

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCADORES DE INFÂNCIA MARIA ULRICH

**REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NA RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS
OU
A “ARTE” DE REPRESENTAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO
NO 1º ANO DE ESCOLARIDADE**

Crisália Fernanda Durães Silva

Relatório Final realizado no âmbito da Área Científica de

Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico

Orientadora: Mestre Maria Teresa Macara

Co-Orientadora: Mestre Maria Paula Rodrigues

Lisboa,

julho de 2014

O essencial é invisível aos olhos ...

A. St. Exupéry, 1995, p.72

Ao meu filho, meu maior
feito, que, em segredo, trouxe
consigo toda a beleza e um
novo sentido à vida.

AGRADECIMENTOS

Ao chegar até esta etapa torna-se imprescindível transmitir por palavras escritas, de forma a conservá-las e mante-las vivas, toda a minha gratidão aos que me acompanharam e apoiaram ao longo deste percurso particularmente importante na minha vida.

À professora Rosa Nogueira, pela amizade, partilha de saberes, disponibilidade constante, e pela forma afectuosa com que me apoiou e orientou ao longo deste último estágio.

À professora Teresa Marcara, por manifestar de uma forma singular e contagiante a magia e o encanto de se ser professora. Pelo sorriso amigo e encorajador, pela disponibilidade e exigência na realização deste relatório final.

À professora Paula Rodrigues, pela amizade demonstrada, disponibilidade, exigência e pelo rigor científico com que me orientou ao longo deste relatório, contribuindo de forma significativa para o meu enriquecimento profissional mas também pessoal.

À professora Vera Malhão, por todas as aprendizagens e por demonstrar – me com o seu apoio e dedicação que quando menos esperamos existe sempre alguém pronto a ajudar-nos.

À professora Helena Mota pela partilha de conhecimentos, pela constante disponibilidade, pelo apoio e incentivo.

A todas as minhas colegas de trabalho, mas em especial à Zita Duarte, Sandra Correia, Sandra Pinéu, Teresa Fonseca, Carla Antunes, Isabel Rafael, Cristina Mateus e Fátima Santos, que diariamente com uma paciência inesgotável me acompanharam, apoiaram e ampararam ao longo desta jornada. Sinto-me privilegiada por fazerem parte da minha vida e estou grata por todos os vossos gestos repletos de carinho e palavras

carregadas de coragem, que para mim tornou tudo mais simples e mais fácil, e possível o meu sonho tornar-se verdade. Mais do que meras colegas, sinto-vos como minhas amigas e agradeço-vos da forma mais terna possível.

Ao meu marido pela confirmação do seu amor, por tudo o que prescindiu, pela paciência e aceitação da minha ausência. Por ter acreditado que seria capaz desde o primeiro instante e por estar presente quando mais precisei.

À Vânia Marques pelos momentos de estudo partilhados, pelas constantes brincadeiras e gargalhadas, pela descoberta de uma nova e bonita amizade.

Ao Marco Duarte e à Ângela, que comigo caminharam nesta ultima etapa, pelo companheirismo, pelos desabafos e sorrisos partilhados, pela vossa força e preocupação nos momentos mais frágeis, por me mostrarem de uma forma colorida que, de qualquer forma, sobre um teto de nuvens brilha sempre o sol para cada um de nós.

À Direção da Escola onde realizei este estudo, que sempre mostrou o seu apoio e máxima disponibilidade. À Educadora Andreia Madureira e à Professora cooperante Vanda Mendonça pela forma generosa com que me receberam nas suas salas, pela partilha de conhecimentos, pela compreensão, carinho e apoio constante demonstrado na minha busca por caminhos pedagógicos.

A todas as crianças com quem me cruzei ao longo deste percurso, e que me possibilitaram aprender tanto e com elas viver momentos inesquecíveis, mas em especial aos alunos do 1º ano, pelo entusiasmo com que me receberam, pelo empenho e cooperação, tornando possível a concretização deste trabalho.

Ao meu pai por todo o cuidado, amor e carinho com que me educou.

Mas é a ti, minha querida mãe, a quem faço o meu maior agradecimento. Por me ensinares a sonhar, a amar a vida e a vivê-la em cada instante com determinação, coragem e esperança. Porque és tu a principal responsável por tornar tudo isto possível de ser

concretizado. Essencialmente, por tudo o que me deste e pela pessoa que és, trago-te no meu coração tendo a certeza que nele irás para sempre permanecer.

A todos o meu muito OBRIGADA!

RESUMO

O presente relatório insere-se na Unidade Curricular de Prática de Ensino Supervisionada (PES) e resulta da análise do contexto e da experiência profissionalizante, vivenciada ao longo do estágio realizado numa turma do 1º Ano do 1º Ciclo do Ensino Básico, num estabelecimento de ensino privado localizado no concelho de Alenquer.

Desta forma, este estudo visa *identificar e compreender as representações que os alunos do 1º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas que envolvem a subtração e a multiplicação no seu sentido combinatório*, partindo de duas questões norteadoras: i) Que representações utilizam os alunos do 1º ano de escolaridade para resolverem enunciados envolvendo a subtração e o sentido combinatório da multiplicação; ii) De que forma as representações dos alunos permitem ao professor identificar o conhecimento matemático dos mesmos?

Para o desenvolvimento deste estudo optou-se por uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, através da análise das representações matemáticas dos alunos na resolução de dois problemas propostos (subtração e a multiplicação no sentido combinatório) onde interessou mais o processo que os resultados.

Os resultados deste estudo revelaram que as representações mais utilizadas pelos alunos desta turma/ano/idade são as representações do tipo icónico e as do tipo simbólico, embora, estes dois tipos de representação tenham sido utilizados de formas diferentes e com funções distintas pelos alunos ao longo da resolução dos três problemas propostos. Os elementos icónicos serviram como suporte ao raciocínio matemático e como base para determinar a solução.

No enunciado da multiplicação no sentido combinatório o elemento icónico mais utilizado foi o diagrama em rede, e no enunciado da subtração o elemento icónico mais utilizado foram os símbolos não convencionais/representativos do real, sendo que estas representações serviram como apoio às representações simbólicas.

Verifica-se que a comunicação a que dão lugar as representações permite ao professor identificar e compreender qual o conhecimento matemático que esteve subjacente à interpretação e resolução apresentadas nos problemas propostos.

Palavras-chave: resolução de problemas, representações, professor.

ABSTRACT

This report is part of the Course of Supervised Teaching Practice (PES) and results of the analysis of the context and professional experience, experienced during the internship in a class of Year 1 of the 1st cycle of basic education, in a school private located in the borough of Alenquer.

Thus, this study aims to *identify and understand the representations that the students of the 1st grade use in solving problems involving subtraction and multiplication in its combinatorial sense*, from two guiding questions: i) What representations utilize students 1st grade to solve statements involving subtraction and multiplication of combinatorial sense; ii) How do the representations students enable the teacher to identify the mathematical knowledge of them?

To carry out this study we chose a methodology of qualitative research, by analyzing the mathematical representations of the students in solving two problems proposed (subtraction and multiplication in combinatorial sense) where more interested in the process than the results.

The results of this study revealed that the representations used by most students in this class / year / age are iconic representations of the type and kind of symbolic, though, these two types of representation have been used in different ways and with different functions by students throughout the three proposed resolution problems. Iconic elements served as support mathematical reasoning and as a basis to determine the solution.

As implied multiplication in combinatorial sense the most iconic element was used in a network diagram, and in the wording of the iconic element subtraction were used more unconventional / symbols representative of the real, and these representations served as support for symbolic representations.

It appears that the statement to which they give rise representations allows the teacher to identify and understand which mathematical knowledge that underpinned the interpretation and resolution tabled the proposed problems.

Keywords: problem solving, representations, professor.

ÍNDICE

Introdução.....	1
Percurso Formativo	2
A Prática de Ensino Supervisionada	3
A) Pertinência do Estágio, Intervenientes e Contributos.....	3
B) Contexto de Estágio.....	4
Emergência e Pertinência do Tema	9
Problemática	10
Organização do Relatório.....	12
 Capítulo I - Enquadramento Teórico.....	14
1.1. Resolução de Problemas no Ensino da Matemática.....	15
1.1.1. Problemas	17
1.1.2. Etapas na Resolução de Problemas.....	18
1.1.3. Estratégias de Resolução de Problemas	19
1.2. Representações no Ensino da Matemática.....	22
1.2.1. Representações Internas	25
1.2.2. Representações Externas	26
1.2.3. Representações Idiossincráticas	29
1.2.4. Modos de Representação	31
1.2.4.1. Representação Ativa	31
1.2.4.2. Representação Icónica	32
1.2.4.3. Representação Simbólica.....	39
1.3. O Papel das Representações na Resolução de Problemas	43
1.4. O Papel do Professor nas Representações Matemáticas dos Alunos	48
 Capítulo II - Metodologia.....	51
2.1. Opções Metodológicas	52
2.2. Participantes.....	55
2.2.1. A Turma	55
2.2.2. A Estagiária Investigadora	56
2.2.3. O Professor.....	56

2.3. Procedimentos.....	56
2.4. Instrumentos de Recolha de Dados.....	57
2.4.1. Os Documentos Produzidos pelos Alunos	58
2.4.2. Notas de Campo.....	59
2.5. Técnica de Tratamento de Dados.....	59

Capítulo III – Representações Matemáticas no 1º Ano de Escolaridade, Ou A “Arte” De Representar o Pensamento Matemático

<i>Representar o Pensamento Matemático</i>	61
3.1. Os Alunos e as Tarefas	62
3.1.1. Tarefa 1: <i>Todos no Sofá</i>	63
3.1.2. Tarefa 2: <i>O Aniversário da Urbi</i>	77
3.2. Conclusões.....	83
3.2.1. Quanto à Natureza das Representações	83
3.2.2. Quanto à Compreensão das Trajetórias de Pensamento	86
3.3. Considerações Finais.....	89
3.4. Limitações e Novas Perspetivas.....	90

Referências Bibliográficas

Anexos.....

ÍNDICE DE ANEXOS

Anexo I – Tarefas Propostas aos Alunos no Âmbito da Investigação

- Tarefa 1 – Todos no Sofá
- Tarefa 2 – O Aniversário da Urbi

Anexo II – Notas de Campo (NC)

- NC, nº 1
- NC, nº 2
- NC, nº 3
- NC, nº 4
- NC, nº 5
- NC, nº 6
- NC, nº 7

ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1- Processos de translação (Janvier, 1987).....	27
--	----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 – Desenho no problema <i>As aranhas</i> – Helena.....	33
Figura 2 – Desenho no problema <i>As aranhas</i> – Marcos.....	34
Figura 3 – Desenho e símbolos matemáticos no problema <i>As aranhas</i>	34
Figura 4 – Símbolos não convencionais no problema <i>O número de rodas</i>	36
Figura 5 – Diagrama em rede na resolução do problema da rã.....	37
Figura 6 – Diagrama em matriz na resolução do problema dos desportos.....	37
Figura 7 – Diagrama de hierarquia na resolução do problema do voleibol.....	38
Figura 8 – Diagrama parte-todo na resolução do problema do parque.....	38
Figura 9 – Representações simbólicas no problema <i>As aranhas</i>	41
Figura 10 – Níveis de atividade (adaptado de Gravameijer).....	46
Figura 11 – Ilustração do enunciado da tarefa 1.....	63
Figura 12 – Tarefa 1.1 – <i>Todos no Sofá</i> – Marco.....	63
Figura 13 – Tarefa 1.1 – <i>Todos no Sofá</i> – António.....	64
Figura 14 – Tarefa 1.2 – <i>Todos no Sofá</i> – Carla.....	65
Figura 15 – Tarefa 1.2 – <i>Todos no Sofá</i> – Marco.....	66
Figura 16 – Tarefa 1.2 – <i>Todos no Sofá</i> – Luís.....	67
Figura 17 – Tarefa 1.2 – <i>Todos no Sofá</i> – Maria.....	68
Figura 18 – Tarefa 1.2 – <i>Todos no Sofá</i> – Bela.....	68
Figura 19 – Tarefa 1.3 – <i>Todos no Sofá</i> – João.....	69
Figura 20 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – Marco.....	70
Figura 21 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – João.....	71
Figura 22 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – Luís.....	72
Figura 23 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – Mário.....	73
Figura 24 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – Maria.....	74
Figura 25 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – Marta.....	75
Figura 26 – Tarefa 1.4 – <i>Todos no Sofá</i> – António.....	76
Figura 27 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – Marta.....	77
Figura 28 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – João.....	78
Figura 29 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – Marco.....	79
Figura 30 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – Maria.....	80

Figura 31 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – Luís.....	81
Figura 32 – Tarefa 2 – <i>O aniversário da Urbi</i> – António.....	82

INTRODUÇÃO

*Podem imaginar como fiquei intrigado com esta
meia confiança sobre "os outros planetas".
Esforcei-me, pois, por saber alguma coisa mais.*

A. St. Exupéry, 1995, p.16

O presente Relatório Final inscreve-se na Área Científica de Prática de Ensino Supervisionado - PES, composta pela unidade curricular de Estágio e Investigação em Educação.

Tem como objetivo relatar o processo de aprendizagem realizado na prática de ensino, no estágio concretizado no 1º Ciclo do Ensino Básico, no período de 26 de novembro de 2013 a 28 de fevereiro de 2014, e, ainda, dar a conhecer a atividade investigativa que emergiu ao longo deste período e gerou o interesse em aprofundar a problemática que se prende com a natureza e papel das representações construídas pelos alunos no desenvolvimento do seu raciocínio matemático, aquando da resolução de problemas.

Percurso Formativo

São sempre infinitas as formas com que a vida é capaz de nos levar até mais perto do nosso sonho. Chegar até esta etapa do meu percurso formativo é o culminar de um caminho que decidi percorrer numa dada altura, pelo desafio que representava. Decisão esta que foi tomada por acreditar que nada vale o tempo se nada fizermos dele, se não servir para melhorar o que somos e para dar aos outros o melhor de nós mesmos.

Sendo a minha inspiração as crianças e a Educação, sem mais devaneios, porque o tempo sempre insiste em passar muito rapidamente, iniciei a minha viagem por um curso de Auxiliar de Ação Educativa. E foi ao longo do estágio desse curso, realizado na valência de Educação Pré-Escolar que, pela primeira vez, vivenciei um contexto de “escola”, do ponto de vista do adulto.

Deste tempo, dedicado às crianças mais pequenas e à sua aprendizagem, guardo na minha memória as vozes, os choros, gestos e palavras que tanto me cativaram e que acabariam por reforçar o meu gosto e interesse em prosseguir viagem pelo mundo do ensino.

Essencialmente, fiquei convicta de que junto das crianças existem momentos perfeitos, quando sentimos que são tão grandes em nos fazer acreditar, de uma forma que só elas sabem como é, que vale sempre a pena investir num ensino de qualidade. Mesmo que perante dificuldades ou obstáculos a coragem teime em escorregar das nossas mãos, mesmo que na força das circunstâncias, ao tentar, se falhe, porque falhar é também uma

forma de aprender, o importante é desbravar caminhos até à construção de um ensino de qualidade que se deseja e que dele assim se espera, porque “ensinar exige a convicção de que a mudança é possível” (Freire, 2004, p. 76).

Desta forma, optei por ingressar na Licenciatura em Educação Básica, na Escola Superior de Educadores de Infância Maria Ulrich, com o desejo de aprender como seria possível, enquanto Educadora de Infância, dar o melhor de mim às crianças, como é possível transformar o Jardim de Infância num espaço onde não se esgota o riso, a linguagem dos afetos, da curiosidade, da imaginação e o encanto das crianças em aprender, crescer e construir um futuro melhor.

Chegada ao terceiro ano da Licenciatura, tornou-se inevitável a escolha do Mestrado a seguir e, através da oportunidade de realizar um primeiro estágio de contacto com a prática profissional do 1º Ciclo do Ensino Básico, este veio determinar a minha escolha em continuar a formação académica, para além da Educação Pré-Escolar, também no Ensino do 1º Ciclo do Ensino Básico. Senti nesta altura que já tinha aprendido muito, mas, estranhamente, o muito ainda se revelava ser tão pouco, havia tanto para aprender, tinha que prosseguir a minha jornada. Afinal, o ensino tinha-me conquistado e o fascínio crescia a cada instante.

É, então, chegada a altura de realizar o meu último estágio do Mestrado, como Prática de Ensino Supervisionada, na valência do 1º Ciclo do Ensino Básico.

A Prática de Ensino Supervisionada

a) Pertinência do estágio, intervenientes e contributos

O tempo de estágio é uma etapa fulcral no percurso académico, sendo uma extraordinária oportunidade de formação e crescimento profissional. Neste sentido, enquanto aluna estagiária/professora, ele permitiu-me conciliar o conhecimento científico adquirido ao longo do meu percurso formativo com um conhecimento que nasceu pela experiência em prática pedagógica, contribuindo desta forma para desenvolver competências e conhecimentos sobre a prática docente. Como refere Estrela (2010) “A profissão docente estabelece um conjunto articulado de saberes, saberes-fazer e atitudes.” (p. 67), que inevitavelmente são alicerçados pela dialética entre a teoria e a prática da ação pedagógica.

Foi durante o estágio, a partir do contexto educativo, que tive a oportunidade de conhecer e compreender uma metodologia de ensino, o modo como um professor ensinava e a forma com os alunos verdadeiramente aprendiam, tendo em conta as suas peculiaridades e singularidades, os seus interesses e necessidades. Essencialmente, foi um período que me permitiu constatar o quanto é determinante a ação pedagógica do professor no processo de aprendizagem dos alunos.

Nesta perspetiva, permitiu-me ainda ficar convicta e consciente que ser professor implica um processo contínuo de formação e aprendizagem. Ficou para mim evidente que ser professor se traduz num desafio diário, precisamente pela exigência de uma constante atitude reflexiva, analítica, investigativa, que deverá ser desenvolvida pelo diálogo, pela partilha de saberes e experiências entre as crianças e toda a comunidade educativa, uma vez que o professor,

(...) deve estabelecer uma nova relação com quem está aprendendo, passar do papel de “solista” ao de “acompanhante”, tornando-se não mais alguém que transmite conhecimentos, mas aquele que ajuda os seus alunos a encontrar, a organizar e gerir o saber, guiando, mas não modelando os espíritos, e demonstrando grande firmeza quanto aos valores fundamentais que devem orientar toda a vida. (Delors *et al.*, 1996, p.154)

Este último estágio do mestrado, realizado na valência do 1º Ciclo do Ensino Básico, teve como supervisão pedagógica a Professora Rosa Nogueira, e a colaboração da professora cooperante da sala do 1º ano e os respetivos alunos, tendo sido todos estes elementos decisivos no processo da minha aprendizagem e investigação sobre a prática.

b) Contexto de estágio

O estágio decorreu num estabelecimento de educação e ensino privado que iniciou a sua atividade no ano de 1998 e se situa em Alenquer, 36 Km a norte de Lisboa, cuja localização geográfica é caracterizada pelo sossego e tranquilidade característico de um meio rural.

O colégio dá resposta a quatro valências distintas, sendo estas: Creche, Jardim-de-Infância, 1º Ciclo do Ensino Básico e atividades extracurriculares. Os alunos que frequentam o colégio são oriundos de estratos de médio e alto nível social, económico e cultural.

O Projecto Educativo (PE) do colégio consagra a orientação educativa do mesmo, explicitando princípios, valores, metas e estratégias para dar cumprimento à respectiva missão educativa, definindo as orientações gerais para a formação integral dos alunos.

O colégio privilegia princípios educativos que dão prioridade à dignidade da pessoa humana em todas as suas dimensões.” Não se trata propriamente de formar o homem, mas de criar condições para que ele, individualmente e colectivamente, consiga ser ele próprio nos diversos contextos da sua vida. Não se trata de «conformar» o homem ao mundo e à sociedade, mas de o tornar capaz de «transformar» o mundo e as estruturas sociais concretas ao experimentar e vivenciar valores” (PE, 2004, p.5)

O tema do atual projecto educativo é «Educar para a cidadania – Educar para valores» assenta na construção e consolidação de quatro ordens de valores: humanistas, culturais, ecológicos e desportivos. E será válido durante três anos lectivos, tendo iniciado no ano letivo 2010/11, terminando no ano letivo 2013/14. ”A avaliação final deste Projeto é da competência da Direção Pedagógica que ouvirá os representantes da comunidade educativa.” (PE, 2004, p.19)

O grupo da sala do 1º ano, onde partilhei a minha prática pedagógica, é composto por dez crianças, cinco raparigas e cinco rapazes, com idades compreendidas entre os seis e sete anos. Apenas uma das crianças do grupo, com sete anos de idade, não frequentou o jardim-de-infância do colégio.

O grupo é caracterizado como heterogéneo, devido a diferenças existentes tanto ao nível cognitivo como emocional. As crianças apresentam autonomia e à vontade que lhes permite recorrer à ajuda do adulto sempre que necessitam. São alunos assíduos e de uma forma geral pontuais. As crianças são bastante curiosas e afectuosas demonstrando com facilidade os seus sentimentos. O grupo é bastante conversador e tem interiorizado os princípios e as regras de boa convivência entre os seus pares. Contudo, a criança que tem mais idade e que entrou este ano para o colégio, como já anteriormente mencionei, apresenta com bastante regularidade comportamentos desajustados, quer entre os seus colegas da turma, quer com os adultos em geral.

Relativamente às áreas disciplinares, o grupo apresenta uma maior dificuldade na área do Português, o que acredito ser natural num 1º ano de escolaridade. O seu maior interesse incide na área da Matemática e das Expressões, mais especificamente na expressão plástica.

A turma tem uma professora titular do quadro do colégio que prevê acompanhá-los até ao 4º ano de escolaridade. A sua metodologia pedagógica centra-se na abordagem dos conteúdos a partir dos manuais escolares, sendo o seu objetivo que os alunos concluam a resolução dos exercícios propostos nos manuais das diversas áreas até ao final do ano letivo.

A professora procurava abordar as diversas áreas curriculares ao longo da semana, segundo os dias e o tempo em que as mesmas estavam presentes no horário da sala, embora na maior parte das vezes isso não acontecesse, porque o seu objetivo principal centrava-se em corresponder no momento aos interesses e necessidades dos alunos.

A professora com facilidade verbalizava o seu gosto pelo ensino mostrando rigor no conhecimento dos conteúdos lecionados.

O Plano Curricular de Sala (PC) contempla o início e a consolidação progressiva de aprendizagens consideradas elementares e nucleares, no âmbito da formação pessoal e social, dirigidas à construção de bases do saber. Estas permitem ao aluno o seu desenvolvimento enquanto ser que aprende e aprende a aprender, constituindo também um processo da sua integração plena na sociedade. “Trata-se, portanto de admitir conteúdos e, ao mesmo tempo, realizar percursos de processualização das aprendizagens”. (PC, 2013, p.47).

No que se refere às formas de organização do currículo escolar este é desenvolvido também a partir da participação em atividades de solidariedade com outros povos ou culturas, através do contacto com instituições sociais e ações de informação, sensibilização e discussão sobre os direitos humanos reconhecidos internacionalmente, visam fundamentalmente contribuir para o exercício das trocas culturais, da circulação partilhada da informação e da criação de hábitos de entreajuda entre os alunos ao longo das atividades.

No que se refere à intencionalidade na criação do ambiente de sala de aula a docente não manifestava necessidade de decorar a sala com cores, plantas ou outros recursos de adorno, sendo privilegiada a funcionalidade.

Relativamente à organização do mobiliário na sala, as mesas estavam dispostas em filas ao longo da sala, encontrando-se cada aluno em cada uma das mesas, inalteravelmente. Sendo que esporadicamente a professora sugeria aos alunos a troca de lugares de forma a evitar hábitos desajustados, como estabelecimento de conversas

paralelas ou até para que conseguisse estabelecer um acompanhamento mais próximo dos alunos que apresentassem maior dificuldade de aprendizagem.

Após a realização dos trabalhos, estes eram arquivados no dossiê do aluno e guardados pelos alunos num móvel da sala.

Para abordagem dos conteúdos da área curricular do Português e da Matemática a professora recorria a cartazes ilustrativos que posteriormente eram afixados nas paredes da sala, para que os alunos os pudessem ter como referência.

O ambiente relacional na sala é caracterizado por uma grande interajuda entre o professor e alunos e os próprios alunos entre si.

Os alunos naturalmente demonstravam grande motivação para partilharem as suas ideias e opiniões sobre os mais diversos assuntos e para participarem nas discussões dos tópicos trabalhados, estando presente na grande generalidade um respeito entre todos nos diferentes tempos de intervenção.

A professora mostrava diariamente uma atitude bastante comunicativa, afável e disponível para esclarecer dúvidas ou colmatar alguns receios e inseguranças apresentadas pelos encarregados de educação, o que se tornou evidente na facilidade com que os mesmos procuravam o apoio da professora, e pela forma calorosa com que a tratavam, capaz de expressar a sua confiança e admiração.

Notoriamente a professora procurava estabelecer uma relação de proximidade com os encarregados de educação e suscitar uma maior intervenção dos mesmos no processo de aprendizagem dos alunos, a partir da sua participação em atividades realizadas no espaço escolar. Como refere Diogo (1998), “o envolvimento parental na vida escolar contribuiu para melhorar significativamente as performances sociais e académicas dos alunos” (p.21). Contudo, na grande generalidade, os encarregados de educação apresentavam indisponibilidade para participar nos projetos propostos.

