a generalização de outras pirâmides;
- Relembrar os alunos que existe sempre um vértice das pirâmides que é fixo.

Exploração da tarefa 3 em sala de aula

A primeira questão desta tarefa consiste na identificação dos “pauzinhos” (arestas) em falta para a finalização da pirâmide representada no enunciado. De seguida, o grupo de trabalho, teria de chegar ao número total de arestas necessárias para o mesmo sólido, considerando as anteriormente referidas. Após esta contabilização, os alunos realizaram o mesmo procedimento para as “bolinhas de plasticina” (vértices).

Partindo de aspetos relativos às arestas e vértices das pirâmides (contextualizados na 1.ª questão da tarefa), os alunos responderam a questões impulsionadoras de raciocínio, nomeadamente ao implicar o uso de generalizações, partindo de justificações matemáticas válidas.

Por fim, na última questão da tarefa, os alunos registaram as descobertas realizadas sobre pirâmides e que, na semana seguinte, foram necessárias para a última tarefa do projeto de investigação “Vamos conhecer os prismas”.

Tarefa 4: “Vamos descobrir os Primas (T4)” – Anexo 4

Planificação da tarefa:

Tópico a trabalhar: - Propriedades e classificação de sólidos geométricos (prismas).

Objetivos de aprendizagem:

- Identificar propriedades do sólido geométrico prisma, estabelecendo relações entre arestas e vértices, justificando os critérios utilizados;

- Mobilizar processos de raciocínio matemático (justificação e generalização).

Previsão de dificuldades:

- Dificuldade no conceito de prisma;
- Dificuldade na contabilização das arestas e vértices em falta no prisma ilustrado;
- Dificuldade no processo de generalização, no que respeita à construção de primas considerando um determinado número de vértices e/ou arestas;
- Dificuldade em relacionar as pirâmides com os prismas relativamente às suas propriedades.

Possíveis resoluções dos alunos:

Questão 1:

- “- Não sei o que é um prisma.”;
- “- Faltam 10 ‘pauzinhos’, são precisos ao todo 15 ‘pauzinhos’ e faltam 10 ‘bolinhas’ ao todo;
- “- Faltam 5 ‘pauzinhos’, são precisos 10 ao todo e faltam 5 ‘bolinhas’ ao todo.

Questão 2:

- “- A base do prisma será um decágono pois cada base do prisma terá 10 arestas mais as 10 das laterais do prisma. Por isso, 30 a dividir por 3 é 10.”;
- “- O prisma tem duas bases, então 30 a dividir por 2 é igual a 15. Por isso, a base terá 15 arestas.”.

Questão 3:

- “- Não é possível porque os vértices de um prisma é sempre o dobro dos vértices de uma base. Logo, 25 a dividir por 2 é igual a 12,5 e será esta a quantidade total de vértices do prisma, o que não é possível de acontecer por não se conseguir dividir um vértice ao meio.”;
- “- Concordo, mas não sei explicar porquê.”
- “- Não concordo, mas não sei explicar porquê.”

Ações do professor para ultrapassar as dificuldades dos alunos:

- Apresentar aos alunos primas com bases diferentes, por exemplo, através de materiais manipuláveis;
- Incentivar os alunos a desenhar prismas ou ajudar nesse sentido;
- Incentivar à contagem de arestas e vértices do sólido do enunciado e, assim, partir para a generalização de outros prismas;
- Relembrar os alunos que os prismas são compostos por duas bases iguais;
- Devolver, no momento de exploração da questão 5, as resoluções da tarefa “Vamos descobrir as pirâmides” aos grupos de trabalho.

Exploração da tarefa 4 em sala de aula:

A presente tarefa assemelha-se à tarefa anteriormente planeada, no entanto, esta incidirá sob outra “família” de sólidos geométricos: os prismas. Esta semelhança foi propositada, uma vez que a última questão da presente tarefa consiste numa comparação entre prismas e pirâmides, considerando as conclusões retiradas nos dois momentos de exploração das tarefas.

Planeamento de quatro aulas sobre Raciocínio Matemático em Geometria recorrendo ao Ensino Exploratório:

1.º Momento - Introdução da Tarefa:

- Distribuição dos enunciados;
- Leitura autónoma e silenciosa da tarefa;
- Interrogar a leitura dos alunos, nomeadamente sobre a sua perceção face à tarefa;
- Sintetização do que se pretende com a tarefa feita por alunos;
- Leitura conjunta, se necessário;
- Organização da turma em pares/grupos de trabalho (previamente estabelecidos);
- Referir organização da exploração da tarefa (partes da aula; duração e forma de registo de raciocínio);

- Distribuição de folha de rascunho quadriculada.

2.º Momento - Desenvolvimento da Tarefa:

- Circular pelos grupos, de modo a observar diferentes resoluções e, assim, poder efetuar registos para uma posterior análise de dados e discussão coletiva;
- Neste momento, o professor deve apenas fornecer indicações necessárias, sem facilitar a resolução da tarefa e, desta forma, reduzir o grau de desafio;
- No caso de existirem alunos com dificuldades, o professor deverá adotar as estratégias de auxílio previstas para a resolução e, assim, dar sugestões e/ou colocar questões que orientem os alunos a chegar por si a uma resposta.

3.º Momento - Discussão coletiva/Sistematização:

- O professor deve encorajar a partilha de resoluções, explorando possíveis desacordos entre alunos e a exaltação de argumentos;
- O professor deverá aceitar todo o tipo de contribuições, sejam elas corretas ou incorretas, desde que seja fomentada uma discussão que as “desconstruam”, complementem ou clarifiquem;
- Pedir aos alunos justificações de respostas e estratégias adotadas para a resolução da tarefa;
- Pedir que sejam identificadas justificações válidas e inválidas, fomentando o surgimento de argumentos que as validem;
- Promover demonstrações de exemplos por parte dos alunos, por exemplo no quadro, de forma que os próprios alunos participem no processo de sistematização da tarefa.

Aspetos de observação:

1.º momento: Apresentação da tarefa

- Registo dos acontecimentos para futura análise da prática (confrontação entre a planificação com a prática – papel do professor e dos alunos nesse momento);
- Assegurar que todos os alunos entenderam a tarefa.

2.º momento: Resolução autónoma da tarefa por parte dos alunos

- Observar diferentes estratégias e modos de resolução dos alunos;
- Acompanhar o trabalho dos alunos no sentido de perceber quais são os alunos que adotaram as estratégias e modos de resolução previstos pelo professor para, mais tarde, gerar a discussão coletiva;
- Observar diferentes registos e resoluções dos alunos;
- A professora estagiária observadora regista aspetos relativos à prática da professora estagiária que implementa a prática (aspetos que coincidem ou não com o planeamento da tarefa).

3.º momento: Discussão coletiva

- Observação da forma como é feita a síntese final, isto é, se há articulação entre os conteúdos e a realização da tarefa;
- Promover a discussão entre alunos e a justificação dos argumentos utilizados.

Capítulo IV – Análise dos dados

O presente capítulo diz respeito à análise e interpretação dos dados resultantes da intervenção pedagógica implementada no contexto de estágio. Os dados são analisados, tarefa a tarefa, considerando o objetivo e as questões da investigação do estudo realizado.

A resolução da Tarefa 1 (T1): “Quantos quadrados?”

Esta tarefa apresenta duas partes: a primeira destinada à descoberta de quadrados diferentes num papel pontado 5x5 e a segunda relativa ao cálculo das áreas dos quadrados encontrados (Anexo 1).

Resolução do Grupo A:

A tarefa “Comparar Perímetros” (T1) é a primeira a ser desenvolvida no âmbito deste projeto e é notório nos alunos a dúvida sobre o que é pedido. Peço-lhes que não se acanhem por ter um gravador sob a mesa e que realizem a tarefa como o fazem habitualmente. O grupo inicia a tarefa e todos os elementos se envolvem na procura de dois quadrados diferentes no papel pontado 5x5 como é pedido na questão um (Q1). Apesar de cada elemento ter respondido à Q1 no seu papel pontado, estes, adotam uma postura de trabalho em equipa mesmo com a instrução inicial de que podem fazê-lo primeiro individualmente. O episódio 1, evidencia este aspeto que ajudou na partilha de ideias e formas de proceder na exploração da tarefa.

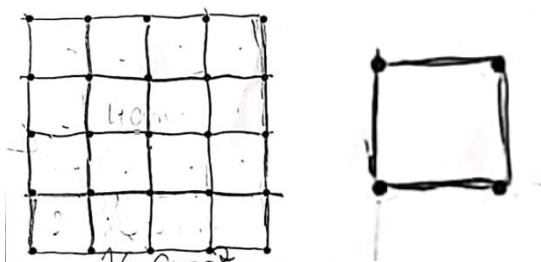
Episódio 1:

- 1 Inês: “– Eu fiz um retângulo. Enganei-me!”
- 2 Margarida: (*dando sugestões à colega para desenhar quadrados diferentes*) “- Parte aqui
- 3 deste biquinho. Depois vais aumentando o tamanho do lado e dá outro quadrado, mas os
- 4 lados têm de ser iguais.”

Neste episódio é ainda possível perceber que a noção de quadrado parece estar presente (Margarida, linhas 2 e 3), uma vez que a aluna refere uma das propriedades do quadrado.

Após todos as alunas terem realizado as suas descobertas para responder à Q1, estas mostram não ter dúvidas quanto à sua resposta, considerando que todas encontraram pelo menos dois quadrados diferentes no seu papel pontado 5x5. O grupo discute quais os quadrados encontrados que deverão colocar na folha de resposta final, decidindo que esta deve corresponder aos quadrados comuns que todos os elementos encontraram (Figura 1).

Figura 1 - Resposta final do grupo A à Q1 da T1



Aquando da justificação da sua resposta à Q1, as alunas referem que os dois quadrados encontrados (de lado igual a 1 e a 4 unidades de medida) são diferentes porque um é “1x1 e o outro 4x4” fazendo, assim, referência às suas dimensões enquanto critério diferenciador das duas figuras. Não referem explicitamente porque são 2 quadrados.

De seguida, no que respeita à questão dois (Q2), as alunas têm de desenhar o maior número de quadrados diferentes no papel pontado e explicar o porquê de serem os mesmos ou diferentes. Neste momento, as dificuldades começam a surgir no grupo.

Episódio 2:

- 1 Leonor: “- Podemos desenhar vários quadrados, não é?”
- 2 Inês: “- Sim, mas tem de ser diferentes. (...) Sara, isso é um retângulo.”
- 3 Sara: “- Pois é...”
- 4 Inês: “- Mas eu não sei mais... Não pode ser retângulos?”
- 5 Leonor: “- Não... então, quadrados não são retângulos.”

Atendendo ao episódio 2 é possível perceber que Inês não sabe bem o que é um quadrado (linha 4), quando questiona sobre a possibilidade de não poder desenhar retângulos. No entanto, a resposta de Leonor (linha 5) apesar de estar matematicamente incorreta mostra que esta está a referir-se a uma propriedade de todos os quadrados, terem os lados geometricamente iguais.

No episódio 3, é evidente a dificuldade destas alunas em percecionar um quadrado enquanto figura desenhada numa posição diferente do habitual (Inês, linha 1). Além disso, são identificadas também como dificuldades nesta questão, a apropriação do uso do papel pontado, considerando as suas características. Por isso, são desenhados quadrados diferentes, mas as alunas consideram que é o mesmo, porque tem as características de um quadrado, apesar de o lado ter medidas diferentes (Sara, linha 8 e Inês, linha 11).

Episódio 3:

- 1 Inês: “- Mas olha Sara, nós podemos fazer este (*já desenhado pelo grupo*) mas em sítios diferentes, não é?”
- 2 Sara: “Não, não podemos fazer esse... vai dar ao mesmo! Temos de fazer diferentes...”
- 3 olha (mostra o enunciado) diz aqui ‘quadrados diferentes’”.
- 4 Inês: “- Então podemos fazer grandes e pequenos!
- 5 (*A Sara duvida e mantém-se pensativa*)
- 6

- 7 Inês: “- Podes fazer um maior, Sara!”
 8 Sara: “- Vai dar ao mesmo, portanto.”
 9 Inês: “Ah.. isto aqui é igual.” (*muda de ideias e apaga. A Sara também*)
 10 Leonor: “- Não vai não... é maior!”
 11 Inês: “- Se fizer um quadrado maior e um quadrado mais pequeno é a mesma coisa.”
 12 Leonor: (*discorda*) “Aqui também foi. Nós fizemos um maior e um menor e dissemos
 13 que era diferente.

Assim que me apercebo que este grupo está a ter uma discussão sobre o que é ser quadrado, aproximo-me e observo que uma das alunas desenhou um quadrado numa posição diferente da habitual (Figura 2) e questiono-as sobre aquilo que fizeram até então.

Episódio 4:

- 1 Estagiária Catarina: “- São aqueles que conseguirem... O que já desenharam?”
 2 (*Leonor mostra dois quadrados, um deles desenhado por si e que está numa posição*
 3 *diferente do habitual*)
 4 Estagiária Catarina: “- Ok... e qual é a diferença entre estes quadrados?”
 5 Leonor: “- Então este está... (*hesita*) de esguelha? E também porque é menor do que o
 6 outros.”

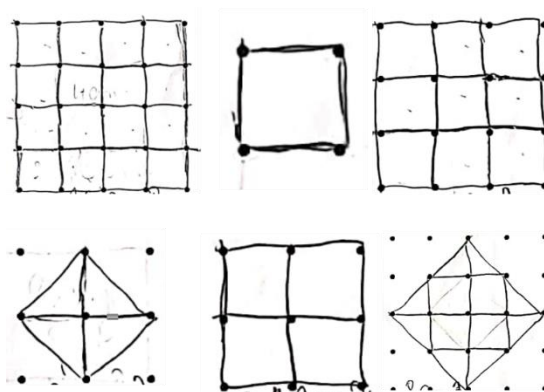
Este episódio evidencia que a aluna desenhou essa figura sem estar consciente que é um quadrado. Após a minha pergunta (linha 4) deixei que as alunas, em particular a Leonor e a Margarida, refletissem sobre a forma como seria denominada a posição daquele quadrado e anotei que este seria um dos temas a ser refletido na discussão coletiva.

Figura 2 - Figura encontrada pela Leonor na Q2 da T1



A figura 3 mostra todos os quadrados descobertos pelo grupo, evidenciando-se alguns em posição diferente da habitual.

Figura 3 - Quadrados encontrados pelo grupo A na Q2 da T1



Na segunda questão, à semelhança da anterior, o grupo tem de justificar a sua resposta referindo o porquê de considerarem que os quadrados por si encontrados seriam diferentes ou iguais. O episódio 5 evidencia o facto de uma das alunas considerar que um quadrado é sempre o mesmo independentemente da sua posição no papel pontado (Inês, linha 3).

Episódio 5:

- 1 Inês: “- São os mesmos quadrados porque se virarmos ao contrário é...”
- 2 Sara: “Ah pois é, e agora?”
- 3 Inês: “Se virarmos ao contrário (*a folha*) ficam os mesmos...”
- 4 Sara: “São os mesmos porque o papel pontado é o mesmo.”

Contudo o grupo de alunas acaba por escrever na sua resposta final: “- *São os mesmos, porque o papel pontado é igual*” (Figura 4), mostrando que ainda não identificam as propriedades que caracterizam qualquer quadrado, independentemente da sua posição no plano.

Além disso, no que a processos de raciocínio matemático diz respeito, este grupo não apresenta uma justificação baseada em propriedades e relações matemáticas associadas à definição de quadrado e ao que se entende por quadrados iguais ou diferentes entre si.

No que concerne à questão três da tarefa (Q3), em que as alunas se devem posicionar relativamente a uma afirmação de Rui, houve o seguinte diálogo:

Episódio 6:

- 1 Margarida: “- Concordamos porque fizemos os mesmos.”
- 2 Estagiária Catarina: “- Concordam com o Rui?”
- 3 Grupo: “- Sim!”
- 4 Estagiária Catarina: “- Leiam melhor a pergunta...” (*As alunas leem a pergunta*)
- 5 Leonor: “- Mais!! Mais de 6... Há mais de 6? Não.”
- 6 Inês: “- Não se sabe.”
- 7 Margarida: “- Pode haver...”
- 8 Inês: “- Pode haver, mas nós não fizemos. Vamos pensar.”
- 9 Margarida: “Vou escrever que discordamos...”
- 10 Leonor: “- Discordamos porque...”
- 11 Margarida: “- ...não encontramos mais.”

Figura 4 - Resposta final do grupo A à Q3 da T1

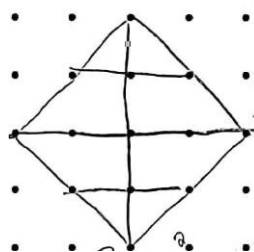
3- O Rui diz que há mais de 6 quadrados diferentes que se podem construir no papel pontado 5x5. Concordas? Explica porquê.

Descordamos, porque não encontramos + de 6 quadrados.

Para justificar a sua resposta à Q3, o grupo conclui que não concorda com o “Rui” pois não encontraram mais do que seis quadrados (Episódio 6, linhas 9, 10 e 11). Assim sendo, do ponto de vista do raciocínio matemático, conclui que as alunas não recorreram a uma justificação matemática para efetuar a sua resposta, tendo-se limitado a comparar com o número de tentativas e de quadrados que construíram.

