



ESCOLA NAVAL



ta sainte & bief faire

Francisco Inácio Nunes Rodrigues

**Estudo de métodos de resolução da equação de
Rayleigh-Plesset, com aplicações à cavitação**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia
Naval Ramo de Armas e Eletrónica



Alfeite

2023



ESCOLA NAVAL

talant de bi-faire



Francisco Inácio Nunes Rodrigues

*Estudo de métodos de resolução da equação de
Rayleigh-Plesset, com aplicações à cavitação*

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ciências Militares Navais, na especialidade de Engenharia Naval Ramo
de Armas e Eletrónica

Orientação de: Mário Gatta, Miguel Moreira

O Aluno Mestrando,

Os Orientadores,

Francisco Rodrigues

Mário Gatta, Miguel Moreira

Alfeite

2023

"Quanto mais me aprofundo na Ciência mais me aproximo de Deus."

Albert Einstein

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha irmã, que iluminaram a minha jornada, apoiam cada passo do meu caminho e que me inspiram a alcançar novos horizontes.

Aos meus avós, por toda a sabedoria e carinho que me transmitiram, bem como a crença inabalável na importância de nunca desistir.

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer ao meu orientador, Professor Mário Gatta, a sua orientação, sabedoria e compromisso foram um farol que iluminou o caminho rumo ao sucesso desta dissertação. Cada reunião e troca de ideias foram oportunidades para o meu desenvolvimento, tanto de estudante, como pessoal. Mediante as adversidades neste campo de estudo, a sua capacidade de transcender conceitos complexos e torná-los acessíveis moldaram este trabalho de forma proveitosa. Portanto, estou verdadeiramente grato por ter tido a oportunidade de trabalhar sob a sua tutela.

Desejo estender os meus agradecimentos ao meu co-orientador, Professor Miguel Moreira, pelo tempo e conhecimento que compartilhou comigo. O seu apoio incontestável e as suas críticas construtivas no desenvolvimento do software foram essenciais para atingir o objetivo deste trabalho.

À minha família agradeço, agora e sempre, por serem o meu porto seguro nos momentos difíceis e a minha alegria nos triunfos.

Aos meus amigos e camaradas mais chegados, agradeço cada conselho, cada palavra de encorajamento, carrego comigo memórias e lições para a vida.

Resumo

A presente dissertação visa descrever a dinâmica de bolhas de gás de dimensões oscilantes, sujeitas a pressões variáveis em fluidos, tirando partido de desenvolvimentos nos métodos de resolução computacional e das equações diferenciais não-lineares.

O tema presente neste trabalho insere-se no fenómeno da cavitação, por exemplo nas hélices dos navios, devido a uma diminuição da pressão de água a valores inferiores à pressão de vapor. A queda de pressão suscita a ebulição, que mesmo à temperatura ambiente da água, leva ao aparecimento de pequenas cavidades cheias ar. As bolhas estão sujeitas a pressões variáveis, em geral, por efeito da própria rotação da hélice, onde acabam por sofrer oscilações nas suas dimensões. Estas bolhas entram em colapso e assim, dar origem a ondas sonoras que, não só podem danificar equipamentos, como podem radiar som detetável.

O objetivo deste trabalho é o estudo de métodos de resolução da equação de Rayleigh-Plesset, sendo esta a regularmente usada para investigar o comportamento de bolhas assim formadas. Para se conseguir cumprir este objetivo será adotada inicialmente uma metodologia analítica de estabelecimento das equações fundamentais, com base em estudos de investigações anteriores, e depois irá ser realizada a análise e a resolução da equação em meios computacionais, com código criado em linguagem MATLAB.

Por fim, após a apreciação das simulações obtidas para o modelo construído será feito o enquadramento no campo da cavitação, com aplicações no contexto naval. Trata-se um projeto para a Marinha, uma vez que se pretende entender a dinâmica das bolhas de cavitação e aumentar a multidisciplinaridade do tema na Marinha. O conhecimento nesta área fornece pistas para a resolução de problemas associados à cavitação, quer ao dano no casco, quer ao excesso de ruído produzido por este fenómeno.

Palavras-chave: Cavitação, Bolha, Equação Rayleigh-Plesset, Pressão

Abstract

The present dissertation aims to describe the dynamics of gas bubbles of oscillating dimensions, subject to variable pressures in fluids, taking advantage of developments in computational resolution methods and non-linear differential equations.

The theme present in this work is part of the phenomenon of cavitation, for example in the propellers of ships, due to a decrease in water pressure to values below the steam pressure. The drop in pressure causes boiling, which even at room temperature of the water, leads to the appearance of small cavities filled with air. The bubbles are subject to variable pressures, in general, due to the rotation of the propeller itself, where they end up suffering oscillations in their dimensions. These bubbles collapse and thus give rise to sound waves that not only can damage equipment, but can radiate detectable sound.

The objective of this work is the study of methods for solving the Rayleigh-Plesset equation, which is regularly used to investigate the behavior of bubbles thus formed. In order to achieve this objective, an analytical methodology for establishing the fundamental equations will be initially adopted, based on studies of previous investigations, and then the analysis and resolution of the equation will be carried out in computational means, with code created in MATLAB language.

Finally, after assessing the simulations obtained for the built model, a framework will be made in the field of cavitation, with applications in the naval context. This is a project for the Navy, as it is intended to understand the dynamics of cavitation bubbles and increase the multidisciplinary nature of the subject in the Navy. Knowledge in this area provides clues for solving problems associated with cavitation, whether damage to the hull or the excess noise produced by this phenomenon.

Keywords: Cavitation, Bubble, Rayleigh-Plesset Equation, Pressure

Índice

1	Introdução	1
1.1	Plano e propósito da dissertação	1
1.1.1	Estrutura	1
1.1.2	Objetivos do trabalho	2
1.2	Fundamentação do tema	3
1.2.1	Motivação	3
1.2.2	Interesse para a Marinha	3
1.2.3	Importância do problema para a parte operacional	4
1.3	Revisão histórica	4
1.3.1	Trabalho de Rayleigh	4
1.3.2	Trabalho de Plesset	5
1.4	Estado da arte	6
2	Fundamentos teóricos	11
2.1	A cavitação	11
2.1.1	Cavitação inercial	12
2.1.2	Cavitação hidrodinâmica	12
2.1.3	Supercavitação	13
2.1.4	Cavitação acústica	13
2.2	Danos associados	14
2.3	Ruído gerado pela cavitação	16
2.4	Equação de Rayleigh-Plesset	18
2.4.1	Escolha da equação	18
2.4.2	Apresentação da equação	18
2.4.3	Parâmetros presentes na equação	19
2.5	Modelo de um fluido incompressível	19
2.6	Gás e vapor	20
2.7	Pressão	20
2.7.1	Pressão de vapor	21
2.8	Viscosidade dos fluidos	21

2.8.1	Viscosidade dinâmica	22
2.8.2	Viscosidade cinemática	23
2.9	Tensão superficial	23
2.10	Processo politrópico	24
2.11	Processo adiabático e isotérmico	24
2.12	Relação pressão-volume-temperatura	25
2.12.1	Gases ideais	25
2.12.2	Modelo de Dalton	25
2.12.3	Pressão parcial	26
2.13	Pressão interna da bolha	26
2.14	Equações diferenciais ordinárias	28
2.14.1	Conceitos básicos	28
2.14.2	Solução de EDO	29
2.14.3	Redução de ordem	29
2.15	Método numérico Runge-Kutta para a resolução da ODE	30
3	Dedução da equação de Rayleigh-Plesset	33
3.1	Fórmula de Laplace	33
3.2	Tensor de tensões	35
3.3	Dedução da equação de Rayleigh-Plesset	35
4	Simulações numéricas e discussão	41
4.1	Adimensionalização	41
4.2	Análise de resultados obtidos por outros autores	43
4.3	Influência da pressão sinusoidal na dinâmica das bolhas	45
4.4	Influência do valor do raio inicial nas bolhas de cavitação	47
4.5	Efeito da amplitude e frequência da pressão exterior na oscilação das bolhas	49
4.6	Dependência dos parâmetros da bolha na viscosidade e tensão superficial	51
4.7	Consequência da velocidade inicial de crescimento $\frac{dR}{dt} _{t=0}$ na bolha	53
4.8	Condições para a oscilação sem implosão	54
4.9	Delta de Dirac - força de pressão externa	58
	Conclusão	58
	Bibliografia	65
	Apêndices	71

A	Rotina com o pacote ode45	71
B	Rotina para a equação de Rayleigh-Plesset	75
C	Rotina para o tratamento e sobreposição das simulações	77
	Anexos	79
I	Sonoluminescência	79
	I.1 Alguns trabalhos recentes	79