A professora tinha uma boa relação com toda a comunidade educativa, destacando-se em particular uma grande cumplicidade e cooperação entre os restantes professores. Efetivamente, é pertinente referir que entre a comunidade educativa onde for realizado este estágio existe uma grande cooperação entre os seus elementos, atingindo -se, segundo a minha perspetiva, o sentido lato da palavra “equipa”, que é fundamental para a construção de um ensino de qualidade.

Relativamente ao meu papel enquanto aluna estagiária/professora uma das minhas primeiras necessidades ao chegar ao local de estágio, prendeu-se não só no conhecimento

das crianças e da professora cooperante, mas também, de toda a dinâmica inerente ao funcionamento do estabelecimento de ensino. Desta forma, e sabendo que “um currículo não pode ser encarado de forma isolada e não pode existir sem uma estrutura de apoio forte e bem desenvolvida ou seja, num contexto social e institucional no qual acontece” (Siraj-Blatchford, 2004, p.10), procedi com maior brevidade ao pedido dos documentos, pela qual se rege o estabelecimento, de forma a conhecer e perceber os valores e princípios, de toda a sua comunidade educativa.

Como aluna estagiária, a partir da minha abordagem dialogante, disponível, respeitadora e uma ação educativa consciente, desde o primeiro instante, procurei efetivar, a importância e o valor de estar inserida no seu projeto educativo.

A professora cooperante desempenhou um papel notoriamente importante, para que pudesse desenvolver esta investigação e por conseguinte um plano de ação mais assertivo, pois desde o primeiro instante “abriu a porta” da sua sala com muita generosidade e paciência, ouvindo as minhas ideias, partilhando comigo os seus conhecimentos, possibilitando -me desenvolver e vivenciar novas experiências, e interagir noutros contextos.

Os alunos fora, muito recetivos à minha chegada, sendo que a minha ação pedagógica foi delineada tendo como referência ou ponto de partida, a observação e posteriormente uma reflexão sobre as necessidades e interesses do grupo.

Segundo a minha perspetiva a minha ação educativa não se cingiu à minha transmissão de conhecimentos, antes porem, procurei que os alunos tivessem um papel ativo na construção do seu saber, de forma a desenvolverem o seu pensamento e interesse, proporcionando tempo e espaço para a partilha de saberes e opiniões.

Reforço que a minha ação educativa, não se centrou exclusivamente no objetivo dos alunos compreenderem os conteúdos lecionados, mas também, em considerar e valorizar toda a sua dimensão humana, e o seu crescimento enquanto cidadãos.

Neste sentido, procurei a partir de princípios e valores, inerentes na minha ação pedagógica ser um modelo de Professor que favorece o encontro universal com os outros, a partir do respeito, a justiça, a solidariedade, a amizade, a verdade. Não pretendi apenas listar para os alunos um conjunto de coisas “certas” e “erradas”, uma cartilha de como devem ou não agir. Mas sim favorecer todo contexto escolar, como espaço securizante e importante para a discussão de ideias e valores como solidariedade, responsabilidade, justiça, diálogo e não-violência.

Emergência e Pertinência do Tema

Na sala do 1º ano, constatee que a Matemática era uma das áreas curriculares menos exploradas, sendo que os conteúdos abordados incidiam na apresentação dos números e na sua escrita simbólica, havendo ainda uma ausência de propostas de tarefas que envolviam a resolução de problemas.

Nesta perspectiva, segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2013) a resolução de problemas é considerada uma atividade fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e deve funcionar como ponto de partida para o estudo de conceitos e ideias matemáticas, funcionando também como um suporte para o seu desenvolvimento e aplicação.

Relativamente à resolução de problemas, é destacado ainda a possibilidade dos alunos recorrerem a “estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações” (p.5).

Na realidade, a capacidade de realizar representações matemáticas surge associada não só ao compreender e lidar com conceitos matemáticos, mas especialmente ao desenvolvimento das capacidades transversais de resolver problemas e de raciocinar. Como refere Boavida (2008), as representações constituem-se como “ferramentas fundamentais para pensar matematicamente” (p.71). Para além de segundo Ponte e serrazina (2010) as representações dos alunos permitirem ao professor ter acesso mais facilmente à forma como interpretaram e raciocinaram durante a resolução do problema proposto.

Neste sentido, o professor é um elemento fulcral nas aprendizagens que possibilita aos seus alunos, pois como refere o NCTM¹ (2008)

(...) os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores proporcionam. Como tal, os seus conhecimentos matemáticos, a sua capacidade de os utilizar na resolução de problemas, a sua confiança e a sua pré-disposição, em relação à matemática, são modelados pelo tipo de ensino com que se deparam na escola. (p. 7)

Foi no decurso da licenciatura e do mestrado em educação que me consciencializei da existência de professores que lecionavam a matemática com uma pedagogia e uma atitude muito diferente daquela que, até então, tinha experienciado, tendo

¹ Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar

estes sidos os principais responsáveis por resgatar a minha confiança, interesse e gosto pela matemática, outrora perdidos.

Perante todos os aspetos referidos em torno do papel fulcral que o professor desempenha na aprendizagem e o gosto dos alunos pela Matemática, e a importância dos problemas e das representações dos alunos no desenvolvimento do seu raciocínio matemático, e de estas ainda possibilitarem ao professor conhecer melhor qual o seu pensamento e raciocínio, julgo desta forma, poder justificar coerentemente a pertinência deste estudo, tanto a nível pessoal como curricular.

Problemática

Na realidade, *A Matemática não dá resto zero*², como fui constatando ao longo do meu percurso académico, antes, porém, ela inventa-se e reinventa-se, sempre que um professor proporciona aos seus alunos um ambiente de aprendizagem rico. Ambiente assente numa participação ativa dos alunos, na construção do seu conhecimento matemático, e que os estimula a formular questões, a fazer conjecturas, a tomar decisões e a argumentar, para justificar os seus raciocínios. Ambientes em que alunos e professores estejam atentos ao pensamento e raciocínio uns dos outros e funcionem como membros de uma comunidade matemática.

É neste ambiente que os problemas matemáticos ganham todo o seu sentido e valor e as próprias estratégias dos alunos, naturalmente, surgem. Neste tipo de ambiente de aprendizagem são valorizados os processos e os caminhos que cada um construiu para chegar ao resultado e, não propriamente o resultado em si, uma vez que na resolução de problemas é possível utilizar-se diversas estratégias, que podem ser expressas utilizando diferentes representações e raciocínios. Sendo que, de acordo com as NCTM (2007), as representações dos alunos em muito revelam os seus pensamentos e conhecimentos sobre ideias matemáticas, para além de contribuírem para o desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Como refere Cavalcanti (2001), "Cabe ao professor planejar ações que assegurem um espaço para a elaboração individual de estratégias" (p.126). Este é o caminho para que os alunos possam ser autónomos e confiantes na sua capacidade de pensar matematicamente. É este o caminho que antevejo, enquanto futura educadora/professora,

² Expressão utilizada por Eduardo Sá (2000)

que aprendeu que a investigação deverá ser uma constante na fundamentação do ato pedagógico, para investigar, observar e aprofundar conhecimentos, desde já a partir do presente trabalho, sustentado pela partilha da experiência de sala de aula, entre uma professora e um grupo de alunos, envolvidos em representações na construção do conhecimento matemático, através da resolução de problemas.

Desta forma, este estudo visa *identificar e compreender as representações que os alunos do 1º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas que envolvem a subtração e a multiplicação no seu sentido combinatório*, partindo de duas questões norteadoras:

- 1) Que representações utilizam os alunos do 1º ano de escolaridade para resolverem enunciados envolvendo a subtração e o sentido combinatório da multiplicação?
- 2) De que forma as representações dos alunos permitem ao professor identificar o conhecimento matemático dos mesmos?

Para tentar dar resposta ao problema e às questões colocadas, para além da recolha de dados em sala de aula para um estudo qualitativo, com recurso à observação participante, aos documentos produzidos pelos alunos e às notas de campo, recorreremos a autores de referência, tais como:

Palhares (2004), Boavida (2008) Cavalcanti (2001), que definem o conceito de estratégia, como sendo uma forma e ferramenta de os alunos abordarem os problemas. Sendo essencial estimular os alunos a encontrarem livremente diferentes formas de resolução de problemas;

Wolech (2001), Kaput (1987), e Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger (1987), que apresentam o significado e conotação atribuída ao termo de representação;

Kilpatrick, Swafford, e Findell (2001) e Ponte e Serrazina (2000) que enfatizam o papel das representações construídas pelos alunos na compreensão de conceitos matemáticos;

Dufour-Janvier, Bednarz, Belanger (1987), Goldin (2008) que referem as representações como sendo: i) internas- processam-se ao nível do pensamento (não observáveis), ii) externas: linguagem oral e escrita, manipulação de objetos, entre outras (são diretamente observáveis);

Bruner (1999) defende que existem três tipos de representações distintas: ativa, icónica e simbólica. Sendo que nas representações icónicas incluem-se o desenho (pictóricas), símbolos não convencionais e o diagrama;

Santos (1991), Ponte e Serrazina (2000) fazem uma abordagem às primeiras representações dos alunos, sendo estas designadas como representações idiossincráticas;

Smole (1996), Cândido (2001), Cavalcanti (2001) enfatizam o papel das representações icónicas na resolução de problemas e construção do conhecimento matemático. Não havendo vantagem em introduzir de forma prematura e em excesso a representação simbólica;

Ponte e Serrazina (2000) referem que se torna necessário em Matemática deixar clara a diferença existente entre um problema e um exercício;

Vale e Pimentel (2004), Diniz (2001) e Pólya, entendem a resolução de problemas como: processo, finalidade e método. Defendem que os alunos aprendem a resolver problemas resolvendo-os, sendo muito importantes no ensino para abordagem de conceitos, no desenvolvimento de estratégias e raciocínio matemático dos alunos;

O *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2007), alerta para que uma das principais responsabilidades do professor consiste em criar um ambiente de aprendizagem que estimule os alunos a desenvolverem e a utilizarem as múltiplas representações.

A opção metodológica apoia-se em autores como Bogdan e Biklen (2010), Ponte (1994) e Quivy e Campenhoudt, (2008), para compreensão, caracterização e organização de uma investigação qualitativa.

Organização do Relatório

Como forma de organização, este trabalho foi dividido em quatro capítulos.

Cada um dos capítulos é precedido de uma epígrafe com excertos de *O Príncipezinho*, de Antoine de Saint-Exupéry, pelo impacto que esta obra teve em mim, e por reconhecer naquelas citações, do ponto de vista metamórfico, uma estreita conexão com o percurso da investigação e o conteúdo subjacente de cada um desses capítulos.

A presente *Introdução* procura dar a conhecer em que âmbito o trabalho foi realizado e o meu percurso enquanto aluna; Caracteriza o contexto de estágio, a turma e o

modelo pedagógico observado; Apresenta o tema, a problemática e as questões de investigação que guiaram o estudo qualitativo e os autores convocados a fundamentá-lo.

No *capítulo I - Enquadramento Teórico* - esclarece-se teoricamente conceitos e teses validadas acerca da importância da resolução de problemas na aquisição de competências matemáticas, sobre as formas de representação matemática e o seu papel no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e sobre o papel do professor nesta dinâmica.

No *capítulo II - Metodologia* – Descreve-se a metodologia utilizada, justifica-se o paradigma de investigação, identificam-se os participantes no estudo, os instrumentos de recolha de dados e as respetivas técnicas de análise.

O *capítulo III - Representações matemáticas no 1º ano de escolaridade, ou a arte de representar o pensamento matemático* -, apresenta a dissertação que parte do tema e da problemática enunciada para cruzar interpretativamente dados teóricos e empíricos que permitem chegar a evidências e respostas sustentadas.

Apresentam-se ainda em síntese as conclusões deste estudo, as considerações finais, as limitações e novas perspetivas.

Seguidamente, apresentam-se as *Referências Bibliográficas* onde constam todas as obras lidas, consultadas e, por conseguinte, citadas neste estudo.

Por último, os *Anexos* nos quais estão incluídos os enunciados dos problemas propostos resultantes desta investigação, bem como as notas de campo.

CAPÍTULO I - ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Começa-se por tomar nota a lápis das narrativas dos exploradores. Para tomar nota a tinta, espera-se que o explorador tenha fornecido provas.

A. St. Exupéry, 1995, p.55

Neste capítulo buscam - se referenciais já oferecidos pela comunidade científica e que são ponto de partida e garantia de rigor conceptual no estudo a desenvolver. Localizando-se o objetivo do estudo na área da Matemática e fazendo da resolução de problemas o centro da aprendizagem, tendo como atores nesse processo alunos do 1º ano de escolaridade e como referencia o currículo nacional começamos por recorrer a este.

1.1. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A resolução de problemas ocupa um lugar de destaque no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2013), nomeadamente no 1º Ciclo. Sendo considerada como uma atividade fundamental para os alunos aprenderem novos conceitos, representações e procedimentos matemáticos.

A resolução de problemas tem sido debatida e analisada, ao longo das últimas duas décadas, por educadores, professores e investigadores.

Segundo Diniz (2001), reportando-se a um artigo de Branca (1997) refere que nos anos 80 a resolução de problemas era assinalada em torno de três ideias basilares: i) como meta: os currículos enfatizam a necessidade de o aluno aprender todos os conceitos presentes na resolução de problemas para que consiga resolvê-los; ii) como processo: representa uma forma de aplicar os conhecimentos já adquiridos, em novas situações; iii) como habilidade básica: a resolução de problemas é concebida como sendo uma competência mínima que leve indivíduo a ingressar no mundo do conhecimento e do trabalho.

Posteriormente, nos anos 90, a resolução de problemas foi perspectivada segundo uma nova concepção, sendo considerada como uma metodologia para o ensino da matemática e, neste sentido, passou a ser considerada como um conjunto de estratégias, quer para o ensino, quer para o desenvolvimento da aprendizagem da matemática.

Segundo a concepção de Vale e Pimentel (2004), a resolução de problemas é entendida como: i) processo: quando se pretende que os alunos consigam desenvolver estratégias eficazes na resolução de problemas; ii) finalidade: quando se enfatizam os aspetos matemáticos, como investigar; explorar; questionar; descobrir e usar raciocínios plausíveis; iii) método: quando se recorre à resolução de problemas para a introdução de conceitos, através da exploração de estratégias ou representações e da descoberta.

Desta forma, resolver problemas não se cinge à resolução de um desafio numa folha de papel, esta, oferece inúmeras possibilidades para que os alunos possam adquirir “modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito uteis fora da aula de matemática” (NCTM, p.57).

A resolução de problemas segundo Pólya (1978) “é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática (p.65). Desta forma, entende-se que a capacidade de resolução de problemas dos alunos se desenvolve à medida que eles os vão resolvendo. Neste sentido, o professor deve propor problemas de vários tipos e que abordam diferentes contextos, ou até mesmo partir de questões colocadas pelos alunos, para que as aprendizagens sejam verdadeiramente significativas.

É através da resolução de problemas que o ensino da matemática permite perceber a aplicabilidade dos conteúdos matemáticos no dia-a-dia e fora da escola. Desta forma, a resolução de problemas possibilita apresentar aos alunos a Matemática como sendo uma disciplina útil na sua vida quotidiana, contribuindo para o desenvolvimento de processos cognitivos e metacognitivos (Boavida, 2008). Isto porque o aluno, ao resolver um problema do seu quotidiano, precisa de modelos já conhecidos, para desfragmentar o conhecimento que possui. Neste sentido, a resolução de problemas ajuda os alunos a organizar e utilizar ideias adquiridas anteriormente.

Resumindo, segundo o *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007), a resolução de problemas é a atividade fundamental para os alunos aprenderem novos conceitos, representações e procedimentos matemáticos. Para Diniz (2001), reportando-se a um artigo de Branca (1997), refere que nos anos 80 a resolução de problemas era assinalada em torno de três ideias principais: como meta, processo e habilidade básica.

Na conceção de Vale e Pimentel (2004), a resolução de problemas é entendida como: processo, finalidade e método. Na perspectiva de Pólya, os alunos aprendem a resolver problemas resolvendo-os, sendo estes muito importantes no ensino para a abordagem a novos conceitos matemáticos, no desenvolvimento de estratégias e raciocínio dos alunos.

1.1.1. PROBLEMAS

Para Ponte e Serrazina (2000), torna-se necessário em Matemática deixar clara a diferença existente entre um problema e um exercício, porque apesar de em ambos se ter como objetivo chegar à solução, os desafios propostos em cada um deles são diferentes.

Nesta perspetiva, os mesmos autores referem que uma questão poderá ser um problema para um determinado aluno, se o mesmo não tem numa fase inicial ou imediata a sua solução. Em contrapartida, se o aluno obtiver rapidamente a solução e a partir de um único passo, então para si deixará de ser um problema e será antes um mero exercício.

A título de exemplo consideremos a seguinte questão que fez parte desta investigação:

A Urbi recebeu no seu aniversário 4 t-shirts e duas saias. De quantas maneiras diferentes se pode vestir a Urbi?

Para um aluno do 1º ano esta questão poderá representar um problema, dado ainda não haver o domínio do raciocínio combinatório ou do algoritmo da multiplicação. Em contrapartida, para um aluno do 3º ano a mesma questão poderá ser um exercício porque, neste nível de ensino, o aluno já experienciou um conjunto de aprendizagens que lhe possibilita ter um raciocínio combinatório associado à multiplicação no seu sentido aditivo, permitindo assim, identificar e chegar de uma forma rápida à solução a partir de um único passo ou pela aplicação direta do algoritmo.

Segundo o NCTM (1991), um problema

é uma situação em que, para o indivíduo ou para o grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para constituir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel (p.11).

Na conceção de Krulik e Rudnik (1993), há que fazer a distinção entre: i) uma questão: situação que apela à capacidade de memória; ii) problema: raciocínio e síntese do que já foi aprendido; iii) exercício: situação na qual se pretende treinar ou reforçar regras e procedimentos impostos do exterior que já foram aprendidos.

Para Kantowski (1980), um problema é uma situação com a qual o aluno se depara não tendo um procedimento imediato ou algoritmo que conduza à solução. Sendo

que um problema para um aluno poderá ser um exercício para outro, e até uma frustração para um terceiro.

Segundo o NCTM (2000), o professor tem um papel fulcral na seleção de problemas matemáticos. Perante a análise e seleção de um problema o professor deve contemplar as ideias que dele emergem, para que este possibilite aos alunos aprendizagens novas e estruturantes, do ponto de vista matemático. Para além disso, após uma seleção cuidada, o professor deve antecipar as questões, dificuldades ou estratégias de resolução que possam vir a ser apresentadas pelos alunos.

Assim, para que o professor seleccione um bom problema, este deverá ser: i) desafiante e interessante do ponto de vista matemático; ii) adequado à faixa etária dos alunos e ao seu nível de desenvolvimento cognitivo, para que o aluno consiga compreender na íntegra o pretendido e ser capaz de mobilizar os seus conhecimentos, iii) problemático, no sentido de partir de algo que as crianças conheçam e que não tem uma resposta imediata, à vista.

Resumindo, de acordo com os autores referidos, parece possível concluir que o aluno está perante um problema se não sabe, de forma confortável ou imediata, como chegar à solução. Por sua vez, se o aluno chegar à solução utilizando processos rotineiros ou familiares, então o enunciado será para o aluno um mero exercício. Embora para alguns alunos uma determinada questão possa ser um problema, para outros poderá ser um exercício, estando esta situação muito relacionada com a fase de desenvolvimento cognitivo e com o conhecimento matemático do aluno.

Desta forma, uma questão poderá ser, numa dada fase de aprendizagem um problema, e, numa fase posterior, um exercício. Nesta perspetiva e segundo NCTM (2000), o professor, ao propor um problema aos seus alunos, deve considerar se este é suficientemente desafiante, interessante, adequado e problemático para os seus alunos.

1.1.2. ETAPAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ponte e Serrazina (2000), reportam-se ao matemático Pólya (1975) para referenciar as etapas inerentes à resolução de um problema. Sendo que Pólya, para além de apresentar as etapas, refere também vários processos de descoberta para cada uma das etapas: i) Compreensão do problema: o enunciado precisa ser suficientemente apelativo para que o aluno revele interesse em compreender o problema e possa proceder à sua

resolução. Para que o aluno possa compreender o enunciado de um problema deve procurar identificar todos os dados presentes, o que é revelado e o que é preciso descobrir, procedendo à tentativa de representação matemática; ii) elaboração de um plano de resolução: acontece quando é delineado um plano, segundo a escolha de uma estratégia; iii) execução do plano: o aluno deve proceder à análise do plano elaborado, executando todos os pormenores que possibilitem chegar a uma conclusão, caso não se consiga chegar a uma conclusão, retorna-se à etapa antecedente, iv) verificação dos resultados: o aluno deve examinar de uma forma crítica todo o trabalho desenvolvido, verificando cada uma das etapas, incluindo o seu raciocínio e solução obtida.

Por sua vez, Huete e Bravo (2006), referem quatro etapas necessárias para resolver um problema: i) preparação: incide na recolha de todos os dados e tentativa de encontrar a solução; ii) incubação: deixa-se o problema de lado, para posteriormente voltar-se a resolver-se; iii) iluminação: consiste na chave para a resolução do problema; iv) verificação: incide na retificação de todo o processo e na sua confirmação.

Em síntese, Pólya (1975) apresenta algumas etapas necessárias para a resolução de problemas. Apesar de nomearem cada etapa com uma designação diferente, o seu significado é bastante similar. Pois, a preparação do problema para Huete e Bravo (2006) é similar à etapa de compreensão; a de incubação, à elaboração; a de iluminação, à execução do plano e a de verificação, à verificação dos resultados, propostas por Pólya (1975).

1.1.3. ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Palhares (2004), não há um único modo de resolver problemas, sendo que desta forma podem ser utilizadas muitas estratégias.

Para Ponte e Serrazina (2000), uma estratégia é uma forma de os alunos abordarem um problema, sendo que, perante as várias estratégias existentes, algumas delas, podem ser mais vantajosas do que outras na resolução de um problema específico.

Boavida (2008) define estratégia como sendo uma ferramenta que na "maior parte das vezes, se identificam com processos de raciocínio e que podem ser bastante úteis em vários momentos do processo de resolução de problemas." (p. 23).

Por sua vez, a mesma autora, refere algumas estratégias, passíveis de serem utilizadas no ensino básico para a resolução de problemas: i) fazer uma simulação/dramatização; ii) fazer tentativas; iii) reduzir a um problema mais simples; iv)

descobrir um padrão; v) fazer uma lista organizada; vi) trabalhar do fim para o princípio. Sendo que em simultâneo com estas estratégias se recorre, na grande maioria das vezes, a várias representações, como o desenho, um diagrama/esquema ou a utilização de uma tabela.

Segundo o NCTM (1989), as estratégias na resolução de problemas fazem parte do *kit* de ferramentas matemáticas que os alunos naturalmente possuem e que, em muito, os ajuda na exploração de um problema.

Também Palhares (2004) desenvolveu um estudo sobre estratégias, propondo as seguintes na resolução de problemas: i) descobrir um padrão / regularidade: é uma estratégia que incide em algumas etapas do problema, a solução é definida a partir da generalização de soluções específicas; ii) fazer tentativas / conjecturas: tendo como referência os dados e as condições do problema o aluno procura encontrar a solução a partir de tentativa e erro; iii) trabalhar do fim para o princípio: o aluno inicia pelo fim a resolução do problema; iv) fazer dedução lógica / eliminação de possibilidades: o aluno procura obter a solução correta a partir da eliminação hipotética de hipóteses; v) reduzir a situação a um problema mais simples: esta estratégia está, na grande maioria das vezes, associada à estratégia de descoberta de um padrão, onde o aluno procura resolver um caso específico; vi) fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização: o aluno poderá recorrer a objetos, criar um modelo ou proceder a uma dramatização, de forma a representar o problema; vii) fazer um desenho/ diagrama/ gráfico ou esquema; viii) fazer uma lista organizada/ tabela: estas poderão ser utilizadas para representar, organizar e guardar os dados.

Segundo Cavalcanti (2001), é essencial estimular os alunos a encontrarem livremente diferentes formas de resolução de problemas, uma vez que possibilita uma reflexão mais elaborada sobre os processos de resolução, quer seja através da oralidade, esquemas, desenhos, ou mesmo algoritmos. Aceitar e analisar as diferentes estratégias de resolução como igualmente válidas e importantes etapas do desenvolvimento do pensamento, permitem a aprendizagem pela reflexão e possibilitam ao aluno ser autónomo e confiante na sua capacidade de pensar matematicamente.

Resumindo, Segundo Palhares (2004), não há um único modo de resolver problemas. Neste sentido, este autor propõe as seguintes estratégias na resolução de problemas: i) descobrir um padrão/ regularidade; ii) fazer tentativas/ conjecturas; iii) trabalhar do fim para o princípio; iv) fazer dedução lógica/ eliminação de possibilidades v)

reduzir a situação a um problema mais simples; vi) fazer uma simulação/ experimentação/ dramatização; vii) fazer um desenho/ diagrama/ gráfico ou esquema; viii) fazer uma lista organizada/ tabela.