Na segunda parte da tarefa em que os alunos tinham de calcular a área dos quadrados encontrados em Q1, não existiram grandes dificuldades, uma vez que o enunciado da tarefa era bastante explícito e tinha dicas de como proceder. No entanto, em figuras com posições diferentes das habituais, todos as alunas realizaram mal a decomposição da figura para o cálculo da sua área (Figura 5).

Figura 5 - Losango mal decomposto pela aluna do grupo A para o cálculo da área



Após uma passagem pelo grupo observei que algumas alunas estão a realizar incorretamente a decomposição da figura. Uma vez que este aspeto foi previsto por mim enquanto dificuldade aquando da planificação desta tarefa, aproximei-me e tentei perceber as dificuldades das alunas (Episódio 7).

Episódio 7:

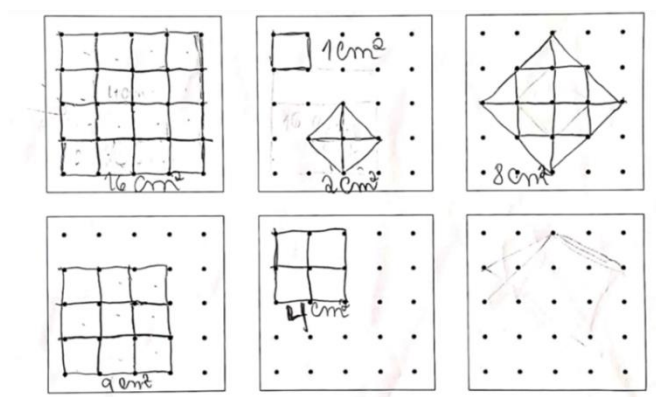
- 1 Leonor: “- Este tem... 1,2... este tem 2x2”
- 2 Inês: “- Eu acho que não...”
- 3 Margarida: “- Também acho que aqui este é diferente...”
- 4 Leonor: “- É 2x2, Margarida...” (volta a assumir a medida da diagonal do quadrado do
- 5 papel pontado como 1cm e decido intervir)
- 6 Estagiária Catarina: “- Lembram-se como é que fizemos ontem o cálculo das áreas com
- 7 a contagem de quadradinhos lá dentro? Vocês aqui conseguem contar quantos
- 8 quadradinhos?” (Leonor conta primeiro os quadrados num quadrado na posição habitual

9 encontrado por si, contando 9, e depois no visado (Figura 5), contando apenas 4
 10 quadrados)
 11 Estagiária Catarina: “- Contaste agora 4... quer dizer que este quadrado com 4
 12 ‘quadrinhos’ lá dentro é igual ao quadrado em que contaste 9 ‘quadrinhos’?”
 13 Grupo: “- Não...”
 14 Margarida: “- Porque neste o lado é 1,5cm!
 15 Estagiária Catarina: “- Mas vejam lá bem o enunciado... Quanto é que diz que é a área
 16 de um quadrinho pequeno?”
 17 Margarida: “- 1 centímetro quadrado.”
 18 Leonor: “- Então vamos tentar outra vez...” (*Afasto-me e passado poucos minutos volto*
 19 *a aproximar-me*)
 20 Margarida: “- Descobri!!!”
 21 Leonor: “Meninas, a Margarida descobriu mais quadrados!”
 22 Margarida: “- Olhem aqui... meio quadrado, meio quadrado, um quadrado! (*repete*
 23 *quatro vezes*). Quatro quadrados mais quatro quadrados oito quadrados.”
 24 Estagiária Catarina: “- Podes explicar-me como fizeste Margarida.”
 25 Margarida: “- É assim: eu contei triângulos que são metade de um quadrado. Dois
 26 triângulos dá um quadrado e, então, como são 8 triângulos pequenos fiz 8 a dividir por
 27 dois que dá quatro. Ou seja, formam-se quatro quadrados. Mais quatro quadrados do meio
 28 dá 8 quadrados.” (*ver Figura 6*)
 29 Estagiária Catarina: “Assim, a área vai ser quanto?”
 30 Margarida: “8 centímetros quadrados”.

Este momento, em que intervim aos poucos de forma a deixar as alunas a pensar sobre o que estão a fazer, permitiu que as mesmas se apercebessem que algo não estaria correto e relacionassem esta questão com o que tinham vindo a fazer nas aulas de matemática durante a semana. A Margarida, à semelhança da Inês, nunca se convenceu completamente da opinião das colegas de grupo (linha 3), indo mais longe que a Inês ao considerar que a diagonal dos ‘quadrinhos’ do papel pontado não poderia ser igual ao lado destes, referindo inclusive que seria maior do que 1cm (linha 14). Assim sendo, Margarida parece recorrer à justificação enquanto processo de raciocínio matemático, embora de forma elementar (linhas 26 a 29).

A figura 6 evidencia a resposta do grupo à última questão desta tarefa (Q1 p.2) e mostra ainda o modo como as alunas decompuseram os vários quadrados para determinar a área de cada um.

Figura 6 - Resposta final do grupo A à Q1 p.2 da T1



Resolução do Grupo B:

O grupo B decide proceder de forma diferente na exploração da tarefa. Ao contrário do grupo A que trabalha conjuntamente na procura de quadrados, o grupo B combina que todos vão tentar encontrar o máximo de quadrados possíveis não podendo mostrar uns aos outros até todos terem algumas descobertas.

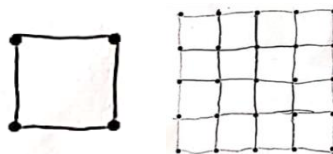
Na Q1 todos os alunos chegam a um consenso e, entre todos, decidem quais os quadrados que vão colocar na folha de resposta e o porquê destas figuras sem diferentes (Episódio 8).

Episódio 8:

- 1 Beatriz: “- Consideramos estes dois quadrados diferentes porque este é mais pequeno do
- 2 que este.”
- 3 Pedro: “- Sim, porque este é um por um (1×1) e este quatro por quatro (4×4).”

Este grupo, à semelhança do anterior, justifica a sua resposta fazendo referência à dimensão do quadrado como fator diferenciador.

Figura 7 - Resposta final do grupo B à Q1 da T1



Na segunda questão (Q2), o grupo B assume que têm de desenhar, pelo menos, seis quadrados diferentes, uma vez que ao lerem previamente o enunciado da tarefa depararam-se com a Q3 que refere a possibilidade de existirem de mais do que seis quadrados desenhados no papel pontilhado 5x5.

Episódio 9:

- 1 Alice: “- Temos de fazer quantos? Dois?”

2 Pedro: “- Não, seis. Ou sete...”
 3 (...)
 4 Pedro: “- Só sei dois diferentes...”
 5 Simão: “- Podemos desenhar os mesmos, mas em posições diferentes?”
 6 Beatriz: “- Não, não podemos fazer. Temos de inventar. E isso é um retângulo, Pedro.”
 7 Pedro: “- É verdade.”
 8 (...)
 9 Beatriz: “- Catarina, podemos repetir? Por exemplo, este mas aqui em baixo?”
 10 Estagiária: “- São quadrados diferentes...? O tamanho desse não é o mesmo?”
 11 Beatriz: “- Ok, não se pode repetir.”
 12 Pedro: “- Então mas como...? Assim ficam poucos quadrados. Ou será que se não tiverem
 13 na mesma posição conta...”

Tal como se sucedeu com o grupo A, as dificuldades surgem a partir do momento em que o grupo tem de desenhar mais quadrados, não tendo a certeza se o tamanho e a posição no papel pontado conta ou não para se ter quadrados diferentes. Este facto torna-se evidente quando sou questionada sobre a possibilidade de repetirem quadrados já desenhados, mas em locais diferentes do papel pontado (Beatriz, linha 10). Quando confrontados com essa impossibilidade, os alunos sentem-se um pouco frustrados e assumem de imediato que “*é impossível fazer*” e decidem responder à Q2, fazendo referência ao facto de que todos os elementos do grupo descobriram individualmente os mesmos quadrados (“*poucos*”) tendo, assim, as “*mesmas ideias*”.

Figura 8 - Resposta final do grupo B à Q2 da T1

2- Desenha mais quadrados diferentes no papel pontado. Compara os quadrados que desenhasse com os que desenharam os elementos do teu grupo. São diferentes ou são os mesmos? Explica porquê. São os mesmos porque há poucos e tivemos as mesmas ideias.

Ao lerem novamente a Q3, um dos elementos do grupo responde rapidamente que não concorda com o Rui referindo o facto de só terem conseguido, enquanto grupo, fazer quatro quadrados diferentes. Ainda assim, voltam a tentar encontrar mais quadrados, tal como evidencia o episódio seguinte.

Episódio 10:

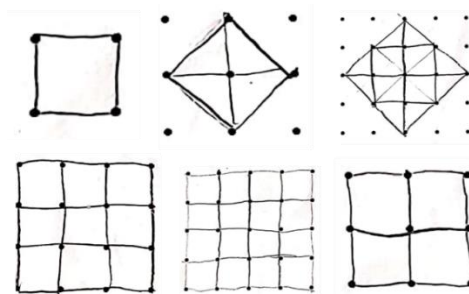
1 Alice: “- Catarina, podemos fazer retângulos?”
 2 Estagiária Catarina: “- No enunciado não diz quadrados?”
 3 Pedro: “Mas o quadrado é um caso especial do retângulo...”
 4 Alice: “- Então podemos desenhar retângulos... e parecidos?”
 5 Estagiária Catarina: “- O que é parecido para ti?”
 6 Beatriz: “- Ah, isto aqui. Um hexágono.”
 7 Estagiária Catarina: “- Calma, vocês olhando aqui para este exemplo (*enunciado*), o que
 8 é ser um quadrado diferente do outro?”

- 9 Simão: “O tamanho.”
 10 (O Simão agarra no lápis e, de repente, desenha algo no papel pontado)
 11 Estagiária Catarina: “- O que fizeste Simão?”
 12 Simão: “Um hexágono.”
 13 Estagiária Catarina: “De certeza?”
 14 Beatriz: “- Um hexágono tem seis lados, não tem?”
 15 Simão: “Ai... esqueci-me do nome!”
 16 Pedro: “- É um quadrado mas só que de lado!”
 17 Estagiária Catarina: “- Então mas isso tem um nome.”
 18 Pedro: “- Ah... losango?”

O episódio evidencia que os alunos, na procura de mais quadrados, referem saber que um quadrado é um caso particular de um retângulo, embora pareçam não compreender que alguns retângulos não são quadrados. Além disso mostram ter dificuldades em designar por quadrado uma figura que é um quadrado embora não esteja na posição habitual, chamando-lhe losango e dando a entender que, para eles, os losangos nunca são quadrados.

Após o episódio 10, os alunos decidem alterar a sua resposta à Q3 assumindo que um dos losangos desenhados é também um quadrado. Desta forma, partindo desta conclusão os alunos conseguem desenhar mais quadrados do que aqueles que tinham até então. No entanto, tal como o grupo A, não conseguem encontrar mais do que seis quadrados tendo exatamente os mesmos quadrados do que as colegas (Figura 9).

Figura 9 - Quadrados encontrados pelo grupo B na Q2 da T1



Por outro lado, apesar de durante o episódio T terem sido proferidas a dado momento afirmações válidas no que respeita à sua compreensão sobre o que distingue um quadrado de outro (Simão, linha 9), na resposta final de grupo não foram além de uma justificação associada apenas ao número de quadrados que conseguiram fazer, tal como mostra a figura seguinte.

Figura 10 - Resposta final do grupo B à Q3 da T1

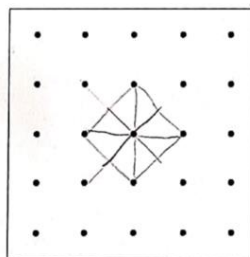
3- O Rui diz que há mais de 6 quadrados diferentes que se podem construir no papel pontado 5x5. Concordas? Explica porquê. *Sim, concordo porque nós conseguimos fazer.*

Na segunda parte da T1, para efetuar o cálculo das áreas das figuras encontradas, todo o grupo entendeu rapidamente que tinha de passar à decomposição dos quadrados. No entanto, à semelhança do grupo A nem todos os alunos conseguiram decompor os quadrados corretamente. O episódio 11, evidencia a dificuldade sentida por Simão ao decompor um quadrado em que não se encontrava na posição habitual e, por isso, aquando da comparação de resultados com o restante grupo, os seus colegas, questionaram-se das diferenças.

Episódio 11:

- 1 Beatriz: “- Simão, este aqui está diferente... (Figura 11)”
- 2 Simão: “- Porquê? Dividi o quadrado.”
- 3 Beatriz: “- Sim, mas porque é que dividiste só com triângulos?”
- 4 Simão: “- Não pode ser?”
- 5 Pedro: “- Eu acho que se pode, porque eu tenho aqui divisões com triângulos... mas não
- 6 em todo o quadrado.” (*Alice chama-me*)
- 7 Beatriz: “- Catarina, podemos fazer a divisão dos quadrados só com triângulos como fez
- 8 o Simão neste aqui (Figura A)?”
- 9 Estagiária Catarina: “- Qual é a unidade de medida de área que o enunciado diz?”
- 10 Pedro: “- Um quadrado pequeno.”
- 11 Estagiária Catarina: “- Então e o lado desse quadrado pequeno é quanto, Simão?”
- 12 Simão: “- Um centímetro.”
- 13 Estagiária Catarina: “- Então se só sabes, pelo enunciado, o lado de um quadradinho
- 14 desses, consegues saber quanto vai daqui a aqui neste triângulo?” (*diagonal de um*
- 15 *quadradinho*)
- 16 Simão: “- Também é um?”
- 17 Pedro: “Não... só pode ser um, se o lado desse triângulo for o lado de um quadrado
- 18 pequeno.”
- 19 Estagiária Catarina: “- Então, como fizeste para calcular a área, Pedro?”
- 20 Pedro: “- Junto dois triângulos.
- 21 Simão: “- Mas porquê?” (*Mostrando-se confuso por também ter triângulos na sua*
- 22 *decomposição*)
- 23 Pedro: “- Porque os meus triângulos estão desenhados para que eu consiga formar um
- 24 quadrado que tenha as medidas que dizem!” (*Lado um centímetro*)

Figura 11 - Decomposição de um quadrado feita por Simão na Q1 p.2 da T1

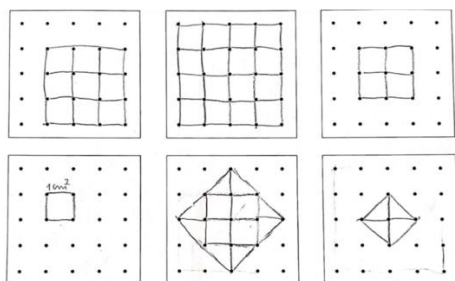


O episódio 11 além de evidenciar a dificuldade sentida por Simão na decomposição de um quadrado em posição diferente do habitual, também mostra as suas dificuldades em perceber que a diagonal de um quadrado não tem o mesmo comprimento do que o seu lado, o que poderá ter induzido em erro o aluno na decomposição do quadrado da Figura 11.

Por outro lado, ao tentar esclarecer o colega, Pedro evidencia que tem noção de que para calcular a área de figuras, neste caso de quadrados, pode decompor a figura em quadrados pequenos e que, no caso de quadrados em posição diferente da habitual, esta decomposição pode ser feita usando triângulos, que correspondem a metade do quadrado usado como unidade de medida de área (linhas 18, 23 e 24).

Após o episódio anterior, em que foram esclarecidas dúvidas em relação à decomposição dos quadrados em posição diferente da habitual, o grupo procedeu ao cálculo das restantes áreas sem manifestar qualquer tipo de dificuldade, tal como aconteceu com o grupo A, embora não as tenham registado na sua folha de respostas (Figura 12).

Figura 12 - Decomposição dos quadrados pelo grupo B na Q1 p.2 da T1



Discussão coletiva sobre a realização da T1:

Considerando as dificuldades que pude observar na resolução da tarefa em grupo decidi focar-me numa primeira fase no facto de nos grupos só terem conseguido encontrar no máximo seis quadrados diferentes. Para isso, desenhei no quadro um papel pontado 5x5 para que fôssemos encontrando mais quadrados e chegando a conclusões sobre essas descobertas. Como seria de esperar os alunos dos dois grupos apenas desenharam no quadro os quadrados que conseguiram encontrar em grupo. Nesse sentido, questionei a turma sobre a possibilidade de existirem mais quadrados em posições diferentes das habituais, partindo da observação de alguns desses quadrados desenhados no quadro.

Episódio 12:

- 1 Estagiária Catarina: “- Tenho uma questão para vos fazer: olhando para todos estes
- 2 quadrados que os vossos colegas encontraram, o que os diferencia?”
- 3 Simão: “- Uns são maiores, outros mais pequenos. Outros estão ‘normais’ (*posição*
- 4 *habitual*) e outros parecem losangos.”
- 5 Estagiária Catarina: “- Então variam no tamanho. Então e se eu, por exemplo, pegar neste
- 6 quadrado e colocá-lo numa outra posição no papel pontado?”

Depois de questionada e embora com a minha ajuda, a turma consegue chegar aos oito quadrados possíveis de serem desenhados no papel pontado 5x5. Além disso, fico com perceção de que alguns alunos, tal como Simão (linhas 3 e 4) percebem o porquê de os quadrados encontrados serem diferentes, embora mantenham todas as características de quadrados.