Lista de Figuras

2.1	Danos de cavitação num hélice	11
2.2	Série de fotografias do colapso de uma bolha de cavitação	15
2.3	Ruído resultante da cavitação numa válvula de controlo hidráulico	16
2.4	Sinal acústico de uma bolha em colapso	17
2.5	Perfil de velocidade para um fluido contido entre duas placas	22
3.1	Forças de tensão superficial exercidas na bolha	34
3.2	Bolha esférica num líquido incompressível	37
3.3	Equilíbrio de pressões na interface da bolha	39
4.1	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 400 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$	44
4.2	$R_0 = 50 \mu\text{m}$, $f = 700 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$	44
4.3	$R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 150 \text{ kHz}$, $A = 1 \text{ bar}$	44
4.4	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$	44
4.5	$R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 20 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$	46
4.6	$R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 400 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$	47
4.7	$f = 150 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$	48
4.8	$R_0 = 1 \mu\text{m}$	48
4.9	$R_0 = 100 \text{ e } 500 \mu\text{m}$	48
4.10	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$	49
4.11	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 300 \text{ kHz}$	49
4.12	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1 \text{ MHz}$	49
4.13	$R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 150 \text{ kHz}$	49
4.14	$R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$	49
4.15	$R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 900 \text{ kHz}$	49
4.16	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$	50
4.17	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 300 \text{ kHz}$	50
4.18	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 800 \text{ kHz}$	50
4.19	Velocidade da superfície da bolha para diferentes valores de viscosidade	51
4.20	Raio da bolha para vários valores de viscosidade	52
4.21	Raio da bolha para diferentes valores de tensão superficial	52

4.22	Velocidade do raio da bolha para diferentes valores de tensão superficial	53
4.23	Variação e velocidade do raio da bolha para distintos valores de $\frac{dR}{dt} _0$	54
4.24	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $\delta = 1 \times 10^{-7}$	56
4.25	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$	57
4.26	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 1 \text{ bar}$	57
4.27	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$	57
4.28	$R_0 = 25 \mu\text{m}$, $A = 3 \text{ bar}$	57
4.29	$R_0 = 50 \mu\text{m}$, $f = 65 \text{ kHz}$	57
4.30	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$	57
4.31	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 30 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$	59
4.32	$R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$	59
4.33	$R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 40 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$	59
4.34	$R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 50 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$	59
4.35	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$, $A = 4 \text{ bar}$	59
4.36	$R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $A = 4 \text{ bar}$	59
I.1	Raio em função do tempo. O líquido é definido como incompressível e a dinâmica da bolha é descrita pela equação de Rayleigh–Plesset I.1	80
I.2	Raio em função do tempo. O líquido é definido como compressível e a dinâmica da bolha é descrita pela equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4	81
I.3	Velocidade da bolha em função do tempo. O líquido é definido como compressível e a dinâmica da bolha é descrita pela Equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4	82
I.4	Raio em função do tempo para uma pressão $P_a = 1,42 \text{ atm}$	83

Lista de Tabelas

2.1	Símbolos e unidades da equação de Rayleigh-Plesset	20
2.2	Pressão de vapor da água	21
2.3	Viscosidade da água a uma pressão de 1 atm	23
2.4	Tensão superficial da água	24
4.1	Frequência natural f_0 da bolha para diversos R_0	45
4.2	Valores dos parâmetros físicos e variáveis	55
I.1	Parâmetros usados na simulação numérica.	83

Lista de Abreviaturas

EN	E scola N aval
ERP	E quação de R ayleigh P lesset
EDO	E quação D iferencial O rdinária
RK	R unge- K utta

Lista de Símbolos

ω	frequência angular	rad s^{-1}
T	temperatura	$^{\circ}\text{C}$
A	amplitude da pressão sinusoidal	bar
f	frequência	Hz
f_0	frequência natural	Hz
c	velocidade de som	m s^{-1}
λ	comprimento de onda	m
T	período	s
σ	número de cavitação	adimensional
R	raio da bolha	m
R_m	raio máximo da bolha	m
R_0	raio inicial da bolha	m
$\frac{dR}{dt}$	velocidade do raio da bolha	m s^{-1}
$\frac{d^2R}{dt^2}$	aceleração do raio da bolha	m s^{-2}
t	tempo	s
ρ_L	densidade do líquido	kg m^{-3}
μ	viscosidade dinâmica	Pa s^{-1}
ν	viscosidade cinemática	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
S	tensão superficial	N m^{-1}
p_B	pressão interna da bolha	Pa
p_{∞}	pressão externa	Pa
p_{go}	pressão parcial do gás	Pa

Capítulo 1

Introdução

1.1 Plano e propósito da dissertação

1.1.1 Estrutura

A presente dissertação divide-se em seis fases. Neste primeiro capítulo temos a Introdução, onde é feita uma revisão histórica desde as primeiras investigações sobre a cavitação até aos trabalhos científicos de Rayleigh e Plesset, bem como a redação sobre a justificação do tema e o seu interesse para a Marinha, de maneira a compreender a importância do problema.

No Capítulo 2 irão ser explicados os diferentes tipos de cavitação e o fenómeno em si com maior detalhe, juntamente com os danos associados e o ruído gerado. De seguida, a equação de Rayleigh-Plesset e os parâmetros presentes são apresentados, junto com os valores típicos e respetivas unidades. São exibidas definições de conceitos e soluções da equação diferencial ordinária (EDO), de modo a facilitar o leitor para a compreensão desta ferramenta matemática.

Numa terceira fase é deduzida a condição de equilíbrio de forças e transposto o que é útil do tensor de tensões para o nosso trabalho. É feita a dedução analítica da equação Rayleigh-Plesset, partindo da equação de Navier-Stokes e apresentada também a equação de Rayleigh, ao anular os efeitos da viscosidade e da tensão superficial.

No decorrer do Capítulo 4 procede-se ao estudo de métodos de resolução em linguagem de programação Matlab, das equações deduzidas e propostas de soluções. É feita a comparação dos nossos resultados com os gráficos obtidos por outros autores. Com base nas novas simulações provenientes do código em Matlab será estudada a influência da escolha de outros valores para os diversos parâmetros da

equação Rayleigh-Plesset e para as pressões exteriores. Ainda nesta fase, vai ser investigado se existem condições especiais para não ocorra o colapso da bolha durante a sua oscilação.

Na conclusão, através de todos os conhecimentos adquiridos ao longo deste trabalho irão estar os principais aspetos a retirar, a partir das simulações efetuadas tais como: estabilidade oscilatória das bolhas, tempo de vida antes da explosão, respostas obtidas nas simulações para as diversas formas da pressão exterior e dos parâmetros físicos. Por último, nesta fase encontra-se a enumeração das limitações que apareceram ao longo do trabalho e as recomendações para projetos futuros na área, tendo como base este trabalho.

1.1.2 Objetivos do trabalho

Este trabalho tem por objetivo principal o estudo do comportamento hidrodinâmico das bolhas de Cavitação. Para isto ser possível, é necessário delinear objetivos secundários que nos permitam resolver a equação de Rayleigh-Plesset, como é o caso da análise e deduções analíticas da equação em questão e eventualmente outras pertinentes, no comportamento das bolhas oscilantes em fluidos, bem como a proposta de soluções, após o estudo de métodos de resolução que serão apresentados ao longo do trabalho.

Um dos intuítos de propor soluções para a resolução da equação principal é a elaboração e validação de códigos computacionais para os respetivos métodos de resolução propostos em linguagem de programação Matlab. Após isto, tem se como finalidade ver em *software* as várias formas da bolha, à medida que se vai alternado as variáveis e simular a bolha nas mais diversas situações, para conseqüentemente fazer a análise detalhada dos resultados computacionais. Estes objetivos servem também para que se possa alongar no presente trabalho, de forma secundária, uma metodologia robusta de estudo de sistemas dinâmicos que apresentem um comportamento não linear. A análise dos resultados, o estudo dos caminhos de resolução da ERP e a interpretação hidrodinâmica da bolha serão o objetivo da dissertação.

Por outro lado, existe a esperança de que a presente tese possa vir a ser de alguma utilidade em outras futuras teses. E que também possa familiarizar futuros oficiais da Marinha sobre esta área ainda pouco estudada na nossa formação básica, desde os seus fundamentos mais teóricos até à utilização operacional na Acústica, como a compreensão da energia sonora que as bolhas emitem ao colapsar.