Para Ponte e Serrazina (2000), uma estratégia é uma forma de os alunos abordarem um problema. Boavida (2008), define estratégia como sendo uma ferramenta, mencionando algumas estratégias, passíveis de serem utilizadas no ensino básico para a resolução de problemas, que em muito são semelhantes às estratégias apresentadas por Palhares (2004). Elas são: i) fazer uma simulação/dramatização; ii) fazer tentativas; iii) reduzir a um problema mais simples; iv) descobrir um padrão; v) fazer uma lista organizada; vi) trabalhar do fim para o princípio. Referindo ainda que em simultâneo com estas estratégias se recorre, na grande maioria das vezes, a várias representações, como o desenho, um diagrama/esquema ou a utilização de uma tabela.

Segundo o NCTM (1989), as estratégias na resolução de problemas fazem parte do *kit* de ferramentas matemáticas dos alunos e, por último, para Cavalcanti (2001), é essencial estimular os alunos a encontrarem livremente diferentes formas de resolução de problemas, pois possibilitam ao aluno autonomia e confiança na capacidade de pensar matematicamente.

1.2. REPRESENTAÇÕES NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Faz parte integrante da natureza do Homem o uso recorrente de representações nos múltiplos contextos do seu dia-a-dia, sendo que a partir delas, se torna possível conhecer e transmitir ideias que nelas estão expressas, e é desta forma, nesta dialética, que o homem vai descortinando o mundo que o rodeia.

Sendo a matemática uma ciência exata, nela está inerente uma linguagem universal mas com conceitos, ideias, procedimentos, relações, que em certa medida são de natureza abstrata. Desta forma, podemos afirmar que "A Matemática requer representações. Na verdade, devido à natureza abstrata da matemática, as pessoas têm acesso a ideias matemáticas somente através da representação dessas ideias" (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001, p. 94).

Nesta perspetiva, é possível constatar nas últimas duas décadas uma crescente valorização do uso de representações no ensino e aprendizagem da Matemática ao nível das orientações curriculares, segundo é preconizado pelos organismos a nível internacional (NCTM, 1991, 1994, 2007) como também a nível nacional (APM, 1988; ME/ DEB, 2001, 2004; ME/DGEBS, 1990; ME, 2007).

A este nível, no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2007), é destacado que

as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina, e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação. (ME, 2007, p. 9).

Sendo que no último *Programa de Matemática do Ensino Básico* (2013) é salientado que os alunos a partir das suas representações deverão ser “incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados.” (p.5).

Também Ponte e Serrazina (2000), dão ênfase ao papel das representações no processo de aprendizagem da Matemática, referenciando que estas devem ser estimuladas para que os alunos possam

- a) Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- b) Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- c) Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos. (p. 75)

Esta valorização das representações é referenciada desde os primeiros anos de escolaridade, como sendo um componente, entre outros, imprescindível na iniciação e desenvolvimento de processos matemáticos fundamentais. Como salienta o NCTM, "... quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (2007, p. 7).

Desta forma, torna-se relevante destacar que a investigação desenvolvida por alguns autores sobre a importância da visualização e do papel das imagens mentais na atividade matemática, tem determinado e contribuído para o crescente reconhecimento da utilidade das representações na formação de conceitos matemáticos. Perante a investigação desenvolvida por alguns autores que se debruçaram sobre esta temática, podemos verificar inúmeros significados e conotações atribuídas ao termo representação.

Segundo Kaput (1987), estão subjacentes ao termo representação vários componentes: (i) a entidade representacional; (ii) a entidade que representa; (iii) aspetos particulares da entidade representacional; (iv) aspectos particulares da entidade que representa e que forma a representação; e (v) a correspondência entre as duas entidades.

Para Goldin (2008) uma representação é uma configuração que

pode representar qualquer coisa de um determinado modo.

Por exemplo, uma palavra pode representar um objeto da vida real, um numeral pode representar um cardinal de um conjunto, ou o mesmo número pode representar uma posição na linha numérica. (p. 178).

Na conceção de Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger (1987), existem quatro características inerentes às representações usadas em matemática: as intrínsecas à matemática; as inúmeras concretizações de um conceito; as representações para contornar dificuldades específicas e as representações para tornar a matemática mais apelativa e interessante.

Segundo NCTM (2000), "o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado, ou por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma" (p.75). Nesta perspetiva, as representações podem ser entendidas como o processo que corresponde à forma como cada um atinge o entendimento de um conceito matemático, mas também, por

outro lado, podem ser interpretadas como um resultado, pelo entendimento do conceito expresso na forma concretamente dita.

Vergnaud (1998) defende o estudo das representações apresentando duas razões distintas. Na sua perspectiva, todos experimentamos representações como um conjunto de imagens internas, gestos e palavras e as palavras e símbolos que usamos para comunicar não se referem diretamente à realidade, mas a representações de objetos, propriedades, relações, processos, ações e construções sobre as quais não existe um acordo automático entre duas pessoas.

Por sua vez, Duval (2004) defende ainda que “não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação [...] pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma atividade de representação” (p. 25).

Na concepção de Wolech (2001) as representações são ferramentas extraordinariamente importantes por permitirem ao aluno articular, clarificar, justificar e comunicar o seu raciocínio, assim sendo, o autor destaca que as representações não podem ser interpretadas como se se tratassem de produtos estáticos, antes porem, elas revelam ser um processo dinâmico onde é perceptível o caminho de construção percorrido desde um conceito, à construção de uma relação matemática.

Para Bruner (1996), um investigador clássico neste domínio, refere que a representação pode ser designada “como sendo uma capacidade nas mãos de um aprendiz, para ligar assuntos que numa fase inicial parecem não estar ligados, isto é especialmente crucial na matemática (p.48).

Sendo a Matemática de natureza abstrata e simbólica, os alunos perante um problema, ao produzirem as suas representações, estão a modelar a situação, apoiando-se nos seus conhecimentos e vivências quotidianas, o que lhes vai permitir aprofundar e ampliar a compreensão dos conceitos e a criação de relações matemáticas, que numa abordagem inicial não são perceptíveis. Através da elaboração de representações, os alunos desempenham um papel ativo e construtivo do seu saber, desenvolvendo em simultâneo o raciocínio matemático. Assim, parece possível afirmar que serão capazes de estabelecer e relacionar ideias matemáticas dentro e fora da sala de aula.

Em suma, podemos constatar que, se por um lado, os autores referenciados são unânimes quanto à importância das representações no entendimento de conceitos matemáticos, por outro, é nos também possível constatar que os mesmos autores, ao

falarem de representações, fazem uma analogia entre representações que se processam internamente, ao nível do pensamento, e representações externas, isto é, fisicamente observáveis.

1.2.1. REPRESENTAÇÕES INTERNAS

Segundo Dufour-Janvier, Bednarnz e Belanger (1987), as representações internas pertencem ao domínio do significado pois, referem-se à construção ou processo mental do indivíduo perante a realidade.

Para Goldin (2008) as representações internas, estão relacionadas com os sistemas de representações cognitivas, operando-se na mente do indivíduo, por conseguinte, não podem ser observadas por terceiros. Para além disso, este autor organiza as representações internas em cinco tipos de sistemas: (i) sintático e verbal: que tem subjacente o domínio natural do indivíduo ao nível da linguagem (gramática, sintaxe, vocabulário matemático e não matemático); (ii) imagístico: inclui um conjunto de configurações essenciais para o “sentir” matemático e estas são: visuais, espaciais, gestuais, corporais, auditivas e rítmicas; (iii) notação formal: inclui a realização de operações aritméticas ou a visualização de passos para a resolução de equações; (iv) processos heurísticos e estratégicos que surgem quando o indivíduo desenvolve e organiza mentalmente um conjunto de métodos (etapas, tentativas) para a resolução de uma tarefa. Durante a organização deste sistema de representação, os alunos poderão sentir dificuldade em verbalizar os seus procedimentos, pelo facto de estes se processarem, algumas das vezes, de forma inconsciente; por último é apresentado o sistema (v) afectivo: onde se incluem atitudes, crenças e sentimentos que determinam a opinião e a relação do indivíduo com a matemática.

Em suma, na conceção de Dufour-Janvier, Bednarnz e Belanger (1987), as representações internas referem-se à construção ou processo mental do indivíduo perante a realidade e, em consonância, Goldin (2008) refere que as representações internas não são directamente observáveis, dado encontrarem-se codificadas fisicamente e a sua descrição, a nível cerebral, ainda não é conhecida em detalhe, quanto muito, podem ser interpretadas a partir das representações externas produzidas.

1.2.2. REPRESENTAÇÕES EXTERNAS

Segundo Dufour-Janvier, Bednarnz e Belanger (1987), as representações externas, fazem parte do domínio do significante, na qual estão integradas as estruturas simbólicas (diagramas, esquemas, símbolos, entre outros), com o intuito de a partir das mesmas, se representar externamente uma realidade matemática específica.

No que concerne às representações externas, os autores anteriores referem que estas incidem nas descrições verbais, tabelas, gráficos ou fórmulas, defendendo que nelas está inerente um processo de translação, que consiste concretamente, num processo psicológico evolutivo, que possibilita passar de uma forma de representação para outra.

Efetivamente, os alunos, logo no 1º ano de escolaridade, naturalmente são capazes de representar as suas ideias e processos matemáticos de várias formas, isto é, a partir da sua linguagem natural expressa em desenhos, símbolos criados individualmente, entre outros.

Contudo, para que estas representações externas informais dos alunos possam surgir naturalmente, e até evoluir para representações mais formais, é importante, na minha opinião, imprescindível, que o professor as valorize, facultando tempo e espaço aos alunos para que os mesmos as realizem. Desta forma, cabe ao professor o papel de estimular e conduzir os seus alunos até novas possibilidades de representação. À medida que os alunos de forma gradual e articulada se vão movendo entre as várias representações, vão desenvolvendo pensamento e compreensão matemática e, por conseguinte, as suas representações vão sendo cada vez mais complexas e ricas do ponto de vista matemático.

Dufour-Janvier *et al.* (1987) salientam que apesar de uma representação externa implicar sempre uma representação interna, o contrário não acontece, pois “assumimos também que podem encontrar-se representações sem um objeto real” (p.67).

Isto é, o aluno perante um conceito matemático estabelece, a nível do pensamento, ideias mentais sobre o mesmo, sendo que as suas representações externas, surgem com o intuito de ser um suporte para testar e validar as suas ideias, permitindo revelar o raciocínio desenvolvido. Por outro lado, um outro aluno poderá desenvolver internamente um conjunto de ideias sobre o mesmo conceito, mas isso não implica que recorra às representações externas, dada esta situação estar ligada à relação e compreensão que o aluno estabelece com as mesmas, sendo praticamente impossível conhecer e identificar o raciocínio desenvolvido.

Neste sentido, o autor apresenta um esquema para que se possa compreender mais aprofundadamente como se desenvolve este processo evolutivo ou de translação, apresentando atividades potencializadoras de todo este processo.

Processos de translação (Janvier, 1987, p. 28)

Para de ↗	Situações de descrições Verbais	Tabelas	Gráficos	Formulas
Situações de descrições verbais		Medir	Esboçar	Modelar
Tabelas	Ler		<i>Plotting</i>	Enquadrar
Gráficos	Interpretar	Ler		Curve fitting
Formulas	Reconhecer Parâmetros	Computar	Esboçar	

Como exemplo explicativo do quadro apresentado será referenciado, seguidamente, todo o processo desenvolvido em torno do uso de situações de descrições verbais. Desta forma, para passarmos de situações de descrições verbais para tabelas é necessário fazer medições; de situações de descrições verbais para gráficos, é necessário recolher e interpretar os dados fornecidos para que os poder representar graficamente e, por fim, de descrições verbais para fórmulas é indispensável haver uma modelação para se saber enquadrar simbolicamente a informação recolhida.

Perante o quadro retratado, é importante destacar que relativamente às várias representações externas, estas não devem ser abordadas como fim em si mesmas, de forma a não comprometer o valor e o sentido que permitem o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Isto é, a sua exploração não se deve cingir à sua estrutura, deve antes abordar, de forma gradual e articulada a construção de conceito, permitindo, assim,

aos alunos compreenderem e estabelecerem conexões entre as diferentes representações de um mesmo conceito, como, relativamente às estruturas das várias representações.

É neste processo de ensino aprendizagem, mais dinâmico, articulado e organizado que os alunos vão progressivamente desenvolvendo a sua capacidade de representação matemática e de identificação das vantagens e desvantagens da utilização de determinados tipos de representações, na exploração de um conceito específico subjacente num problema matemático.

Goldin (2008), no domínio das representações, menciona a existência de representações externas, salientando as características a elas subjacentes. Segundo este autor, cada um dos sistemas internos que se processam a nível do pensamento, e que já foram anteriormente referenciados, estes vão possibilitar ao indivíduo produzir um vasto leque de representações externas complexas e específicas que podem ser interpretadas, com significado, por terceiros: (i) linguagem oral e escrita; (ii) gestos icónicos, desenhos, representações pictóricas, produções musicais ou rítmicas; (iii) fórmulas matemáticas e equações; (iv) expressões de objetivos, intenções, planeamentos, estruturas de decisão; e (v) contacto visual, visível através de expressões faciais, linguagem corporal, contacto físico, lágrimas, gargalhadas e exclamações, que transmitem emoções.

Quando os alunos são confrontados com uma situação problemática são capazes de expressar um conjunto de representações externas. Pois, a atitude corporal, mais tensa ou descontraída e expressão facial, mais sorridente ou triste, palavras de apreço ou depreciativas e um registo escrito mais elaborado ou não, são algumas representações externas que naturalmente vão surgindo à medida que os alunos solucionam a proposta lançada, sendo que estas representações estão muito dependentes do nível de desafio ou compreensão que os alunos estabelecem perante a proposta de tarefa. Sendo as representações externas dos alunos importante para o professor conhecer e compreender o seu conhecimento informal, de forma a conduzi-los a um novo conhecimento ou significado matemático.

De acordo com o referido anteriormente, Goldin e Steignold (2001) referenciam que a pesquisa desenvolvida em torno das representações revela que é a partir da interação entre representações externas que se potencializa o desenvolvimento de sistemas de representações internas, para que os alunos possam desenvolver novas representações externas. É importante que os alunos sejam estimulados a usarem as várias representações externas de forma articulada e gradual, enquanto eles as usam e refletem sobre elas, são

desenvolvidas, paralelamente, a nível interno, novas ideias e uma melhor compreensão, levando à concretização de novas representações internas.

Estes autores destacam as representações internas no contexto de aprendizagem matemática enfatizando que

é por vezes útil pensar que a componente externa traduz a interna, como por exemplo quando um aluno desenha um diagrama ou escreve uma fórmula para descrever o que está a pensar. Simultaneamente, podemos pensar que a componente interna traduz a externa, como quando um aluno formula uma imagem mental das operações descritas numa fórmula aritmética. Esta perspectiva de transferência é característica da natureza bidireccional da representação (Goldin & Steignold, 2001, p. 6).

Neste sentido e segundo a conceção destes autores, existe uma dicotomia entre as representações externas e as representações internas, pois, por um lado as representações externas são o reflexo do pensamento do indivíduo, como as representações internas são impulsionadoras para o surgimento de representações externas, sendo que estas surgem como suporte de cálculo e para comunicar ideais.

Resumindo, para Dufour-Janvier, Bednarnz e Belanger (1987), as representações externas, fazem parte do domínio do significante, da qual fazem parte integrante as estruturas simbólicas (diagramas, esquemas, símbolos, entre outros) com o intuito de, a partir das mesmas, se representar externamente uma realidade matemática específica. Os mesmos autores referem que apesar de uma representação externa implicar sempre uma representação interna, o contrário não acontece e Goldin e Steignold (2001) referenciam, que é a partir da interação entre representações externas, que se potencializa o desenvolvimento de sistemas de representações internas.

1.2.3. REPRESENTAÇÕES IDIOSSINCRÁTICAS

No sentido em que a presente investigação incide em investigar o papel das representações construídas por alunos do 1º ano de escolaridade, na resolução de problemas matemáticos, é imprescindível salientar as suas primeiras representações, identificadas como representações idiossincráticas.

As representações idiossincráticas dos alunos, segundo Santos (1991), são representações “espontâneas e imediatas, mais ou menos diferenciadas social e

culturalmente, que têm mais a ver com o conhecimento do quotidiano do que com o conhecimento científico” (p.21).

Assim, Santos refere que as representações espontâneas são utilizadas

enquanto modo pessoal e natural de organização dos dados da percepção relativamente a um problema particular; enquanto apreensão sensível, intuitiva e imediata do objeto pelo sujeito [...] enquanto raciocínios espontâneos que conduzem a uma resposta rápida, não reflectida, considerada como evidente e cujas justificações são relativamente pouco explícitas (Santos, 1991, pp.21-22).

Desta forma, podemos entender que nas representações iniciais dos alunos são expressas todas as suas vivências e experiências ganhas ao longo das suas vivências, por isso, estão repletas de significados próprios e individuais.

Apesar das suas representações serem muito particulares e poderem ser pouco explícitas do ponto de vista matemático, elas são também valiosas, pois resultam como apoio na compreensão e solução de problemas, para além de revelarem um conjunto de estratégias ou procedimentos desenvolvidos pelos alunos.

Neste sentido, segundo Ponte e Serrazina (2000), “O professor pode usar esta informação para estabelecer ligações entre as formas de representação dos alunos e as formas de representação usuais na Matemática.” (p.44). Assim, os alunos para além de usarem as representações que para eles fazem mais sentido e, por conseguinte, aquelas em que sentem maior confiança, vão, de forma gradual e harmoniosa, sendo capazes de incluir, de forma significativa, nas representações idiossincráticas, as representações convencionais da matemática.

Resumindo, na conceção de Santos (1991), é a partir das representações idiossincráticas que as crianças iniciam a sua aprendizagem formal. Apesar de serem por vezes pouco explícitas, são ricas em significado matemáticos, e para além de constituírem um método de comunicar ideias, são, também, ferramentas essenciais de raciocínio e compreensão de ideias matemáticas.

Ponte e Serrazina (2000) defendem que os alunos devem ser encorajados a representar as suas ideias através de representações que para si façam sentido, sendo que, só de uma forma gradual, os alunos vão sendo capazes de integrar, de forma significativa, as representações convencionais da matemática, nas suas representações iniciais.

1.2.4. MODOS DE REPRESENTAÇÃO

Na concepção de Bruner (1999), existem três tipos de representações distintas, sendo que estas operam ao longo do desenvolvimento da inteligência humana.

Para se efetivar o desenvolvimento do indivíduo é indispensável que este estabeleça uma interação entre os diferentes sistemas existentes. Contudo, o desenvolvimento não ocorre necessariamente segundo uma sequência de etapas, antes porém surge interdependente do domínio progressivo destas diferentes formas de representação.

Desta forma Bruner (1999), mencionado por Ponte e Serrazina (2000), refere que,

todo o domínio de conhecimentos (ou qualquer problema dentro desse domínio) pode ser representado por três formas: por um conjunto de ações apropriadas para obter determinado resultado: representação ativa; por um conjunto de imagens resumidas ou gráficos que representam conceitos, sem os definir completamente: representação icônica; ou por um conjunto de proposições, lógicas ou simbólicas, derivado de um sistema simbólico redigido por normas ou leis para formar ou transformar proposições: representação simbólica (p.94).

1.2.4.1. REPRESENTAÇÃO ATIVA

Segundo Bruner (1999) “a representação ativa baseia-se, ao que parece, na aprendizagem de resposta e formas de habituação” (p.28). No ensino de algumas ideias mais abstratas, o uso de imagens e palavras torna-se, muitas das vezes, insuficiente para que os alunos possam dominar na íntegra os conceitos abordados. Nesta perspectiva, o autor refere que é essencial que os alunos possam associar ideias abstratas a situações concretas, a partir da ação e do uso de materiais manipulativos.

Desta forma, esta representação baseia-se essencialmente num conjunto de ações realizadas pelos alunos a partir da utilização de materiais manipulativos, com o objetivo de demonstrarem ou alcançarem um determinado resultado.

1.2.4.2. REPRESENTAÇÃO ICÔNICA

Bruner (1999) refere que a representação icônica pode ser entendida como uma organização visual ou outra organização sensorial que recorre a imagens de resumo.

A construção de elementos representativos de uma realidade concreta, está intimamente relacionada e dependente da memória visual que o aluno conseguiu estabelecer com a mesma.

Neste tipo de representação inserem-se o diagrama, o desenho e os símbolos (não convencionais) que representam elementos da realidade. É a partir da imagem mental duma dada realidade que o aluno vai ser capaz de organizar, sequencialmente, as suas ações, pois, como refere Bruner (2000),

as imagens não se limitam a captar a particularidade de eventos e objectos: dão origem a classes de eventos, servindo-lhes de protótipos, fornecendo pontos de referência em relação aos quais se compara exemplos que aspiram a ser membros dessas classes. (p.202)

Dado a presente investigação incidir em investigar o papel das representações construídas pelos alunos do 1º ano de escolaridade, na resolução de problemas matemáticos, serão, seguidamente, referenciados, de uma forma mais pormenorizada, os três tipos de representações icônicas: desenho, símbolos não convencionais (representativos do real) e o diagrama.

i) O desenho

O desenho é uma representação designada como sendo pictórica estando integrada igualmente nas representações icônicas. O desenho é para a criança uma forma de linguagem que lhe é muito significativa e da qual ela, naturalmente, se apropria para comunicar e expressar os seus sentimentos e ideias relativamente ao mundo que a rodeia.

Segundo Smole (1996), "no ato de desenhar, manifestam-se operações mentais como imaginação, lembrança, sonho, observação, associação, relação, simbolização, estando por isso implícita ao desenho uma conversa entre o pensar e o fazer" (p.87).

Para além de outras formas de linguagem, como o gesto ou a fala, poderá se caracterizar o desenho como sendo a primeira escrita dos mais pequenos. Também, segundo Cândido (2001),

para crianças que ainda não escrevem, que não conseguem expressar-se oralmente, ou que já escrevem, mas ainda não dominam a linguagem

matemática, o desenho pode ser uma alternativa para que elas comuniquem o que pensam (p.19).

Para este autor, é importante que o professor estimule os alunos a reproduzirem um desenho, resultando como um meio verdadeiramente essencial para que o aluno seja capaz de reconhecer e interpretar os dados do enunciado, e, ainda, como uma forma importante de os alunos registarem e reflectirem sobre as suas estratégias individuais.

Desta forma, para além de o desenho ser extraordinariamente importante para o aluno poder expressar a solução que encontrou para a tarefa proposta, permite ao professor conhecer e compreender em que medida os alunos "... observaram, aprenderam e assimilaram os aspetos mais relevantes que foram estabelecidos como objetivos de determinada tarefa" (p.19).

Cavalcanti (2001) refere que o desenho pode ser utilizado de três maneiras diferentes, na resolução de problemas:

- a) O desenho pode ser utilizado para representar os dados apresentados no enunciado do problema, não estando expressas relações que identifiquem as transformações numéricas, ou a indicação da tentativa de resolução do problema, através do desenho.

Como forma exemplificativa, seguidamente na figura 1, será apresentada a ilustração utilizada na resolução do problema "As aranhas" em que, segundo Calvacanti (2001), o aluno desenha apenas os elementos apresentados no problema, isto é as duas caixas com aranhas sem, no entanto, estabelecer qualquer analogia entre a sua representação e a questão que é colocada.

As aranhas

O Clóvis é um colecionador muito estranho. Ele tem 2 caixas. Em cada caixa há 4 aranhas. Cada aranha tem 8 patas. Se Clóvis tivesse que comprar meias no inverno para as suas aranhas, quantas meias compraria?

Cavalcanti (2001,p.128)

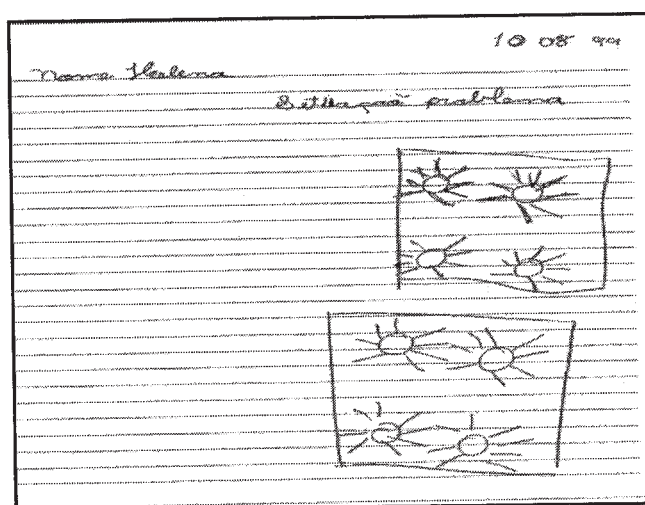


Figura 1 - Desenho no problema -As aranhas
- Helena (Cavalcanti, 2001, p.128)

b) O desenho pode ser utilizado unicamente para representar a resolução completa do problema.