Relativamente à segunda parte da tarefa, a discussão coletiva e a sistematização de conteúdos centrou-se mais nos restantes grupos da turma do que propriamente nos grupos A e B. Isto, pelo facto de não considerar que tivessem restado grandes dúvidas após os momentos em que foram esclarecidas com pequenas intervenções da minha parte. Desta forma e, atendendo ao facto de ter registado que outros grupos da turma não conseguiram chegar à decomposição correta dos quadrados, decidi que os grupos A e B, à vez, iriam ao quadrado apresentar as suas descobertas nesse sentido e, assim, esclarecer se também estes tinham ficado esclarecidos.

Para tal, peço que ao porta-voz dos grupos A e B (Margarida e Pedro respetivamente) para irem até ao quadro e decomponham os quadrados que lá se encontram, deixando para o fim os quadrados em posição diferente do habitual. Após a decomposição dos quadrados em posição regular, questiono a turma se concordam com o que os colegas fizeram, ao que a resposta foi positiva, ao passo que deduzo que todos tenham feito o mesmo. De seguida, peço a um elemento de outro grupo que não tinha decomposto corretamente o quadrado desenhado numa posição diferente da habitual para ir ao quadro fazer o mesmo

que os seus colegas. O aluno volta a decompor o quadrado de forma incorreta e peço aos porta-voz do grupo A e B para analisarem esta decomposição, como se evidencia no episódio seguinte.

Episódio 13:

- 1 Pedro: “- Está mal. Não é assim.”
- 2 Estagiária Catarina: “- E tu Margarida? O que dizes?”
- 3 Margarida: “- Concordo com o Pedro.”
- 4 Estagiário Catarina: “- Então o que está mal?”
- 5 Margarida: “- O Diogo devia ter decomposto o quadrado com quadradinhos com um
- 6 centímetro de lado e ele fez só com triângulos.
- 7 Pedro: “- Porque dois triângulos dá um quadrado.”
- 8 Estagiária Catarina: “- Quaisquer triângulos? Por exemplo, este?” (*desenho no quadro*
- 9 *um triângulo escaleno*)
- 10 Margarida: “- Não, isso não dá um quadrado. Tem de ser reto... Um triângulo retângulo!”

Neste episódio, não só a Margarida e o Pedro esclareceram o colega Diogo e evidenciaram a sua perceção quanto à correta decomposição de um quadrado colocado numa posição diferente da habitual, como também aprimoraram a sua justificação chegando à conclusão de que nem todos os triângulos dão origem a quadrados. Margarida (linha 10), chega, assim, à definição de quadrado e, conseqüentemente, de triângulo retângulo considerando os ângulos retos como propriedade destas duas figuras geométricas.

Na sequência deste episódio, Pedro evidencia que percebeu o facto da medida da diagonal do quadrado não ser igual à medida do seu lado, completando desta forma a sua justificação quando refere que o colega realizou mal a decomposição do quadrado. Além disso, refere a pertinência desta decomposição em quadrados mais pequenos com um centímetro quadrado de área para o cálculo da área total da figura.

Episódio 14:

- 1 Estagiária Catarina: “- Pedro, para o Diogo perceber, porque é que temos de decompor o
- 2 quadrado em quadradinhos pequenos?”
- 3 Pedro: “- Então, no enunciado dão-nos a unidade de medida de área. Dizem que é um
- 4 quadradinho destes. Dentro deste quadrado estão quadrados destes mais pequenos e
- 5 triângulos que separados (*metade*) dão um quadrado de um centímetro quadrado de área.
- 6 Precisamos de os contar todos para ter a área. Nos outros (*quadrados na posição habitual*)
- 7 só temos de contar quadrados porque são quadrados direitinhos.”

A discussão coletiva e conseqüente sistematização de resultados não foi mais além do que a abordagem aos quadrados em posição diferente da habitual e das dificuldades dos alunos daí resultantes. Como foi evidente essa dificuldade nos episódios anteriormente transcritos, neste momento em grande grupo, optei por dar oportunidade aos alunos dos grupos A e B de explicitarem as suas descobertas realizadas em pequeno grupo e, de

forma cooperada, ajudarem os seus colegas nesse sentido. Algo que se torna muito pertinente nesta minha análise, uma vez que através disso consigo observar que as dúvidas existentes parecem ter ficado esclarecidas.

1. A resolução da Tarefa 2 (T2): “Comparar perímetros”

À semelhança da tarefa anterior, para a realização da presente tarefa (T2), foram distribuídos, a cada elemento do grupo, um enunciado e uma folha quadriculada de rascunho para que cada aluna pudesse, inicialmente, resolver a tarefa de forma autónoma. Após essa primeira fase, as alunas discutiram, em pequeno grupo, de forma de ser desenvolvida uma resposta final do grupo com base nas descobertas de cada elemento. (Anexo 2)

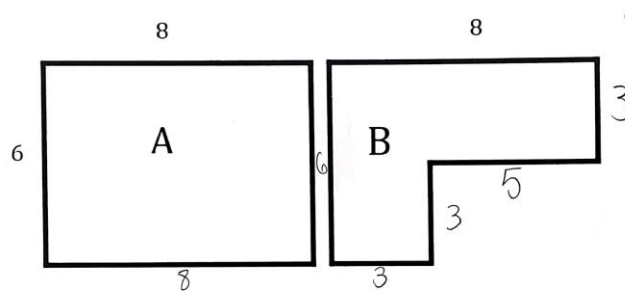
Resolução do Grupo A:

O grupo A iniciou a tarefa de forma entusiasmada, uma vez que partiram para a mesma com o sentimento de enfrentar mais um desafio matemático. Numa primeira abordagem à questão os alunos confrontaram-se com a necessidade de comparar as figuras A e B no que às suas medidas diziam respeito, uma vez que a figura A não apresentava a indicação das medidas de dois lados e a B não apresentava a indicação das medidas de qualquer dos lados, embora estas medidas pudessem ser inferidas pelas expressas na primeira figura. O seguinte episódio (episódio 15), assim como a Figura 13, evidenciam a discussão que surgiu entre o grupo de alunos, quando confrontados com essa situação:

Episódio 15:

- 1 Margarida: “- Primeiro, temos de ver quanto é que mede cada lado.”
- 2 Leonor: “- Sim, já temos o perímetro de A.”
- 3 Sara: “- Então temos de ver o de B...”
- 4 Leonor: “- Mas faltam medidas no A, temos de ver...Aqui (*lado menor da figura A*) é
- 5 seis, por isso, aqui (*lado da figura A sem medida*) também é!”
- 6 Sara: “- E aqui em baixo (*lado da figura A sem medida*) vai ser o oito.”
- 7 Inês: “- Aqui (*lado menor na figura B*) é três.”
- 8 Sara: “- Não pode ser três.”
- 9 Margarida: “- É três, sim! Olha, está a dividir (o lado de A que mede seis).
- 10 Leonor: “- Pois! Está dividido em dois.”
- 11 Inês: “- Então aqui também é três, e aqui é cinco (*Figura 13*).”
- 12 Leonor: “- Então aqui em baixo também é três.”
- 13 Inês: “- Três? Porquê?”
- 14 Leonor: “- Porque se aqui é cinco e em cima é oito... cinco mais três é oito.”

Figura 13 - Resposta do grupo A à Q1 da T2



O episódio 15 mostra que a maioria das alunas conhecem o conceito de perímetro, uma vez que para responderem à questão número 1 (Q1) evidenciam de imediato a necessidade de descobrir as medidas dos lados “em branco” (linha 1). No entanto, a aluna Leonor (linha 2) refere já ter o perímetro de A. Neste momento, é possível considerar que a aluna, após uma primeira abordagem à figura A, inferiu que o retângulo tem os lados iguais dois a dois e que, tendo à priori as medidas dos lados referentes ao comprimento e largura do mesmo, as restantes medidas iriam ser iguais às do seu lado paralelo, conseguindo, assim, proceder ao cálculo do perímetro de A.

Relativamente à primeira questão da tarefa (Q1) em que se pretendia que as alunas comparassem os perímetros de A e B, respondendo qual destas seria maior, menor ou iguais no que ao seu perímetro dizia respeito. O grupo de alunas respondeu de forma unânime, após o cálculo do perímetro das duas figuras referidas. Neste sentido, todos os elementos do grupo concordaram que as duas figuras apresentadas tinham igual perímetro, isto é, vinte e oito unidades de comprimento. (Figuras 14 e 15).

Figura 14 - Cálculo do perímetro das figuras A e B na Q1 da T2

$$\textcircled{1}$$

$$P_A = 8 + 8 + 6 + 6 = 28$$

$$P_B = 8 + 6 + 3 + 3 + 5 + 3 = 28$$

Figura 15 - Resposta final do grupo A à Q1 da T2

1. Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro? *As duas figuras tem o mesmo perímetro.*

Na segunda questão da tarefa (Q2), os alunos envolveram-se na procura de duas figuras com seis lados e perímetro vinte e oito, sendo que no total das hipóteses que cada elemento do grupo encontrou contabilizaram-se seis figuras diferentes (Figuras 16, 17 e 18).

Figura 16 - Resolução da Sara na Q2 da T2

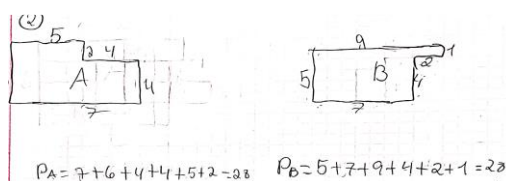


Figura 17 - Resolução da Inês na Q2 da T2

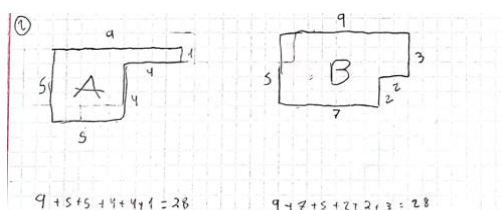
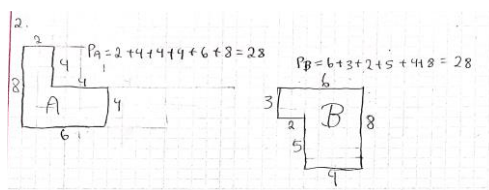
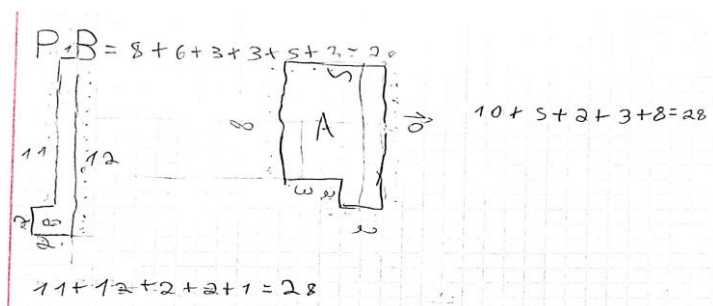


Figura 18 - Resolução da Margarida da Q2 na T2



Um dos elementos do grupo construiu duas figuras com seis lados, no entanto, o seu perímetro não é igual a vinte e oito unidades de comprimento (Figura 19). Na sua resolução, esta aluna concretizou o cálculo do perímetro de forma correta, pelo que o seu único erro ocorreu na transcrição dos dados, isto é, das medidas que cada lado da sua figura media tendo ficado a faltar uma parcela (um dos lados que mede dois). Por esta incorreção, possivelmente associada a distração, a aluna poderá ter sido induzida em erro ao apresentar esta figura como uma das possibilidades de resposta.

Figura 19 - Resolução da Leonor na Q2 da T2



Na última questão desta tarefa (Q3), em que era preciso justificar o porquê de existirem “muitas figuras” com seis lados e vinte e oito unidades de comprimento, concordando ou não com a “Maria”, o grupo teve de se envolver na procura de mais figuras com as características já anteriormente mencionadas. Neste sentido, o grupo contabiliza as figuras previamente encontradas e voltou a procurar mais figuras. Durante o processo de descoberta de “muitas” figuras com seis lados e perímetro igual a vinte e oito, aproximei-me do grupo com o intuito de promover a discussão partindo do desenho da figura A, de forma que o grupo chegasse a uma generalização e, assim, conseguir encontrar outras figuras com as mesmas características.

Considerando as dificuldades manifestadas pelo grupo, sugeri que desenhassem a figura A em papel quadriculado e, a partir daí, construíssem outras figuras. O episódio Y remete para o momento em que as alunas ouviram a minha sugestão.

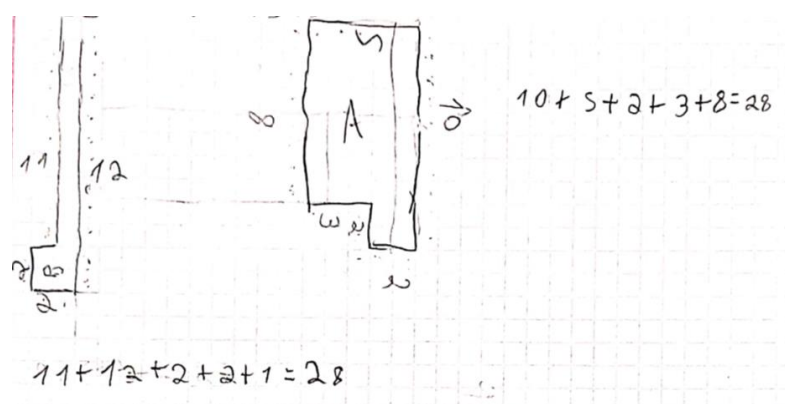
Episódio 16:

- 1 Estagiária Catarina: “- E se desenharem a figura A primeiro no papel quadriculado e, a
- 2 partir, daí desenhem outras?” (*Afasto-me*)
- 3 Inês: “- Como assim?”
- 4 Margarida: “- Vamos desenhar a A...”
- 5 Inês: “- Mas porquê?”
- 6 Margarida: “- Porque a Catarina disse...”
- 7 Leonor: “- Pois... mas se não sabemos porquê não podemos fazer!”
- 8 Inês: “- Pois, eu vou continuar a fazer assim (*tentativa e erro*).

A análise do episódio evidencia que, apesar da sugestão, as alunas continuam com dificuldades, havendo uma aluna (Inês, linha 8) que persiste na procura de outras figuras através de uma abordagem de tentativa e erro. Durante todo o processo de encontrar figuras de seis lados com perímetro vinte e oito, foram várias as situações de tentativa-erro por parte de outros elementos do grupo. Inês explicita que utilizou como estratégia a contagem de lados ao mesmo tempo que ia desenhando a figura, conseguindo, desta forma, desenhar as figuras e calcular o seu perímetro, em simultâneo.

A análise das suas produções evidencia que, em alguns casos, as alunas desenhavam no papel quadriculado figuras de seis lados, mas cujo perímetro não é vinte e oito ou, em outros casos, figuras com vinte e oito unidades de perímetro, mas que não têm seis lados (Figura 20). Esta foi a principal dificuldade sentida pelo grupo, tal como vários dos seus elementos manifestam ao longo da resolução da tarefa: Margarida: “- Ah! Já me enganei...” (...) Inês: “- Lá ia eu outra vez pelo mesmo caminho (figura com seis lados)” (...) Inês: “- Pensava que isto ia ser mais fácil!” (...) Leonor: “- Deu-me mais que vinte e oito...”.

Figura 20 - Dificuldades da Leonor em construir figuras com as características pretendidas na Q2 da T2



Na questão 3, o grupo de alunas conseguiu reunir pelo menos quinze figuras diferentes com as características requeridas (Figuras 16, 17, 18, 19, 21 e 22). Ao comparar as diferentes figuras verificaram que algumas delas eram idênticas estando apenas em posições diferentes no papel quadriculado, tal como identifica Margarida: “- A figura é a mesma, só que eu desenhei para cima e tu para baixo.”

Figura 21 - Outras figuras encontradas pela Leonor

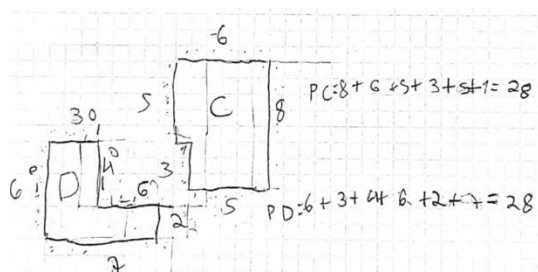
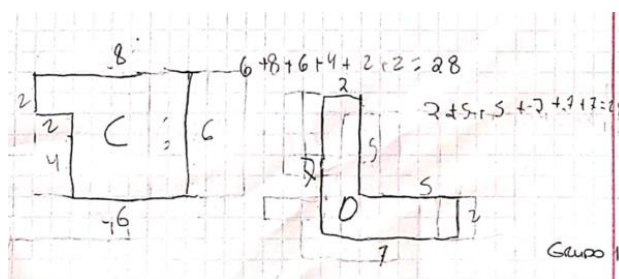


Figura 22 - Outras figuras encontradas pela Inês



Neste sentido, na Q3, as alunas, para justificar a concordância com a afirmação de “Maria”, partiram para a procura de novas figuras que obedecem aos critérios apresentados de forma a validar a sua resposta. A análise das produções das alunas, bem como os seus diálogos, evidenciam que as mesmas para justificar a afirmação de “Maria” recorrem à construção de mais exemplos de figuras de uma forma aparentemente aleatória.

Neste sentido, o grupo de alunas não conseguiu explicar o porquê da existência de “muitas figuras”, tendo assim concordado apenas com a “Maria” referindo que também tinham encontrado “muitas” após contabilização (episódio 17). As alunas tentaram, assim, por exaustão, chegar ao maior número possível de figuras para poderem concordar com a opinião da “Maria”, mas não justificam matematicamente, dizendo apenas porque “há muitas figuras”.