1.2 Fundamentação do tema

1.2.1 Motivação

O fenómeno da cavitação pode ser encontrado, por exemplo, em turbinas hidroelétricas, bombas centrífugas e sistemas de propulsão de navios, sendo no entanto, um fenómeno indesejável, pois pode ser prejudicial em algumas situações, como na erosão de metais em sistemas hidráulicos ou na geração de ruídos em sistemas de propulsão dos navios. Portanto, é importante compreender e controlar o fenómeno da cavitação para maximizar os seus benefícios e minimizar os danos, de modo a não reduzir a eficiência dos equipamentos.

Para reduzir o impacto da cavitação, há uma série de técnicas que podem ser utilizadas. Estas incluem a otimização do design da hélice para aumentar a eficiência, a utilização de revestimentos especiais para minimizar a formação de bolhas, a regulação da velocidade do navio para evitar a cavitação. Entre outros, é pretendido nesta dissertação a análise do comportamento da bolha proveniente do fenómeno da cavitação, através do estudo da equação de Rayleigh-Plesset para assim, se descobrir para que situações é que estas bolhas oscilam sem implodir e para quando eventualmente colapsam.

Nos dias de hoje, através da utilização de modelos computacionais, é possível simular com precisão a formação e o colapso das bolhas de cavitação, o que permite aos projetistas de hélices e engenheiros navais identificarem e corrigir os problemas antes que ocorram no mundo real. À semelhança disto, neste trabalho irá ser feita a visualização de vários gráficos do comportamento da bolha para as mais diversas situações com base na equação de Rayleigh-Plesset e diferentes excitações externas.

1.2.2 Interesse para a Marinha

O presente tema é relevante para a Marinha pois, sendo um problema antigo e de grande importância prática, ainda não existe nenhum trabalho de tese de Mestrado na EN, tanto quanto conhecemos, em relação a esta área, onde seja possível expôr de forma didática conhecimentos sobre a matéria em questão podendo, ao mesmo tempo, iniciar um processo de continuidade a outros projetos usando este como base. Assim, este trabalho poderá ser um ótimo ponto de partida para muitos outros projetos, de modo a aumentar ainda mais a multidisciplinaridade do tema.

De facto, este trabalho pretende introduzir toda a dinâmica da cavitação, passando pela formação e a hidrodinâmica das bolhas e finalmente, como se dá a

sua detecção. É útil termos na nossa posse equipamentos relacionados com Acústica Submarina e, por isso, conhecer o panorama hidrodinâmico e a radiação sonora das bolhas em que esses mesmos aparelhos atuam, sugerindo que também será importante e interessante para a formação de um futuro Oficial de Marinha o conhecimento relativo ao mecanismo físico subjacente ao fenómeno do comportamento das bolhas e da cavitação.

De facto, é do interesse da Marinha constituir um grupo de Engenheiros que tenham as noções básicas de Física e Matemática sobre este assunto como, em casos mais práticos, conhecimentos relativos às degradações de material e avarias e, claro, ao problema da detecção da cavitação nas hélices.

1.2.3 Importância do problema para a parte operacional

A cavitação nas hélices pode resultar na erosão dos componentes, redução da eficiência, vibrações e ruído. No contexto operacional da Marinha, esse ruído é indesejável uma vez que expõe os navios ao sonar passivo. Os submarinos têm um desafio especial em relação ao ruído, pois estão mais suscetíveis à detecção do sonar passivo.

São formadas ondas de choque quando as bolhas de cavitação colapsam ao serem comprimidas pela água em volumes extremamente pequenos e conseqüentemente, criadas fontes de ruído [Buckland, Masters, Orme e Baker (2013)]. O colapso das cavidades têm o potencial de corroer metais ao longo do tempo, como o aço [N. Fujisawa, Fujita, Yanagisawa, K. Fujisawa e Yamagata (2018)]. A corrosão resultante causa desgaste nos componentes e pode reduzir a vida útil da hélice. Assim que uma superfície é afetada pela cavitação, o ritmo de erosão acelera. As covas provenientes da cavitação criam fendas que atuam como locais de nucleação para bolhas adicionais.

1.3 Revisão histórica

1.3.1 Trabalho de Rayleigh

John William Strutt, mais conhecido como Lorde Rayleigh foi um famoso físico inglês que ajudou nos avanços para a compreensão da luz e do som.

Rayleigh publicou em 1917 o artigo científico «*On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity*». Neste artigo, Rayleigh derivou uma equação para calcular a pressão desenvolvida quando uma bolha colapsa sem

considerar a viscosidade presente no líquido. Ele mostrou que a cavitação pode ser prevenida se for aumentada a pressão no líquido.

Em suma, Rayleigh percebeu que a suposição da pressão constante dentro da cavidade era errada à medida que o raio diminuía e usando a lei de Boyle, mostrou que se o raio da cavidade diminuir por um fator de $4^{\frac{1}{3}}$ então a pressão perto do limite da cavidade irá ser maior do que a pressão ambiente.

A partir desses cálculos foi possível chegar à equação diferencial de Rayleigh, a qual deduzire-mos no capítulo 3.

1.3.2 Trabalho de Plesset

David Plesset foi um físico americano que trabalhou em várias áreas da física, incluindo a física de fluidos. Ele ficou conhecido pelo seu trabalho sobre as bolhas de cavitação.

No trabalho de Plesset foram derivadas equações matemáticas que descreviam a dinâmica das bolhas de cavitação, levando em conta tanto a tensão superficial e a viscosidade do líquido como a compressibilidade do gás dentro da bolha em um artigo intitulado «*The Dynamics of Cavitation Bubbles*». Isso permitiu que ele calculasse a taxa de crescimento das bolhas e o momento em que elas atingiam o seu tamanho máximo antes de colapsar.

Anteriormente, Rayleigh considerou a situação em que no líquido em redor da bolha a pressão é constante. No problema do Plesset a bolha move-se através de uma região na qual a pressão varia rapidamente de maneira a que torna-se necessário uma extensão da teoria de Rayleigh.

Seja $p_{\infty}(t)$ a pressão do líquido no infinito. O problema é definido quando $p_{\infty}(t)$ é conhecido. A análise dos dados experimentais e a comparação com a teoria permitiram determinar o raio R da bolha como uma função do tempo.

David Plesset e seus colaboradores utilizaram a teoria que ele desenvolveu para estudar as bolhas de cavitação em um túnel de água de alta velocidade. No túnel de água de, as bolhas de cavitação são produzidas quando os valores de pressão da água caem abaixo da pressão de vapor do líquido. Isso cria pequenas bolhas de vapor que se movem junto com a água em alta velocidade. As observações feitas no túnel de água obtidos em ambiente controlado permitiram medir o tamanho máximo das bolhas de cavitação, a taxa de crescimento das bolhas, o momento em que elas

colapsariam e comparar estas observações com o modelo teórico, tendo concluído em grande parte que os resultados experimentais foram consistentes.

Assim, fez-se uma extensão à teoria de Rayleigh e acrescentou-se os efeitos da viscosidade e tensão superficial em 1949 e chegou-se à equação de Rayleigh-Plesset (equação deduzida no capítulo 3).

1.4 Estado da arte

O primeiro estudo realizado acerca de cavitação foi realizado por Newton, 1704. Cavitação é o termo utilizado para representar a formação, o comportamento e o colapso de bolhas num líquido. Em 1754, Leonhard Euler reconheceu, pela primeira vez, a possibilidade da existência de cavitação [D. A. d. Wissenschaften zu Berlin (1754)], que Robert Edmund Froude definiu como cavitação, 141 anos mais tarde. O fenómeno da cavitação pode ser controlado para melhorar o desempenho de embarcações. Controlar a bolha de cavitação e a supercavitação em líquidos só pode ser alcançado avançando na base da matemática destes processos. A primeira solução clássica exata pode ser creditado à conhecida solução de H. V. Helmholtz em 1868 [K. P. A. d. Wissenschaften zu Berlin 1868]. O matemático inglês William Henry Besant, em 1859 publicou uma solução para o problema da dinâmica do colapso de uma cavidade esférica em um fluido, que havia sido apresentado pelo matemático George Stokes [Besant (1859)]. Pode-se derivar a equação de Rayleigh-Plesset partindo da equação de Navier-Stokes sob a suposição de simetria esférica. A equação de Navier-Stokes é uma equação diferencial parcial que se refere à movimentação de fluidos viscosos. Estas equações representam a conservação de massa e do momento dos fluidos, resultam da aplicação da segunda lei de Isaac Newton ao movimento de fluidos. Com a omissão da viscosidade e da tensão superficial, uma equação foi derivada pela primeira vez por WH Besant no seu livro de 1859, com a declaração do problema através da seguinte formulação: «*Uma massa infinita de fluido incompressível homogêneo sem estar sob a ação de forças está em repouso, e uma porção esférica do fluido é subitamente aniquilada; é necessário encontrar a alteração instantânea da pressão em qualquer ponto da massa e o tempo em que a cavidade será preenchida, supondo-se que a pressão a uma distância infinita permaneça constante.*» Besant supôs que o intervalo de tempo preciso para preencher a cavidade, sem ter em conta as variações de pressão dentro da bolha, seria dada por uma expressão, que seria mais tarde resolvida por Rayleigh:
$$t = a \left(\frac{6\rho}{p_\infty} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{z^4 dz}{\sqrt{1-z^6}} = a \left(\frac{\pi\rho}{p_\infty} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} \approx 0.91468a \left(\frac{\rho}{p_\infty} \right)^{1/2}$$

Esta integração foi realizada por Lord Rayleigh, que a derivou partindo do balanço energético.