Na figura 2 está ilustrada a resolução do mesmo problema “As aranhas” em que, segundo Cavalcanti (2001), o aluno recorreu apenas ao desenho para representar a resolução completa do problema, uma vez “... que mostra tanto o colecionador e as caixas, informações dadas no texto, quanto as 64 meias desenhadas para a resposta.” (p.129)

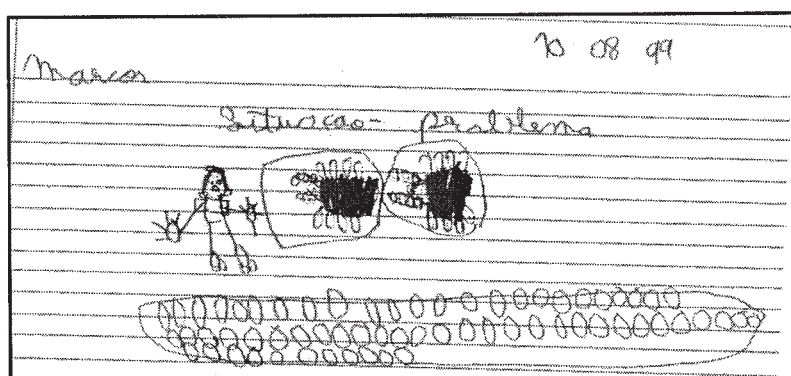


Figura 2 – Desenho no problema - As aranhas – Marcos (Cavalcanti,2001,p.129)

c) Os desenhos e os símbolos matemáticos surgem misturados.

Na figura 3, está ilustrada a resolução de um problema matemático, no qual, segundo Cavalcanti (2001), o aluno recorreu ao desenho e à linguagem matemática.

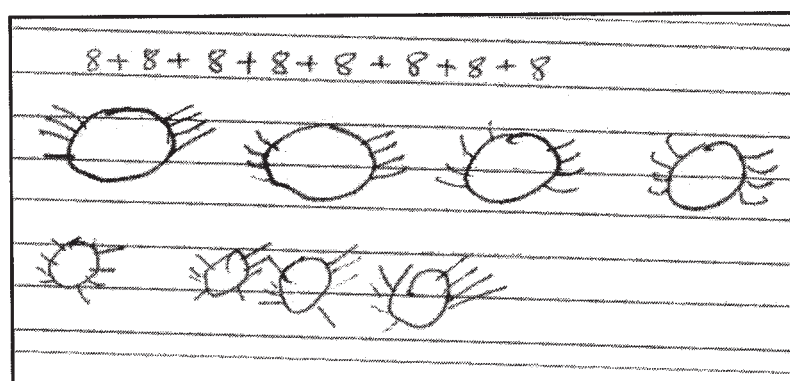


Figura 3 – Desenho e símbolos matemáticos no problema As aranhas (Cavalcanti, 2001, p.129)

De acordo com o mesmo autor, podem considerar-se duas hipóteses quando o aluno utiliza o desenho e a linguagem matemática na resolução de um problema

1. Primeiramente, o desenho é utilizado pelo aluno para interpretação do enunciado e expressa a resolução através da escrita matemática, fazendo uma analogia entre as duas linguagens.
2. Inicialmente, o aluno procede à resolução numérica e só posteriormente recorre ao desenho para comprovar se a sua resposta está correta.

Pude constatar que na grande generalidade, à medida que os alunos se vão apropriando de formas mais elaboradas de representarem o seu raciocínio, mais concretamente a nível da escrita, vão sendo desencorajados a recorrer ao desenho na resolução de problemas, em prol de uma linguagem matemática mais formal que, muitas vezes, ainda não é totalmente do domínio dos alunos.

Até mesmo os alunos que já dominam na íntegra a linguagem matemática, é natural que a qualquer momento, em qualquer ano de escolaridade, sintam necessidade de recorrer ao desenho na resolução de um ou mais problemas.

Desta forma, também segundo Cavalcanti (2001), é fundamental que os alunos

em sala de aula possam – sempre que quiserem ou sentirem necessidade – utilizar o desenho como mais um recurso ou auxílio na interpretação de texto, na representação do problema ou em sua resolução.

A decisão de usar desenho ou fazer uma operação matemática deve partir da criança, que o fará de acordo com as suas possibilidades e conhecimentos, dependendo do contexto ou da estrutura do problema. (p.131)

ii) Símbolos não convencionais - representativos do real

Para além do desenho, o símbolo não convencional é considerando também como sendo um tipo de elemento icónico. Sendo o símbolo não convencional uma representação idiossincrática, nele está subjacente uma forma muito própria ou pessoal dos alunos organizarem os dados de um problema. Neste sentido, os alunos recorrem aos símbolos não convencionais para representarem elementos da realidade, de uma forma simples e despojada de pormenores, a partir de círculos, traços verticais, traços horizontais, entre outros.

Como forma exemplificativa, nas figura 4 estão ilustrada a resolução do problema “o número de rodas”, na qual segundo NCTM (2007) o aluno utilizou símbolos não convencionais (círculo verde).

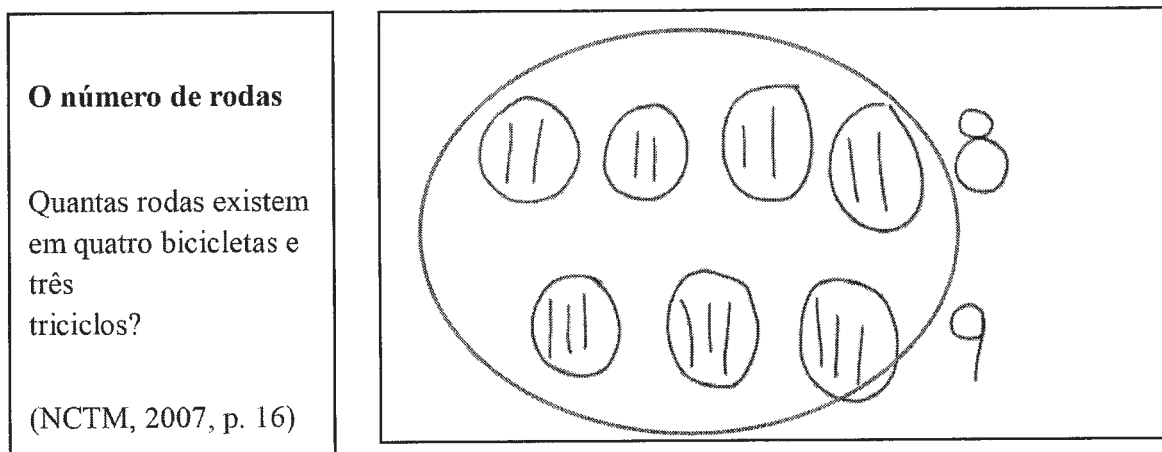


Figura 4 - Símbolos não convencionais no problema O número de rodas (NCTM, 2007, p. 16)

iii) Diagrama

O diagrama é um outro tipo de representação icónica. Segundo a conceção de Diezmann e English (2001), o diagrama é uma representação visual que apresenta dados num formato espacial. Na resolução de problemas, os diagramas são bastante úteis para a desconstrução da estrutura do problema, funcionando desta forma como ferramentas importantes de apoio ao pensamento matemático. Os mesmos autores referem que, segundo estudos publicados em 1999, por Novick, Hurley e Francis, podemos identificar quatro tipos de diagramas capazes de representar relações concretas entre os elementos de um problema

- a) Diagrama em rede: consiste num conjunto de elementos que se relacionam por uma ou mais linhas. Quando o número de elementos é muito reduzido e a relação entre ambos é pouco estabelecida, normalmente este diagrama passa a ser designado como diagrama de linhas.

Seguidamente são apresentados alguns exemplos de diagramas em rede.

A rã

Uma rã tentava saltar para fora de um poço. Cada vez que a rã saltava, subia quatro filar de tijolos, mas como estes estavam escorregadios, descia uma fila.

Quantos saltos tem a rã de dar se o poço tiver 12 filar de altura?

(Diezmann & English, 2001, p. 78)

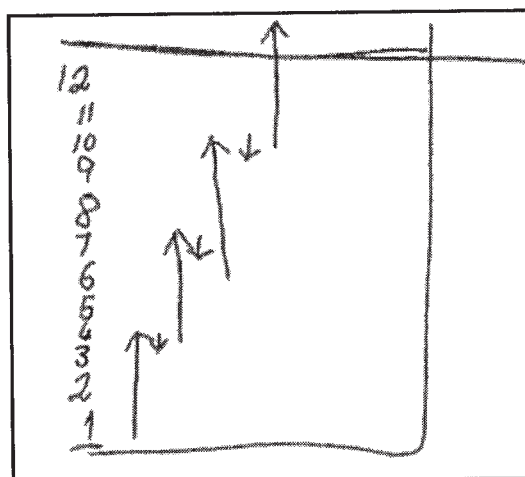


Figura 5 - Diagrama em rede na resolução do problema da rã (Diezmann & English, 2001, p. 78)

b) Matrizes: consiste num diagrama, no qual estão perspectivadas duas dimensões para representar quais as ligações existentes entre dois conjuntos de informação. A partir da disposição de dados neste diagrama, o aluno será capaz de ter acesso a toda a informação de uma forma mais prática e compreensível. Neste sentido, as matrizes poderão ser um grande apoio para os alunos na resolução de problemas que implicam raciocínio combinatório, pois possibilita, uma representação visual, mais concreta, do número de combinações possíveis. Na figura 6 está ilustrado um diagrama matriz.

Problema dos desportos

Quatro amigos gostam de diferentes desportos. Um gosta de ténis outro de natação, outro de correr e outro gosta de ginástica. Cada pessoa gosta de apenas um desporto. Utiliza as pistas para saber de que desporto gosta cada amigo:

1. A Sally e o Rick encontraram-se quando um deles ganhou uma corrida de natação.
2. A Tara e o Greg encontraram-se quando um deles exercitava no ginásio.
3. A Sally não é nem nadadora nem corredora.
4. O Greg é amigo do irmão do(a) ginasta.

(Diezmann e English, 2001, p.80)

	Sally	R	T	G			
S	X	✓	X	X			
G	✓	X	X	X			
R	X	X	X	✓			
T	✓	X	X	X			

Figura 6 - Diagrama em matriz na resolução do problema dos desportos (Diezmann & English, 2001, p. 80)

- c) Diagrama de hierarquia: consiste num diagrama no qual se pretende representar caminhos coincidentes ou divergentes entre os elementos do problema. Seguidamente, na figura 8 será ilustrado um diagrama de hierarquia.

Problema de voleibol

Quatro equipas disputam uma final de voleibol. A equipa A vence a equipa B e a equipa C vence a equipa D. Quem foi o vencedor sabendo que a equipa D perdeu o jogo final?

(Diezmann e English, 2001, p.81)

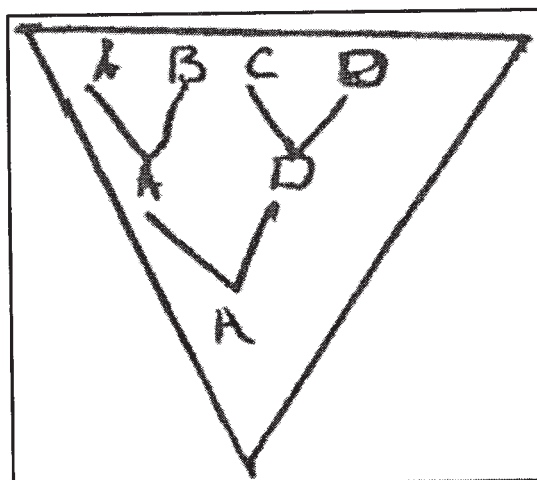


Figura 7 - Diagrama de hierarquia na resolução do problema de voleibol (Diezmann & English, 2001, p. 81)

- d) Diagrama parte-todo: consiste num diagrama que representa a relação existente entre a parte e o todo. Comparativamente com os dois diagramas anteriormente referidos, o diagrama parte-todo não tem uma forma externa uniformizada que os identifique.

A figura 8 ilustra um diagrama parte-todo.

Problema do parque

A Jane viu algumas pessoas a passear os seus cães no parque. Ela contou as pernas e descobriu que ao todo eram 48 pernas. Quantas pessoas e quantos cães estavam no parque? Existem outras soluções?

(Diezmann & English, 2001, p. 81)

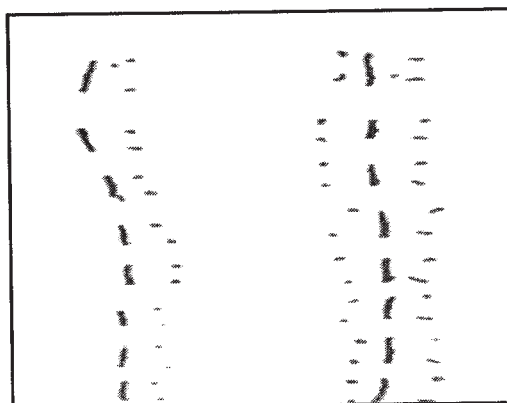


Figura 8 - Diagrama parte-todo na resolução do problema do parque (Diezmann & English, 2001, p. 81)

Segundo Diezmann e English (2001), o professor desempenha um papel fulcral na capacidade dos alunos estabelecerem relações entre um determinado problema e a sua representação, a partir de um diagrama.

Neste sentido os mesmos autores referem que o professor deverá: i) apresentar problemas diversificados que permitam a exploração e estudo de todos os tipos de diagrama; ii) explicar a analogia existente entre a estrutura de um determinado problema e a sua representação através do diagrama; iii) facultar aos alunos a possibilidade de identificarem o diagrama mais adequado para representar um problema específico; iv) estimular os alunos a discutirem entre si os seus diagramas, como também a identificarem as diferenças e semelhanças em cada um dos diagramas existentes que podem representar o mesmo problema; v) exemplificar a construção de um diagrama e explicar como é possível representar os dados do problema.

Os mesmos autores salientam, também, que alguns alunos apresentam dificuldades em raciocinar a partir dos diagramas, sendo que desta forma, para colmatar esta dificuldade o professor deverá salientar que é importante haver rigor na localização e deslocação dos dados num diagrama, estimulando, por sua vez, os alunos a utilizarem estratégias de orientação no momento da construção do seu diagrama, para que este fique suficientemente esclarecedor.

1.2.4.3. REPRESENTAÇÃO SIMBÓLICA

Este tipo de representação tem subjacente uma forma mais elaborada de representar a realidade, e dele fazem parte um conjunto de palavras ou uma linguagem simbólica que é regida por regras ou leis específicas. O seu significado linguístico depende, em grande parte, do domínio de um código simbólico.

Assim sendo, para que se possa efetuar com sucesso uma determinada descrição linguística, torna-se fundamental efetivar a compreensão relativamente aos referentes das palavras e das regras ou leis específicas da linguagem. Pois, segundo Bruner (1989), a dada altura o aluno,

começa a ser capaz de representar a realidade através de uma linguagem simbólica, de carácter abstracto e sem uma dependência directa da realidade. Ao entrar nesta etapa, a pessoa começa a ser capaz de manejar os símbolos em ordem não só a fazer a sua leitura da realidade mas também a transformar a realidade. (p.35)

Para Smole e Diniz (2001), a Matemática “quer por sua característica de linguagem científica, pela sua natureza da ciência matemática, seu recurso básico de comunicação, é a escrita” (p.17).

Neste sentido, Cândido (2001) enfatiza o papel da escrita nas aulas de matemática como sendo mais um importante meio dos alunos representarem as suas ideias. Para este autor, a escrita assume duas características: i) ser um auxílio da nossa memória, ao qual podemos recorrer sempre que necessitamos; ii) permitir o ato de comunicar à distância no espaço e no tempo, a troca de informações e descobertas.

Também para o mesmo autor, permitir em sala de aula a exploração destas diferentes funções da escrita, é facultar ao aluno a possibilidade de descobrir de uma forma natural e prazerosa “a importância da língua escrita e de seus múltiplos usos, ao mesmo tempo que as ideias matemáticas são aprendidas” (p.23).

Parece, assim, possível concluir-se que a escrita na Matemática desempenha um papel fulcral, para se comunicarem ideias e conceitos e gerar compreensão.

Nesta perspectiva, Lee (2006), refere que a escrita de símbolos próprios da matemática designa-se como sendo a escrita convencional da Matemática.

A utilização de símbolos matemáticos, ou da linguagem convencional permite representar ou comunicar uma ideia matemática com uma maior economia de esforço, rigor e clareza. A escrita convencional da Matemática implica conhecer a ligação do símbolo com a ideia que representa, saber as circunstâncias a que se aplica e saber como é que a representação pode ser usada ao serviço de certos objectos (Ponte e Serrazina, 2000).

Vergani (2002) apresenta uma classificação dos símbolos próprios da Matemática, de acordo com as suas características.

Os pictogramas: são ícones geométricos usados na Matemática como é o caso i) do , na representação do cálculo da área dum quadrado – $A_{\square}$;

ii) **Os lologramas:** que são símbolos exclusivamente usados num contexto matemático e funcionam como imagens que representam palavras ou expressões, tais como: +; —; X; =; % ou €;

iii) **Os símbolos de pontuação** como o ponto final (.); a vírgula (,) e os dois pontos (:) que são também utilizados na Matemática, mas com significados diferentes. O primeiro (.) representa a multiplicação, o segundo (,) usa-se para representar numerais decimais e o último (:) representa a divisão.

Também se pode representar uma ideia, uma relação ou um conceito matemático sinteticamente, como é o caso do símbolo " $<$ " que significa "menor do que" e " $>$ " que significa "maior do que".

Dominar de forma compreensiva a simbologia matemática é facilitador do desenvolvimento do sentido de número e, consequentemente, da literacia matemática. Segundo a conceção Ponte e Serrazina (2000), a escrita convencional é bastante útil porque possibilita uma escrita condensada, facilita a precisão e permite, em muitos casos, usar processos de cálculo bastante expeditos.

Contudo, apesar dos símbolos serem importantes para apoiarem o raciocínio matemático, não há vantagem em introduzir de forma prematura e em excesso este tipo de representações, porque de nada valerá esta representação aos alunos se estes não forem capazes de associar os símbolos ou as representações simbólicas com os seus significativos. Limitar o uso de símbolos matemáticos no ensino da Matemática, são práticas que favorecem fortemente o insucesso dos alunos e o seu desinteresse por esta disciplina.

Desta forma, torna-se necessário explorar estas representações de uma forma cautelosa, gradual e integradora.

Só pela intermediação do ensino da simbologia da matemática e pela escrita informal dos alunos será possível desenvolver a sua capacidade de interpretação de símbolos matemáticos e, por conseguinte, a sua capacidade de comunicarem matematicamente, de uma forma precisa e correta.

A figura 9 ilustra a resolução do problema matemático, na qual, segundo Cavalcanti (2001), a aluna usou representações simbólicas (círculo verde).

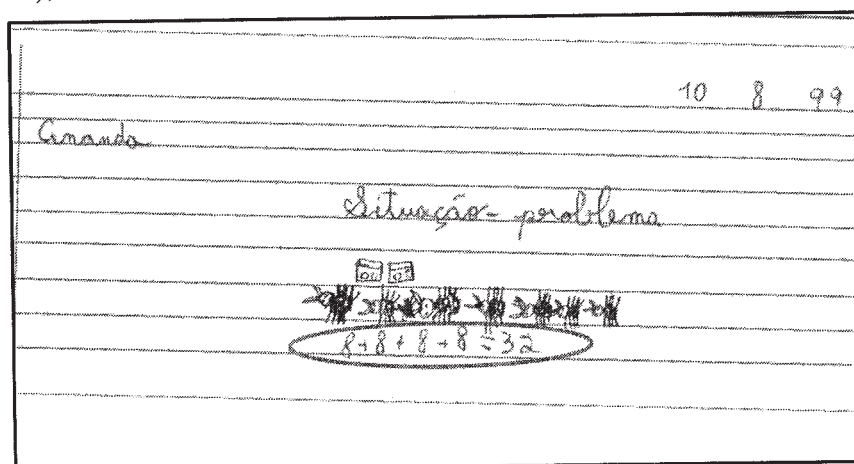


Figura 9 - Representações simbólicas no problema *As aranhas* (Cavalcanti, 2001, p.130)

Em síntese, as primeiras representações dos alunos, são designadas como representações idiossincráticas. Estas representações são muito próprias, mas ricas em significado matemático, sendo ferramentas muito importantes para os alunos registarem, organizarem e comunicarem as suas ideias matemáticas, para além de serem também um forte suporte para a compreensão de conceitos e relações matemáticas.

Segundo Jerome Bruner (1989), existem três tipos de representações: ativas, icónicas e simbólicas. Por sua vez, dado a presente investigação incidir em investigar o papel das representações construídas pelos alunos do 1º ano de escolaridade, na resolução de problemas matemáticos, são, referenciados, de uma forma mais pormenorizada, os três tipos de representações icónicas: desenho, símbolos não convencionais (representativos do real) e o diagrama.

Relativamente ao desenho Cavalcanti (2001) refere que este pode ser utilizado pelos alunos de três maneiras diferentes, na resolução de problemas: i) para representar os dados apresentados no enunciado do problema, não estando expressas relações que identifiquem as transformações numéricas; ii) para representar unicamente a resolução completa do problema; iii) Os desenhos e os símbolos matemáticos surgem misturados, isto é, o desenho é utilizado pelo aluno para interpretação do enunciado e expressa a resolução através da escrita matemática, fazendo uma analogia entre as duas linguagens, ou o desenho surge após a resolução numérica para comprovar se a sua resposta está correta.

Os alunos usam os símbolos convencionais (representativos do real) para representarem elementos da realidade, de uma forma simples e despojada de pormenores, a partir de círculos, traços verticais, traços horizontais, entre outros.

Por último segundo Diezmann e English (2001), o diagrama é uma representação visual que apresenta dados num formato espacial, sendo que existem quatro tipos de diagrama: em rede, matrizes, hierarquia e parte – todo. E são uma valiosa ferramenta de apoio ao pensamento matemático e útil na desconstrução da estrutura do problema.

1.3. O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Tradicionalmente, os problemas propostos aos alunos, surgem logo após o ensino do algoritmo, para treinar um conjunto de procedimentos de cálculo, e por conseguinte, incidem numa total desvalorização do conhecimento informal do aluno e no seu papel no desenvolvimento do seu pensamento matemático. A resolução de problemas pela aplicação direta de algoritmos pode levar os alunos a desistir das suas próprias ideias e estratégias, uma vez que eles são em grande parte alicerçados em mecanizações, sendo que, no caso do aluno se esquecer de um passo específico, dificilmente conseguirá terminar a resolução.

Efetivamente, é possível constatar que as crianças ao entrarem no 1º ciclo do ensino básico, já trazem consigo vivências e significados matemáticos e que, ao serem confrontadas com problemas matemáticos, são capazes de os solucionar através das suas próprias estratégias. Desta forma é essencial valorizar os processos e estratégias informais dos alunos na resolução de problemas, para poderem dar mais sentido à Matemática e, por conseguinte, criarem mais confiança nas suas capacidades matemáticas.

Smole e Diniz (2001) consideram negativa a exigência precoce do uso dos algoritmos na resolução de problemas, pois pode criar dificuldades para os alunos, quer na compreensão do que o problema pede, quer na elaboração adequada de uma estratégia para a sua resolução. Ao invés, deveria ser dado tempo para que os alunos se apropriassem do conceito e conseguissem operar mesmo sem usarem a formalidade dos algoritmos, dado que o objetivo está em aprender Matemática e não em escrevê-la convencionalmente.

Na conceção de Ponte e Serrazina (2000), as representações próprias dos alunos “... tendem ser valiosas na medida em que apoiam a compreensão e solução de problemas, fornecem formas significativas de registo de um método ou de uma solução” (p.43).

Cândido (2001), em consonância com os autores anteriormente referidos, enfatiza o papel das representações informais dos alunos, identificando-as como um meio verdadeiramente essencial para reconhecerem e interpretarem os dados do enunciado e, ainda, uma forma importante de os alunos registarem e reflectirem sobre as estratégias desenvolvidas. As representações podem acarretar parte do fardo da memorização, por permitirem que os alunos registem os passos intermédios ao longo do processo de resolução de problemas.

Segundo o NCTM (2008) "Os alunos que representem de alguma forma o problema têm mais probabilidades de identificar relações importantes do que aqueles que o abordam sem recorrer a representações" (p.240)

Cada representação revela uma maneira diferente de raciocinar sobre o problema, sendo que desta forma, "As representações externas das crianças podem ser informativas de como eles percebem as situações problemáticas e podem dar ajudas para desenhar intervenções" (Dufour-Janvier et al., p.120). Ao observar as interpretações das crianças, os professores poderão conhecer os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos. Nesta perspectiva, as representações na resolução de problemas resultam como ferramentas, tanto para os alunos como para os professores, dado possibilitarem o acesso à forma como os alunos compreenderam um determinado conceito ou como constroem o seu conhecimento.

Contudo, sendo as representações externas dos alunos muito próprias e um reflexo de ideias construídas a nível do pensamento - representações internas, o professor deverá certificar-se que a sua interpretação coincide com a do aluno, sendo, desta forma, necessário o professor questionar os alunos sobre as suas representações. Uma vez que "É por meio do diálogo que professor e aluno, juntos, constroem o conhecimento, chegando a uma síntese do saber de cada um" (Haydt, 2006, p. 59).

Contudo, conforme Ponte; Boavida; Graça e Abrantes (1997)

O professor deve garantir que essa comunicação se efectua nos dois sentidos – dele para os alunos e dos alunos para si. O professor deve ainda valorizar a comunicação entre os próprios alunos (p. 87).

Nesta perspetiva, a comunicação estabelecida entre aluno - professor e vice versa e ainda entre alunos, em sala de aula, é um recurso importante na resolução de problemas. Uma vez que "... promover a comunicação em sala de aula é dar aos alunos uma possibilidade de organizar, explorar e esclarecer seus pensamentos" (Cândido, 2001, p. 16).