Episódio 17:

- 1 Sara: “- Eu concordo com a Maria, e vocês?”
- 2 Inês: “- Eu concordo. Já fiz uma...Ah! Não. Tenho duas.” (*iniciam a contabilização e comparação das figuras que cada elemento do grupo tem*)
- 3 Sara: “- As figuras vão ter todas o formato de ‘bota’. Só que há muitas.”
- 4 (...)
- 5 Sara: “- Margarida, esta não tem seis lados!”
- 6 Margarida: “- Pois não... (*apaga*) Tenho de tentar fazer mais!”
- 7 Leonor: “- Aqui diz explica porquê...O que escrevemos?”
- 8 Margarida: “- Concordo, porque encontrámos muitas.”
- 9

Figura 23 - Resposta do grupo 1 à Q3 da T2

3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas?

Explica porquê. Eu concordo porque encontramos muitas.

A partir do episódio 17, é possível concluir que nenhuma aluna mobilizou o processo de raciocínio justificar, no entanto, recorreram à exemplificação para considerar que, de facto, existem figuras com as características pedidas (Figuras 24 e 25).

Figura 24 - Resolução da Sara na Q3 da T2

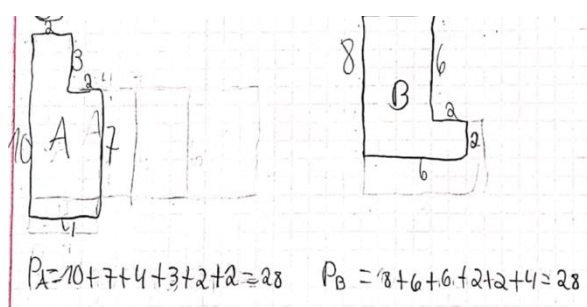
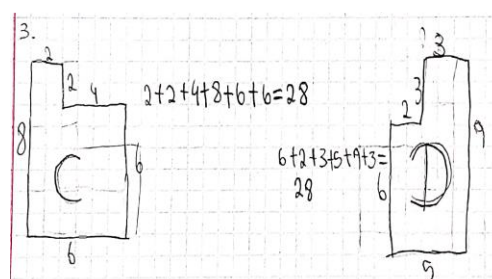


Figura 25 - Resolução da Margarida na Q3 da T2



Resolução do grupo B:

O grupo B inicia a tarefa “Comparar Perímetros” com o objetivo de descobrir de imediato as medidas em falta, sobretudo, na figura B, uma vez que chegaram rapidamente a acordo no que respeita às medidas em falta na figura A.

“O grupo B, para encontrar as medidas em falta na figura B, tiraram a régua do estojo. Fui ao pé do grupo e questionei sobre o porquê de o estarem a fazer. O grupo encontrou em desacordo.” Nota de campo (11/05/2021)

Neste segundo grupo, um dos seus elementos, o Pedro, opta por uma estratégia diferente para descobrir as medidas da figura B. O aluno retira uma régua do estojo, começa a medir e o grupo entra em desacordo no que respeita a este procedimento do colega, tal como evidencia o episódio 18.

Episódio 18:

- 1 Pedro: (com a régua mede um dos lados da figura B) “- Quatro... quatro e meio. Aqui é
- 2 quatro e meio.”
- 3 Beatriz: “- Pedro, não é!”
- 4 Alice: “- Eu também acho que não. São iguais, olha!”
- 5 (aproximo-me porque vejo que o grupo está em desacordo)
- 6 Estagiária Catarina: “- O que se passa?”
- 7 Pedro: “Elas estão a dizer que estes dois são iguais (lados menores da figura B) mas eu
- 8 estou a medir e não são!”
- 9 Estagiária Catarina: “- E precisas de usar a régua para saber as medidas?”
- 10 Beatriz: “Pois... está a usar a régua. Não é para medir.”
- 11 Pedro: “- Então como é que eu sei as medidas?”

Após este momento, noto que o Pedro fica a pensar. O restante grupo explica-lhe como deve proceder e este acaba por deixar a régua de lado. Conforme o pedido no enunciado, o aluno começa a comparar as duas figuras embora pareça contrariado, por não ter conseguido inferir o processo de descoberta das medidas dos lados do polígono sozinho.

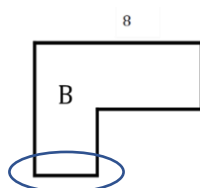
O episódio 19 relata o momento de uma nova aproximação da minha parte ao grupo com o intuito de os questionar novamente no sentido de perceber se já encontraram forma de chegar às medidas em falta sem recorrer à régua. Além disso, apercebo-me que o grupo está a ficar atrasado em relação aos restantes grupos na resolução da tarefa e, por isso, questiono também se já responderam à primeira questão da tarefa.

Episódio 19:

- 1 Estagiária Catarina: “- Então, o perímetro das figuras? Qual a vossa resposta à primeira
- 2 questão?”.
- 3 Pedro: “- Sim, são iguais. Dá vinte e oito.”
- 4 Beatriz: “- Calma, como é que sabes? Já fizeste a conta?” (*Os restantes elementos ainda*
- 5 *estão a fazer cálculo do perímetro de A e B, sendo que o Pedro não apresentou cálculos*
- 6 *na sua folha*)
- 7 Alice: “- Sim, dá a mesma coisa.”
- 8 Estagiária Catarina: “- Ok... e como chegaram, afinal, às medidas em falta?”
- 9 Pedro: “- Tivemos de ver... por exemplo, “arrastei” metade do lado seis para aqui, ficou
- 10 três e a outra metade para aqui e ficou três. Este três mais este três dá o seis. Aqui para
- 11 dar oito tem de ser três aqui e cinco aqui.”
- 12 Estagiária: “- Desculpa, não percebi... aqui é três porquê?”
- 13 Pedro: “- Porque é igual a este bocado da metade de seis. E este mais este tem de ser oito.”

Neste grupo a descoberta das medidas em falta não foi tão rápida como no grupo A, uma vez que nem sempre os elementos do grupo estavam de acordo. Este aspeto torna-se ainda mais evidente quando um dos elementos do grupo, o Alexandre, entra em desacordo com os restantes colegas no que diz respeito à medida de um dos lados em falta na figura B. O aluno entende que, a “olho nu”, um dos lados com menos comprimento da figura B (assinalado na Figura 26) mede dois e não três, uma vez que este é para si mais pequeno do que os outros dois lados menores da figura. Enquanto circulo pela sala, apercebo-me desta discussão entre o grupo e, mais uma vez, aproximo-me:

Figura 26 - Figura B

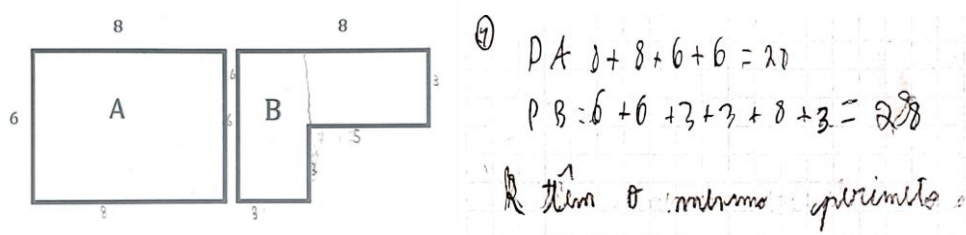


Episódio 20:

- 1 Estagiária Catarina: “- O que se passa?”
2 Alexandre: “- Eles não concordam comigo. Estão a dizer que este é do mesmo tamanho
3 que este.”
4 Estagiária Catarina: “- E como é que tu sabes que não é?”
5 Alexandre: “- Dá para ver com os dedos...”
6 Estagiária Catarina: “- Com dedos? No enunciado diz para compararem as figuras, tens
7 aí duas figuras... como é que vocês as vão comparar?”
8 *(todos os elementos do grupo ficam em silêncio)*
9 Estagiária Catarina: “- Têm papel quadriculado, por exemplo.
10 Alexandre: *(continua a achar que o lado assinalado na Figura 26 é dois)* “- Então dois
11 mais seis é oito...”
12 Estagiária Catarina: “- Então e se forem por este lado *(lado que mede seis na figura B)* ...
13 Este lado em comparação com este *(lado paralelo a si)* é o quê?”
14 Alice: “- É metade.”
15 Estagiária Catarina: “- Ok... e continuas a achar que eles não têm razão, Alexandre?”
16 Alexandre: “- Ah pois, aqui é três!”

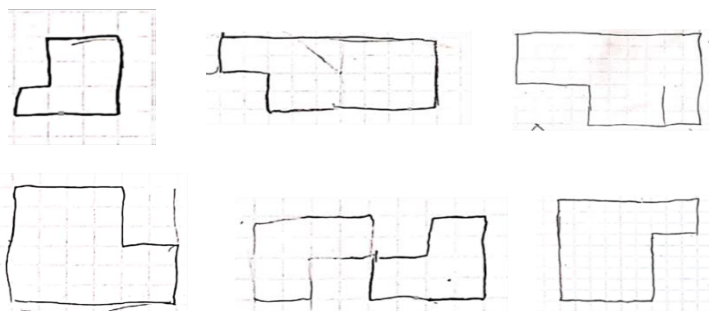
Apesar dos impasses evidenciados nos episódios 19 e 20, o grupo responde corretamente à Q1, tal como evidencia a Figura 27.

Figura 27 - Resposta final do grupo B à Q1



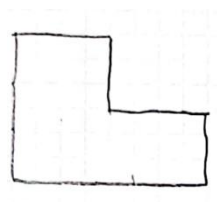
Relativamente à questão dois (Q2) o grupo B procede de igual forma ao grupo A no que respeita à descoberta individual de figuras para que cada elemento pudesse dar o seu contributo na contabilização final de figuras encontradas pelo grupo. No entanto, no processo de descoberta de duas figuras com seis lados e vinte e oito de unidades de perímetro, este grupo de alunos sentiu mais dificuldades. A Figura 28 mostra que vários elementos do grupo cometem o mesmo erro, isto é, desenharam figuras com seis lados, mas com perímetro diferente de vinte e oito unidades de comprimento.

Figura 28 - Figuras encontradas pelos vários elementos do grupo e que não correspondem aos critérios pedidos



Neste processo de procura de figuras, apenas o Pedro consegue chegar a uma figura com os critérios pedidos no enunciado (Figura 29).

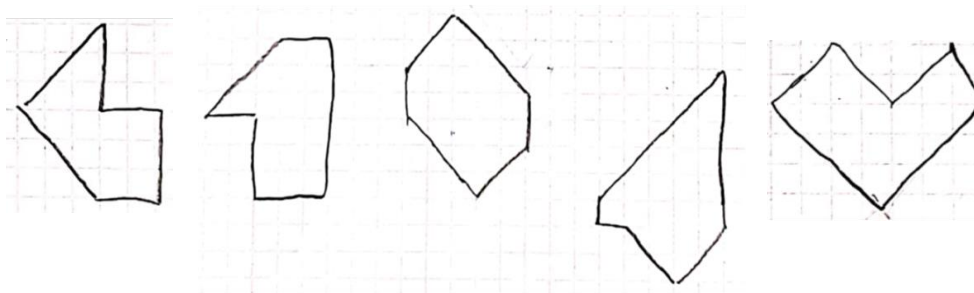
Figura 29 - Figura encontrada pelo Pedro com os critérios pedidos



Durante a descoberta de figuras para responder à Q2 da tarefa, é notória a frustração deste grupo de alunos, uma vez que referem constantemente a dificuldade da mesma e desenhavam sucessivamente figuras com perímetro diferente de vinte e oito. Para estes alunos foi claramente mais fácil encontrar figuras diferentes com seis lados do que associar a esta característica da figura também o facto de ter vinte e oito unidades de perímetro.

Na resposta à Q2, os alunos envolvem-se na procura de figuras com 6 lados, deixando para o fim o cálculo do seu perímetro. Neste sentido, começam a surgir figuras em que os seus lados são constituídos por diagonais de quadrículas, como é possível observar na Figura 30:

Figura 30 - Figuras encontradas pelos vários elementos do grupo B e que não correspondem aos critérios pedidos



A incessante procura de figuras, sem sucesso, no que respeita que correspondessem aos critérios pedidos na Q2, influenciou de imediato a resposta deste grupo à questão seguinte (Q3). Como evidencia a Figura 31 os alunos discordam da “Maria”, uma vez que não conseguiram chegar a pelo menos duas figuras na questão anterior, sendo para si lógico que não conseguiriam chegar a muitas mais na última questão da tarefa. Quando confrontados com a necessidade de justificar a sua resposta, o grupo fá-lo recorrendo à sua dificuldade na descoberta de figuras.

Figura 31 - Resposta final do grupo à Q3 da T2

③ R: Eu não concordo com a Maria porque não conseguimos fazer.

Discussão coletiva sobre a realização da T2:

Na discussão coletiva sobre a realização da tarefa, todos os grupos entraram em consenso relativamente à primeira questão da tarefa e ao facto de as duas figuras apresentadas terem o mesmo perímetro, partindo da “descoberta” das medidas em falta para o seu cálculo, e comparando depois, através do seu cálculo, os perímetros da figura A e da figura B.

Episódio 21:

- 1 Estagiária Catarina: “- Pedro, o que é que estas figuras têm de igual?”
- 2 Pedro (grupo 2): “- As medidas... e o perímetro.”
- 3 Estagiária Catarina: “- Sim, são isoperimétricas. Mas os perímetros das figuras são iguais? Como fizeste?”
- 5 Pedro: “- Sim, porque eu tirei dali três... metade (aponta para o lado que mede 6) e pus neste bocadinho que falta à porta.”
- 6

O Pedro para justificar usou a compensação de medidas dos comprimentos lados das figuras, apontando para um caminho, ainda que informal, de generalização.

Uma vez que o grupo A teve maior facilidade na descoberta de figuras com os critérios pedidos do que o grupo B, apresenta as suas descobertas, explicitando o porquê daquelas figuras corresponderem aos critérios explicitados no enunciado da tarefa, nunca referindo uma “regra geral”, evidenciando novamente o carácter de tentativa-erro das suas descobertas. O grupo B, exprimiu a sua dificuldade em encontrar figuras, acabando por observar as figuras apresentadas pelas colegas do grupo A.

Como foi referido anteriormente, o grupo 2 tomou a diagonal da quadrícula da folha de rascunho como equivalente ao lado desta pelo que, alguns exemplos de figuras apresentados no quadro pelo porta-voz do grupo, se encontravam incorretos, uma vez que o perímetro não era igual a vinte e oito unidades de comprimento, mesmo que a figura tivesse seis lados. Este aspeto foi identificado por mim, durante a exploração autónoma da tarefa em grupo, como importante de ser abordado na discussão coletiva, uma vez que se baseia numa conceção errada, que tinha de ser clarificada.

O episódio 22 evidencia a troca de argumentos entre os alunos da turma, no sentido de esclarecer os elementos do grupo B em relação a este aspeto.

Episódio 22:

- 1 Estagiária Catarina: *(o Pedro desenha no quadro mais figuras encontradas pelo seu grupo)* “- Concordam com o Pedro? Estas figuras são diferentes às que já foram apresentadas pelo grupo 1?”
- 2 Sara (*grupo 1*): “- São quase todas iguais. Só estão numa posição diferente.”
- 3 Estagiária Catarina: “- Verdade. Então quais é que são diferentes?”
- 4 Sara: “- Aquela.” *(aponta para a figura que é um hexágono, mas não obedece às condições de construção explicitadas na tarefa)*
- 5 Estagiária Catarina: “- E será que essa figura tem vinte e oito de perímetro? Tem, Pedro?”
- 6 Pedro (*grupo 2*): “- Sim, olha. *(conta considerando a diagonal da quadrícula como um)*”
- 7 Estagiária Catarina: “- Concordam todos?”
- 8 Turma: “- Sim!”
- 9 Estagiária Catarina: *(desenha um quadrado pequeno no quadro)* “- Vamos imaginar que este quadrado é um quadradinho da vossa folha. Aham que o lado do quadrado vai ser igual a esta “linha” que o atravessa de um lado ao outro e se chama diagonal?”
- 10 Leonor: “- Já não tenho a certeza...”
- 11 Estagiária Catarina: “- Porquê?”
- 12 Leonor: “- Parece maior.”

Após o episódio 22 ficou esclarecido que a diagonal do quadrado não mede o mesmo que o lado do quadrado, concluindo, assim, o grupo B que as figuras por si apresentadas não correspondiam aos critérios pedidos no enunciado.

Na discussão final, embora tenha colocado várias questões de forma que os vários grupos trocassem ideias e, entre si, chegassem a conclusões relativamente a esta tarefa,

os alunos não foram mais além do que da justificação de que encontraram várias figuras partindo de exemplos por si apresentados (exemplificação).

Assim sendo, como forma de sistematização de ideias, adotei a estratégia de exemplificar no quadro da sala, recorrendo ao desenho da figura B, a forma que me parecia mais lógica e simples de resolução desta tarefa. O meu objetivo era que os alunos percebessem de forma prática a compensação entre os lados da figura, e, por isso, procurei ir apagando de forma consecutiva não mais do que dois dos seus lados. Fui colocando aos alunos questões do tipo: Uma vez que a figura estava sucessivamente a diminuir de tamanho, isto é, de área, será que o seu perímetro também estaria a diminuir? Ou será que seria o mesmo?