A demonstração experimental da cavitação e do ruído que lhe é característico foi feita em 1894, através de uma experiência (formação e colapso de bolhas de vapor de líquidos em ebulição) realizada por O. Reynolds [Reynolds 1900]. Por outro lado, pode se dizer que o estudo aprofundado da cavitação só começou a ser feito após a introdução da hélice como meio de propulsão nos navios oceânicos. Para o efeito, desde logo, houve a necessidade de se efetuar um estudo aprofundado das causas que estariam na origem das erosões observadas nas pás das hélices. O primeiro artigo científico sobre o tema da cavitação foi publicado por J. I. Thornycroft e S. W. Barnaby em 1895 [J I Thornycroft 1895]. Thornycroft e Barnaby foram os primeiros pesquisadores a observar a cavitação na parte de trás das pás da hélice. Começaram a ser feitos vários estudos sobre o comportamento das bolhas provenientes da cavitação. Assim, em 1917 foi publicado o famoso artigo «*On the Pressure Developed in a Liquid During the Collapse of a Spherical Cavity*» da autoria de John William Strutt, mais conhecido por Lord Rayleigh [Rayleigh 1917]. Neste artigo, Rayleigh derivou uma equação para calcular a pressão desenvolvida quando a bolha, vazia ou pressão interior constante colapsa sem considerar a tensão superficial e a viscosidade presente num líquido incompressível. Ele mostrou que as bolhas de vapor em colapso poderiam gerar pressões, que estavam na origem dos danos que havia sido observado nas hélices dos navios. Percebeu-se que a suposição da pressão constante dentro da cavidade era errada à medida que o raio diminuía, e usando a lei de Boyle, mostrou que se o raio da cavidade diminuir por um fator de $4^{\frac{1}{3}}$ então a pressão perto do limite da cavidade iria ser maior do que a pressão ambiente. Em 1944, os cientistas soviéticos M. I. Kornfeld e L. Suvorov propuseram que durante a cavitação, as bolhas nas proximidades de uma superfície sólida não colapsam simetricamente, em vez disso, uma cova forma-se na bolha num ponto oposto à superfície sólida e essa cova evolui para um jato de líquido. Este jato de líquido danifica a superfície sólida [Kornfeld e Suvorov 1944]. Esta hipótese foi confirmada experimentalmente em 1961, por C. F. Naudé e A. T. Ellis [Naudé e Ellis 1961]. De forma a estender a teoria de Rayleigh, David Plesset, no artigo intitulado «*The Dynamics of Cavitation Bubbles*» derivou equações matemáticas para descrever a dinâmica das bolhas de cavitação, levando em conta tanto a viscosidade do fluido, como também a tensão superficial do líquido e ainda a compressibilidade do gás dentro da bolha [Plesset 1949]. Isso permitiu que ele calculasse a taxa de crescimento das bolhas e o momento em que elas atingiam o seu tamanho máximo antes de colapsar. O livro «*Jets and Cavities*» apresentou os primeiros trabalhos académicos sobre a teoria de um escoamento cavitante com

contornos livres e a supercavitação [Gilbarg 1960], seguido pela teoria dos jatos de fluido ideal [GUREVICH 1965]. Os ultrassons são desencadeados por uma placa vibratória conectada a transdutores ultrassônicos feitos de materiais piezoelétricos acionados por energia elétrica. H. G. Flynn também fez a descrição da cavitação acústica em líquidos no livro «Physical Acoustics» [Flynn 1964].

A literatura revela que quando se trata de estudo da cavitação em fluidos compressíveis utilizamos a equação de Keller-Miksis. Se o fluido for incompressível é usada a equação de Rayleigh-Plesset. Esta última pode ser derivada da equação de Navier-Stokes, como já discutido [Brennen 1995].

O efeito do calor nas bolhas acústicas devido a reações químicas foram modelados por Prosperetti e a pulsação de cavidades sob a água foi estudada por Herring. Kyuichi Yasui apresentou a dinâmica da cavitação acústica em um líquido irradiado com ultrassons [Yasui 2017]. A descrição do comportamento dinâmico de uma bolha sonoluminescente usando técnicas numéricas através do *software* Matlab foi feita por Vignoli [Vignoli, Barros, Thomé, Nogueira, Paschoal e Rodrigues 2013]. Para este caso, foi tido em conta parâmetros como o gás e a compressibilidade. No artigo de S. Ben-Ezra foi feita a integração numérica da equação de Rayleigh-Plesset e a visualização da evolução do raio da bolha em função do tempo [Ben-Ezra 2013]. As influências de vários parâmetros no raio da bolha e na velocidade do raio também são ilustrados graficamente e discutidos no artigo publicado por S. Nadeem, A. Zeeshan e F. Alzahrani [Shahid Nadeem e Alzahrani 2022]. Nesse estudo são considerados modelos de fluidos elásticos. No trabalho «A comparative study between numerical methods in simulation of cavitating bubbles» de E. Ghahraman, M. H. Arabnejad e R. E. Bensow é feita a comparação de três abordagens numéricas para o colapso da bolha durante a cavitação [Ghahramani, Arabnejad e Bensow 2019]. Assim é possível perceber as capacidades e limitações de cada um destes métodos. Foram testados vários métodos de fluidos compressíveis, incompressíveis, com e sem transferência de massa. Na tese «Modelling of the cavitation bubbles dynamics», M. Elezović estudou um método numérico para a resolução da equação de Rayleigh-Plesset [Elezović 2021]. O método mais adequado para resolver o sistema de EDO foi o Runge-Kutta de quarta ordem. A equação diferencial é de segunda ordem, portanto, como sabemos, teve que ser convertida em um sistema de duas equações de primeira ordem, antes de ser resolvida numericamente. É possível encontrar soluções analíticas para a equação de Rayleigh-Plesset em determinadas situações, em alguns artigos científicos, como por exemplo em «Analytical solutions for problems of bubble dynamics», «Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble» e em «Analytical Approximations for the Collapse of an Empty

Spherical Bubble» [Nikolai A. Kudryashov e Dmitry I. Sinelshchikov 2015][Nikolay A Kudryashov e Dmitry I Sinelshchikov 2014][Obreschkow, Bruderer e Farhat 2012]. No trabalho «Homotopy Analysis Method for the Rayleigh Equation Governing the Radial Dynamics of a Multielectron Bubble» feito por F. A. Godínez, M. A. Escobedo e M. Navarrete foi usado o método de análise de homotopia para se obter soluções numéricas da equação de Rayleigh-Plesset para as oscilações radiais de uma bolha multieletrônica em hélio líquido [Godínez, Escobedo e Navarrete 2012].

Uma continuação destes estudos é apresentada em «The Hydrodynamics of Cavitating Fluxos», que engloba os avanços deste domínio das últimos três décadas e combina os métodos clássicos de pesquisa matemática com as capacidades modernas computacionais. Inclui a elaboração de métodos numéricos não lineares para resolver problemas de cavitação 3D e desenvolvimento de teorias assintóticas de fluxos axissimétricos. Também reflete uma certa correlação com o atual trabalho aplicado sobre a hidrodinâmica de corpos supercavitantes [Terentiev, Kirschner e Uhlman 2011].

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1 A cavitação

A cavitação é a criação da fase de vapor de um líquido quando o mesmo é submetido a valores de pressões mais baixas que a pressão ambiente constante. Em vez de adição de calor, é o processo de ebulição em um líquido como resultado da diminuição da pressão. Os processos físicos e termodinâmicos fundamentais são os mesmos em ambas as circunstâncias.