Segundo Cavalcanti (2001), a comunicação oral pode ser desenvolvida na resolução de problemas a partir da apresentação de estratégias de resolução, na resolução do problema em pares e em pequenos grupos. É importante os professores estimularem os alunos a refletir e a explicar as suas respostas, para que a resolução de problemas conduza e confirme a compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

Desta forma, após os alunos concluírem a resolução dos problemas, os professores poderão escolher, estrategicamente, as representações de alguns alunos que se

revelem mais adequadas a uma discussão na turma. Discutir motivos, pelos quais algumas representações são mais eficazes que outras, em determinados problemas, dá ênfase ao processo e ajuda os alunos a serem críticos sobre aspetos das suas representações (NCTM, 2007).

Dar atenção aos diferentes métodos, bem como às diferentes representações, irá ajudar os alunos a compreenderem o poder da visualização de um problema sob diferentes perspetivas. Por outro lado, a observação das escolhas e representações feitas pelos alunos fornece ao professor informações que lhe permitem avaliar quais os aspetos do problema que os alunos identificam e como raciocinam.

À medida que os alunos discutem as suas ideias, começam a desenvolver conjecturas baseadas em representações do problema e o professor poderá representar o raciocínio dos alunos de outras maneiras, de modo a apoiar e aprofundar as suas ideias.

Os professores devem enfatizar a importância de representar as ideias matemáticas sob diversas formas. Se lhes forem proporcionadas bastantes oportunidades de utilizar, desenvolver, comparar e analisar uma diversidade de representações, os alunos tornar-se-ão competentes na seleção da mais adequada para um determinado problema. A modelação deste processo, à medida que trabalham com a turma na resolução de um problema, constitui uma maneira de estimular os alunos a utilizarem e analisarem representações.

Pois como refere o NCTM (2007),

os alunos precisam de desenvolver e usar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, investigar relações matemáticas e justificar ou desaprovar conjecturas. Podem usar representações informais tais como desenhos para delinear de várias formas os problemas (p. 206).

Sierpinska (1994), citando Pollock, diz que "... sentimos que se compreende algo quando construímos um modelo matemático disso." (p.38). Na perspetiva de Fonsnot e Dolk (2001), os modelos são mapas mentais para organizar a atividade, resolver problemas ou explorar situações, sendo que "... os primeiros modelos feitos pelas crianças são de facto representações das suas interações com o objecto, em vez do objecto em si" (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008, p. 142).

Nesta perspectiva, Gravemeijer (1994) defende que o mais importante é a situação real que o problema é capaz de representar. O objetivo principal é resolver o problema de uma forma indireta, a partir da imaginação e imaginando que se age na situação real. Sendo que este processo, é desencadeado a partir de simbolizações ou modelação. Desta forma, os modelos poderão facilitar a passagem do conhecimento informal do aluno para o conhecimento formal. Nesta perspectiva, este autor apresenta-nos quatro níveis diferentes de como se processa esta passagem do conhecimento informal para o formal, como podemos constatar na figura (11)

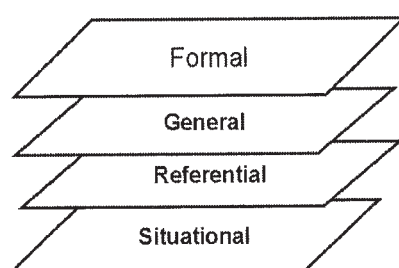


Figura 10 - Níveis de atividade (adaptado de Gravemeijer, 2005, p.98)

Tendo como base a figura 10, os quatro níveis processam-se da seguinte forma: i) nível da atividade situacional: a interpretação e as resoluções estão dependentes de como agir sobre o contexto; ii) nível referencial: a atividade geral começa a emergir e os alunos começam a focar-se nas relações matemáticas envolvidas. O seu raciocínio perde dependência de uma imagem específica e usa-se um modelo abstrato da situação; iii) nível geral: caracteriza-se pelo uso de modelos que não se aplicam apenas naquela situação particular e que podem ser usados em todas as situações de um certo tipo- modelo para; iv) nível formal: não há dependência de modelos que suportam a atividade matemática. Os alunos raciocinam com base em propriedades e relações sobre objetos matemáticos.

Nesta perspectiva, o professor deve propor problemas matemáticos próximos à realidade e das questões que os próprios alunos vão colocando permitindo, aos seus alunos representarem o seu pensamento informal matemático, a pensarem criativamente, a encontrarem um caminho próprio de pensar sobre um determinado conceito. Sendo que desta forma natural e, por aproximações sucessivas o professor deverá conduzir os seus alunos até uma forma mais abstrata e generalizada de se pensar sobre o problema ou o seu conceito. Isto é, a serem capazes de extrair do problema o que não é significativo para a sua resolução, e a acrescentar o que é necessário, conseguindo mover-se também entre

representações mais convencionais que poderão ser mais uteis na exploração de um problema específico.

Resumindo, na conceção de Ponte e Serrazina (2000) e Cândido (2001), as representações próprias dos alunos são importante na compreensão e solução de problemas.

Ponte, Boavida, Graça e Abrantes (1997) enfatizam o papel da comunicação em sala de aula entre professor-alunos e alunos-alunos.

Para Cândido (2001), a comunicação em sala de aula permite aos alunos organizar, explorar e esclarecer os seus pensamentos.

Para Calvacanti (2001), a comunicação oral pode ser desenvolvida na resolução de problemas a partir da apresentação de estratégias de resolução, na resolução do problema a pares e em pequenos grupos. Incentivar os alunos a procurar diferentes resoluções, é abrir caminho para que possam criar as suas estratégias pessoais.

O NCTM (2007) refere que os alunos precisam de desenvolver e usar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas.

Por último, Gravemeijer (1994) defende que as representações poderão facilitar a passagem do conhecimento informal do aluno para o conhecimento formal.

1.4. O PAPEL DO PROFESSOR NAS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS DOS ALUNOS

Segundo o NCTM (2007), uma das principais responsabilidades do professor incide em criar um ambiente de aprendizagem que estimule os alunos a desenvolverem e a utilizarem as múltiplas representações, uma vez que estas tornam as ideias matemáticas mais concretas e disponíveis para reflexão.

Neste sentido, pressupõe-se que o professor crie um ambiente de aprendizagem que permita aos alunos reconhecer que as representações são oportunidades de cada um desenvolver a sua capacidade inata de pensar criativamente sobre uma dada situação e, também, que a partilha e a discussão sobre as mesmas são igualmente oportunidades de cada um descobrir outras formas possíveis de se pensar e, por conseguinte, uma forma potencializadora de desenvolverem o seu raciocínio e pensamento crítico.

Como refere Cabanas (2002), entende-se que atualmente, mais do que apreender conteúdos, importa que o aluno “aprenda a aprender”, isto é, aprenda a ser capaz de adquirir e construir conhecimento que seja capaz de o aplicar nas diversas situações, com se vai deparando.

Nesta perspetiva, o professor não deve ser apenas um transmissor de conteúdos, cingindo grande parte da sua ação educativa em “moldar, reforçar e dar informações” (Oliveira Formosinho, 2002, p.126). Deve, antes, desempenhar um papel de mediador e promotor de situações de aprendizagem em que o aluno participe ativamente na construção do seu saber, sendo desta forma encarado “como sujeito e não como objeto do processo educativo” (ME, 1997, p.19).

Neste sentido, o professor ao enfatizar e valorizar as representações próprias dos alunos, estará a mostrar que a representação é adivinhar um caminho e não aplicar meramente um conjunto de regras e procedimentos.

Como refere o NCTM,

São as acções dos professores que encorajam os alunos a pensar, a questionar, a resolver problemas e a discutir as suas ideias, estratégias e soluções. O professor é responsável pela criação de um ambiente intelectual, no qual o raciocínio matemático sério constitui a norma.” (NCTM, 2000, p.19).

Desta forma, a partir das representações próprias dos alunos, o professor deverá usar toda a informação nelas contidas e estabelecer ligações entre as representações convencionais da matemática, uma vez que “se queremos usar as representações externas no ensino temos que ter em consideração que isto deve ser o mais próximo possível das representações internas das crianças” (Dufour-Janvier et *al.*, 1987, p.117).

No momento em que os alunos realizam as tarefas propostas, o professor deve observá-los e estar atento ao que escrevem e às representações utilizadas, pois estes momentos são importantes para que possa certificar-se da compreensão e o nível de desenvolvimento das ideias matemáticas dos seus alunos. Como refere o NCTM (2007), somente “ao observar as suas representações, os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos” (p. 76). Uma vez que as representações internas, se processam ao nível do pensamento, só pelas representações externas o professor poderá conhecer na íntegra qual o pensamento e raciocínio matemático dos alunos, pois estas são fisicamente observáveis e nelas está subjacente um processo ou um caminho próprio que cada aluno construiu segundo o seu saber e compreensão na abordagem de um determinado conceito.

Segundo Ponte e Serrazina (2000), as representações podem ser interpretadas de diversas formas, neste sentido, o professor, ao fazer a leitura de uma representação de um aluno, tem de considerar e respeitar o modo como o aluno pensou sobre ela, dado este poder não coincidir exatamente com o seu.

Perante a possibilidade de se interpretarem as representações de diversas formas é fundamental que o professor crie um ambiente de sala que promova a apresentação, discussão e reflexão das mesmas em momentos coletivos, pois “promover a comunicação em sala de aula é dar aos alunos uma possibilidade de organizar, explorar e esclarecer os seus pensamentos” (Cândido, 2001, p. 16). Para além de, como afirma Rinaldi (1999, citado por Edwards, Gandini & Forman, 1999) “os alunos não desejam apenas receber, mas também querem oferecer [...] num contexto de aprendizagem em grupo”. (p.144).

Em síntese, uma das principais responsabilidades do professor incide em criar um ambiente de aprendizagem que estimule os alunos a desenvolverem e a utilizarem as múltiplas representações, uma vez que elas são ferramentas essenciais para os alunos comunicarem, organizarem e clarificarem as suas ideias e o seu pensamento e, assim, desenvolverem o seu raciocínio matemático. Pois, como refere Cabanas (2002), entende-se

que atualmente, mais do que apreender conteúdos, importa que o aluno “aprenda a aprender”.

Dufour-Janvier et *al.* (1987) salienta que as representações externas devem ser, o mais possível, próximas das representações dos alunos. Desta forma, o professor, a partir das representações dos alunos deverá usar toda a informação nelas contidas e estabelecer ligações entre as formas convencionais de representação da matemática.

O NCTM (2007) refere que o professor deverá valorizar e estar atento às representações dos alunos, uma vez que a partir delas o professor será capaz de compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos.

Segundo Ponte e Serrazina (2000), o professor, ao fazer a leitura de uma representação de um aluno, tem de considerar e respeitar o modo como o aluno pensou sobre ela, dado este poder não coincidir exatamente com o seu.

Cândido (2001), defende que o professor deverá promover a comunicação em sala de aula, uma vez que é uma forma importante dos alunos organizarem, explorarem e esclarecem seus pensamentos.

CAPÍTULO II - METODOLOGIA

(...) a flor nunca mais acabava de preparar a sua beleza no abrigo da câmara verde. Escolhia cuidadosamente as suas cores. Vestia-se lentamente, ajustava as pétalas uma a uma.

A. St. Exupéry, 1995, p.31

2.1. OPÇÕES METODOLÓGICAS

Sousa (2005) refere que uma investigação surge no sentido de “ esclarecer uma dúvida, de responder a uma pergunta, podendo na realidade aceitarem-se respostas parciais ou de veracidade duvidosa, mas procurando-se sempre chegar a respostas de maior rigor”. (p. 12).

Neste sentido, a minha investigação foi realizada com o objetivo de estudar o contributo das representações matemáticas construídas pelos alunos no desenvolvimento do raciocínio matemático a partir da proposta de resolução de problemas. Uma vez que uma investigação em educação pode ser “um excelente guia para orientar as práticas educativas, com o objectivo de melhorar o ensino e os ambientes da sala de aula.” (Arendes, 1995, p.45).

Bogdan e Biklen (1994) defendem que o investigador em educação,

comporta-se mais de acordo com o viajante que não planeia do que com aquele que o faz meticulosamente. [...] Os planos evoluem à medida que se familiarizam com o ambiente, pessoas e outras fontes de dados, os quais são adquiridos através da observação directa. [...] É o próprio estudo que estrutura a investigação, não ideias preconcebidas ou um plano prévio detalhado. (p.83)

Numa investigação está sempre subjacente uma metodologia específica, que consiste no caminho que o investigador elege para desenvolver a sua investigação, face ao seu objeto de estudo, integrando nos seus procedimentos instrumentos e técnicas adequadas.

De forma a descrever e compreender a prática educativa, a metodologia adotada é de cariz qualitativo por considerar que esta seria a opção mais adequada, face ao objetivo do estudo, na medida em que “se trata do método mais adequado para o trabalho de investigação em educação, pois manifesta mais interesse no processo do que no produto” (Bogdan & Biklen, 2010, p.47).

Neste sentido, a investigação de cariz qualitativa pressupõe que “Em vez da procura de leis que possam ser extensíveis a toda a população, os estudos deste tipo procuram compreender os mecanismos, e como funcionam certos comportamentos, atitudes e funções” (Sousa, 2005, p.31).

Segundo este autor, a investigação qualitativa é perspectivada como sendo *naturalista*, por privilegiar o ambiente natural como fonte direta de dados, sendo o mais

importante a descrição e compreensão dos fenómenos. Por sua vez, Ponte (1994), refere que a perspetiva *interpretativa* é uma das perspetivas teóricas essenciais da investigação qualitativa.

Na conceção deste autor a perspetiva interpretativa está assente em duas grandes correntes: *fenomenológica* que incide na “ preocupação em compreender o sentido dos acontecimentos e interações das pessoas ordinárias nas suas situações particulares (p.15) e o *Interaccionismo simbólico* que se baseia na interpretação e nos significados que os indivíduos atribuem às experiencias que vivem diariamente e com as quais interagem.

Bogdan e Biklen (1994), em consonância com os autores anteriormente mencionados, referem que a metodologia qualitativa preconiza uma aproximação do investigador ao objeto de estudo, pois “O investigador introduz-se no mundo das pessoas que pretende estudar, tenta conhece-las, dar-se a conhecer e ganhar a sua confiança...” (p.16).

A investigação qualitativa dá ênfase à recolha de material credível e sistémico sobre aspetos específicos da realidade social, com o objetivo de originar e inter-relacionar conceitos que possibilitem ao investigador compreender essa realidade (Afonso, 2005).

Os autores Bogdan e Biklen (1994) referem cinco particularidades que caracterizam a metodologia qualitativa

i) *A fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal*

Os investigadores permanecem por um longo período de tempo no local onde efetuam o seu estudo, de forma a obter a compreensão do seu contexto, procedendo à recolha de informações a partir de meios audiovisuais, sendo que, na grande generalidade, os investigadores optam por proceder à recolha de informações a partir de blocos de notas.

ii) *A investigação qualitativa é descritiva*

Os dados recolhidos da observação na investigação qualitativa, surgem sob a forma de palavras ou imagens, a partir de notas de campo, vídeos fotografias, entrevistas, memorandos e documentos pessoais. Esta recolha deverá ser meticulosa para que seja possível definir e enriquecer a investigação. O tratamento de dados é desenvolvido de forma a salvaguardar e respeitar toda a sua riqueza subjacente. Desta forma, a investigação qualitativa pressupõe um olhar rigoroso e atento do investigador sobre todos os aspetos,

sem recurso a ideias pré concebidas ou estabelecidas à *priori*, para que a investigação possa ser minuciosa e precisa.

iii) *Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados*

Os investigadores qualitativos focam o seu interesse em compreender o processo dos acontecimentos, e não concretamente os resultados obtidos. Estes observam, recolhem dados e analisam-nos, para, posteriormente, poderem comparar ou confrontar os dados recolhidos com as situações ocorridas no momento presente. Possibilitando desta forma, uma análise mais rica e minuciosa acerca do estudo que está a desenvolver.

iv) *Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva*

Os investigadores, numa fase inicial, pretendem essencialmente observar o meio e analisar o que dele podem recolher para identificação do seu objeto de estudo. Esta investigação, tal como nos sugerem alguns autores como Afonso, (2005), Ponte (1994), pode ser equiparada a um funil, porque a investigação começa por ser abstrata e, à medida que o investigador vai analisando e agrupando os dados recolhidos, estes vão possibilitar o estreitamento de significados cada vez mais objetivos e específicos.

v) *O significado é de importância vital na abordagem qualitativa*

Paralelamente à recolha de dados e análise da realidade observada, o investigador, considera e enfatiza os significados que os participantes atribuem às suas experiências. Desta forma, a partir desses significados, o investigador pretende com maior rigor compreender e conduzir a sua recolha e seguidamente a sua interpretação.

2.2. PARTICIPANTES

Os participantes deste estudo são os elementos da turma do 1º ano, do Colégio “Os Cartaxinhos”, localizado em Alenquer, entre novembro e fevereiro, do ano letivo 2013/2014.

2.2.1. A TURMA

A turma era constituída por dez alunos, cinco do género feminino e cinco do género masculino, com idades compreendidas entre os seis e sete anos. Sendo que nove dos alunos completam sete anos até ao final do ano de 2014 e um dos alunos completa oito anos, no mesmo ano.

Todos os alunos ingressaram pela primeira vez no 1º ano do Ensino Básico e eram provenientes de famílias de um nível socioeconómico médio alto/alto.

Da turma fazia parte um aluno, o aluno mais velho, com necessidades educativas especiais, mais especificamente, com perturbação de hiperatividade e défice de atenção, estando o mesmo a ser acompanhado por uma psicóloga e uma pedopsiquiatra.

Todos os alunos da turma, com exceção do aluno anteriormente referido, já frequentavam este estabelecimento de ensino, estando inseridos na mesma turma desde a creche.

Tratava-se de um grupo heterogéneo, na medida que cada aluno apresentava diferentes interesses e especificidades, a nível cognitivo e emocional. Os alunos revelavam bastante autonomia, eram assíduos e, de uma forma geral pontuais. O grupo na grande generalidade era afetuoso, demonstrando com facilidade os seus sentimentos. A relação com a professora era de grande proximidade e admiração. A turma era conversadora, não obstante, tinha interiorizado os princípios e as regras de boa convivência com os seus pares, embora o aluno com necessidades educativas especiais (PHDA), apresentasse, com bastante regularidade, comportamentos desajustados com os colegas da turma e com os adultos, em geral.

O grupo era bastante participativo e curioso, levantando, espontaneamente e de uma forma regular, questões sobre os mais variados temas, pois como referem os autores Papalia, Olds e Feldman, (2001) as crianças “estão interessadas em tudo o que se passa no mundo” (p.321). Relativamente às áreas disciplinares, o grupo apresentava uma maior

difficuldade na disciplina de Português e o seu maior interesse incidia na disciplina de Matemática, e, em grande parte, das Expressões.

2.2.2. A ESTAGIÁRIA INVESTIGADORA

Como autora do estudo, presente neste relatório, desenvolvi a minha ação como investigadora participante, na qualidade de professora estagiária, uma vez que fui responsável pela implementação e condução da discussão das tarefas que constituem os dados de análise desta investigação. Segundo a perspetiva de Bogdan e Biklen (1994) “À medida que um investigador vai passando mais tempo com os sujeitos, a relação torna-se menos formal. O objetivo do investigador é o de aumentar o nível de à vontade dos sujeitos” (p.113).

Neste sentido, segundo estes autores, numa investigação em educação torna-se importante que o investigador estabeleça uma relação de proximidade com o seu objeto de estudo, participando no contexto do campo de ação, interagindo com os sujeitos envolvidos, não obstante, deve procurar manter uma imparcialidade que se torna necessária, de forma a evitar distorções sobre a interpretação dos fenómenos em estudo.

2.2.3. O PROFESSOR

A professora titular de turma iniciou a carreira docente no ano letivo de 2001/2002, no Colégio “Os Cartaxinhos “, onde se encontra até ao momento presente.

A professora cooperante foi um elemento fulcral no desenvolvimento desta investigação, dado ter colaborado incondicionalmente comigo, ao aceitar todas as propostas de tarefas sugeridas e disponibilizando tempo e espaço para a sua implementação. Com facilidade, verbalizava o seu gosto pelo ensino.

2.3. PROCEDIMENTOS

De forma a dar resposta à problemática em estudo, foi desenvolvido um conjunto de procedimentos que serão, seguidamente, descritos.

A investigação, numa fase inicial, foi desenvolvida a partir de uma observação exploratória do contexto de sala de aula. Perante a observação do contexto de sala de aula,

foi possível constatar que a área da matemática era abordada com menos frequência, sendo que os conteúdos matemáticos eram abordados segundo a ordem presente no manual de Matemática. Neste sentido, os conteúdos matemáticos abordados pela professora cooperante ao longo da investigação, incidiram em grande parte na apresentação dos números e, na sua escrita simbólica, sendo que nunca se apresentou ou propôs à turma a resolução de problemas.

Desta forma, procedi à seleção do tema e identificação da problemática que aprofundei teoricamente, para que fosse possível proceder à experimentação e por conseguinte, aceder ao seu significado.

Posteriormente, a investigação incidiu na implementação de tarefas matemáticas que consistiam na resolução de problemas. Simultaneamente, foram sendo recolhidas notas de campo específicas, com o intuito de registar as diferentes estratégias de resolução dos alunos, bem como a comunicação dos diferentes raciocínios e representações utilizadas.

A partir do material recolhido, procedi à sua leitura sistemática, de forma a possibilitar-me a interpretação e compreensão dos raciocínios e das estratégias desenvolvidas pelos alunos para, assim, poder delinear os tópicos a pesquisar para a elaboração do referencial teórico.

Seguidamente, a análise foi realizada segundo o referencial teórico recolhido e uma análise mais incidente e rigorosa, dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos, utilizando como recurso as notas de campo.

2.4. INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS

Segundo Sousa (2009), os “Instrumentos são ferramentas de investigar” (p. 181) e “o termo «dados» se refere aos materiais em bruto que os investigadores recolhem no mundo que se encontram a estudar; são elementos que formam a base da análise” (Bogdan e Biklen (1994, p. 149).

Neste sentido Bogdan e Biklen (1994) defendem que existem várias técnicas ou métodos passíveis de serem utilizados para a recolha de dados no contexto onde é desenvolvida a investigação, podendo estes ser: o estudo documental; a observação; fotografias; notas de campo; diários; o discurso dos sujeitos, entre outros.

Tendo presente estes indicadores, como instrumentos de recolha de dados para elaboração desta investigação, foram utilizados a observação; os documentos produzidos pelos alunos e as notas de campo.

A observação direta dos alunos e de todo o seu trabalho constituiu o instrumento de recolha de dados fulcral desta investigação. Segundo Bogdan e Biklen (1994), na investigação em educação a “observação participante é a melhor técnica de recolha de dados neste tipo de estudos” (p. 90).

Neste sentido, como investigadora, ao longo do quotidiano escolar, pretendi interagir com os alunos e observar a sua forma de ser e de estar; os seus interesses; reações e capacidades perante os desafios propostos. Pois, uma observação participante “requer uma implicação do observador nos acontecimentos e fenómenos que está observando” (Gómes et al., 1996, p.165).

A observação participante permite, não só, a observação direta de todo o contexto de estudo, como, também, contribui para uma interação entre a investigadora e os indivíduos com quem se desenvolve o estudo, o que se pode traduzir numa recolha de dados mais autêntica e rica.

Como referem Quivy e Campenhoudt (2008), “os métodos de observação direta constituem os únicos métodos de investigação social que captam os comportamentos no momento em que eles se produzem e em si mesmos, sem a mediação de um documento ou de um testemunho” (pp. 196 - 197)

2.4.1. OS DOCUMENTOS PRODUZIDOS PELOS ALUNOS

A análise dos documentos produzidos pelos alunos desempenham neste estudo um papel determinante para a retirada de conclusões. Nesta perspetiva, Bogdan e Biklen (1994) referem que estes documentos são registos individuais dos alunos e, por conseguinte, reveladores do seu conhecimento e raciocínio.

Os documentos, produzidos pelos alunos incidiram no registo escrito de representações matemáticas a partir da proposta de resoluções de problemas matemáticos. É pertinente referir que os problemas matemáticos propostos aos alunos foram, previamente, apresentados pela investigadora à professora cooperante. Para uma correta análise e melhor compreensão dos documentos produzidos, recorri ao registo escrito de

algumas notas de campo onde estão descritas a explicação oral dos alunos sobre os raciocínios desenvolvidos durante a realização dos mesmos.

As resoluções dos problemas foram, guardadas e organizadas em suporte digital por mim, sendo que, posteriormente procedi à entrega das resoluções originais à professora titular da turma.

2.4.2. NOTAS DE CAMPO

Bogdan e Biklen (1994) referem que as notas de campo são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiência e pensa no decurso da recolha e refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (p. 150).

A fim de complementar e enriquecer os registos escritos das representações e estratégias dos alunos, houve a necessidade de questionar os alunos sobre as representações desenvolvidas na resolução dos problemas propostos. Como refere Canavarro (2003) “o significado revela-se tanto na acção como no discurso. O fazer e o dizer são ambos da mesma moeda e devem ser associados para a compreensão do significado de qualquer situação” (p.195). Neste sentido, as notas de campo foram elaboradas a partir da explicação dada pelos alunos, quando questionados sobre as suas representações.