Os alunos, inicialmente, respondiam inequivocamente que o perímetro já não era vinte e oito e que tinha diminuído. Para esclarecer este aspeto, pedi que calculassem conjuntamente o perímetro da nova figura e, para espanto de muitos alunos, o perímetro manteve-se sempre. Após esta questão, os alunos acabaram por perceber a “lógica” do que estava a acontecer, pelo que procurei deixar explícito que o que estava a ser alterado na figura era sim a medida da sua superfície, a sua área, e não a medida do comprimento da sua fronteira, o perímetro. Desta forma, os alunos conseguiram, com o meu auxílio, concluir que este facto poderia ser aplicado a outro tipo de figuras e que assim, de facto, poderiam ser encontradas “muitas figuras” com o perímetro considerado de uma forma mais prática e sem recorrer à procura de figuras por exaustão.

2. A resolução da Tarefa 3 (T3): “Vamos descobrir as Pirâmides”

Para a terceira tarefa foram distribuídos pelos dois grupos quatro enunciados e quatro folhas de rascunho, no entanto, ambos os grupos acabaram por definir como folha de resposta apenas um dos enunciados.

No que se refere ao domínio da Geometria esta tarefa (Anexo 3), contrariamente às anteriores, aborda uma forma tridimensional, a pirâmide enquanto sólido geométrico, Neste sentido, a tarefa 3 (T3) e a seguinte (T4) surgem com o intuito de os alunos identificarem propriedades comuns das pirâmides e, após a realização da T4, que é idêntica mas referente aos prismas, conseguirem realizar uma comparação entre as características dos dois tipos de sólidos geométricos.

Resolução do Grupo A:

As alunas partem para a exploração da tarefa começando por ler o enunciado da questão número um (Q1), ao mesmo tempo que analisam a figura apresentada e que ilustra aquilo que o enunciado refere. Neste sentido, à alínea a (Q1a) as alunas respondem de imediato referindo que os ‘pauzinhos’ em falta são três, sendo que a Leonor justifica a sua resposta não recorrendo apenas à imagem que evidencia a falta de três pauzinhos na pirâmide (arestas).

Episódio 23:

- 1 (Todas as alunas referem que faltam três pauzinhos)
- 2 Leonor: “- Sim, faltam três, porque oito menos cinco dá três.”
- 3 Margarida: “- Sim, também podemos ver porque aqui na imagem estão três bolinhas
- 4 (vértices) sem nada.”
- 5 Sara: “- São os vértices e na figura faltam as arestas.”
- 6 Leonor: “- Sim, mas se nos perguntarem porque é que são três temos de saber explicar.
- 7 Dizemos esta conta. Se ela (“Ana”) tem cinco pauzinhos e quer oito no total, faltam três.”

No episódio 23 é evidente a “preocupação” da aluna Leonor em justificar as respostas que são dadas, algo que para si pode ter ficado como indispensável em tarefas de raciocínio matemático, tendo já realizado duas nesse sentido. Além disso, é ainda possível perceber que Sara (linha 5), associa de imediato a linguagem simplificada do enunciado à correta designação de ‘pauzinhos’ e ‘bolinhas’ (arestas e vértices, respetivamente).

Relativamente à segunda questão da Q1a, as alunas seguem o mesmo raciocínio referindo que o número total de ‘pauzinhos’ é a “soma dos pauzinhos de baixo com os pauzinhos de cima... oito mais oito”. Nesta fase da tarefa, as alunas explicitam a importância de considerarem que a “Ana” já tem a pirâmide construída, uma vez que assim é mais fácil para si contabilizar a totalidade de arestas da mesma.

No entanto, duas outras alunas discordam no que respeita à resposta final a apresentar e à forma como a justificam. Se por um lado, Sara defende que o grupo deve justificar toda a resposta com base no cálculo do número de arestas recorrendo ao cálculo parcial das mesmas (Figura 32) evidenciando assim o raciocínio que deu origem à resposta, Leonor entende que a resposta do grupo não precisa de ser tão “grande” considerando ser “fácil” de contabilizar as arestas contando logo “oito mais oito” (Figura 33).

Figura 32 - Resposta de Sara à Q1b da T3

- Quantos pauzinhos precisa ao todo?

$$8+5=13 \quad 13+3=16$$

R: Precisa de 16 pauzinhos ao todo.

Figura 33 - Resposta de Leonor à Q1b da T3

- Quantos pauzinhos precisa ao todo?

$$8+8=16$$

Precisa de 16 pauzinhos ao todo.

Na terceira questão da Q1a, relativa à contabilização total do número de ‘bolinhas’ que precisa a “Ana” para construir a sua pirâmide, as alunas chegam à conclusão de que são necessárias nove ‘bolinhas’ porque, segundo Sara, “- são os oito vértices da base mais o do biquinho da pirâmide”. Sara evidencia novamente a vontade de justificar toda a sua resposta com recurso a uma representação simbólica do cálculo (oito mais um), ao que Inês se manifesta contra referindo que a sua colega não precisa de “justificar tudo com cálculos”. Contudo, as alunas do grupo acabam por seguir a opinião de Sara que refere ser importante justificar todo o raciocínio do grupo considerando que “estamos em matemática e, por isso, temos de explicar tudo e como fizemos” (Figura 34).

Figura 34 - Resposta final do grupo A à Q1a da T3

- E quantas bolinhas de plasticina precisa ao todo?

Precisa de 9 bolinhas de plasticina (vértices)

$$8+1=9$$

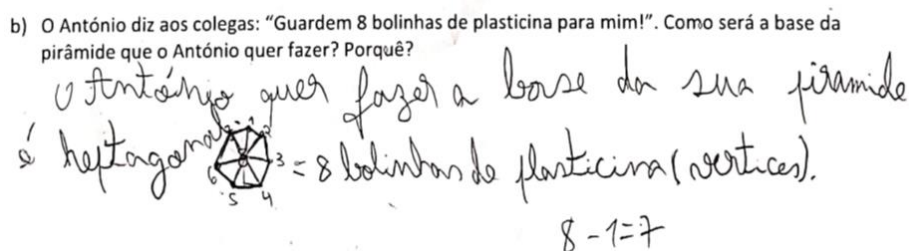
Na alínea b da questão um (Q1b) as alunas têm de relacionar o que foi anteriormente descoberto com um caso particular apresentado no enunciado -Considerando o facto de o “António” necessitar de oito ‘bolinhas’ para construir uma pirâmide como seria a sua base?

Episódio 24:

- 1 Leonor: “- Podemos desenhar...”
- 2 Margarida: “- É uma base heptagonal porque ele precisa de oito, então a base tem sete
- 3 vértices e na pontinha tem o outro. Dá oito.”

Assim que Margarida refere que se trata de uma pirâmide heptagonal (linhas 2 e 3) as restantes colegas começam a desenhar na folha de rascunho uma pirâmide com as mesmas características como forma de comprovar aquilo que a colega acaba de dizer. As alunas concordam com a colega e justificam a sua resposta final com a representação de uma pirâmide heptagonal (figura 35) na qual explicitam a contagem dos vértices.

Figura 35 - Resposta final do grupo A à Q1b da T3



As alunas justificam ainda a sua resposta recorrendo a um cálculo auxiliar ($8-1=7$) considerando que, para saberem o número de vértices da base da pirâmide em questão, ‘descontam’ o vértice que se mantém sempre numa qualquer pirâmide, o vértice do topo.

Na questão número dois (Q2) é apresentado outro caso particular, sendo que as alunas devem, desta vez, descobrir quantos ‘palitos’ (arestas) necessita no total “Marisa” para construir duas pirâmides, uma com nove ‘palitos’ na base e outra com dez.

Episódio 25:

- 1 Margarida: “- Se forem nove, vai precisar de mais um que dá dez.”
- 2 Sara: “- Não percebi...”
- 3 Leonor: “- Sim, é fácil... nove mais um dá dez. Vamos explicar porquê.”
- 4 (Começam a escrever a sua resposta)
- 5 Margarida: “- Espera... meninas... isto são palitos não são bolinhas.”
- 6 Inês: “- Eu pus assim: nove mais um igual a dez.”
- 7 Leonor: “- Não isso está errado. Isso são as bolinhas. Errámos.”

No episódio 25, as alunas começam por interpretar de forma incorreta o enunciado e, por isso, respondem também erradamente à questão. Ao referirem que o número de ‘bolinhas’ seria dado pelo cálculo de ‘nove mais um’ estariam, de facto, a atender ao número de vértices de uma pirâmide. Margarida, apercebe-se do engano, impulsionada por Sara que não entende desde cedo o que as colegas discutem (linha 2), e encaminha o grupo para a resposta correta, sobre o número de arestas.

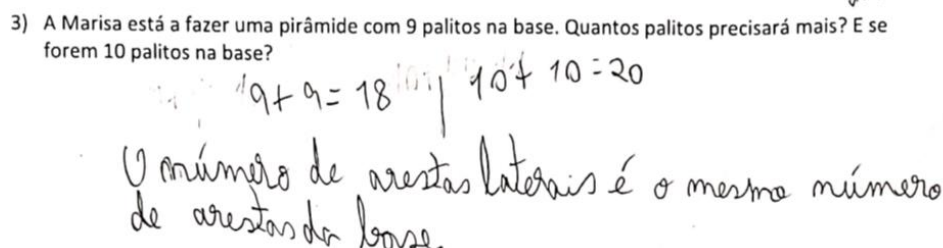
Para responder efetivamente ao questionado, Leonor, começa por visualizar a figura apresentada no enunciado. Com esta estratégia a aluna relaciona as duas pirâmides e chega à resposta correta, tal como evidencia o seguinte episódio.

Episódio 26:

- 1 Leonor: “- Já sei! Aqui na imagem, a base tem oito pauzinhos, nas laterais tem mais oito.
2 Então aqui é igual, mas nove mais nove. E no outro dez mais dez.
3 (Aproximo-me)
4 Estagiária Catarina: “- Então meninas, tudo bem?”
5 Leonor: “- Sim, já descobrimos. É sempre igual. Aqui é nove mais nove e, depois, dez
6 mais dez.”
7 Estagiária Catarina: “- E consegues definir alguma ‘regra’ para isso?”
8 Leonor: (pensa) “- Então, o número de pauzinhos... arestas... da base é sempre igual ao
9 número de arestas de cima.”
10 Estagiária Catarina: “- Só nestas pirâmides ou em qualquer uma?”
11 Leonor: “- Qualquer uma.”

No episódio 26 é evidente a mobilização de processos de raciocínio matemático por parte de Leonor. A aluna explica o seu raciocínio recorrendo à justificação (linha 1 e 2) e, por fim, identifica como “regra geral” o facto de o número de arestas da base de uma pirâmide ser o mesmo que o número de arestas laterais (linhas 8 e 9), generalizando esta propriedade para todas as pirâmides (linhas 10 e 11). Atendendo a esta generalização o grupo de alunas chega à resposta final (Figura 36).

Figura 36 - Resposta final do grupo A à Q2 da T3



No que respeita à quarta questão (Q4) o grupo tem de concordar, ou não, com a afirmação de “Pedro” que refere ser impossível construir pirâmides com treze e quinze arestas. Neste momento aproximo-me do grupo e tento perceber o que estão a discutir.

Episódio 27:

- 1 Margarida: “- Não se pode porque a base da pirâmide tem o mesmo número de arestas
2 que as arestas laterais. Ou seja, é vezes dois.
3 Estagiária Catarina: “- Sim, e o que tem isso a ver com o treze e com o quinze?”
4 Leonor: “- Porque para saber quantas arestas tem a base temos de dividir por dois.”
5 Margarida: “- Sim, e se for treze, tínhamos de dividir por dois e não dá.”
6 Estagiária Catarina: “- Não dá?”
7 Margarida: “- Não, não dá número inteiro. Tem de ser inteiro, senão ficam a faltar paus.”
8 Inês: “Então o que escrevemos?”

9
10

Leonor: “- Não dá para construir com treze e quinze porque não dá para dividir por dois. São dois números ímpares.”

Neste episódio, no que respeita à realização de inferências relativamente à possibilidade de serem construídas pirâmides com treze ou quinze arestas, as alunas acabam por relacionar aquilo que depreenderam nas questões anteriores para responderem. No entanto, acabam por não referir que a impossibilidade de serem construídas pirâmides com o número de arestas enunciado se deve ao facto de estes números serem ímpares, não existindo por parte das alunas a realização de uma generalização dessa impossibilidade ao nível de todas as pirâmides que apresentem hipoteticamente, um número ímpar de arestas.

Na questão três da tarefa (Q3) as alunas devem registar tudo aquilo que ao longo da tarefa descobriram à cerca de pirâmides, nomeadamente, ao nível de propriedades relacionadas com as suas arestas e vértices. Nesta fase da tarefa, o enunciado da tarefa remete as alunas para o processo de generalizar, pelo que o grupo tem de reunir “regras gerais” relativas à classe das pirâmides. Assim sendo, a Figura 37 evidencia a forma como o grupo A finaliza a tarefa respondendo à Q3.

Figura 37 - Resposta final do grupo A à Q3 da T3

5) Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.

Descobrimos que as pirâmides não podem ter números de arestas ímpares e o número de vértices das pirâmides é sempre o número de vértices da base + 1, o número total de arestas de uma pirâmide é sempre o dobro de arestas da base, todas as pirâmides têm o mesmo nº de arestas.

As alunas do grupo A ao registar o que descobriu sobre as pirâmides acabam por mobilizar a generalização como processo de raciocínio matemático, por exemplo, ao referirem que as pirâmides não podem ter número de arestas ímpar e que o seu número de vértices “é sempre” o número de vértices da base mais um. No entanto, estes registos não apresentam justificações que explicitem o porquê destas propriedades das pirâmides, podendo as alunas terem afirmado, após considerarem que “o número total de uma pirâmide é sempre o dobro de arestas da base”, que este aspeto assim é pelo facto do número de arestas da base e das suas laterais serem o mesmo. Importa, contudo, referir

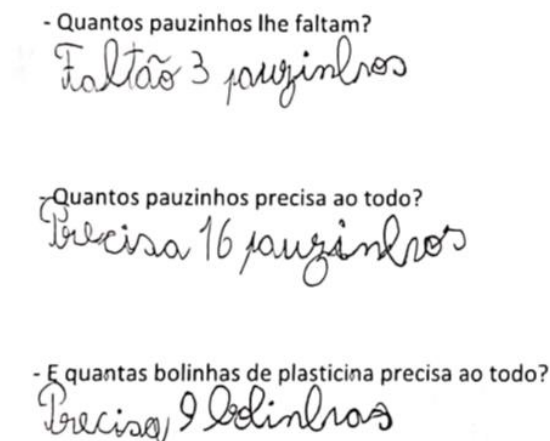
que as alunas em vários momentos da discussão em pequeno grupo explicitaram oralmente o seu raciocínio mobilizando a justificação enquanto processo de raciocínio matemático.

Resolução do Grupo B:

O grupo B leu o enunciado e rapidamente respondeu à primeira alínea da questão um (Q1a) referindo que faltam três pauzinhos à pirâmide da figura apresentada. De seguida, partem para segunda questão desta alínea e, tal como o grupo A, não apresentam qualquer tipo de dificuldade na resolução da mesma. Os alunos conseguem interpretar a figura apresentada e identificar os vértices e as arestas embora não as nomeiem como tal, isto é, mantêm a informalidade do discurso, falando em bolinhas e pauzinhos.

Na última questão da Q1a o grupo de alunos aparenta, numa primeira abordagem, estar reticente quanto à resposta a esta questão. No entanto, Beatriz, afirma que ao todo a “Ana” necessita de nove bolinhas para construir a pirâmide, considerando que têm de “contar as bolinhas que estão em baixo, oito, e acrescentar a que está no topo”. A figura 38 apresenta as respostas finais do grupo à primeira questão da T3.

Figura 38 - Resposta do grupo B à Q1a da T3

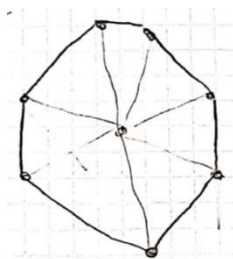


Aquando da leitura da alínea b da Q1, Pedro, refere-se à mesma como “fácil” dizendo imediatamente que a base da pirâmide que o “António” irá construir com oito ‘bolinhas’ tem sete lados, uma vez que no topo há “sempre” uma ‘bolinha’ que se tem de adicionar aos sete da sua base. Neste sentido, o aluno acaba por recorrer à justificação para explicitar o seu raciocínio aos colegas e à generalização ao referir que as pirâmides têm

“sempre” um vértice no seu topo. O grupo concorda com o colega, sendo que a grande dificuldade do grupo é definir uma pirâmide cuja base seja um polígono com sete lados. Após refletirem em grupo o nome de outros polígonos conforme o seu número de lados (exemplo: quadrado, pentágono, hexágono), o grupo chega a heptágono referindo, assim, que a pirâmide do “Antônio” se designa de pirâmide heptagonal. O grupo evidencia, assim, conhecimento geométrico no que respeita à classificação de polígonos quanto ao seu número de lados.