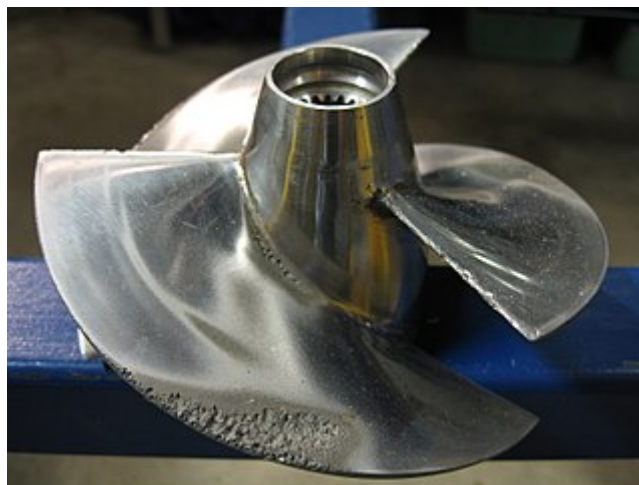


FIGURA 2.1: Danos de cavitação num hélice

A cavitação é um fenómeno que ocorre quando a pressão dum líquido cai abaixo da sua pressão de vapor, resultando na criação de pequenas cavidades gasosas. Estas bolhas quando sujeitas a um aumento de pressão colapsam e podem produzir ondas de choque que danificam o sistema de propulsão. A cavitação é uma fonte significativa de desgaste. A implosão recorrente das bolhas ao redor da superfície metálica resulta na fadiga superficial do metal, originando um desgaste conhecido como cavitação [«Cavitation» 2023].

2.1.1 Cavitação inercial

O mecanismo físico da formação da cavitação é comparável ao da ebulição. Quando a temperatura local do líquido excede a temperatura de saturação, mais calor é fornecido para permitir que o líquido mude de fase para gás e na cavitação a pressão local cai abaixo da pressão de vapor, que é determinada pela resistência à tração do líquido a uma temperatura específica [(Brennen 1995)]. As bolhas de cavitação normalmente requerem uma superfície em que possam nuclear para que a cavitação ocorra.

O início da cavitação pode ocorrer atrás da pá de uma hélice a girar ou em qualquer superfície que vibre num líquido. Os gases evaporam na cavidade do fluido, tornando a cavidade uma bolha de vapor. Quando as condições que causaram o desenvolvimento da bolha não estão mais disponíveis, a pressão do líquido circundante começa a aumentar e a bolha colapsa. Quando a bolha rebenta, a inércia do líquido circundante produz um aumento na pressão e na temperatura do vapor interno. Na presença de um campo acústico, também pode ocorrer cavitação inercial, como é descrito na secção 2.1.4 [«Inertial cavitation» 2023].

O processo pelo qual, as bolhas em um líquido oscilam na presença de um campo acústico, e subsequentemente colapsam, é conhecido como cavitação não inercial. Este tipo de cavitação produz muito menos erosão do que a cavitação inercial.

2.1.2 Cavitação hidrodinâmica

Os processos de vaporização, produção de bolhas e implosão, que decorrem num líquido em movimento é a cavitação hidrodinâmica.

De acordo com o diagrama de mudança de fase termodinâmica, o aumento da temperatura pode causar um mecanismo de mudança de fase conhecido como ebulição. Uma queda na pressão estática, por outro lado, pode permitir que se passe pelo diagrama multifásico e acione outro mecanismo de mudança de fase com o nome de cavitação. Um aumento na velocidade do fluxo, por outro lado, pode causar uma diminuição da pressão estática até o ponto crítico, desencadeando a cavitação (segundo o princípio de Bernoulli) [Gevari, Abbasiasl, Niazi, Ghorbani e Koşar (2020)].

A água em torno da hélice cria uma zona de baixa pressão. Este fenómeno ocorre quando a velocidade da água em torno da hélice é tão rápida que a pressão da água diminui ao ponto de ficar abaixo da pressão de vapor da água, o que resulta na

formação de bolhas de vapor. Ao aumentar a velocidade do navio, posteriormente a pressão na superfície da hélice diminui e como já referido anteriormente leva ao aparecimento de bolhas. Estas bolhas começam a oscilar rapidamente quando entram em contato com áreas de alta pressão, a pressão da água torna-se suficientemente alta para «estourar» as bolhas, liberando uma grande quantidade de energia no processo, isto leva à criação do fenómeno da cavitação que pode causar danos sérios à hélice e à estrutura do navio [«Hydrodynamic cavitation» 2023].

À medida que um fluxo de cavitação continua, padrões de fluxo distintos são detetados: início, fluxo evoluído e supercavitação. A primeira aparição da fase gasosa no sistema é chamada de início. Este é o fluxo de cavitação mais fraco do sistema. O fluxo evoluído é observado quando as cavidades no orifício ou nas estruturas aumentam e tornam-se maiores em tamanho. A cavitação é prejudicial quando não controlada; no entanto, regulando o fluxo da cavitação, a energia libertada no colapso, pode ser contida e usada de maneira não destrutiva [«Hydrodynamic cavitation» 2023].

2.1.3 Supercavitação

O emprego de uma bolha de cavitação para minimizar o arrasto de atrito em um item submerso e permitir altas velocidades é conhecido como supercavitação. Um objeto supercavitante é um dispositivo submerso em movimento feito para criar uma bolha de cavitação. A bolha estende-se (natural ou artificialmente) por todo o objeto, impedindo o contacto entre as laterais e o líquido. Essa separação diminui significativamente o atrito. A supercavitação é o fluxo de cavitação mais extremo, no qual toda a área do bocal de um orifício é preenchida por bolhas de gás [Dinis 2016].

Se a bolha não for longa o suficiente, principalmente em velocidades mais lentas, é injetado gás de alta pressão no nariz do objeto para aumentar o tamanho da bolha [Ashley 2001]. Projéteis disparados para a água podem atingir a velocidade necessária para a supercavitação. As aplicações incluem hélices e torpedos [«VA-111 Shkval» 2023].

2.1.4 Cavitação acústica

A formação e subsequente colapso da bolha sob uma onda acústica (ultrassom) é chamado de cavitação acústica. Uma onda acústica é a propagação de uma

oscilação de pressão à velocidade do som. A cavitação acústica permite a concentração de grande energia em pequenos volumes. A água ao ser irradiada por ultrassom faz com que apareçam bolhas. Na fase de rarefação, a amplitude da pressão acústica é maior que a pressão ambiente, cria-se então uma diminuição de pressão em relação ao valor de equilíbrio. O líquido expande-se e os gases dissolvidos aparecem como bolhas de gás. As bolhas formadas aumentam à medida que a pressão na parede da bolha é maior do que a pressão do líquido a uma distância suficientemente longe da bolha. Durante a fase de compressão, as bolhas emitem uma onda de choque, após colapsarem [Apfel 1981].

A velocidade do som é a distância percorrida por essa oscilação por unidade de tempo. A velocidade do som na água líquida à temperatura ambiente é de aproximadamente 1500 m/s. A amplitude da pressão acústica, A é definida como a amplitude da oscilação de pressão, suposta como sinusoidal. O comprimento de onda λ é definido como o comprimento de uma oscilação de pressão. A frequência f de uma onda acústica é o número de oscilações de pressão por segundo, $f = \frac{1}{T}$, em que T é o período. Como sabemos será $c = \lambda f$ para uma componente sinusoidal de uma onda de pressão real.

Por outro lado, é um tópico interdisciplinar complexo que abrange uma ampla variedade de escalas temporais e espaciais, tornando difícil a sua avaliação. Além disso, ocorre a peculiaridade de as bolhas surgirem e distribuir-se em uma diversidade de formas. Por todas essas razões, é difícil regular, antecipar e ampliar em escala. Alguns aspectos únicos dos campos de múltiplas bolhas ainda são desconhecidos e constituem um tema de estudo em andamento. A principal incerteza continua sendo a distribuição dos tamanhos das bolhas e a sua distribuição espacial, que geralmente representam a maior barreira para extrapolar a ação de uma bolha em determinado processo para as consequências observadas macroscopicamente [Yasui 2017].

2.2 Danos associados

Outro problema referente à cavitação é o dano material que as bolhas de cavitação fazem ao colapsar nas proximidades de uma superfície sólida. Essas perturbações repetidas causam falhas locais e subsequente desprendimento de pedaços de material. Com os efeitos da corrosão a velocidade dos danos causados pela cavitação aumentam.