Estes autores referem ainda que essas notas são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve; vê; experiencia e pensa no decurso da recolha” (p. 150).

2.5. TÉCNICA DE TRATAMENTO DE DADOS

Após a recolha de dados, procedi à sua análise sistémica, de forma a obter as representações construídas pelos alunos na resolução de problemas, para que me fosse possível conhecer e compreender o raciocínio de cada um, individualmente.

De acordo com Bogdan e Biklen (1999) a análise dos dados:

é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou (p. 205).

Posteriormente, realizei uma leitura minuciosa das notas de campo, onde estão presentes as explicações dadas pelos alunos na resolução dos problemas resolvidos e, ainda, dos documentos realizados pelos alunos. Desta forma, foi possível identificar algumas categorias já anteriormente referidas, capazes de sustentar a minha análise.

É importante destacar que os documentos realizados pelos alunos desempenharam um papel central nesta análise, tendo sido estes utilizados como ilustração dos registos das aulas e analisados de forma independente.

Todos os alunos da turma participaram nas propostas de tarefas, embora neste estudo sejam apresentados documentos de apenas alguns alunos porque o que se pretende com este estudo é destacar as ideias principais que emergem do grupo, e não de cada um dos alunos.

A seleção dos documentos, teve como critério a variedade de tipos de representação e raciocínio presentes na proposta de resolução dos problemas.

Neste sentido, perante um problema matemático apresentado irei proceder à sua análise, descrevendo a estratégia e o tipo de representação utilizada pelo aluno.

Para salvaguardar a verdadeira identidade dos alunos, estes serão apresentados com nomes fictícios ao longo dos trabalhos apresentados.

CAPÍTULO III – REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NO 1º ANO DE ESCOLARIDADE, OU A “ARTE” DE REPRESENTAR O PENSAMENTO MATEMÁTICO

*O meu desenho não representava um chapéu.
Representava uma jiboia digerindo um elefante.
Desenhei então o interior da jiboia para que as
pessoas crescidas pudessem compreender.*

A. St. Exupéry, 1995, p.10

3.1. OS ALUNOS E AS TAREFAS

Com o objetivo de identificar as representações que os alunos do 1º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas que envolvem a subtração e a multiplicação no seu sentido combinatório, foi realizado um estudo qualitativo, cujos dados empíricos foram recolhidos a partir da observação e da análise de desafios matemáticos propostas aos alunos de uma sala de aula de 1º ano de escolaridade.

Pelo facto de serem alunos do primeiro ano de escolaridade e porque, no decorrer do meu estágio, constatei que, até então, ainda não tinham tido a oportunidade de realizar tarefas matemáticas que envolvessem a resolução de problemas, procurei apresentar situações apelativas que lhes despertassem a curiosidade e gerassem o gosto por descobrir as soluções dos enunciados propostos e em cujas resoluções emergissem diferentes tipos de representações.

As tarefas propostas são constituídas por enunciados que têm subjacente a subtração e a multiplicação, permitindo-me analisar o tipo de representações utilizadas pelos alunos em situações que envolvem estas duas operações.

Os problemas referidos, e que seguidamente serão apresentados, serão dois e têm como título: *Todos no sofá* e o *Aniversário da Urbi*, sendo que o primeiro tem subjacente quatro questões.

As resoluções dos alunos serão identificadas com nomes fictícios e, em cada uma delas, apresentarei a minha análise.

Em todas as tarefas fiz a leitura do enunciado do problema para o grande grupo e, em todas elas, os alunos, individualmente, receberam uma folha A4 onde registaram a sua resolução, de forma individual e livremente. Essencialmente, todos os enunciados propostos tiveram como objetivo estimular a capacidade dos alunos para

- i) Construir novos conhecimentos matemáticos através da resolução de problemas;
- ii) Resolver problemas que surgem em matemática e noutros contextos.
- iii) Aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas;
- iv) Analisar e refletir sobre o processo de resolução matemática de problemas.

(NCTM, 2007, p.134)

3.1.1. TAREFA 1: *TODOS NO SOFÁ*

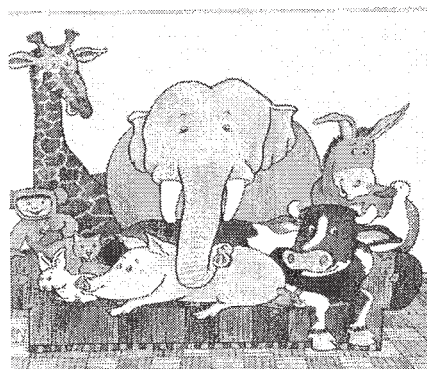


Figura 11- Ilustração do enunciado da tarefa 1 -*Todos no sofá*

1.1) Na imagem, quantos amigos estão sentados no sofá?

- **Aluno:** Marco

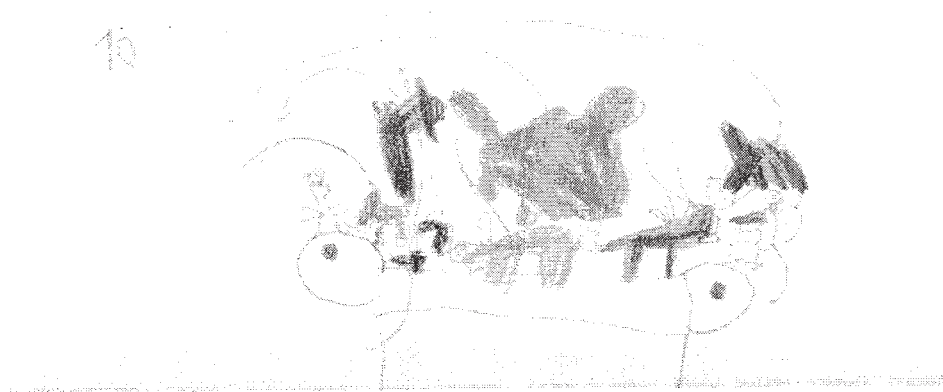


Figura 12 - Tarefa 1.1 - *Todos no Sofá* - Marco

O Marco começou por desenhar todos os animais sentados no sofá, seguindo a disposição em que os mesmos aparecem na ilustração para se certificar de que não faltaria nenhum dos elementos da ilustração do enunciado. Posteriormente, procede à contagem de todos os animais que desenhou, fazendo sair de cada um deles um risco, à medida que os ia contando, tendo, cada um destes riscos, funcionado como apoio de contagem,

estabelecendo uma correspondência biunívoca. Em seguida, na mesma direção, apresenta o número dez como sendo a solução do problema.

A representação utilizada para a resolução do problema é icónica e o cardinal da contagem é apresentado sob a forma de representação simbólica. Sendo que, aparentemente, as primeiras terão servido para o aluno construir o processo de contagem e as segundas, apenas, para representar o cardinal da contagem.

Para além disso, a representação icónica liga-se ao real, podendo, por isso dizer-se que o aluno utilizou uma representação pictórica.

O aluno recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema e as suas representações serviram de suporte ao raciocínio, chegando este corretamente à solução.

- **Aluno: António**

The image shows a handwritten mathematical expression in pencil. It consists of a sequence of additions of the number 1, followed by an equals sign and the number 10. The expression is written as: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$. The numbers are written in a simple, slightly slanted font.

Figura 13 - Tarefa 1.1 - *Todos no Sofá* - António

O António, ao contrário do Marco, não teve necessidade de recorrer à representação pictórica para representar e interpretar os dados do problema. Porém, apoiou-se diretamente na ilustração fornecida, para efetuar uma contagem unitária dos animais.

Após ter feito a contagem, o aluno procedeu à representação horizontal do cálculo, deixando expressa a forma como procedeu à contagem (um a um), apresentando seguidamente a solução da contagem.

A representação utilizada pelo António na resolução da questão colocada é de carácter simbólico.

1.2) A dada altura saíram 2 amigos. Quantos amigos ficaram no sofá?

- Aluna: Carla

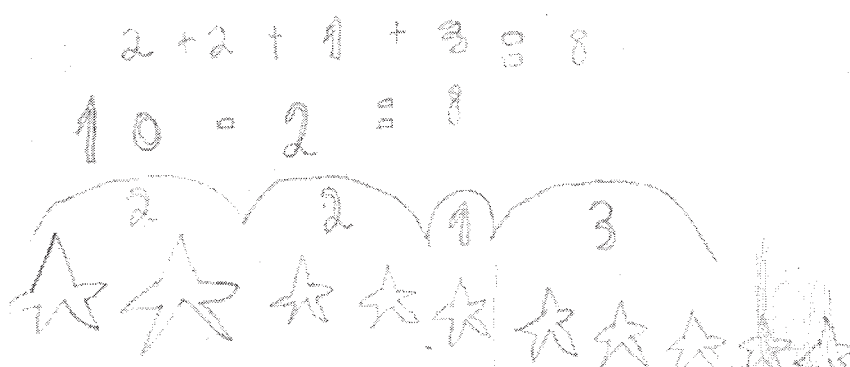


Figura 14 - Tarefa 1.2 - Todos no Sofá - Carla

A Carla começou por representar linearmente os dez amigos, através de um conjunto de 10 estrelas. Seguidamente, representa a saída dos dois amigos riscando as duas últimas estrelas. Em seguida, efetuou uma representação simbólica da mesma, apresentando a expressão $10 - 2 =$.

Para saber quantos amigos ficaram no sofá, a aluna procede à contagem das restantes estrelas representando por cima destas, o seu processo de contagem. Seguidamente, através de uma expressão matemática, representa o seu processo de contagem ($2+2+1+3=8$), representando, posteriormente o número oito como solução da expressão matemática que tinha feito inicialmente.

As representações utilizadas por esta aluna inserem-se nas representações icónicas e simbólicas. Nas representações icónicas, estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por estrelas. Na representação simbólica incluem-se os números e os sinais utilizados e as duas expressões horizontais de cálculo. Uma que utiliza a adição no sentido de acrescentar e outra que utiliza a subtração no sentido de retirar.

A aluna utilizou as representações icônicas como suporte de interpretação e resolução do problema, podendo estas representar um apoio para a aluna proceder à representação simbólica, chegando corretamente à solução da questão colocada.

- **Aluno: Marco**

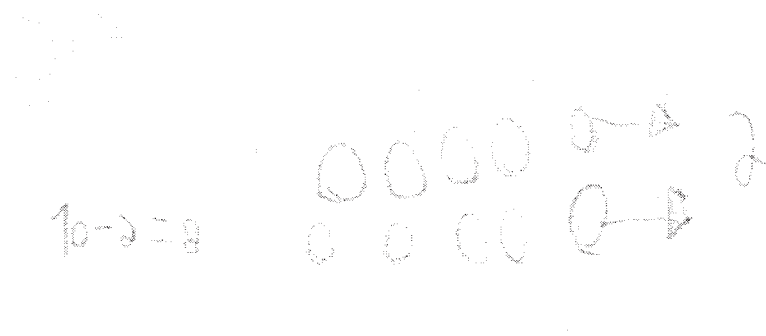


Figura 15 - Tarefa 1.2 - Todos no Sofá - Marco

O Marco começou por representar o total dos dez amigos, sentados no sofá, utilizando duas linhas de cinco círculo cada uma.

Posteriormente, para representar a saída dos dois amigos do sofá, o aluno fez sair um círculo de cada linha, representando estes os dois amigos que saíram do sofá e que, por fim, representa simbolicamente. Após isto, procedeu à contagem das bolas restantes para obter a solução do problema. Seguidamente, já com a solução, procede à representação horizontal de cálculo.

As representações utilizadas por este aluno inserem-se nas representações icônicas e simbólicas. Nas representações icônicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por círculos, portanto, de uma forma simples e despojada de pormenores.

Na representação simbólica, está incluída a representação horizontal do cálculo a partir da utilização da subtração, no sentido de retirar.

O Marco utilizou o desenho como suporte de interpretação e resolução do problema, chegando corretamente à sua solução.

- Aluno: Luís

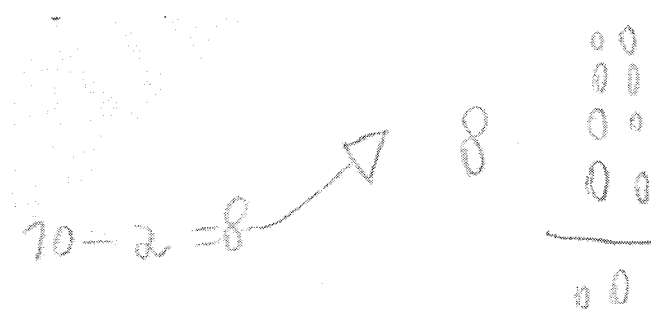


Figura 16 - Tarefa 1.2 - Todos no Sofá - Luís

Inicialmente, o Luís representou os dez amigos por círculos (símbolos não convencionais). Agrupou os círculos dois a dois, dispostos em duas colunas, tendo cada uma delas cinco círculos. Para representar a saída dos dois amigos do sofá, o aluno desenhou uma linha, separando o último círculo de cada coluna, retirando dois círculos aos oito iniciais. Posteriormente, procede à contagem dos círculos que ficaram acima da linha, para saber quantos amigos tinham ficado no sofá. Após ter feito a contagem dos círculos representa ao lado destes o cardinal da contagem, isto é, oito, como sendo a solução do problema.

Em seguida, representou o seu raciocínio através de uma expressão matemática representativa do sentido retirar da subtração. Após ter representado simbolicamente o número oito como solução desta expressão, desenha a partir dela uma seta em direção ao número oito, que tinha representado inicialmente através de círculos, para reforçar a forma como chegou à solução da expressão matemática apresentada.

As representações utilizadas por este aluno inserem-se nas representações icónicas e simbólicas.

Nas representações icónicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por círculos, e o sofá por uma linha.

Na representação simbólica é apresentada uma expressão horizontal representativa do sentido retirar da subtração.

O aluno utilizou o desenho como suporte de interpretação e resolução do problema, chegando corretamente à sua solução.

- Aluna: Maria

pensaste.

8

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$$

Figura 17 - Tarefa 1.2 - *Todos no Sofá* - Maria

A Maria começa por apresentar uma expressão horizontal do cálculo, utilizando a soma sucessiva do número um até obter um total de oito.

Desta forma, a aluna fez mentalmente a conservação da quantidade dez, sendo capaz de reter os elementos que saíram do sofá, e, após isso, representou simbolicamente a quantidade de amigos que ficaram no sofá.

As representações utilizadas pela aluna na resolução deste problema inserem-se na categoria de representação simbólica, uma vez que apresentou uma expressão matemática e a solução do problema através do número oito.

A aluna recorreu à representação simbólica para interpretar e representar o processo de resolução do problema e as suas representações serviram de suporte ao raciocínio chegando, esta, corretamente à solução.

- Aluna: Bela

ensaste.

$$10 - 2 = 8$$

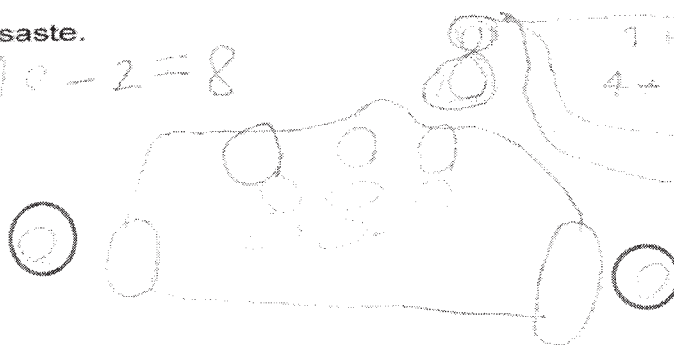


Figura 18 - Tarefa 1.2 - *Todos no Sofá* - Bela

A Bela começou por desenhar o sofá e, em cada um dos seus lados, desenhou um círculo representativo dos dois amigos que tinham saído do sofá. A partir destes dois círculos, a aluna prosseguiu a sua contagem até dez, à medida que ia desenhando círculos no sofá, de forma a perfazer a totalidade dos restantes amigos. Seguidamente, para obter a solução do problema, a aluna contou os círculos que tinha desenhado, tendo representado por cima do sofá o cardinal da contagem.

As representações utilizadas na resolução deste problema inserem-se nas representações icónicas e simbólicas. Nas representações icónicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que a aluna representou os amigos por círculos. Na representação simbólica, está incluída a representação horizontal do cálculo, a partir da subtração, no sentido de retirar.

1.3) *Mais tarde já só estavam 6 amigos no sofá. Quantos amigos é que já saíram?*

- **Aluno:** João

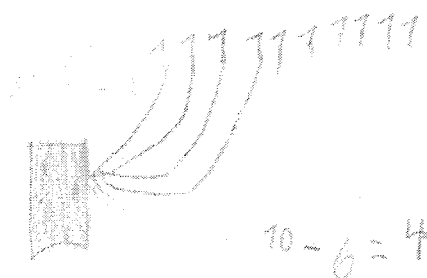


Figura 19 - Tarefa 1.3-Todos no Sofá - João

O João começou por representar o número um sucessivamente até obter, no total, os dez amigos. Posteriormente, para representar os amigos que tinham saído do sofá, o

aluno desenhou uma porta e ligou quatro dos uns que havia representado anteriormente para representar os amigos que haviam saído do sofá.

Posteriormente, a partir deste diagrama, o aluno contou o número de uns que tinham saído pela porta para obter a solução do problema.

Posteriormente, procedeu à representação horizontal do cálculo ($10 - 6 = 4$), através de uma representação simbólica, utilizando o sentido retirar da subtração. Não fazendo coincidir esta estratégia com a estratégia utilizada na representação pictórica, uma vez que nesta o aluno utiliza uma estratégia de cálculo com o sentido de completar da subtração, resolvido através de uma adição ($6 + 4 = 10$).

Desta forma o aluno chegou à solução do problema, utilizando dois dos sentidos da subtração, o completar e o retirar, estabelecendo a relação inversa entre a adição e a subtração.

As representações utilizadas por este aluno na resolução deste enunciado inserem-se nas representações icônicas, uma vez que o aluno desenhou uma porta e um diagrama de setas, para representar as saídas e uma representação simbólica que utiliza o sentido retira da subtração.

1.4) Já estão no chão 8 amigos. Quantos amigos ficaram no sofá?

- **Aluno:** Marco

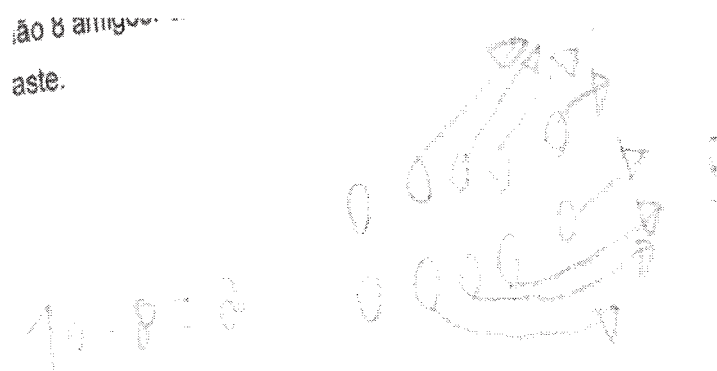


Figura 20 - Tarefa 1.4 - Todos no Sofá - Marco

O Marco começou por representar o total dos dez amigos, sentados no sofá, utilizando círculos distribuídos por duas linhas de cinco.

Posteriormente, para representar a saída dos oito amigos do sofá, o aluno fez sair dos quatro últimos círculos, de cada uma das colunas, uma seta, onde acabaria por representar o número oito. Após isto, procedeu à contagem das bolas restantes para obter a resposta à questão colocada. Seguidamente, já com a solução, procede à representação horizontal de cálculo, utilizando o sentido retirar da subtração.

As representações utilizadas por este aluno na resolução deste enunciado inserem-se nas representações icónicas e simbólicas.

Nas representações icónicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por círculos, de uma forma simples e despojada de pormenores.

Na representação simbólica, está incluída a representação do cálculo horizontal, a partir do sentido retirar da subtração.

O Marco utilizou o desenho como suporte de interpretação e resolução do problema, chegando corretamente à solução. É pertinente referir que este aluno representa a mesma estratégia de resolução ao longo de toda esta sequência de tarefas, que poderá significar a forma como habitualmente o aluno organiza o seu raciocínio e com a qual se sente mais confiante e confortável na abordagem dos problemas propostos.

- **Aluno: João**



Figura 21 - Tarefa 1.4 - *Todos no Sofá* - João

O João começou por representar o número um sucessivamente até obter no total os dez amigos. Em seguida, para representar os oito amigos que tinham saído do sofá, o

aluno constrói um diagrama em rede, desenhando uma porta e uma linha a partir de uma das suas extremidades até o número um, e assim sucessivamente até fazer sair os oito amigos do sofá.

Em seguida, o aluno procedeu à contagem dos elementos que não tinham sido ligados à porta, para obter a solução do problema.

Posteriormente, o aluno representa por uma expressão numérica o seu cálculo. As representações utilizadas pelo aluno na resolução deste problema inserem-se nas representações icónicas, uma vez que o aluno desenhou uma porta e um diagrama, para representar as saídas do sofá, e, ainda, nas representações simbólicas, quando apresenta a expressão numérica.

O aluno recorreu às representações icónicas, através do desenho e do diagrama para interpretar e representar o processo de resolução do problema, apresentando corretamente a solução.

- **Aluno: Luís**



Figura 22 - Tarefa 1.4 -*Todos no Sofá* - Luís

Ao contrário dos alunos referidos até aqui, o Luís inicia a resolução do problema utilizando uma representação simbólica que tem subjacente o sentido completar da subtração.

A representação simbólica expressa que o aluno sabendo que no chão estavam oito amigos e sendo o total de amigos dez, então, para si bastaria somar oito mais dois de forma a perfazer o total dos amigos, sendo assim, para este aluno, o número dois a solução do problema proposto. Deste modo, o aluno demonstra ter resolvido o problema proposto a

partir da utilização do sentido completar da subtração sem, no entanto, ter compreendido a questão colocada.

Seguidamente, para confirmar o resultado obtido na expressão utilizada, o aluno recorreu à representação icónica e representou os oito amigos por pontos. Contudo, é perceptível que o raciocínio é exatamente o mesmo e que a representação icónica não ajuda o aluno na resposta final.

As representações utilizadas por este aluno na resolução deste problema inserem-se nas representações simbólicas e icónicas. Na representação simbólica, insere-se a representação de cálculo horizontal e a representação simbólica das quantidades. Nas representações icónicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por pontos e o sofá por uma linha.

Como já foi inicialmente referido, este aluno iniciou a resolução do problema com uma representação simbólica e a partir de uma operação de adição, tendo chegado corretamente à resolução.

- **Aluno: Mário**

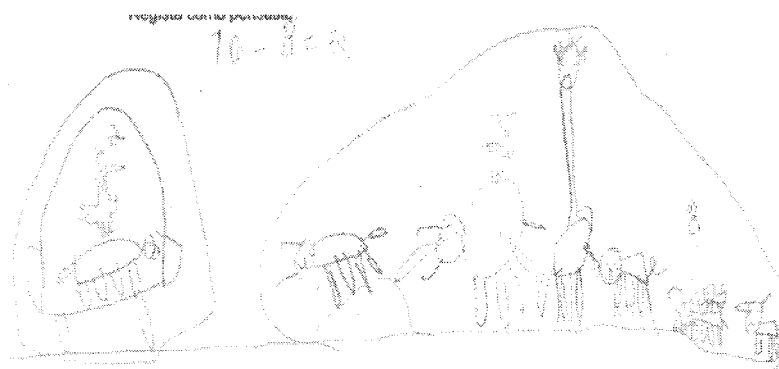


Figura 23 - Tarefa 1.4 - Todos no Sofá - Mário

O Mário começa por resolver o problema fazendo o desenho dos oito amigos no chão. É pertinente referir que, ao contrário dos alunos anteriormente mencionados que utilizaram o desenho na resolução deste problema, este aluno escolheu antecipadamente quais seriam os animais que estariam no chão, apoiando-se na ilustração fornecida no enunciado, de forma a certificar-se que desenhava com rigor as características físicas dos

mesmos. Posteriormente, desenhou uma linha fechada em redor destes, representando no interior o número oito, isto é o número de elementos que haviam já saído do sofá.

Seguidamente, como sabia que ainda lhe faltava desenhar dois amigos, mais concretamente o porco e o pato, como referiu, pois para si, desta forma, foi mais fácil saber que seriam estes os dois amigos que tinham ficado no sofá. Desta forma, desenha estes dois animais, desenhando também em redor destes uma linha fechada e o número dois, como o cardinal do número de elementos que haviam ficado no sofá. Utilizando uma estratégia pictórica, o aluno encontrou a resposta para a questão, tendo subjacente a subtração no sentido de completar.

Perante o referido, o aluno parece ter formado dois conjuntos, tendo em cada um deles representado o cardinal da contagem para confirmar o total de amigos presentes em cada um dos conjuntos. Posteriormente, o aluno finalizou o problema apresentando uma expressão representativa do sentido retirar da subtração.

As representações utilizadas para a resolução do problema são icónicas e simbólicas. Sendo que, aparentemente, as primeiras terão servido para o aluno construir o raciocínio e as segundas, para representar o cardinal da contagem. Para além disso, a representação icónica liga-se ao concreto, podendo, por isso, dizer-se que o aluno utilizou uma representação pictórica.