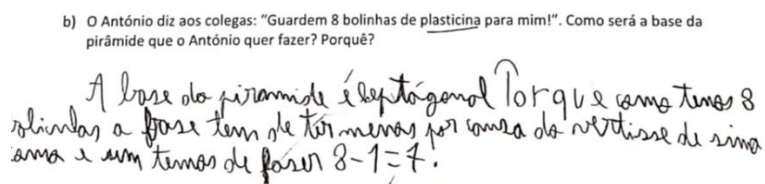
Pedro, sugere que desenhem a figura para justificar a resposta do grupo e seguem uma sugestão minha na fase de apresentação da tarefa no que respeita à representação de pirâmides de forma estará a ser perceptível tridimensional número de arestas e vértices (Figura 39).

Figura 39 - Representação de uma pirâmide heptagonal pelo grupo B para responder à Q1b da T3



Na resposta final, o grupo B, à semelhança do grupo A, apresenta uma igualdade numérica para justificar a sua resposta. Como evidencia a figura 40 os alunos referem que para descobrirem os vértices da base necessitam de retirar o vértice do topo ao que número que é dado no enunciado, isto é, as oito ‘bolinhas’ disponíveis para a construção da pirâmide.

Figura 40 - Resposta final do grupo B à Q1b da T3



Na segunda questão da tarefa os alunos começam por desenhar uma pirâmide com nove arestas na base, manifestando alguma dificuldade no seu desenho. Neste momento, aproximo-me do grupo.

Episódio 28:

- 1 Beatriz: “- Ai, não consigo desenhar uma base com nove lados!”
2 Estagiária Catarina: “- Então? Mas precisas mesmo de desenhar para responder?”
3 Beatriz: “- Eu acho que sim...”
4 Estagiária Catarina: “- O que concluíram aqui nesta? (Q1a)”
5 Beatriz: “- Nesta pirâmide eram dezasseis pauzinhos.”
6 Estagiária Catarina: “- Quantas arestas na base e quantas laterais?”
7 Beatriz: (conta) “- Oito em baixo e oito em cima.”
8 Estagiária Catarina: “- Então e se compararem com as pirâmides que a ‘Marisa’ quer
9 construir?”

Após esta interrogação afasto-me para que o grupo reflita entre si. Atendendo à figura 41 é evidente que os alunos chegaram à conclusão de que o número de arestas da base da pirâmide é igual ao número das arestas laterais, partindo do exemplo enunciado na tarefa. O grupo utilizou a mesma estratégia para responder à segunda parte da questão, concluindo que a “Marisa” precisaria, também, de dez palitos para construir a sua pirâmide.

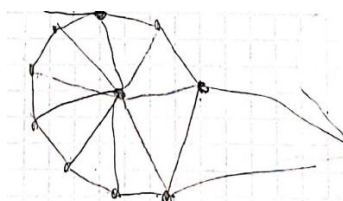
Figura 41- Resposta final do grupo B à Q2 da T3

3) A Marisa está a fazer uma pirâmide com 9 palitos na base. Quantos palitos precisará mais? E se forem 10 palitos na base?

Terá de mais nove palitos para formar a pirâmide se forem 10 palitos na base, porque de mais 10 palitos

Ainda assim, o grupo faz questão de desenhar na folha de rascunho a pirâmide com nove arestas de base para comprovar a sua resposta e, assim, justificar com um exemplo prático a sua resposta (Figura 42)

Figura 42 - Representação do grupo B de uma pirâmide com nove arestas na base para responder à Q2 da T3.



De forma a perceber se os alunos entenderam realmente o porquê do número de arestas da base de uma pirâmide ser igual ao número de arestas laterais, aproximo-me do grupo e questiono:

Episódio 29:

- 1 Estagiária Catarina: “- Então e se eu vos disser que quero construir uma pirâmide com
2 doze arestas de base.... Quantas arestas preciso para as faces laterais da pirâmide?
3 Simão: “- Doze também.”
4 Estagiária Catarina: “- Ok... e o que podem concluir daí?”
5 Beatriz: “- Que precisamos sempre do mesmo número de arestas da base para fazer o
6 resto da pirâmide.” (O restante grupo concorda com Beatriz)

A partir do episódio 29 fico com a percepção de que os alunos entenderam a questão e que não responderam apenas com base na comparação com a figura inicialmente apresentada no enunciado e com as questões anteriormente respondidas.

Na terceira questão da tarefa os alunos chegam à conclusão de que é impossível construir pirâmides com número ímpar de arestas, justificando a sua resposta com recurso a uma generalização, isto é, afirmando que “todas as pirâmides têm de ter um número par de arestas” (Figura 43).

Figura 43 - Resposta final do grupo B à Q3 da T3

- 4) No fim do trabalho, todos os grupos mostram as pirâmides que construíram. A professora pergunta:
- Alguém me pode mostrar uma pirâmide com 13 arestas?..
- Como ninguém responde, a professora pede outra pirâmide com 15 arestas. Então o Pedro responde:
- Não dá para construir pirâmides com esses números.

Achas que o Pedro tem razão? Porquê?

Sim porque todas as pirâmides têm de ter um número par de arestas

A última questão da tarefa surge como forma de sistematizar as propriedades das pirâmides anteriormente abordadas. Neste sentido, os alunos envolveram-se numa discussão de forma a reunir as regras descobertas sobre pirâmides, recorrendo às suas respostas à tarefa para realizar as suas generalizações.

Episódio 30:

- 1 Estagiária Catarina: “- O que descobriram sobre as pirâmides?”
2 Beatriz: “- Os vértices (número total) são sempre o número de vértices da base mais um.”
3 Pedro: “- As pirâmides não podem ser feitas com números ímpares de arestas.”
4 Estagiária Catarina: “- Ok, e conseguem concluir mais alguma coisa em relação às arestas
5 das pirâmides?”
6 Pedro: “- Elas são sempre o mesmo número na base e na lateral...”
7 Estagiária Catarina: “- Sim, e o número total de arestas?”
8 (Os alunos pensam)
9 Pedro: “- Ah! O número total de arestas é o dobro do número de arestas da base. Porque
10 é vezes dois o mesmo número.”

No episódio 30, o grupo B evidencia a descoberta das mesmas “regras” que o grupo A. No entanto, na generalização realizada ao nível do número total de arestas de uma pirâmide, os alunos foram mais além do que considerar que “o número de arestas da base é igual ao número de arestas laterais”. Este grupo, apesar ter chegado à mesma conclusão de que o grupo A, justifica a sua resposta afirmando que “o número total de arestas de uma pirâmide é sempre o dobro das arestas da base”. Assim, opta por relacionar o número total de arestas com o número de arestas da base, concluindo que se trata do dobro (linhas 10 e 11).

Figura 44 - Resposta final do grupo B à Q4 da T3

5) Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.

Tudo o que descobri sobre as pirâmides é que não podemos fazer pirâmides com números ímpares de arestas no total, n.º de vértices da base + 1, o número total de arestas de uma pirâmide é sempre o dobro das arestas da base, as pirâmides têm sempre o mesmo n.º de arestas da base e das laterais.

Discussão coletiva sobre a realização da T3:

Durante a realização da tarefa, nomeadamente na primeira fase desta, os alunos não manifestaram grandes dificuldades. Desta forma, optei por orientar a discussão coletiva como forma de sistematização de ideias que impulsionasse os alunos a justificar de forma conjunta as generalizações formuladas durante a exploração da tarefa, tendo sido esta a maior dificuldade dos grupos de trabalho durante a exploração autónoma e, em particular, no registo escrito das descobertas que fizeram.

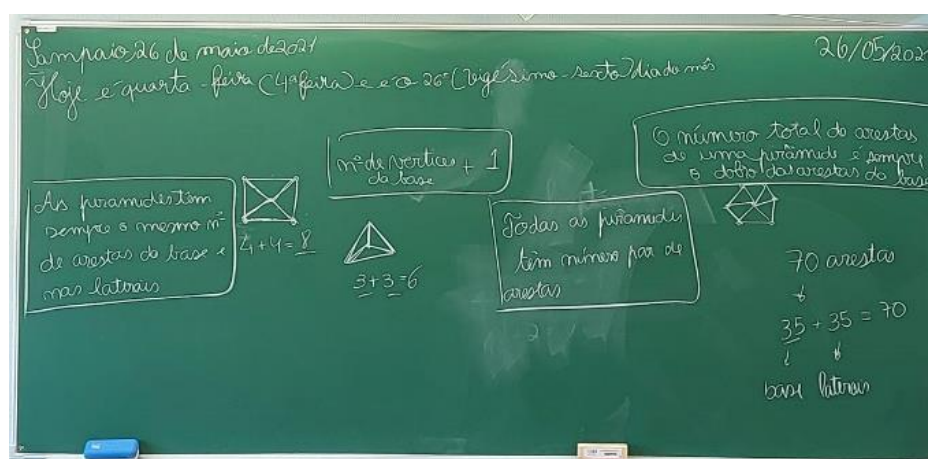
Assim sendo, este momento foi realizado com base numa apresentação oral da resolução da tarefa, considerando que, caso houvesse alguma dúvida por parte de outros grupos de trabalho, os grupos A e B iriam esclarecer. Este aspeto serviu para que eu, enquanto professora estagiária, avaliasse a perceção dos alunos relativamente ao que foi feito em pequeno grupo e ter assim conteúdo de análise de dados. O episódio 30 evidencia-o, uma vez que um aluno do grupo C, não envolvido no estudo, quando questionado por mim em relação às conclusões retiradas pelo seu grupo relativamente às pirâmides mostrou algumas dificuldades e, nesse momento, o grupo A é chamado, por mim, a intervir.

Episódio 31:

- 1 Diogo (grupo C): “- O nosso grupo descobriu que o número de vértices são os vértices da
2 base mais o de cima e que as arestas é o que está na base.”
3 Estagiária Catarina: “- Ok... O grupo A, concorda?”
4 Sara: “- Nós temos mais coisas.”
5 Estagiária Catarina: “- Mas concordam com tudo aquilo que o grupo do Diogo
6 descobriu?”
7 Leonor: “- Não concordo com o que disse sobre as arestas.”
8 Estagiária Catarina: “- Porquê?”
9 Leonor: “- Porque as pirâmides além das arestas da base também têm arestas laterais,
10 senão era um cone.”
11 Estagiária Catarina: “- Porquê um cone?”
12 Leonor: “- Porque era liso à volta, não tinha arestas. A pirâmide tem.”

Este episódio, mostra que o grupo A, nomeadamente a Sara e a Leonor, conseguiram ajudar o colega a melhorar a sua resposta, identificando características das pirâmides e recorrendo também a características de um outro sólido (cone) para ajudar o colega a perceber corretamente uma pirâmide, uma vez que só estava a considerar a existência de arestas na sua base. No seguimento deste episódio os dois grupos (A e C) realizaram de forma conjunta uma síntese das descobertas obtidas. Considerando que o grupo A, a par do grupo B, realizou mais descobertas, naturalmente, os seus elementos acabaram por assumir o controlo da discussão coletiva justificando o porquê das suas descobertas. Descobertas essas que foram formuladas coletivamente e escritas no quadro da sala como forma de sistematização das propriedades das pirâmides (Figura 45).

Figura 45 - Sistematização no quadro das descobertas realizadas na T3



Ainda com o intuito de perceber se os alunos entenderam as generalizações realizadas, questionei-os sobre a possibilidade de se construir uma pirâmide com setenta arestas relativamente à descoberta “O número total de arestas de uma pirâmide é sempre o dobro das arestas da base”.

Episódio 32:

- 1 Beatriz: “- Com setenta? Eu acho que não.”
- 2 Simão: “- Dá sim, é um número par.”
- 3 Estagiária Catarina: “- Porque dizes isso Simão?”
- 4 Simão: “- Então, porque se o número total de arestas de uma pirâmide é o dobro do
- 5 número de arestas da base, quer dizer que elas têm sempre o mesmo número. Se o setenta
- 6 é um número par podemos dividir por dois. Dá trinta e cinco arestas na base e trinta e
- 7 cinco arestas nas laterais. Por isso, dá.”

O episódio 32 evidencia que Simão (grupo B) entendeu a generalização realizada, evidenciando o facto de o número das arestas da base ser o mesmo das laterais, estabelecendo assim uma relação de dobro entre o número total de arestas da pirâmide e o número de arestas da base ou laterais. No mesmo sentido, o aluno relaciona ainda este aspeto com o facto de o número total de arestas de uma pirâmide ter de ser sempre um número par.

3. A resolução da Tarefa 4 (T4): “Vamos descobrir os Prismas”

Como foi mencionado anteriormente, a última tarefa implementada em contexto de estágio, assemelha-se muito à T3, sendo que o que difere é incidir sobre propriedades dos prismas em vez de pirâmides. Além disso, na última questão da T4, os alunos têm de preencher um quadro comparativo sobre propriedades de pirâmides e prismas, de modo a sistematizar (Anexo 4).

Resolução do Grupo A:

À primeira questão (Q1) da T4, o grupo de alunas quando é questionado sobre a quantidade ‘pauzinhos’ em falta na figura apresentada de forma que seja construído um prisma, evidenciam alguma confusão no que respeita à sua perceção de prisma.

Episódio 33:

- 1 Inês: “- Faltam cinco pauzinhos.”
- 2 (No momento vou a passar e paro perto do grupo)
- 3 Leonor: “- Sim, pois é.”
- 4 Estagiária Catarina: “- Porquê cinco?”
- 5 Inês: (recorre à figura do enunciado e para cada vértice conta uma aresta para cima) “-
- 6 Então: um, dois, três, quatro, cinco.”
- 7 Estagiária Catarina: “- O que é um prisma?”
- 8 Inês: “- Um prisma é...”
- 9 Leonor: “- Ah pois... um prisma não é assim. (...) Tem duas bases”.

Atendendo ao episódio 33 é evidente que Inês, numa primeira abordagem à tarefa, confunde prismas com pirâmides, uma vez que ao contabilizar a falta de cinco ‘pauzinhos’ considera que os prismas apresentam apenas uma base (linhas 1 a 6). As

alunas corrigem a sua resposta, considerando que um prisma tem de ter sempre duas bases, pelo que faltam à “Sara” e ao “Pedro” dez arestas. Na sequência desta afirmação as alunas respondem imediatamente à segunda questão da Q1, referindo que ao todo são precisos quinze ‘pauzinhos’ uma vez que “- aos cinco pauzinhos que já lá estão temos de acrescentar os dez que faltam”. Por outro lado, no que respeita ao número total de vértices do prisma (‘bolinhas’) as alunas concluem que o prisma ao ter cinco vértices na sua base precisa de mais cinco na segunda base perfazendo um total de dez.

Na questão dois (Q2) é apresentado mais um caso particular de um prisma, sendo que as alunas têm de descobrir o polígono a base do prisma que o “António” vai construir com trinta ‘pauzinhos’.

Episódio 34:

- 1 Leonor: “- Já sei, será com quinze pauzinhos, porque é metade de trinta.”
- 2 Inês: “- Não. A pergunta é como será a base do prisma.”
- 3 Leonor: “- Sim, mas vai ter quinze pauzinhos na base.”
- 4 Sara: “- Ok, mas pode não ser.”
- 5 Leonor: “- Ah, não... tem de ser trinta a dividir por três. Porque são as duas bases e as
- 6 laterais que unem as duas bases”.
- 7 Margarida: “- A base tem dez pauzinhos. Será uma base em forma de decágono.”

Com o episódio 34 é novamente possível observar a dificuldade de as alunas visualizarem mentalmente um prisma. Apesar de saberem que um prisma tem duas bases iguais, não retêm que essas duas bases têm de estar unidas entre si por mais arestas. No entanto, quando Leonor (linhas 5 e 6) refere que a operação a fazer seria uma divisão por três, evidencia ter em consideração que estas três partes do prisma (duas bases e faces laterais) são constituídas pelo mesmo número de arestas (cinco). Além disso, Margarida (linha 7) ao referir que a sua base será um decágono evidencia conhecimento ao nível da classificação de polígonos atendendo às suas propriedades, neste caso, o seu número de lados.

Na questão três (Q3) o grupo A tem de opinar relativamente ao diálogo entre “Sara” e “Pedro”. “Sara” quer construir um prisma com vinte e cinco vértices e “Pedro” não concorda dizendo que, com vinte e cinco vértices, é apenas possível construir uma pirâmide.

Episódio 35:

- 1 Margarida: “- Porque um prisma não é uma pirâmide.”
- 2 Leonor: “- Não. Porque nós na outra ficha tínhamos visto que não dava para construir
- 3 uma pirâmide com número ímpar. E vinte e cinco é um número ímpar. (...) E vinte e
- 4 cinco a dividir por três dá quanto?”
- 5 Margarida: “- Não dá inteiro.”

Leonor, no episódio 35, evidencia estar a fazer confusão entre as propriedades dos vértices e das arestas de uma pirâmide. Apesar de considerar que é impossível construir uma pirâmide com vinte e cinco arestas, dizendo que este é um número ímpar, no que respeita às propriedades das arestas de prismas acaba por concluir corretamente que tendo vinte e cinco arestas não consegue dividi-las de forma igual pelas três partes do prisma.

As alunas acabam por escrever a sua resposta dizendo que nenhum dos dois tem razão.