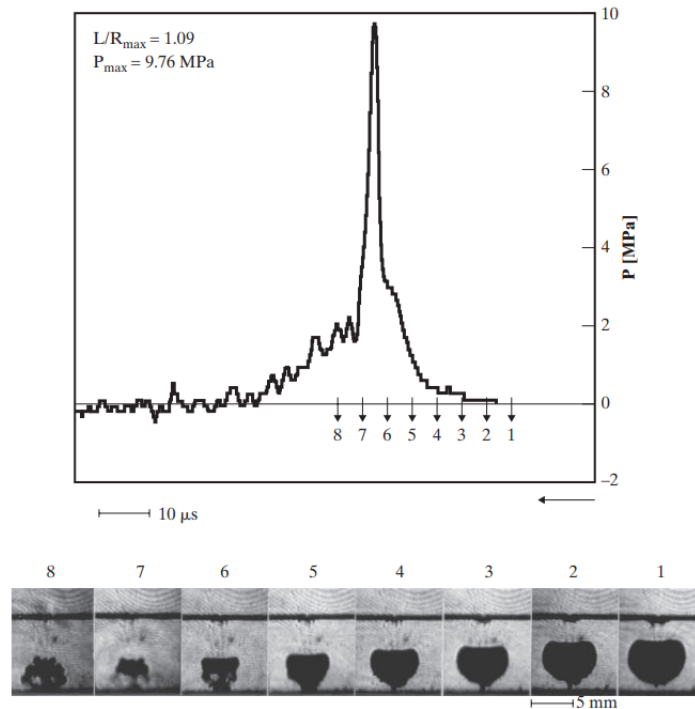


FIGURA 2.2: Série de fotografias do colapso de uma bolha de cavitação perto de uma parede junto com o traço característico de pressão (imagem reproduzida de Shima, Takayama, Tomita e Ohsawa em 1983[Brennen 1995])

A questão de saber se o dano de cavitação é originado por microjatos ou por ondas de choque ou por ambos tem sido alvo de debate. Em 1983 usou-se fotografia de alta velocidade Schlieren para mostrar que uma onda de choque foi ocasionada pela nuvem remanescente na iminência de volume mínimo. A figura 2.2 mostra uma série de fotografias de uma bolha em colapso junto com o traço de pressão correspondente. O instante de volume mínimo está entre os quadros 6 e 7. Ao correlacionar com as fotografias recolhidas, o efeito de microjato é afastado. Confirmou-se que as tensões impulsivas no material foram iniciadas no mesmo momento que o impulso acústico e no instante de volume mínimo, concluiu-se que as ondas não foram produzidas pelo microjato [Brennen 1995].

No entanto, em uma investigação posterior, Kimoto (1987) foi capaz de observar impulsos de tensão que resultaram tanto do impacto do microjato quanto do choque remanescente. Para uma avaliação experimental detalhada da suscetibilidade comparativa de vários materiais a danos por cavitação, o leitor pode consultar Knapp, Daily e Hammitt (1970). Os pretextos sugeridos para as mudanças na taxa de perda de material incluem o tempo associado ao processo de cavitação e à existência uma superfície irregular e/ou danificada pode produzir um padrão alterado

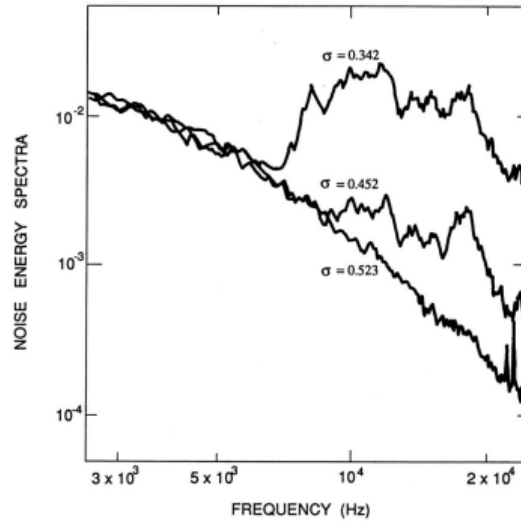


FIGURA 2.3: Ruído resultante da cavitação numa válvula de controlo hidráulico (imagem reproduzida da investigação de Martin et al. 1981[Brennen 1995])

de cavitação.

2.3 Ruído gerado pela cavitação

O início da cavitação, normalmente, é detetado primeiro pelo ruído do que pela observação visual das bolhas. O colapso das bolhas de cavitação resulta na produção de ruído. A pressão acústica irradiada, p_a , é dada por:

$$p_a = \frac{\rho_L}{4\pi r} \frac{d^2V}{dt^2} \quad (2.1)$$

onde R é o raio da bolha, ρ_L é a densidade do líquido, V é o volume da bolha e r é a distância do centro da bolha ao ponto onde se mede a onda sonora. O ruído é diretamente proporcional à segunda derivada do volume em relação ao tempo, observando-se que o impulso de ruído gerado ocorre devido aos valores positivos de $\frac{d^2V}{dt^2}$ quando a bolha se aproxima do seu tamanho mínimo. Para fundamentar o aparecimento de ruído juntamente com a cavitação, observemos a figura 2.3. Seja σ o número de cavitação, que é uma medida adimensional que descreve a probabilidade de ocorrência de cavitação num determinado fluxo de fluido. A curva em $\sigma = 0,523$ representa o ruído turbulento do escoamento não cavitante. Um número de cavitação abaixo, tal como $\sigma = 0,342$ aumenta o nível de ruído nas frequências de 5 kHz e acima.

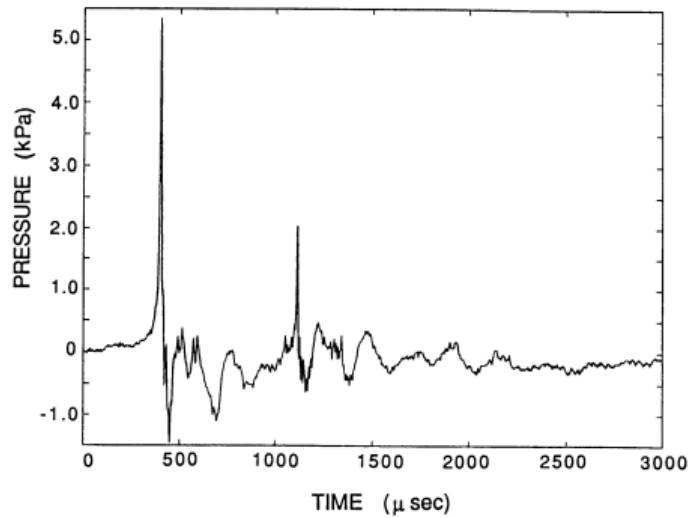


FIGURA 2.4: Sinal acústico de uma bolha em colapso (imagem reproduzida da investigação de Ceccio e Brennen em 1991 [Brennen 1995])

O sinal acústico nas experiências feitas por Ceccio e Brennen (1991) relativo ao ruído da cavitação está reproduzido na figura 2.4. O primeiro colapso da bolha dá-se no impulso positivo aos 450 μs . Este primeiro impulso é seguido de algumas oscilações e por um segundo impulso aos 1100 μs . O segundo impulso diz respeito ao segundo colapso que segue a recuperação do primeiro colapso.

A partir dos resultados experimentais (Ceccio e Brennen) concluiu-se que o impulso produzido pela cavitação está correlacionado com o volume máximo da bolha antes do colapso [Brennen 1995]. A medida da magnitude do impulso de colapso é o impulso acústico, I , definido como a área sob o impulso

$$I = \frac{\beta}{12} \rho_L U R_m^{\frac{5}{2}} / r l^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

Onde U e l são a velocidade e o comprimento do fluxo respetivamente, β é um fator de proporcionalidade que advem das integrações da equação de Rayleigh-Plesset e R_m é o raio máximo. Se o número de acontecimentos por unidade de tempo for denotado por \dot{n} , o nível de pressão sonora, p_s , é dado por:

$$p_s = I \dot{n} \quad (2.3)$$

2.4 Equação de Rayleigh-Plesset

Iremos agora concentrar-nos na equação que caracteriza o comportamento hidrodinâmico das bolhas, a equação de Rayleigh-Plesset. Trata-se de uma equação matemática que descreve a dinâmica e evolução do diâmetro de uma bolha de gás num líquido, devido à existência de uma pressão externa. Esta equação é utilizada na análise de fenómenos como a cavitação.

2.4.1 Escolha da equação

Para explicar a dinâmica das bolhas, algumas suposições para a bolha e para o líquido circundante devem ser feitas, para facilitar o processo de desenvolvimento do modelo matemático:

- O líquido circundante é incompressível e não ocorrem ondas de choque durante os estágios finais de colapso da bolha.
- As diferenças de temperatura são desprezadas, i.e. não há gradientes de temperatura entre a bolha e o líquido
- A viscosidade cinemática, ν_L é constante e uniforme
- A pressão interna da bolha, p_B é uniforme, embora variável no tempo
- A pressão externa, p_∞ é controlável
- Não há transferência de massa ou de calor entre o gás dentro da bolha e o líquido

Com base nestas condições, de entre as várias equações destinadas à descrição oscilatória das bolhas, a que melhor se identifica é a de Rayleigh-Plesset.