O aluno recorreu ao desenho para interpretar e representar o processo de resolução do problema e as suas representações serviram de suporte ao raciocínio, chegando este corretamente à sua solução.

- **Aluna:** Maria

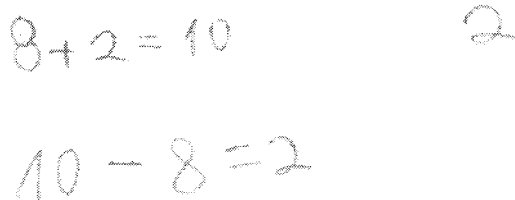

$$8 + 2 = 10$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2$$

Figura 24 - Tarefa 1.4 - *Todos no Sofá* - Maria

A Maria iniciou a resolução do problema utilizando uma representação horizontal do cálculo, contendo o sentido completar da subtração, na qual adicionou oito mais dois, chegando ao resultado de dez. A aluna formalizou o raciocínio sabendo que estavam no chão oito amigos, e sendo no total dez, bastaria contar de oito até dez. Neste momento, a aluna recorreu à contagem pelos dedos, verificando que faltavam dois a oito, para chegar a dez.

Identificando, a partir desta adição, que dois era o número que faltava aos oito amigos que já estavam no chão, para fazer o total dos dez amigos. A aluna procedeu à representação horizontal do cálculo, na qual subtraiu ao número dez o número oito, obtendo assim o número dois como resultado.

Posteriormente, para destacar o resultado deste processo de resolução, a aluna representa o número dois ao lado das representações horizontais de cálculo, revelando ser este o resultado do cálculo efetuado. A partir destas duas representações, a aluna expressa ter resolvido o problema a partir da utilização do sentido completar da subtração e do sentido retirar da mesma operação, chegando corretamente à solução do problema.

As representações utilizadas por esta aluna inserem-se totalmente nas representações simbólicas, uma vez que apresentou duas expressões matemáticas e como solução o cardinal dois.

- **Aluna: Marta**

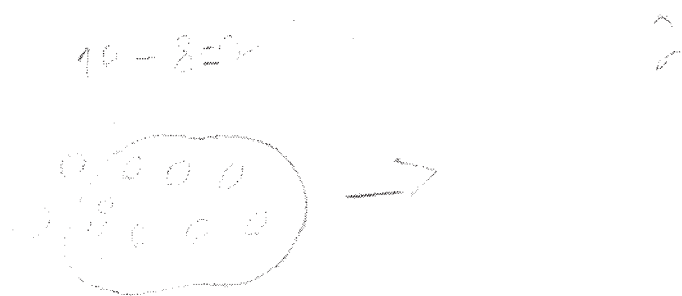


Figura 25 - Tarefa 1.4 - *Todos no Sofá* - Marta

A Marta começou por representar o total dos dez amigos sentados no sofá através de círculos. Posteriormente, a partir destes, contou oito círculos e desenhou em seu redor uma linha fechada, representando desta forma os amigos que estavam no chão ou que

tinham saído do sofá. Seguidamente, contou os restantes círculos para saber quantos amigos tinham ficado no sofá, desenhando em seguida uma seta e na sua direção representa o cardinal de contagem, dois.

Esta representação demonstra que a aluna resolveu o problema a partir do sentido de retirar da subtração.

Em seguida, a aluna representou através de uma expressão subtrativa o raciocínio tido anteriormente.

As representações utilizadas para a resolução do problema são icónicas e simbólicas. Nas representações icónicas estão incluídos os símbolos não convencionais /representativos do real, uma vez que a aluna representou os amigos através de círculos. Na representação simbólica está incluída a representação de cálculo horizontal e o cardinal da contagem final.

A aluna recorreu às representações icónicas para interpretar e representar o processo de resolução do problema e estas representações serviram de suporte ao raciocínio, chegando este corretamente à solução.

- **Aluno:** António

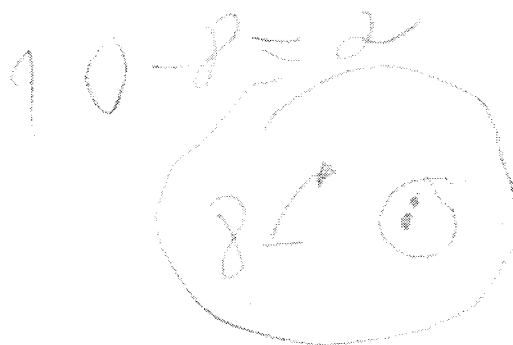


Figura 26 - Tarefa 1.4- *Todos no Sofá* – António

O António começou por representar os amigos que estavam no chão pelo número oito, seguidamente desenhou uma seta a partir deste número em direção a dois pontos, representativos dos amigos que tinham ficado no sofá. Deste modo, a representação do aluno revela que fez a conservação do cardinal dez, para, em seguida proceder à sua

decomposição, através dos oito amigos que estavam no chão e os dois amigos que ainda estavam no sofá. Chegando a dois amigos, como sendo a solução do problema.

Posteriormente, o aluno representou simbolicamente a resolução do problema através de uma subtração no sentido de retirar. Contudo, na representação inicial, o aluno resolveu o problema através do sentido completar da subtração.

O aluno chegou à solução correta do problema, utilizando tanto o sentido completar como o sentido retirar da subtração, identificando adição e a subtração como operações inversas.

As representações utilizadas pelo aluno na resolução do problema são icônicas e simbólicas. Nas representações icônicas estão incluídos os símbolos representativos do real, uma vez que o aluno representou os amigos por pontos. Na representação simbólica está incluída a representação de cálculo horizontal e o número oito, representativo da quantidade de amigos que estava no chão.

O aluno recorreu às representações icônicas, símbolos representativos do real, e representações simbólicas, em articulação para interpretar e representar o processo de resolução do problema.

3.1.2. TAREFA 2: O ANIVERSÁRIO DA URBI

- 2) *A Urbi recebeu no seu aniversário 4 t-shirts e 2 saias. De quantas maneiras diferentes se pode vestir a Urbi? Regista como pensaste.*

- **Aluna: Marta**



Figura 27- Tarefa 2 - O aniversário da Urbi – Marta

Inicialmente, para a resolução deste problema de combinatória, a Marta usou como estratégia desenhar a Urbi com as diferentes combinações das peças de roupa. Sendo que na fila de cima a aluna representou a menina vestida com a saia azul e as quatro t-shirts diferentes, e na fila de baixo, desenhou a menina vestida com as mesmas t-shirts, segundo a sequência anteriormente estabelecida, mas desta vez com a saia cor-de-rosa. Posteriormente, fez a contagem das diferentes combinações, tendo em seguida representado a expressão numérica $2+2+2+2=8$. O processo utilizado revela que a aluna foi capaz de construir o raciocínio de que por cada *t-shirt* há a possibilidade de fazer dois conjuntos diferentes. Tendo subjacente, na expressão matemática apresentada, o sentido aditivo da multiplicação.

As representações utilizadas pela aluna na resolução do problema são icônicas e simbólicas. Nas representações icônicas estão incluídos os desenhos da menina vestida de oito maneiras diferentes. Na representação simbólica está incluída a representação de cálculo horizontal. A aluna recorreu às representações icônicas para interpretar e representar o processo de resolução do problema, tendo usado a representação simbólica para formalizar o seu raciocínio, apresentando corretamente a solução do problema.

- **Aluno:** O João



Figura 28 - Tarefa 2 - *O aniversário da Urbi* - João

O João começou por desenhar todos os dados do problema, mas ao contrário da aluna anteriormente referida, não estabeleceu qualquer tipo de ligação entre os mesmos.

Posteriormente, representou através de uma expressão aditiva a ideia sugerida pelo enunciado e, no final, apresentou como resultado oito combinações diferentes,

Não há qualquer indício de tentativa de resolução do problema através da representação icónica, uma vez que o aluno desenhou os dados do problema apenas como ilustração de uma imagem que o aluno criou sobre a situação descrita mas que não corresponde à questão colocada.

O aluno parece ter sido capaz de, mentalmente, interpretar o enunciado e chegar corretamente à solução, tendo recorrido à representação simbólica para apresentar o seu raciocínio.

- **Aluno:** Marco

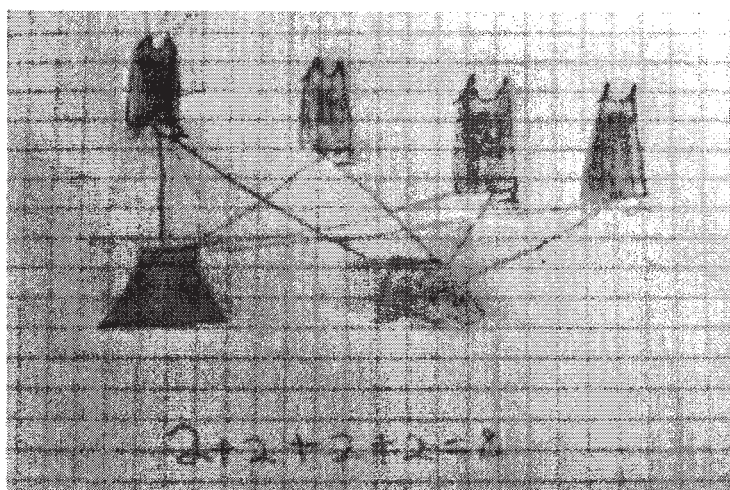


Figura 29 - Tarefa 2 - *O aniversário da Urbi* - Marco

Inicialmente, o Marco desenhou as 4 *t-shirts* e, por baixo destas, desenhou as duas saias. Posteriormente construiu um diagrama em rede, desenhando uma linha de ligação entre cada uma das saias e as respetivas quatro *t-shirts*. Em seguida, o aluno representa simbolicamente o seu raciocínio, através das ligações efetuadas entre as duas saias e as quatro *t-shirts* para cada uma, tendo este subjacente o sentido aditivo da multiplicação.

As representações utilizadas por este aluno inserem-se na categoria das representações icónicas, uma vez que o aluno desenhou um diagrama para representar,

através de linhas, a relação existente entre os elementos e, ainda, na das representações simbólicas quando apresenta a expressão aditiva.

O aluno recorreu às representações icônicas, desenho o diagrama, para interpretar e representar o problema, e as suas representações serviram de suporte ao raciocínio, chegando este corretamente à solução.

Aluna: Maria

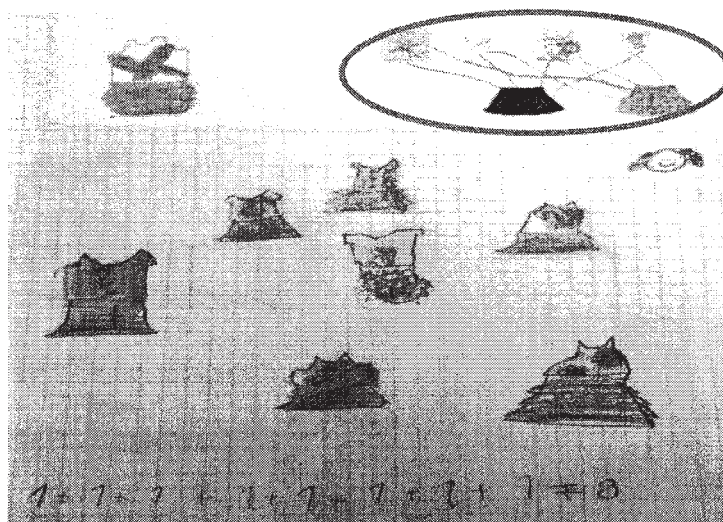


Figura 30 - Tarefa 2 - *O aniversário da Urbi* - Maria

Para a resolução do problema, a Maria realizou duas estratégias. Inicialmente, como é visível na representação rodeada a verde, apoiando-se na imagem ilustrativa do enunciado, construiu um diagrama em rede, desenhando uma linha de ligação entre cada uma das saias e as respectivas quatro *t-shirts*.

Posteriormente, a aluna para clarificar e confirmar o número total de ligações estabelecidas, procedeu à representação pictórica de cada uma das diferentes combinações, tendo como referência as correspondências estabelecidas anteriormente, através do diagrama. Após ter realizado o desenho representativo dos diferentes conjuntos que a Urbi pode vestir, a aluna foi capaz de proceder à contagem, contando um a um, todos os conjuntos. Em seguida, representa simbolicamente a soma sucessiva de cada um dos conjuntos, até obter o total de conjunto que a Urbi pode vestir.

As representações utilizadas por esta aluna na resolução deste problema inserem-se nas representações icônicas, uma vez que a aluna desenhou um diagrama para

representar, através de linhas a relação existente entre as saias e as *t-shirts* da Urbi, e ainda nas representações simbólicas, quando apresenta a expressão aditiva para identificar o total de conjuntos.

A aluna recorreu às representações icónicas para interpretar e representar o problema e recorreu à representação simbólica para apresentar o resultado final.

- **Aluno:** Luís

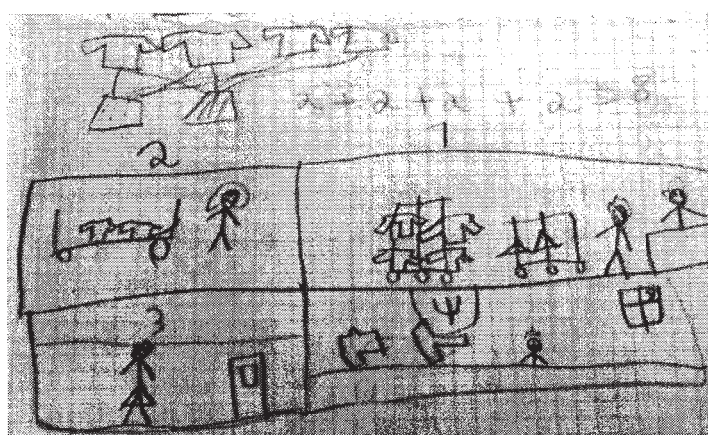


Figura 31- Tarefa 2 - *O aniversário da Urbi* - Luís

Inicialmente, o Luís recorreu à representação pictórica para interpretar os dados do enunciado, uma vez que desenhou imagens ricas em pormenores e detalhes, numeradas de um a quatro, em consonância com a sequência em que os dados do enunciado foram apresentados. Em seguida, desenhou as 4 *t-shirts* e por baixo destas desenhou as duas saias. Posteriormente, construiu um diagrama em rede, desenhando uma linha de ligação entre cada uma das saias e as respetivas quatro *t-shirts*.

O aluno procedeu, posteriormente, à contagem da ligação estabelecida entre cada uma das *t-shirts* com cada uma das saias, considerando que cada *t-shirt* pode ser vestida duas vezes, uma com cada saia.

Em seguida, o aluno representa simbolicamente o seu raciocínio através de uma expressão aditiva que representa o número de vezes que cada *t-shirt* pode ser utilizada, tendo subjacente o sentido aditivo da multiplicação.

As representações utilizadas por este aluno podem ser categorizadas como representações icónicas, uma vez que o aluno desenhou a Urbi e a sequência de

acontecimentos adjacentes ao enunciado e utilizou um diagrama para representar, através de linhas, a relação existente entre as peças de roupa que a Urbi tinha para usar. Nas representações simbólicas inclui-se a expressão numérica apresentada.

O aluno recorreu às representações icónicas, para interpretar e representar o problema, e as suas representações serviram de suporte ao raciocínio chegando este corretamente à solução.

- **Aluno:** António

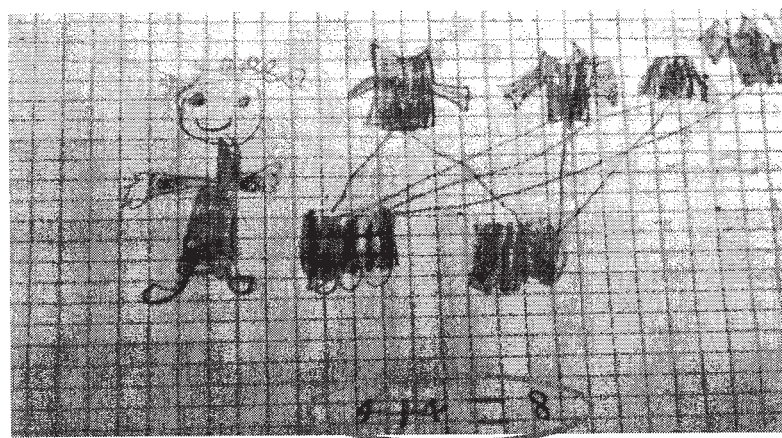


Figura 32 - Tarefa 2 - *O aniversário da Urbi* - António

Inicialmente, o António desenhava as quatro *t-shirts* e, por baixo destas, desenhava as duas saias. Posteriormente, construiu um diagrama em rede, desenhando uma linha de ligação entre cada uma das saias e cada uma das quatro *t-shirts*. Após isso, o aluno contou o número de correspondências entre cada uma das *t-shirts* e cada saia.

Em seguida, o aluno representou simbolicamente o seu raciocínio, rodeado a verde. A expressão utilizada por este aluno revela que o mesmo, singularmente, construiu as combinações de conjuntos partindo das saias, pois cada saia pode ser vestida quatro vezes, uma com cada *t-shirt*, e não das *t-shirts* para as saias, em que cada *t-shirt* veste duas vezes. No final percebeu que a Urbi se poderia vestir de oito maneiras diferentes.

As representações utilizadas por este aluno inserem-se nas representações icónicas, uma vez que o aluno desenhava a Urbi e ainda um diagrama para representar, através de linhas a relação existente entre saias e *t-shirts*, e também representações simbólicas, quando utiliza a expressão $4 + 4 = 8$, para chegar à resposta final.

Através da expressão numérica apresentada pelo António podemos constatar que o raciocínio deste aluno partiu de cada uma das duas saias e daí surge a possibilidade de a Urbi se vestir de quatro maneiras diferentes, ao contrário dos restantes alunos referidos que pela expressão numérica apresentada ($2+2+2+2=8$) revelam que interpretaram o enunciado de maneira diferente, estabelecendo para cada uma das *t-shirts* duas combinações possíveis.

O aluno recorreu a uma representação icónica para interpretar e representar o processo de resolução do problema recorrendo à representação simbólica para representar o seu raciocínio. Estando subjacente na representação simbólica o sentido aditivo da multiplicação na perspetiva de $2 \times 4 =$, dado o aluno ter partido da combinação entre saias e *t-shirts* e não o contrário, como fizeram todos os outros alunos, como já foi referido anteriormente.

Ambas as representações utilizadas pelo aluno serviram de suporte ao raciocínio chegando este corretamente à sua solução.

3.2. CONCLUSÕES

3.2.1. QUANTO À NATUREZA DAS REPRESENTAÇÕES

- *Que representações utilizam os alunos do 1º ano de escolaridade para resolverem enunciados envolvendo a subtração e o sentido combinatório da multiplicação?*

Respondendo a esta questão verifica-se que as representações mais utilizadas por estes alunos de 1º ano são as representações icónicas e as representações simbólicas.

Ambas as representações suportam a compreensão dos enunciados, a interpretação dos mesmos, bem como as relações existentes entre os dados do problema.

Embora, estes dois tipos de representações tenham sido utilizados de formas diferentes e com funções distintas pelos alunos ao longo da resolução dos dois problemas propostos.

Neste sentido, os alunos recorreram às representações icónicas, de várias formas, isto é a partir de elementos representativos do real, diagramas ou desenhos, e como função

para interpretar e representar o processo de resolução, tendo estas servido como suporte ao seu raciocínio.

Nos enunciados que tinham subjacente a subtração, os alunos utilizaram em grande parte os símbolos não convencionais /elementos representativos do real, tendo sido estes manipulados como se de objetos reais se tratassem. Isto é, de uma forma simples e despojada de pormenores, a partir de círculos, pontos e estrelas os alunos representaram os amigos estabelecendo a partir destes, riscos ou setas como indicação dos que iam saindo do sofá, tal como era referido no enunciado.

O desenho funcionou como uma ferramenta para os alunos darem significado aos conceitos e às ideias matemáticas com que se iam deparando. Houve também situações em que o desenho foi utilizado apenas para representar aspetos da situação apresentada no texto do problema sem expressar qualquer tipo de relação.

Nesta perspetiva, segundo a conceção de Calvacanti (2001) refere precisamente que quando o aluno apenas desenha os dados do problema não estabelecendo relações “que identifiquem as transformações numéricas, ou que indiquem que estivesse resolvendo o problema através do desenho” (p.128), esta situação demonstra que o aluno recorreu ao desenho apenas para ilustrar o problema e não como forma de obter a solução do mesmo.

No enunciado da multiplicação, tarefa 3.2, o elemento icónico mais utilizado foi o diagrama em rede, tendo funcionado como suporte ao raciocínio matemático desenvolvido e como base para determinar a solução.

No entanto, em todas as representações icónicas, os alunos, posteriormente, formalizaram a interpretação e raciocínio efetuados expressando a resolução sob a forma de uma expressão numérica. Verificando-se desta forma que, na grande generalidade, as representações icónicas serviram de suporte às representações simbólicas.

Foi possível ainda constatar que apesar de alguns alunos recorrerem inicialmente na abordagem dos problemas a representações icónicas, alguns alunos apoiaram-se em símbolos representativos do real e outros em desenhos, o que revela que estes últimos têm um raciocínio mais concreto, tendo desta forma a necessidade de representar fielmente a realidade ou mais especificamente os dados do problema para obterem a sua solução.

Neste sentido, o Mário foi precisamente um dos alunos que no problema da subtração, acabou por desenhar com maior rigor todas as características dos amigos. Enquanto os primeiros alunos mencionados, que recorreram a símbolos representativos do real revelam ter um raciocínio menos concreto, isto é, mais abstrato, uma vez que

representaram os amigos de uma forma simplificada, a partir de pontos, bolas e estrelas, como já foi referenciado anteriormente.

Relativamente às representações simbólicas, estas foram utilizadas por todos os alunos e em todos os problemas propostos para representar e comunicar a solução encontrada, sendo que alguns alunos utilizaram esta representação para determinar ou representar o número de elementos do problema, mais especificamente no problema da subtração.

No problema do sentido combinatório da multiplicação, verificou-se que apenas um aluno recorreu a elementos simbólicos para determinar a solução do problema. O que revela que na grande generalidade os alunos tem um pensamento mais concreto, ligado ao real tendo desta forma necessidade de recorrerem às representações icónicas para compreenderem e obterem a solução do problema. Como refere Wolech (2001) as representações são ferramentas essenciais por permitirem ao aluno articular e clarificar o seu raciocínio.

De uma forma mais pormenorizada apresento, seguidamente, quais as representações mais utilizadas por cada um dos alunos na resolução dos enunciados que envolvem a subtração e a multiplicação no sentido combinatório.

O Marco utilizou predominantemente as representações simbólicas para representar a solução dos problemas e as representações icónicas para representar elementos do real, seguido do diagrama de forma a obter a solução dos problemas propostos.

No caso do António, as representações simbólicas, na forma de expressões numéricas, estão presentes em todas as resoluções, sendo que nos enunciados de subtração, o aluno recorreu à representação icónica, através de símbolos representativos do real, e no enunciado de multiplicação, a representação icónica utilizada incidiu na utilização do diagrama em rede, como suporte para o raciocínio.

Relativamente ao Luís, as representações simbólicas também surgem em todos os enunciados tendo, também, estas sido utilizadas para representar e comunicar a solução encontrada, a partir das representações icónicas, mais concretamente de elementos representativos do real, na operação da subtração, e o desenho e diagrama em rede, no enunciado da multiplicação.

No que diz respeito à Carla e à Bela, embora se tenham apresentado apenas a resolução dos enunciados de subtração, pude constatar que ambas as alunas se apoiaram

nas representações icônicas, onde incluem os símbolos não convencionais /representativos do real, para representarem simbolicamente o seu raciocínio.

A Maria nos dois enunciados de subtração usou a representação simbólica para interpretar e representar o seu raciocínio. No problema da multiplicação, a aluna utilizou, como elementos icônicos, o desenho e o diagrama em rede, tendo estes servido como apoio para a representação simbólica apresentada através de uma expressão numérica.

O João, em ambos os enunciados, recorreu à representação icônica, utilizando desenhos e/ ou diagramas, para interpretar e representar o processo de resolução dos problemas e, no final, às representações simbólicas para reforçar o seu raciocínio. Embora no problema da multiplicação, a representação icônica, mais concretamente o desenho, tenha servido apenas como ilustração de uma imagem criada sobre a situação descrita mas que não corresponde à questão colocada.

A Marta no enunciado da multiplicação recorreu à representação icônica, utilizando o desenho, para interpretar os dados e representar o raciocínio, e a representação simbólica para formalizar este último.

Por último, o Mário recorreu à representação pictórica, utilizando desenhos ricos em detalhes e pormenores. Estes parecem ter funcionado como apoio para obter a solução do problema, pois, no final, consegue representar simbolicamente o seu raciocínio.

3.2.2. QUANTO À COMPREENSÃO DAS TRAJETÓRIAS DE PENSAMENTO

- *De que forma as representações dos alunos permitem ao professor identificar o conhecimento matemático dos mesmos?*

Quanto à evidência das trajetórias de pensamento e do conhecimento matemático dos alunos, tentando dar resposta à questão que me guiou, verifiquei, ao longo desta investigação, que a comunicação que emerge e apoia-se nas representações apresentadas pelos alunos na resolução de problemas, permite ao professor compreender e conhecer qual o conhecimento matemático dos alunos subjacente às representações apresentadas. Esta perceção surge, dado os sentidos retirar e completar da subtração, bem como os sentidos combinatório e aditivo da multiplicação, não terem sido formalmente explorados em sala

de aula pela professora, e os alunos, pelos seus próprios meios, mais concretamente através das representações icônicas concretizadas através do desenho, símbolos não convencionais e diagramas, os terem tido em conta, ao apresentaram as suas resoluções baseadas em conhecimentos informais e terem obtido a solução correta dos mesmos.