Episódio 36:

- 1 Leonor: “- Não concordamos com nenhum.”
- 2 Estagiária Catarina: “- Então?”
- 3 Leonor: “- É porque o Pedro disse assim ‘Um prisma não consegues, só uma pirâmide’,
- 4 mas uma pirâmide não dá.”
- 5 Estagiária Catarina: “- Não? Porquê?”
- 6 Sara: “- Porque não dá para fazer com números ímpares.”
- 7 Estagiária Catarina: “- Então, mas nas pirâmides o que sabiam sobre os vértices das
- 8 pirâmides?”
- 9 Leonor: (pensa) “- Na pirâmide era o número de pauzinhos da base mais um.”
- 10 Estagiária Catarina: “- De arestas?”
- 11 Sara: “- Vértices.”
- 12 Estagiária Catarina: “- Então e eu não posso ter uma pirâmide com vinte e quatro vértices
- 13 na base mais um em cima?”
- 14 Sara: “- Mas nós na outra vimos que não se podia fazer...”
- 15 Estagiária Catarina: “- E eram os vértices ou as arestas?”
- 16 Leonor: “- Eram as arestas...”
- 17 Estagiária Catarina: “- Então eu acho que não leram bem a pergunta.”
- 18 Leonor: “- Ah pois é!! Então o Pedro tem razão.”

No episódio 36, é evidente que as alunas tinham lido mal a pergunta e, consequentemente, feito confusão entre as propriedades das arestas e vértices de uma pirâmide, uma vez que mostram conhecer as propriedades relativas às pirâmides, exploradas na tarefa T3. Contudo, a resposta final do grupo (figura 46) não reflete aquilo que as alunas discutiram em grupo, uma vez que durante o trabalho em pequeno grupo acabam por concluir a impossibilidade de serem construídos prismas com vinte e cinco arestas, uma vez que dividindo este número por três (quantidade associada ao facto de um prisma ter o mesmo número de arestas nas duas bases e laterais) resulta um número não inteiro, tornando-se impossível a sua construção. Neste momento, as alunas chegam inclusivamente a concluir que o resultado desta operação de dividir tem de ser sempre um número inteiro, uma vez que é impossível construir-se primas com “metades de vértices”.

Figura 46 - Resposta final do grupo A à Q3 da T4

3. Em seguida, a Sara diz ao Pedro: "Vamos construir um prisma com 25 vértices", mas o Pedro não concorda e diz-lhe: "Um prisma não consegues, só uma pirâmide".
Achas que o Pedro tem razão? Porquê?

Sim, porque não dá para ter número de vértices ímpares, pois 25 é ímpar.

Na quarta questão (Q4) apesar de as alunas concluírem que "- os prismas não podem ter número de vértices ímpar" (figura 47) acabam por não justificar a sua resposta.

Figura 47 - Resposta final do grupo A à Q4 da T4

4. Regista agora tudo o que descobriste sobre os prismas.

Descobrimos que os prismas não podem ter número de vértices ímpares.

A figura 48 reflete as descobertas do grupo A em relação aos dois sólidos trabalhados nas T3 e T4 e que evidencia o recurso à generalização enquanto processo de raciocínio matemático. Além de descobertas relacionadas com o número de vértices e arestas, trabalhadas especificamente nas tarefas T3 e T4, as alunas, concluíram facilmente propriedades relativas ao número de faces e de bases das pirâmides e prismas.

Figura 48 - Descobertas do grupo A sobre prismas e pirâmides na Q5 da T4

5. Preenche o quadrado seguinte com as tuas descobertas sobre prismas e pirâmides e compara-as.

	Prismas	Pirâmides
Vértices	<i>Os prismas não podem ter o número de vértices ímpares.</i>	<i>Os vértices das pirâmides, são os vértices da base + 1.</i>
Arestas	<i>As arestas dos prismas são o triplo do número de arestas da base.</i>	<i>As arestas das pirâmides tem de ser número par.</i>
Faces	<i>É o número de bases laterais + 2 e as faces laterais não sempre são triângulos.</i>	<i>É o número de faces laterais + 1 e as faces são sempre triângulos.</i>
Bases	<i>As Bases dos prismas não sempre 2.</i>	<i>As bases da pirâmides é sempre 1.</i>

Resolução do Grupo B:

O grupo B respondeu facilmente à Q1 da tarefa, evidenciando que conhecem as propriedades de um prisma. Relativamente à Q2 os alunos também referem rapidamente

a sua resposta, considerando que são precisas “- dez arestas para cada uma das bases do prisma” e “- mais dez para as ligar” sendo que a maior dificuldade deste grupo foi chegar à denominação de uma base com dez lados. No entanto, acabam por desvalorizar esse aspeto, uma vez que no enunciado não é pedida a denominação do polígono das bases do prisma (decágono).

Episódio 37:

- 1 Pedro: “- Quanto é que é vinte e cinco a dividir por 2?”
2 Simão: “- É 12,5.”
3 Pedro: “- Pois, virgula cinco... precisamos de um número igual nas duas bases. Então
4 concordamos com o Pedro porque se dividirmos vinte e cinco por dois...”
5 Beatriz: “- Por dois não, por três.”
6 Pedro: “- Não, é por dois. É vértices não são arestas (...) Se dividirmos vinte e cinco por
7 dois dá um número decimal. Por isso não dá para construir prismas com número decimais
8 de vértices.”
9 Simão: “- Não... não é por dois é por três.” (A divisão de vinte e cinco)
10 Pedro: “- Não... é por dois. Por três são as arestas porque tem arestas nas duas bases e
11 nas laterais que unem as bases. Tu por acaso metes bolinhas nas laterais do prisma?”
12 Simão: “- Não. Tens razão.”

No episódio 37 é evidente que Pedro tem consciência das partes constituintes de um prisma e, por isso, mobiliza esse conhecimento para responder à Q3 e explicar o seu raciocínio aos colegas que duvidam daquilo que afirma (Beatriz, linha 5, e Simão, linha 9). Neste sentido, o aluno reconhece que os prismas têm duas bases e que cada base apresenta o mesmo número de vértices e, por isso, o cálculo a realizar seria uma divisão por dois. Além disso, também evidencia que saberia responder se a questão fosse direccionada para o número de arestas, dividindo, assim, por três. (linhas 10, 11 e 12)

Embora não o tenha explicitado o porquê, o aluno é capaz de discernir que pelo facto de a divisão não ser inteira é impossível construir prismas nessas condições (não existem metades de vértices).

O grupo B assume as propriedades anteriormente descobertas para responder para responder à Q4, pelo que não são evidentes grandes dificuldades nesse aspeto. Os alunos registam propriedades relativas ao número total de vértices, afirmando que têm de ser pares. Após uma pequena indecisão em que me dizem que não descobriram nada em relação ao número de arestas dos prismas, acabam por concluir que, para descobrir o número total de arestas de um prisma, necessitam de fazer “- vezes três porque temos três partes do prisma com arestas” (duas bases e parte lateral) concluindo, assim, que se trata do “- triplo” (figura 49).

Figura 49 - Resposta final do grupo B à Q4 da T4

4. Regista agora tudo o que descobriste sobre os prismas.

Registamos mais nada da parte de pirâmides e prismas com um número total de vértices igual e o número de arestas no total tem de ser o triplo do número de arestas da base.

Na última questão da tarefa (Q5) o grupo opta por começar pelas descobertas realizadas sobre pirâmides na T3 e revela que ainda se recorda das propriedades das mesmas (figura 50). Durante o registo das propriedades, Simão, compara aquilo que estão a registar ao nível das arestas dos prismas e das pirâmides. O aluno conclui que “- é diferente” pois, enquanto nos prismas se trabalha com o triplo das arestas da base para obter o número total, nas pirâmides é o dobro.

À semelhança do que aconteceu com o grupo A e, uma vez que tanto nesta como na tarefa anterior, o grupo apenas se tinham focado na procura de propriedades relativas aos vértices e às arestas dos sólidos estudados, confronta-se, nesta fase da tarefa, com a necessidade de definir “regras” também para as suas faces e bases, em particular. Ao nível das bases estes concluíram a diferença entre os dois sólidos, mesmo que durante a exploração esta diferença tenha ficado subentendida e considerada como verdade inquestionável dado o conhecimento do grupo em relação aos sólidos em questão. Por outro lado, no que respeita às faces dos prismas e pirâmides, os alunos, associam a estas o número total de arestas, adicionando, no caso do prisma, mais duas faces correspondentes à base e, no caso das pirâmides, mais uma face da sua única base.

Figura 50 - Descobertas do grupo B sobre prismas e pirâmides na Q5 da T4

5. Preenche o quadrado seguinte com as tuas descobertas sobre prismas e pirâmides e compara-as.

	Prismas	Pirâmides
Vértices	Nos prismas o número total de vértices é sempre o dobro de um base.	Nos pirâmides o número total de vértices é igual ao número de vértices da base mais um no topo.
Arestas	Nos prismas o número total é sempre o triplo do número que está na base.	O número de arestas nas pirâmides é sempre o dobro do número da base.
Faces	O número de faces dos prismas é sempre o mesmo número de vértices da base mais duas faces das bases.	O número de faces das pirâmides é sempre o mesmo número de vértices da base mais uma face da base.
Bases	Os prismas têm sempre duas bases iguais.	As pirâmides só têm uma base.

Discussão coletiva sobre a realização da T4:

Tal como se sucedeu na T3, a discussão coletiva decorreu com o intuito dos alunos formularem generalizações justificadas, não só relativamente aos prismas, mas também em relação às pirâmides, estabelecendo uma comparação ao nível das propriedades dos dois sólidos. Neste sentido e, considerando que não existiram dúvidas que tivessem persistido até ao momento da discussão coletiva, posso considerar que, à semelhança do que aconteceu na T3, relativamente à primeira parte da tarefa, os grupos manifestaram facilidade na comunicação oral, em grande grupo, das resoluções feitas pequeno grupo.

Os grupo A e B evidenciaram segurança nas suas afirmações durante a discussão coletiva da T4. Além disso, os dois grupos de alunos participantes na investigação documentada neste relatório desempenharam um papel importante na sistematização de resultados e, sobretudo, no esclarecimento de dúvidas, em alguns momentos com o meu auxílio, de alunos de outros grupos que também exploraram a mesma tarefa.

Capítulo V - Considerações finais

O último capítulo deste relatório remete para uma síntese do estudo realizado, considerando o caminho até ao tema escolhido e as opções metodológicas adotadas. Além disso, são respondidas as questões de investigação enunciadas na introdução deste relatório, articulando a análise de dados realizada com o referido por autores que investigam a mesma temática. Por fim, é feita uma reflexão final do projeto, identificando as aprendizagens e dificuldades sentidas durante este processo enquanto estudante, professora estagiária e investigadora.

Síntese do estudo

Iniciei este projeto com a escolha de um tema que me fizesse sentido. Esta foi desde sempre uma preocupação, ainda na licenciatura. Sempre soube da responsabilidade desta decisão, uma vez que tinha consciência de que seria um processo moroso e que durante algum tempo da minha vida estaria apenas focada nesse tema e, por isso, teria de gostar realmente daquilo em que estaria debruçada para que o processo fosse mais fácil. Para mim, a matemática sempre foi uma área de interesse, sobretudo desde a entrada para o ensino superior. Na Escola Superior de Educação de Setúbal, aprendi a ver a matemática com outros olhos e, por isso, ao escolher esta área, acreditei que num momento de intervenção associado à investigação que realizei, poderia ajudar as crianças, como eu um dia fui, a olhar a matemática de outra forma.

O objetivo da minha investigação é: promover o raciocínio matemático de alunos do 4.º ano de escolaridade. A partir do objetivo do estudo foram identificadas duas questões que nortearam toda a investigação: “Que processos de raciocínio matemático usam os alunos quando resolvem tarefas de geometria com grau de desafio elevado?” e “Que dificuldades manifestam os alunos no uso de processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas geometria com grau de desafio elevado?”.

Este projeto de investigação foi realizado seguindo uma metodologia de investigação-ação, numa turma de 4.º ano durante as dez semanas do segundo estágio realizado em contexto de 1.º Ciclo, numa escola situada numa localidade do distrito de Setúbal. Seguiu uma abordagem qualitativa tendo procurado descrever, compreender e interpretar os resultados obtidos desta investigação. Para tal, foram implementadas quatro tarefas matemáticas com grau de desafio elevado com vista a responder às questões

anteriormente mencionadas e, no fundo, promover o raciocínio matemático nestes alunos. As quatro tarefas foram exploradas sempre por dois grupos de quatro alunos cujos desempenhos foram observados por via da observação participante como principal técnica de recolha de dados. Como meios de registo das observações foram implementados instrumentos de registo de áudio, fotográfico e vídeo para registar os testemunhos dos alunos aquando da exploração das tarefas. As produções escritas dos alunos, isto é, as resoluções em grupo das tarefas, resultaram na recolha documental essencial no procedimento de análise dos dados recolhidos.

Resposta às questões de estudo

A presente secção vem dar resposta às questões anteriormente enunciadas, através da análise que realizei dos dados recolhidos, permitindo, assim, tirar algumas conclusões face ao estudo realizado.

- Que processos de raciocínio matemático usam os alunos quando resolvem tarefas de geometria com grau de desafio elevado?

No que respeita à utilização de processos de raciocínio matemático por parte dos alunos enquanto resolveram tarefas de geometria com elevado grau de desafio, posso considerar que as crianças mobilizaram alguns embora de forma pouco consistente, tendo sido este aspeto algo recorrente nas respostas que foram apresentando. Este aspeto poderá estar relacionado com as características das tarefas, diferentes das que os alunos costumavam resolver nas aulas, bem como com o tipo de trabalho e envolvimento dos alunos, próprios de uma abordagem de tipo exploratório. Em vários momentos da exploração das tarefas, os alunos apresentaram conceções de ideias, conceitos e procedimentos matemáticos incorretos que, com a minha intervenção, foram esclarecidas de forma a encaminhá-los para a formulação de um raciocínio correto. Estas ações por parte do professor são para Mata-Pereira e Ponte (2016) ações que promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Ao longo de toda a intervenção, os sucessivos questionamentos da minha parte no sentido de perceber aquilo que pensavam os alunos, de os interrogar e, também para esclarecer dúvidas parecem ter contribuído para mobilizarem conhecimentos prévios na resolução das várias tarefas.

A análise das produções dos alunos e das suas intervenções nas discussões coletivas permite-me concluir que para responderem às questões enunciadas, o processo de raciocínio mais utilizado pelos grupos de alunos que participaram na investigação

realizada, foi a justificação, embora de forma incipiente e, em alguns casos, incentivadas por mim. Uma vez que, raciocinar, para Boavida e Menezes (2012, p. 289), remete para “usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir”, é possível concluir que os alunos ao mobilizarem a justificação como processo, raciocinaram matematicamente. O uso da justificação evidente em todas as tarefas T1, T2, T3 e T4, na medida em que, tanto elementos do grupo A como do grupo B mobilizaram a justificação como forma de resposta, e enquanto processo de raciocínio, embora em alguns casos de forma elementar e incipiente, sobretudo nas primeiras tarefas. Aliado ao processo de justificar, surge igualmente o processo de exemplificar evidente na discussão coletiva da T2 quando uma aluna do grupo A justifica a sua posição recorrendo aos exemplos encontrados pelo seu grupo e, assim, complementar a sua justificação.

Ao longo da investigação foi sendo notória uma diferença significativa na mobilização de processos de raciocínio, consequência do trabalho que ia sendo realizado durante a exploração das tarefas que constituem a proposta pedagógica. Este aspeto foi mais evidente nas duas últimas tarefas implementadas, “Vamos conhecer as pirâmides” (T3) e “Vamos conhecer os prismas” (T4), em que as resoluções dos grupos participantes se caracterizaram por ser mais completas, com mais elementos associados a conceitos geométricos e a propriedades dos sólidos em causa, tendo sido utilizada pelos alunos uma estratégia de comparação das características e propriedades das figuras em análise. Nestas duas tarefas, foi evidente uma maior facilidade na mobilização da generalização, sendo evidente em alguns casos o uso da expressão “todas as pirâmides” ou “todos os prismas” ou outras expressões semelhantes, para generalizar características gerais destes sólidos, mesmo que os alunos não estivessem conscientes da sua utilização nas respostas às questões. Este aspeto evidenciou-se tanto nas produções escritas dos grupos como nas discussões coletivas associadas às tarefas T3 e T4.

Nas duas últimas tarefas (T3 e T4), além de mobilizarem o processo de generalizar, os alunos à semelhança do que aconteceu nas primeiras tarefas, mantiveram o uso da justificação como processo de raciocínio, estando este intimamente relacionado com a generalização. Um exemplo de justificação intimamente relacionado com o processo de generalizar ocorreu quando uma aluna do grupo A, durante a exploração da T3, mobiliza estes dois processos em simultâneo (episódio 25 da T3) para referir uma propriedade das pirâmides.

Neste sentido, é possível concluir que os alunos dos 4.º ano do 1.º CEB mobilizaram, durante a resolução das tarefas matemáticas propostas, essencialmente a justificação, generalização e exemplificação como processos de raciocínio matemático. Mesmo que a mobilização destes processos não tenha sido uma constante durante todas as tarefas, é notório um desenvolvimento no seu raciocínio matemático em geral, não esquecendo a faixa etária dos alunos em estudo. Ao longo do tempo, com uma maior apropriação pelo tipo de tarefa, os alunos foram sendo cada vez mais capazes de mobilizar processos de raciocínio matemático uma vez que, segundo o DGE-ME (2013) citado por Brunheira (2019, p. 9) a sua aprendizagem é promovida de forma “progressiva, na qual se caminha etapa a etapa, respeitando a estrutura própria de uma disciplina cumulativa como a matemática”.

2) - Que dificuldades manifestam os alunos no uso de processos de raciocínio matemático na resolução de tarefas geométricas com grau de desafio elevado?