2.4.2 Apresentação da equação

Como anteriormente discutido, na secção 1.3, a equação foi desenvolvida por Lord Rayleigh em 1917, e posteriormente aperfeiçoada por Joseph Plesset em 1949. Ela é dada por:

$$\frac{1}{\rho_L} [p_B(t) - p_\infty(t)] = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 4\nu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}, \quad (2.4)$$

Em que R é o raio da bolha, $\frac{dR}{dt}$ e $\frac{d^2R}{dt^2}$ é a velocidade e a aceleração deste raio, respetivamente. ν_L é a viscosidade cinemática do fluido. O parâmetro S é a tensão superficial da «interface» bolha-líquido. $p_B(t)$ é a pressão interna da bolha e $p_\infty(t)$ é a pressão externa infinitamente longe da bolha. O símbolo t é o tempo.

A equação de Rayleigh-Plesset é baseada na ideia de que a bolha é uma perturbação esférica na superfície da interface ar-líquido. O seu comportamento é determinado por forças como pressão, nomeadamente no equilíbrio entre a pressão interna da bolha e a pressão externa do fluido, tensão superficial, viscosidade e densidade. A equação inclui termos que levam em consideração a taxa de expansão e contração da bolha, a resistência do fluido ao movimento da bolha como resultado de mudanças na pressão e temperatura ao redor da bolha e a força resultante devido à deformação da bolha.

De acordo com a literatura relativa a esta equação, a taxa de crescimento da bolha é maior quanto mais baixa for a pressão do fluido e quanto maior for a velocidade da bolha. No caso da cavitação nas hélices, as bolhas de vapor crescem devido à alta velocidade da água em torno da hélice. Quando a bolha alcança um tamanho suficientemente grande, ela implode e pode transmitir energia.

A equação de Rayleigh-Plesset é utilizada na análise da cavitação em hélices, uma vez que permite compreender e prever a formação e evolução das bolhas na água ao redor da hélice. Apesar de não ser o principal objetivo deste trabalho, esta equação também pode ser usada para avaliar o impacto da cavitação na eficiência da hélice e no seu desempenho ao longo do tempo.

2.4.3 Parâmetros presentes na equação

Na tabela 2.1 são apresentados os símbolos dos parâmetros da equação de Rayleigh-Plesset, bem como as suas unidades e valores típicos. As grandezas presentes estão todas em unidades SI (Sistema Internacional).

2.5 Modelo de um fluido incompressível

Uma simplificação do estudo neste trabalho é assumir-se o fluido como incompressível, tendo variações de densidade que são insignificantes no requisito de conservação da massa [White 2015]. A densidade e a energia interna específica são frequentemente assumidos como constantes e dependentes da temperatura, respetivamente, para simplificar as análises que envolvem líquidos. Este tipo de material

TABELA 2.1: Símbolos e unidades da equação de Rayleigh-Plesset

Símbolo	Unidade SI	Valores típicos
t	s	$1-10 \times 10^{-6}$
R	m	-
$\frac{dR}{dt}$	m s^{-1}	-
$\frac{d^2R}{dt^2}$	m s^{-2}	-
μ_L	Pa s^{-1}	0.001
S	N/m	$72,8 \times 10^{-3}$
Δp	Pa	$p_B - p_\infty$
p_B	Pa	$p_v(T_B) + p_g(t)$
p_∞	Pa	funções sinusoidais e delta-Dirac

idealizado é chamado de incompressível. O calor específico $c_v(T) = \frac{du}{dT}$ é uma função dependente apenas da temperatura porque a energia interna específica de um material incompressível está subjugado apenas à temperatura. [Michael J. Moran e Margaret B. Bailey (2011)]

2.6 Gás e vapor

O vapor é um material que se encontra no estado gasoso como resultado da mudança de suas condições de temperatura e pressão. Diferente do gás, uma vez que o vapor resulta do aquecimento de um elemento sólido ou líquido, à temperatura ambiente. Os gases não têm forma definida ou volume próprio e tendem a estar em condições normais de pressão e temperatura. Todo vapor é gasoso, mas nem todo gás é vapor, visto que é necessário um processo de evaporação. Assim, por exemplo, o vapor de água é um gás obtido pelo aquecimento da água, enquanto o dióxido de carbono é o gás orgânico que libertamos ao expirar, e não é uma forma de vapor, embora saia do nosso corpo juntamente com o vapor de água abundante.

2.7 Pressão

Pressão é a tensão (de compressão) em um ponto de um fluido estático. A pressão é definida como a quantidade de força exercida sobre uma unidade área de uma substância, $p = \frac{F}{A}$. A equação abaixo mostra esta relação.

Fluxos a baixa velocidade, a magnitude da pressão muitas vezes não tem importância, a menos que diminua o suficiente para causar a formação de bolhas de vapor no líquido [White 2015]. Os fluidos estão sujeitos a grandes variações de

TABELA 2.2: Pressão de vapor da água

Temperatura(°C)	Pressão de vapor (kPa)
0	0.6105
10	1.228
20	2.338
40	7.376
60	19.92
100	101.3

pressão dependendo do tipo de sistema em que são usados. No capítulo 4 irão ser testados vários tipos de pressões externas e que façam sentido prático para provocar a oscilação da bolha, tais como, a pressão sinusoidal e delta de Dirac.

2.7.1 Pressão de vapor

A evaporação ocorre quando uma substância no estado líquido é aquecida. A energia recebida faz com que as moléculas com energias cinéticas maiores se separem do líquido, passando para o estado gasoso.

A pressão de vapor é a pressão na qual um líquido ferve e está em equilíbrio com seu próprio vapor. Se a pressão do líquido exceder a pressão do vapor, a única troca entre o líquido e o vapor ocorre na «interface». Se a pressão do líquido cair abaixo da pressão do vapor, bolhas de vapor desenvolvem-se no líquido [White 2015]. O vapor formado exerce pressão sobre o líquido a uma determinada temperatura, é expresso em pascais (Pa).

A temperatura do sistema influencia a pressão de vapor, como é apresentado na tabela 2.2. A temperatura de ebulição é a temperatura que a pressão de vapor iguala a pressão externa.

2.8 Viscosidade dos fluidos

A facilidade com que um fluido flui através de tubos ou escorre de um recipiente indica a viscosidade do fluido. Fluidos que fluem facilmente têm baixa viscosidade, enquanto fluidos que escorrem lentamente têm alta viscosidade. A água flui tem baixa viscosidade. Os gases também são fluidos, embora atuem de maneira diferente dos líquidos. É necessário considerar a viscosidade desses gases ao projetar

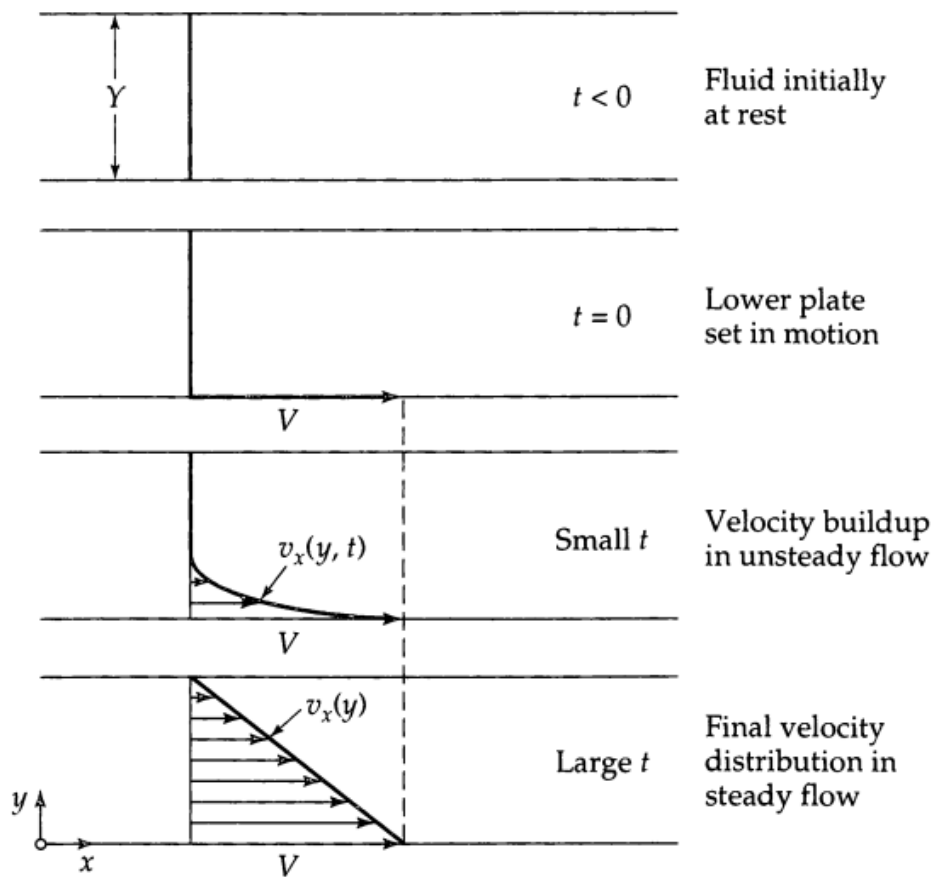


FIGURA 2.5: Perfil de velocidade para um fluido contido entre duas placas [Bird 2002]

sistemas de fluxo. É necessário compreender como definir a viscosidade de um fluido e as unidades usadas para medi-la.