Relativamente aos enunciados de subtração, quatro dos alunos do grupo utilizaram a subtração no sentido de retirar, três deles no sentido de completar e dois restantes utilizando os dois sentidos e estabelecendo a ideia de relação inversa entre a adição e a subtração.

Verifiquei, desta forma, que, na grande generalidade, a turma apresenta um maior número de representações representativas do sentido de retirar e um menor número articulando os dois sentidos, que podem levar ao conhecimento da adição e subtração como operações inversas.

No enunciado da multiplicação, que têm subjacente o sentido combinatório da multiplicação todos os alunos resolveram o enunciado através de diagramas em rede, sendo que a resposta final, exceto a de um aluno, surge da compreensão de que este tipo de diagramas conduz a uma representação simbólica que induz o sentido aditivo da multiplicação, traduzindo-se a mesma na utilização de expressões aditivas em que a mesma quantidade surge repetida n vezes.

Esta situação também permite ao professor angariar um conhecimento sobre a forma como os alunos relacionam a adição com a multiplicação e como o sentido combinatório está intimamente ligado com o sentido aditivo da mesma operação.

Durante este trabalho, foi também possível compreender qual o conhecimento que os alunos têm dos números e das suas relações, mais concretamente o seu sentido de número. Cabe nesta ideia, as representações que salientaram o cardinal da contagem, a utilização da correspondência biunívoca, e, ainda, outras que deixaram perceber a conservação da quantidade.

Maioritariamente as representações dos alunos revelam que o seu processo de contagem está assente na sequência numérica de um em um. Embora haja alunos que apresentem uma contagem de dois em dois.

As representações, utilizadas pelos alunos envolvidos neste estudo, permitiram identificar os alunos que tem um raciocínio ainda muito ligado ao concreto ou ao real e os que já estão numa fase de raciocínio mais próxima da linguagem abstrata ou simbólica, matematicamente falando. Pode, assim, constatar-se que o grupo em estudo apresenta, na

maioria dos casos, um raciocínio muito ligado ao concreto e que outros estão numa fase de transição para o pensamento mais abstrato.

Seguidamente, apresento, sucintamente, o conhecimento matemático revelado por cada um dos alunos, a partir das representações apresentadas na resolução dos problemas propostos.

Nas representações do Marco, destaca-se que o processo de contagem demonstra que é o único que é capaz de proceder à contagem de quatro em quatro, sendo que as expressões numéricas apresentadas revelam que é capaz de compreender a subtração no sentido de retirar.

No caso da Carla, o processo de contagem utilizado revela que a aluna já consegue efetuar contagens de dois em dois e as expressões numéricas apresentadas mostram que é capaz de compreender a subtração no sentido de completar e no sentido de retirar.

Relativamente ao Marco, ao Luís e à bela as suas representações expressam a sua compreensão da subtração no sentido de retirar. Sendo que o Luís compreende a multiplicação pelo sentido aditivo.

A Maria, pelas representações simbólicas que apresenta, na maioria das vezes, indica possuir um raciocínio mais abstrato e compreender a subtração tanto no sentido de completar como no sentido de retirar. Revelando, contudo, que ao contrário dos restantes alunos não tem interiorizado o sentido aditivo da multiplicação.

O João e o António revelam compreender e conseguir utilizar dois dos sentidos da subtração, o de completar e o de retirar, e entender a adição e a subtração como operações inversas. Sendo que no caso do João, este revela compreender a multiplicação no sentido aditivo.

O Mário e a Marta ambos apresentam nas suas resoluções o cardinal da contagem, revelando possuir a conservação das quantidades trabalhadas. A Marta mais concretamente representa o seu raciocínio que demonstra compreender a multiplicação no sentido aditivo.

Neste sentido, perante o conhecimento informal dos alunos revelado pelas suas representações na resolução dos problemas o professor será capaz de compreender e desenvolver uma ação pedagógica, mais assertiva em termos de planificações, delineação de estratégias, e tarefas, que permitam os alunos aprofundar e desenvolver o seu raciocínio e conhecimento matemático a nível da subtração e do sentido combinatório da multiplicação.

Deste modo, e uma vez que na grande generalidade os alunos pelos seus processos informais demonstram compreender a subtração no sentido de retirar, o professor deverá propor aos alunos tarefas em cadeia e onde estejam especialmente subjacentes o sentido de completar e comparar da subtração de forma a conduzi-los a um novo conhecimento ou significado matemático.

Relativamente ao enunciado da multiplicação, que têm subjacente o sentido combinatório, uma vez que os alunos na grande generalidade, resolveram o enunciado através do sentido aditivo o professor deverá propor aos alunos tarefas que permitam uma articulação entre o sentido aditivo e o combinatório da multiplicação.

Sendo que os materiais manipulativos, a reta numérica, através de situações do dia-a-dia e da comunicação estabelecida em sala de aula, serem algumas estratégias também importantes para o professor modelar a compreensão dos alunos relativamente aos sentidos, como das propriedades e das relações subjacentes nas operações da multiplicação e subtração.

3.3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As considerações finais inserem-se no âmbito do ensino da Matemática e referem-se à importância das representações que os alunos do 1º ano de escolaridade utilizam na resolução de problemas que envolvem a subtração e a multiplicação no sentido combinatório.

Posso constatar pelas conclusões retiradas neste estudo que as representações dos alunos, no decorrer da resolução de problemas, são um apoio essencial para identificar os conhecimentos matemáticos informais dos alunos no 1º ano de escolaridade. Mas para que as representações dos alunos, naturalmente, surjam o professor deve propor enunciados que façam emergir esse conhecimento, devendo estes, de acordo com Pólya (1978), ser desafiantes, interessantes, adequados e suficientemente problemáticos para os alunos envolvidos.

Para além disso, as representações dos alunos permitem, também, compreender o raciocínio matemático que esteve inerente à interpretação e solução apresentada.

Sendo as representações externas o resultado das representações internas, processadas ao nível do pensamento, torna-se imprescindível que estas sejam enriquecidas,

durante os momentos de comunicação e partilha, com diversas representações externas que poderão ajudar a desenvolver outros tipo de pensamento e, por sua vez, desencadear outras representações internas que, num ciclo continuado, darão origem a novas representações externas.

Deste modo, o professor deve promover a criação de uma ambiente de sala que encoraje os alunos a apresentarem, discutirem e refletirem sobre as suas representações, em momentos coletivos, pois promover a comunicação em sala de aula é dar aos alunos a possibilidade de organizar, explorar, esclarecer e enriquecer o seu pensamento. Isto é, a criação de um ambiente em que alunos e professor estejam atentos ao pensamento e raciocínio uns dos outros e funcionem como membros de uma comunidade matemática.

3.4. LIMITAÇÕES E NOVAS PERSPETIVAS

Embora considere o período destinado à prática pedagógica um tempo curto, considero que foi um tempo que me levou a descortinar um novo mundo, repleto de inúmeras possibilidades.

A partir da realização deste trabalho e das leituras efetuadas, fiquei convicta do papel que as representações matemáticas dos alunos desempenham na compreensão e resolução dos problemas propostos, mas também da necessidade do professor, a partir delas criar um ambiente em que estas possam ser partilhadas e discutidas, uma vez que é uma forma essencial dos alunos conhecerem outras formas de raciocínio com outro tipo de representações. Sendo que segundo Cavalcanti (2001) para além do professor estimular os alunos a apresentarem e discutirem e refletirem sobre as diferentes representações “cabe também incentivar a análise sobre quais das soluções apresentadas são adequadas à situação proposta, que semelhanças e diferenças existem sobre elas, quais são mais simples, etc.” (p.137).

Para além de ser importante para os alunos estes momentos, também possibilita o professor conhecer as etapas que os alunos atravessaram na resolução de um problema específico e assim desenvolver uma prática pedagógica que permita os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades e desenvolverem as suas competências matemáticas.

Neste sentido, foi precisamente os poucos momentos de partilha e discussão em sala de aula uma das limitações encontradas neste estudo, dado o curto tempo de prática pedagógica.

Acredito que é pelas representações dos alunos e pela comunicação estabelecida em sala de aula, partindo das mesmas, que se abre o caminho que possibilita aos alunos a participação ativa na construção do seu saber, a aumento de confiança e o gosto pela Matemática.

A atitude de um professor/investigador reflexivo é fundamental para prosseguir este caminho.

O presente relatório permitiu-me, por um lado uma visão e atitude investigativa em relação à Educação, por outro, deixa a vontade de continuar a pesquisar e investigar mais sobre o tema e, mais concretamente, sobre quais serão os tipos de representações que os alunos nos anos seguintes utilizam e consideram mais apropriadas na resolução de diferentes tipos de problemas.

Os primeiros passos foram dados ao longo deste estudo, podendo este vir a representar o início de uma viagem mais prolongada onde possa demorar-me a conhecer e compreender mais sobre as representações dos alunos na construção do seu conhecimento matemático noutros níveis de ensino, utilizando outros materiais, e com um número de alunos mais alargado.

É esta a perspetiva que desenho no horizonte e com ela pretendo prosseguir a minha viagem pelo mundo da Educação. Na verdade,

É o tempo que perdeste com a tua rosa que torna a tua rosa tão importante.

(A. St. Exupéry, 1995, p.72)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Afonso, N. (2005). *Investigação naturalista em educação*. Porto: Edições Asa.
- Arends, R. (1995). *Aprender a ensinar*. Ed. McGraw-Hill de Portugal.
- Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: ME-DGIDC.
- Bogdan, R. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em investigação*. Porto: Porto Editora.
- Brocardo, J., Serrazina, L. & Rocha, I. (2008) (Eds.). *O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. Coleção Educação. Lisboa: Escolar Editora.
- Bruner, J. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Bruner, J. (1989). El desarrollo de los procesos de representación. In J. L. Linaza (Ed.), *Acción, pensamiento y language*. Madrid: Alianza Editorial.
- Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.
- Bruner, J. (2000). *A cultura da educação*. Lisboa: Edições 70.
- Cabanas, J. M. Q. (2002). *Teoria da Educação. Conceção Antinómica da Educação*. Porto: Edições Asa.
- Canavarro, A. P. (2003). *Práticas de ensino da Matemática: duas professoras, dois Currículos*. (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Cândido, P. (2001). Comunicação em Matemática. In K. Smole, & M. Diniz, *Ler, escrever e resolver problemas - Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed.
- Cavalcanti, C. T. (2001). Diferentes formas de resolver problemas. In K. Smole & M. Diniz (Eds.), *Ler, escrever e resolver problemas. Habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121 – 149). Porto Alegre: Artmed.
- Delors, J. et al. (1996). *Educação um Tesouro a Descobrir*. Unesco: Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI.
- DGIDC, (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DGIDC, (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Diezmann, C., & English, L. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.), *Roles of Representation in School Mathematics -2001 Yearbook* (pp. 77-89). Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Diogo, J. (1998) *Parceria escola – família -a caminho de uma educação participada*. Porto: Porto Editora
- Dufour- Janvier, B., Bednarz, N. & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation, in C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching*

- and learning of mathematics* (pp. 109 – 122), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Merlin.
- Estrela, M. T. (1992). *Relação Pedagógica, Disciplina e Indisciplina na Aula*. Porto: Porto Editora.
- Fosnot, C. & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work : constructing numbersense, addition and subtraction*. Portsmouth, NH: heinemann.
- Freire, P. (2004). *Pedagogia da autonomia*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of Representations and the Development of Mathematical Concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *Roles of representation in School mathematics - 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Virgínia: National Council Of Teachers of Mathematics.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problema solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.
- Gómez, G. R.; Flores, J. G. & Jiménez, E. G. (1996). *Metodologia de la investigación cualitativa*. Málaga: Aljibe.
- Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic Mathematics Education*. Utrech: CD beta press.
- Haydt, R.C. (2006). *Curso de didática geral*. São Paulo: Ática.
- Huete, J. C. S., Bravo, J.A.F (2006). *O ensino da Matemática – Fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artmed.
- Janvier, C. (1987). Translations Processes in Mathematics Education, in C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, (pp. 27 – 32), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Kantowski, M. G. (1980). Some thoughts on teaching for problem solving. In R. E. Reys (Ed.), *Problem solving in school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Kaput, J. J. (1987). Representation sytems and mathematics . In C. janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (p.19-26).Hisssdale ,NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Kilpatrick, j., Swafford, j., & Findell, b. (eds.). (2001) *Adding it: helping children learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Krulik, S. & Rudnik, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving – A Handbook for Elementary School Teachers*. Massachussets: Allyn and Bacon.
- Lee, C. (2006). *Language for learning mathematics, assessment for learning in practice*. Berkshire: Open University Press.
- Ministério da Educação (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: IIE.

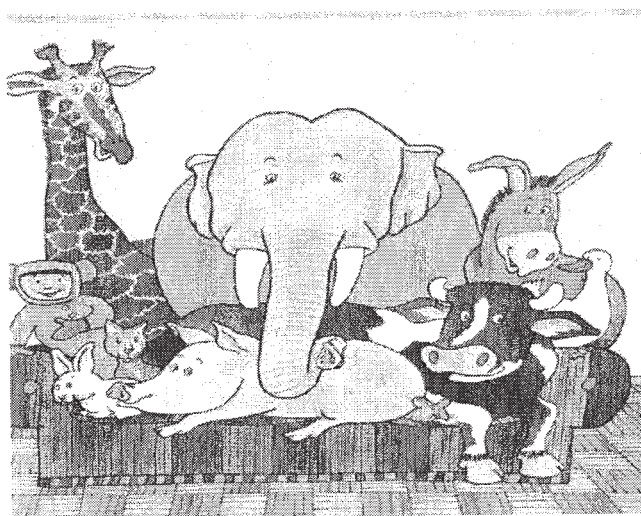
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM. [Tradução Portuguesa: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar, Lisboa, APM/IEE, 1991].
- NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Edição portuguesa 2007) Lisboa: APM.
- NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.
- Oliveira-Fomosinho, J. (org.) (2002). *A supervisão na Formação de Professores I – da sala à Escola*. Porto: Porto Editora.
- Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para Professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel – Edições Técnicas.
- Papalia, D. E., Olds, S. W., & Feldman, R. D. (2001). *O Mundo da Criança*. Lisboa: McGraw Hill.
- Polya, J. A. (1978). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Ponte, J. P. (1994). *O estudo de caso na investigação em educação matemática*. *Quadrante*, 3 (1), 3-18.
- Ponte, J. P., Boavida, A. M., Graça M. & Abrantes, P. (1997). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didática da matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade aberta.
- Quivy, R. & Campenhout, L.V. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais*. Lisboa: Gradiva.
- Rinaldi, Carlina (1999) O Currículo emergente e o construtivismo social. In: EdwardS, C.; Gandini, L.; Forman, G. *As cem linguagens da criança: abordagem de Reggio Emilia na educação da primeira infância*. Porto Alegre: Artmed.
- Saint-Exupéry, A. (1995). *O Príncipezinho*. Santa Maria da Feira: Relógio D' Água Editores.
- Santos, M. E. (1991). *Mudança Conceptual na Sala de aula : Um desafio pedagógico*. Lisboa: Livros Horizonte.
- Sierspiska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*, London: Falmer Press.
- Smole, K. (1996) *A matemática na educação infantil –A teoria das inteligências múltiplas na prática escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Smole, K., & Diniz, M. (org.) (2001). *Ler, escrever e resolver problemas - Habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.
- Sousa, A. (2005). *Investigação em Educação*. Lisboa: Livros Horizonte.

- Vale, I., & Pimentel, T. (2004). Resolução de problemas. In P. palhares (Ed.), *Elementos da matemática para professores do Ensino Básico* (pp.7-51). Lisboa: Lidel.
- Vergani, T. (2002). *Matemática e linguagem (s)*. Lisboa: Pandora Edições.
- Vernaud, G. A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.
- Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings. In A. A. Cuoco e F. R. Curcio (Eds), *Roles of Representaion in School Mathematics*, 2001 Yearbook (pp. 215 – 227), Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ANEXOS

Anexo I - Tarefas propostas aos alunos no âmbito da investigação

- **Tarefa 1:** Todos no Sofá

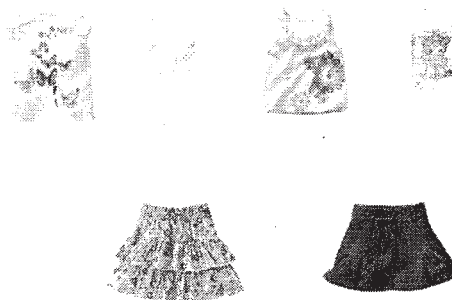


1. Na imagem, quantos amigos estão sentados no sofá?
Regista como contaste.

2. A dada altura saíram 2 amigos. Quantos amigos ficaram no sofá?
Regista como pensaste.
3. Mais tarde já só estavam 6 amigos no sofá. Quantos amigos é que já saíram?
Regista como pensaste.
4. Já estão no chão 8 amigos. Quantos amigos ficaram no sofá?
Regista como pensaste.

- **Tarefa 2:** O aniversário da Urbi

1. A Urbi recebeu no seu aniversário 4 t-shirts e 2 saias. De quantas maneiras diferentes se pode vestir a Urbi?
Regista como pensaste.



Anexo II- Notas de campo

Nota de Campo nº 1

DATA: 13 de janeiro de 2014

LOCAL: Sala de aula

HORA: 10h15

INTERVENIENTES: Professora estagiária e aluna (Maria)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
A aluna está a resolver o problema “O aniversário da Urbi” e eu pergunto-lhe: “-Explica-me como estás a resolver o problema?” Aluna: “-Então, eu estou a desenhar as maneiras diferentes como a Urbi se pode vestir.” Pergunto: “-Mas inicialmente, fizeste aqui outra coisa, não foi?” A aluna apontando para a imagem do problema com as peças de roupa responde:”- Então eu fiz um traço de uma saia a uma blusa, para fazer maneiras diferentes para a urbi se vestir...” Pergunto:” -E depois?” Aluna responde: “Depois eu quando ia contar já não percebia ...eram muitos riscos, então eu vi que uma blusa ia dar a uma saia e depois desenhava isso.”	A aluna inicialmente apoiou-se na imagem do problema, estabelecendo correspondência biunívoca entre cada uma das peças de roupa. No momento em que ia proceder à contagem das ligações (conjuntos), sentiu-se confusa, e desenvolveu uma segunda estratégia, desenhando as diferentes combinações de peças de roupa, apoiando-se na correspondência biunívoca que anteriormente tinha estabelecido a partir da imagem do problema.

Nota de Campo nº 2

DATA: 22 de janeiro de 2014

LOCAL: Sala de aula

HORA: 10h30

INTERVENIENTES: Professora estagiária e aluna (António)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
Pergunto: “-Escreves-te muitas contas...!” Aluno: “Sim, são dez amigos que estão no sofá ...pode-se escrever de muitas maneiras.”- Diz-me um pouco apreensivo. Professora Estagiária: “Ai sim?!Explica-me melhor.” Aluno:“- O 10 pode ser $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ ou $4+9$ ou $5+5$ ou $10+0$.” Digo-lhe:”- Muito bem, concordo contigo. Mas achas que só se pode somar, ou usar o sinal de mais (+) para obtermos o mesmo número, ou resultado?” O aluno ficou em silêncio passado algum tempo diz:”-Ah...já sei, aqui eu fiz $10+0=0$ mas eu acho que também pode ser $10-0=0$, não é?” Respondo:” Isso mesmo!”.	Apesar de apenas ser solicitado a contagem do número de amigos presentes na imagem ilustrativa do problema, o aluno apresentou várias possibilidades de decomposição do número total de amigos presentes na imagem. Após a minha intervenção o aluno apresentou uma subtração possível de se obter o número total de amigos. Neste problema parece que o aluno já conhece alguns factos matemáticos mais concretamente, que $10+0=0$ e que $10-0=0$.

Nota de Campo nº 3

DATA: 22 de janeiro de 2014

LOCAL: Sala de aula

HORA: 10h30

INTERVENIENTES: Professora estagiária e o aluno (Marco)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
O aluno chama-me e pergunta:”- Está bem?” Respondo: Explica-me então como pensas-te. Aluno: “Fiz os dez amigos com estas dez bolas, e depois fiz duas setas nestas duas bolas e pus o dois ao lado, porque os dois amigos saíram.” Pergunto-lhe:”- E depois disso como é que ficaste a saber quantos amigos tinha saído do sofá?” O aluno responde-me a apontando para a sua resolução: “Contei estas bolas que não tem seta. Pergunto-lhe: “Então quanta contas-te? E essas bolas correspondem ao quê?” O aluno responde-me: “Contei oito bolas...são os amigos que ainda estão no sofá...está bem? “ Digo-lhe: “Muito bem, Marco, é isso mesmo!”	O aluno desenhou os amigos de uma forma simples e despejada de pormenores, a partir de círculos. A explicação do Marco da sua representação coincidiu na íntegra com a minha análise inicial sobre a mesma. Isto porque o aluno representou o seu raciocínio de uma forma rica mas muito clara. Tudo isto leva-me a concluir que as representações dos alunos possibilitam aos professores conhecer o seu raciocínio matemático.

Nota de Campo nº 4**DATA:** 22 de janeiro de 2014**LOCAL:** Sala de aula**HORA:** 11h00**INTERVENIENTES:** Professora estagiária e o aluno (Mário)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
Após passado o tempo de resolução do problema “Todos no Sofá”, questioneei à turma se já tinham finalizado o problema. O Mário foi o único aluno a responder que não. Junto ao Mário ele diz-me:” -Está quase, só falta desenhar o sofá o pato e o porco”. Pergunto-lhe:”- E depois, não vai ser preciso fazeres mais nada? Responde-me:”-Ah... depois de fazer o pato e o porco no sofá, escrevo o número dois aqui em cima.	Ao contrário dos restantes alunos da turma, o Mário desenhou de forma pormenorizada todos os animais, facto este, que fez com que fosse o último a finalizar a tarefa. Escolheu criteriosamente os oitos animais que ficariam no chão, apoiando-se na imagem ilustrativa do de forma a certificar-se que estaria a desenhar todas as suas características. A partir dos restantes animais que faltavam desenhar, o aluno soube desta forma a solução do problema.

Nota de Campo nº 5**DATA:** 22 de janeiro de 2014**LOCAL:** Sala de aula**HORA:** 11h00**INTERVENIENTES:** Professora estagiária e aluna (Maria)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
Após a resolução do problema “ Todos no Sofá” questiono a Maria sobre a sua resolução: “-Maria, explica-me o que fizeste. “ Aluna responde-me: Eles eram dez amigos, mas como tinha saído dois, eu contei dois 1,1,1,1,1,1,1,1”-explica-me a Maria apontando para a sua representação horizontal de cálculo, que expressa a soma sucessiva do número um ,tendo como resultado o número oito. Pergunto-lhe:”- O que quer dizer então Maria que o número de amigos que saíram é...?”-faço uma pausa propositada para que a aluna diga-me a solução do problema. A aluna responde: Saíram oito amigos.	Ao contrário da grande maioria dos alunos da turma, a Maria não recorreu ao desenho para resolver o problema. Fez a conservação do número dez, sendo capaz de mentalmente reter o número elementos que saíram do sofá. No final apresentou corretamente a solução do problema.

Nota de Campo nº 6**DATA:** 22 de janeiro de 2014**LOCAL:** Sala de aula**HORA:** 11h00**INTERVENIENTES:** Professora estagiária e aluna (Carla)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
No momento de recolher a resolução do problema “Todos no Sofá” da Carla, pergunto-lhe: - “-Carla, explica-me como resolveste este problema.” Aluna: “-Primeiro eu fiz dez estrelas para fazer os amigos, e depois como tinham saído dois, eu risquei estas duas estrelas.” Acrescento: “-Interessante Carla, mas fizeste muito mais, explica lá!” Aluna: “-Depois, para saber quantos amigos tinham ficado no sofá eu contei estas estrelas que não estão riscadas”. – diz –me a Carla apontando para a sua resolução	A resolução da aluna a semelha-se a uma reta numérica, uma vez que a aluna desenhou dez estrelas alinhadas na forma horizontal, e a partir delas procedeu ao calculo registando o processo de resolução do problema.

Nota de Campo nº 7**DATA:** 22 de janeiro de 2014**LOCAL:** Sala de aula**HORA:** 11h30**INTERVENIENTES:** Professora estagiária e a aluno (Marco)

NOTAS DESCRITIVAS	NOTAS INFERENCIAIS
Questiono o Marco sobre a sua resolução do problema “Todos no Sofá”. -Marco, explica-me como pensas-te. -“Eu desenhei os amigos e depois para contar eu fiz assim, uma linha, a sair deles. Pergunto ”-E depois quantos amigos contas –te no sofá Aluno: Dez -responde – me escrevendo no mesmo momento o número dez.	O aluno utilizou o desenhou para proceder à solução do problema. Após fazer a contagem dos amigos que desenhou , acabou por escrever o número dez ,como sendo o cardinal da sua contagem.