Ao longo da realização das tarefas propostas foi sendo evidente a dificuldade dos alunos em exprimir o seu raciocínio, fosse este em forma de registo escrito ou oralmente. Em algumas situações foi notória a dificuldade em transpor para a folha de resposta aquilo que haviam explicado oralmente quando questionados sobre a resposta a apresentar, não sabendo como responder ou esquecendo-se do que haviam dito oralmente no grupo. Além disso, foi evidente o desconforto face à exploração de tarefas com grau elevado de desafio, sobretudo nas primeiras abordagens (T1 e T2) em que os alunos assumiam como “impossível” a sua concretização, manifestando uma consequente dificuldade em usar raciocínio matemático e os seus processos.

A primeira tarefa (T1) foi aquela em que os alunos sentiram mais dificuldades, tendo sido o primeiro contacto dos mesmos com este tipo de tarefa e abordagem exploratória. Este facto foi previsto por mim aquando da preparação desta tarefa, uma vez que estas tarefas se caracterizam por não ter respostas diretas, sendo estritamente necessário o uso de raciocínio matemático. Além disso, a implementação em simultâneo de uma abordagem de ensino exploratório, em que a comunicação e argumentação matemática são essenciais numa metodologia com várias fases distintas e com tempo distribuídos, tornaram este processo ainda mais exigente para os alunos.

Além disso, na T1 os alunos sentiram igualmente dificuldades na apropriação do papel pontado e da noção do conceito e propriedades de um quadrado, tendo se manifestando

consequentemente as suas dificuldades na expressão de ideias matemáticas por escrito ou oralmente. Por outro lado, na T2 os alunos apresentaram conhecimento matemático ao nível do cálculo do perímetro de figuras, pelo que as dificuldades surgiram no âmbito da compreensão e exploração da tarefa, sobretudo, na procura de figuras com as características pedidas no enunciado. Esta terá sido a tarefa que mais dificuldades suscitou nos alunos a nível global tendo sido, por isso, a mais demorada na sua realização.

Como foi anteriormente referido, nas duas últimas tarefas (T3 e T4), foi evidente um maior conforto dos alunos na exploração das tarefas e na mobilização dos processos de raciocínio matemático ao responderem às questões. No entanto, em alguns momentos, foram sentidas dificuldades ao nível da visualização dos sólidos (pirâmides e prismas), resultando este aspeto no uso de conceções incorretas por parte de alguns alunos, mas que acabaram por suscitar, de forma positiva, o debate em grupo.

Ainda que os processos de raciocínio matemático usados pelos alunos se caracterizem, frequentemente, por ser incipientes tendo em conta o contexto, a faixa etária dos participantes e o tipo de tarefa utilizado, é importante salientar a pertinência de um trabalho de continuidade nos vários níveis de ensino em torno do raciocínio matemático e seus processos através de tarefas desafiadoras, de forma que as crianças tenham consciência destes e da sua existência. Neste sentido, o professor ao estar “consciente dos processos de raciocínio que pretende que os seus alunos alcancem (...) para que realizem generalizações e justificações (...) está certamente a contribuir para que o raciocínio matemático faça parte da sua aprendizagem” (Mata-Pereira & Ponto, 2016. p. 41). Assim sendo, existindo este trabalho de forma contínua, atendendo ao que é sugerido por documentos reguladores como as Aprendizagens Essenciais de Matemática (DGE-ME, 2020, 2021), o raciocínio matemático deverá tornar-se como algo cada vez mais natural e implícito no trabalho dos alunos ao realizarem tarefas matemáticas que se requerem desafiantes.

Reflexão sobre o estudo

Chegar até aqui, levou tempo. Tempo esse que foi necessário, tendo sido um processo longo, com a tomada de algumas decisões, por vezes repensadas, e que tornaram hoje possível a concretização deste relatório.

Como seria de esperar parti para este estágio com o nervoso natural de quem vai para o desconhecido. Os primeiros dias foram para conhecer o contexto e perceber se

realmente o caminho anteriormente escolhido seria o ideal. Com a ajuda da docente orientadora do relatório desenvolvi, durante este período, as tarefas a serem implementadas nas aulas, sempre com um objetivo: serem tarefas altamente desafiadoras e com grau de dificuldade elevado.

A implementação destas tarefas tinha o intuito de proporcionar aos alunos momentos de raciocínio matemático, tendo a sua exploração decorrido melhor do que eu própria esperava. Como foi referido anteriormente na introdução, esta turma não estava de todo familiarizada com este tipo de tarefas, em que as respostas não eram obtidas de forma direta, estando implícito a mobilização de processos de raciocínio matemático. Além disso, recorri a uma abordagem de ensino exploratório, desconhecida para os alunos até à altura do estudo. Da minha parte e, considerando que tive contacto direto nas aulas de Didática da Matemática com esta metodologia de ensino na exploração de algumas das tarefas implementadas, tendo sido também eu objeto de estudo enquanto estudante, sinto que sempre estive confortável na dinamização das aulas.

Neste processo, é essencial um trabalho antecipado de previsão de respostas e dificuldades por parte dos alunos na exploração das tarefas, de forma a não ser apanhada desprevenida na identificação das estratégias usadas pelos alunos e das dificuldades por eles manifestadas. Realizar o nosso próprio trabalho de casa enquanto profissionais e planear milimetricamente a nossa intervenção é, sem dúvida, um hábito que levo para a minha vida profissional. Ainda assim, há sempre imprevistos que surgem, por exemplo, uma estratégia em que não pensei, mas até para lidar com esses imprevistos de forma correta na sala de aula é importante ter pensado e antecipado estratégias e dificuldades dos alunos.

Durante este período de estágio tive de articular vários “eus”. O “eu” Catarina, pessoa, que tem a sua vida pessoal, por vezes, esquecida; o “eu” estudante, que continua a ter aulas, ainda que em regime misto, mas com as suas responsabilidades e deveres; o “eu” estudante- professora estagiária-investigadora com a necessidade de implementar tarefas e recolher dados para o relatório de investigação, ao mesmo tempo que tem de planificar semanalmente aulas de acordo o desenvolvimento do currículo que é necessário concretizar em todas as áreas disciplinares. A isto, acresce a dificuldade de ter uma colega de estágio exatamente na mesma situação, articulando com ela todos estes momentos para que nenhuma saísse prejudicada. Apesar de considerar que tudo isto faz parte do processo,

assumo que a sobrecarga trouxe implicações que se manifestaram na forma como encarei o que se seguiu. Assumo o receio, mascarado de cansaço, em começar efetivamente o processo de desenvolvimento deste relatório. Senti necessidade de parar e aproveitar o verão como forma de repor energias para o que me esperava. Passados dois meses, comecei a trabalhar na área e motivada pela perspectiva de futuro escrevi as primeiras linhas e, até então, foi um processo consistente, com algumas interrupções, é verdade, mas naturais neste caminho.

Acabou por ser um processo moroso, mas repleto de aprendizagens, um pouco mais do que eu própria esperei e defini, num momento em que a vida profissional na área se iniciava ao mesmo tempo que a vida académica ainda terminava. Existem oportunidades na vida que não podemos dizer que não e esta foi uma delas, mesmo que soubesse à priori que seria muito difícil de gerir. A pressão de corresponder ao que muitos esperavam de mim, por muito que isso fosse um incentivo, nem sempre se tornou um aspeto positivo.

Não foi fácil conciliar estes dois mundos tão diferentes, mas tão iguais no esforço e dedicação necessários. A juntar a esta instabilidade física e emocional, a insegurança e medo de ser incapaz, sobretudo durante a análise e tratamento dos dados recolhidos, colocando incessantemente, a mim própria, as seguintes questões: “- Será que estes dados são suficientes para aquilo que me predispus investigar?”; “- Será que vou conseguir tirar conclusões?”. Estas questões que sempre pairaram sobre mim e me fizeram ter medo de avançar e depois de estagnar fazem-me hoje pensar, com o processo quase concluído, que vale sempre a pena arriscar, independentemente do resultado, mesmo que voltar atrás seja o caminho.

Hoje sei que o esforço valeu a pena e que, com mais ou menos dificuldades, também elas necessárias para crescer e aprender, consegui realizar este projeto de investigação, pleno de aprendizagens.

Referências

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.
- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica.
- Afonso, N. (2005). *Investigação Naturalista em Educação: Um guia prático e crítico*. (1ª ed.). Edições ASA.
- Assunção, L. (2019). O raciocínio geométrico na formação inicial. Em L. Assunção, O *Desenvolvimento do raciocínio geométrico na formação inicial de professores dos 1ºanos*. Lisboa: Universidade de Lisboa - Instituto de Educação.
- Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar.
- Boavida, A. M., & Menezes, L. (2012). Ensinar Matemática desenvolvendo as capacidades de resolver problemas, comunicar e racionar: contornos e desafios. *Práticas de Ensino da Matemática*.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Geometria e Medida no Ensino Básico*. Lisboa: Direção-Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Canavarro, A. P. (novembro/dezembro de 2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*.
- Ciência, M. d. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: MEC.
- Ciência, M. d. (2018). *Aprendizagens essenciais de Matemática 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGE.
- Cortez, A. (2014). *A Geometria no 1º Ciclo – As dificuldades na visualização espacial de alunos do 4º ano do 1ºCiclo do Ensino Básico (Dissertação de Mestrado)*. Beja: Instituto Politécnico de Beja.
- Coutinho, C. P. (2016). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: teoria e prática*. Coimbra: Edições Almedina.
- DGE-ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa.

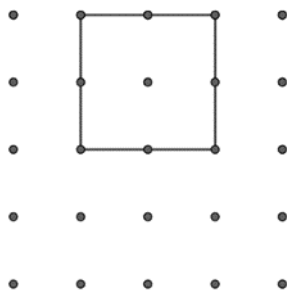
- DGE-ME. (2012). *Programa e Metas Curriculares Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DGE-ME. (2018). *Aprendizagens Essenciais: Matemática 4.ºano 1.ºCiclo do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DGE-ME. (2021). *Aprendizagens Essenciais Matemática 4.ºano do 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Gomes, C. S., Brocardo, J. L., Pedroso, J. V., Carillo, J. L., Ucha, L. M., Encarnação, M., . . . Rodrigues, S. V. (2017). *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That. *Teaching Children Mathematics*.
- Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning for Teaching Mathematics in Prekindergarten–Grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2016 de Abril/Maio/Junho de s.d). Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. *Espaço GTI: Educação e Matemática*.
- NCTM. (2000). Principios e Normas para a Matemática Escolar. *Raciocínio e Demonstração: Normas para os Anos 3.º-5.º*. Lisboa: Associação de Professores de matemática.
- NCTM. (2017). *Princípios para a Ação - Assegurar a todos o sucesso em matemática*. Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2016). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática* (156).
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (Abril/Maio/Junho de 2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática* (156).

Anexos:

Anexo 1 – Tarefa “Quantos quadrados?”

Tarefa: “Quantos quadrados?”

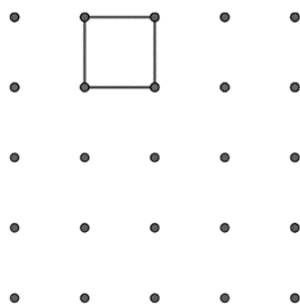
- 1) No papel pontado 5x5, podemos desenhar quadrados, tal como mostra a figura.



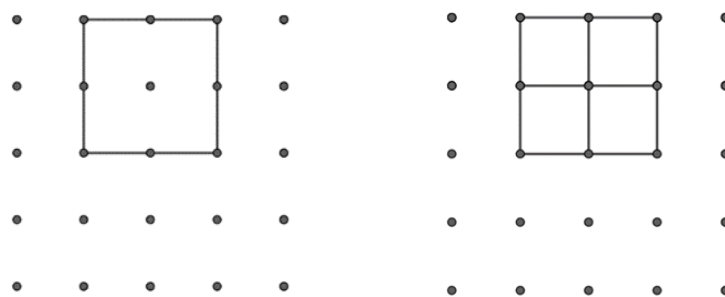
- 1- Desenha, no teu papel pontado, dois quadrados diferentes. Explica porque os consideras diferentes um do outro.
- 2- Desenha mais quadrados diferentes no papel pontado. Compara os quadrados que desenhaste com os que desenharam os elementos do teu grupo. São diferentes ou são os mesmos? Explica porquê.
- 3- O Rui diz que há mais de 6 quadrados diferentes que se podem construir no papel pontado 5x5. Concordas? Explica porquê.
- 4- Após chegarem a um acordo sobre o número de quadrados diferentes desenhados, entre todos os elementos do grupo, recorram à folha de registo do grupo e desenhem agora a resposta final do grupo.

Parte 2

- 1) Calcula a área de todos os quadrados que o grupo descobriu, sabendo que a área do quadrado seguinte é 1:



Para calculares, por exemplo, a área do quadrado seguinte, debes pensar quantas vezes ‘cabe’ o quadrado de área 1 neste quadrado.

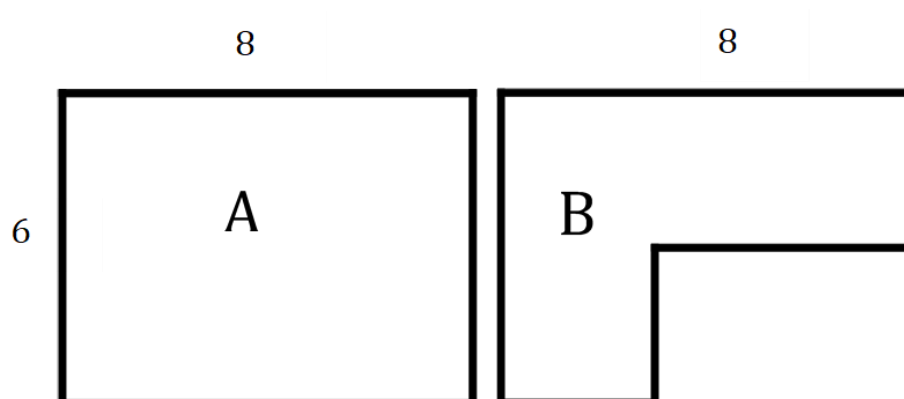


Como ‘cabe’ 4 vezes, então a sua área é 4.

Procede do mesmo modo para calculares a área de cada quadrado que o grupo desenhou. Podes fazer desenhos e esquemas.

Anexo 2 – Tarefa “Comparar perímetros”

Comparar perímetros



1. Compara os perímetros das figuras A e B. Qual das figuras terá maior perímetro? Ou será que têm o mesmo perímetro?
2. Desenha duas figuras com 6 lados e com o mesmo perímetro de B. (Podes usar papel quadriculado).
3. A Maria diz que há muitas figuras com 6 lados que têm o mesmo perímetro de B. Concordas? Explica porquê.

Anexo 3 – Tarefa “Vamos descobrir as Pirâmides”

Tarefa: “Vamos descobrir as Pirâmides”²

1. O grupo da Marisa, da Ana, do Pedro e do António está a construir pirâmides com pauzinhos e bolinhas de plasticina, mas os alunos têm pouco material.
 - a) A pirâmide da Ana tem na base uma figura com 8 pauzinhos. No topo já colocou 5 pauzinhos, como mostra a imagem.
 - b)
 - Quantos pauzinhos lhe faltam?
 - Quantos pauzinhos precisa ao todo?
 - E quantas bolinhas de plasticina precisa ao todo?
 - c) O António diz aos colegas: “Guardem 8 bolinhas de plasticina para mim!”. Como será a base da pirâmide que o António quer fazer? Porquê?
 - 3) A Marisa está a fazer uma pirâmide com 9 palitos na base. Quantos palitos precisará mais? E se forem 10 palitos na base?
 - 4) No fim do trabalho, todos os grupos mostram as pirâmides que construíram. A professora pergunta:
— *Alguém me pode mostrar uma pirâmide com 13 arestas?*”.

Como ninguém responde, a professora pede outra pirâmide com 15 arestas. Então o Pedro responde:

— *Não dá para construir pirâmides com esses números.*

Achas que o Pedro tem razão? Porquê?
 - 5) Regista agora tudo o que descobriste sobre as pirâmides.

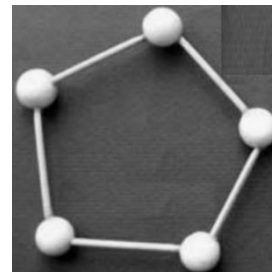
² Adaptado dos materiais do projeto REASON

Anexo 4 – Tarefa “Vamos descobrir os Prismas”

Tarefa: “Vamos descobrir os Prismas”³

1. A Sara e o Pedro estão a construir prismas com pauzinhos e bolinhas de plasticina. Observa o que já fizeram e responde.

- Quantos pauzinhos lhe faltam?
- Quantos pauzinhos precisam ao todo?
- E quantas bolinhas de plasticina precisam ao todo?



2. O António pede à professora 30 pauzinhos para construir um prisma. Como será a base do prisma que ele quer construir? Porquê?
3. Em seguida, a Sara diz ao Pedro: “Vamos construir um prisma com 25 vértices”, mas o Pedro não concorda e diz-lhe: “Um prisma não consegues, só uma pirâmide”.
Achas que o Pedro tem razão? Porquê?
4. Regista agora tudo o que descobriste sobre os prismas.
5. Preenche o quadrado seguinte com as tuas descobertas sobre prismas e pirâmides e compara-as.

	Prismas	Pirâmides
Vértices		

³ Adaptado dos materiais do projeto REASON

Arestas		
Faces		
Bases		