2.8.1 Viscosidade dinâmica

Em referência à figura 2.5, considere duas camadas sólidas em paralelo, cada uma com área A , separadas por uma distância Y . No espaçamento entre elas encontra-se um fluido. Na segunda fase da figura 2.5 a camada de baixo movimentar-se a uma velocidade constante V . O fluido adquire impulso e é estabelecido o perfil de velocidade linear de estado estacionário. Na fase final, é necessário uma força F para continuar o movimento da camada inferior, que pode ser expresso por

$$\frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y} \quad (2.5)$$

A constante de proporcionalidade μ é a viscosidade dinâmica.

TABELA 2.3: Viscosidade da água a uma pressão de 1 atm

Temperatura(°C)	Viscosidade dinâmica(mPa/s)	Viscosidade cinemática(cm ² /s)
0	1.787	1.787
20	1.0019	1.0037
40	0.6530	0.6581
60	0.4665	0.4744
80	0.3548	0.3651
100	0.2821	0.2944

Em relação às unidades, no sistema SI, $\frac{F}{A}$ tem as unidades de N/m²=Pa, V é m/s e Y como m. Portanto, as unidades SI para expressar a viscosidade cinemática irá ser Pa/s [Bird 2002].

2.8.2 Viscosidade cinemática

A razão entre a viscosidade dinâmica e a densidade do fluido é muitas vezes utilizada em mecânica dos fluidos. A viscosidade cinemática é definida como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.6)$$

As unidades SI usadas para a viscosidade cinemática irá ser m²/s, como é deduzido em baixo.

$$\begin{aligned} \nu &= \mu \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ \nu &\rightarrow \frac{kg}{m \cdot s} \cdot \frac{m^3}{kg} \\ \nu &\rightarrow m^2/s \end{aligned}$$

2.9 Tensão superficial

Com a presença da bolha de ar no líquido, forma-se uma interface entre a água e o vapor dentro da bolha. Na mecânica de fluidos, os efeitos de superfície podem ser fundamentados com o conceito de tensão superficial. A tensão superficial comporta-se como uma camada entre a superfície da água líquida e o ar acima dela.

TABELA 2.4: Tensão superficial da água

Temperatura(°C)	Tensão superficial (mN/m)
0	75.6
10	74.2
20	72.8
40	69.6
60	66.2
100	58.9

As moléculas de H₂O na superfície e abaixo dela atraem-se entre si. Na superfície livre de um líquido, a tensão superficial é medida como o trabalho por unidade de área necessário para mover as moléculas mais baixas para a superfície da água. As unidades do sistema SI são N/m [Mott e Untener 2014].

$$S = \frac{W}{A}$$

$$S \rightarrow \frac{N \cdot m}{m^2}$$

$$S \rightarrow N/m$$

A Tabela 2.4 fornece a tensão superficial da água à pressão atmosférica para várias temperaturas.

2.10 Processo politrópico

O processo politrópico descreve a expansão e compressão de gás onde existe calor, na medida em que pode ser escrito pela relação: $pV^k = c$, em que o expoente k é o índice de politropia. Tanto c como k são constantes. A pressão p e o volume V são valores médios da pressão e volume, respetivamente. Quando $k = 0$ a relação fica $p = c$.

2.11 Processo adiabático e isotérmico

O termo adiabático é usado em sistemas onde o calor não atravessa a fronteira. O sistema está termicamente isolado das suas vizinhanças. Na expansão e

compressão da bolha, se o calor e o trabalho forem proporcionais de modo que a temperatura do fluido mantém-se constante, o processo diz-se isotérmico.

2.12 Relação pressão-volume-temperatura

2.12.1 Gases ideais

Nas regiões bifásicas, fases em que o líquido e vapor coexistem ao mesmo tempo, a pressão e a temperatura não são independentes. Um parâmetro não pode ser alterado sem mudar também o outro. Nessas regiões, o estado é definido pelo volume específico e pressão ou temperatura.

Os princípios que explicam o comportamento dos sistemas gasosos foram combinados para formar a lei dos gases perfeitos. Desta forma, a expressão genérica e útil para trabalhar com este tipo de gases é definida pela equação dos gases perfeitos:

$$\frac{pV}{T} = nR \quad \Rightarrow \quad pV = nRT, \quad (2.7)$$

onde n é o conteúdo de matéria gasosa do sistema, expresso em moles. Seja p a pressão, V o volume, T a temperatura e R uma constante universal para os gases ideais. Quando um gás é submetido a uma transformação que não envolva alteração na quantidade de matéria, podemos formular uma expressão relacionando o estado final e inicial do sistema:

$$\frac{p_f V_f}{T_f} = \frac{p_i V_i}{T_i}$$

2.12.2 Modelo de Dalton

Nesta subseção, discutiremos exclusivamente misturas de gases ideais e apresentaremos o modelo de Dalton identitário com essa idealização. Considere um recipiente fechado de volume V , a uma temperatura T e pressão p . Como qualquer mistura é considerada um gás ideal, a equação de estado do gás ideal no recipiente é dado pela equação 2.7.

O conceito de gás ideal é composto de moléculas que exercem forças mínimas umas sobre as outras, cujo volume é pequeno em comparação com o volume ocupado pelo gás. Na ausência de forças intermoleculares substanciais, o comportamento de

cada componente não é afetado pela existência dos outros [M. J. Moran e M. B. Bailey 2011].

2.12.3 Pressão parcial

A lei de Dalton afirma que a pressão total de uma mistura gasosa é igual à soma das pressões parciais de cada um dos gases que compõem a mistura. A pressão parcial de um gás em uma mistura gasosa é a mesma pressão que ele exerceria se fosse o único gás no recipiente à mesma temperatura.

A pressão parcial do componente i , p_i , é a pressão que n_i moles exerceriam se o componente estivesse sozinho no volume do recipiente à temperatura da mistura [M. J. Moran e M. B. Bailey 2011]. A equação de estado do gás ideal pode ser usada para calcular a pressão total:

$$p = \sum_{i=1}^j p_i \quad (2.8)$$

2.13 Pressão interna da bolha

É vital ter uma compreensão básica do processo pelo qual as bolhas de cavitação são iniciadas para estudar o termo $p_B(t)$ com mais detalhes. A cavitação ocorre quando os valores da pressão de um líquido são inferiores aos da pressão de vapor. No entanto, já no século XIX foi demonstrado que os líquidos podem suportar pressões mais baixas do que a pressão de vapor, incluindo pressões negativas, sem apresentar cavitação. Segundo alguns testes, este limite para água é de -277 bar. O grau de limpeza tem um impacto significativo neste resultado, é necessário um tratamento cuidadoso da água para obter estes resultados, incluindo a desgaseificação e sobrepressurização prolongada [Castro 2019].

Líquidos em aplicações de engenharia estão longe das normas laboratoriais convencionais e raramente são submetidos a tais tratamentos prévios. Como resultado, são esperadas múltiplas descontinuidades no meio líquido, que acabarão por se tornar os núcleos das bolhas de vapor. Este mecanismo é conhecido como nucleação heterogênea. Tais descontinuidades podem ser minúsculas partículas sólidas ou bolhas de outros líquidos, mas na maioria das vezes são bolhas de alguns micrómetros de raio de algum gás não condensável (geralmente ar). No nosso modelo vamos assumir que o núcleo da nossa bolha é deste tipo e, portanto, a pressão total da bolha no tempo t será a soma das pressões parciais de vapor e de gás

$$p_B(t) = p_v(T_B) + p_g(t), \quad (2.9)$$

onde $p_g(t)$ é a pressão parcial correspondente ao gás existente no núcleo inicial e $p_v(T_B)$ é a pressão de vapor na temperatura T_B . Normalmente, acredita-se que esse gás segue um processo politrópico com uma constante politrópica k . Sendo $\frac{4}{3}\pi R^3$ o volume da bolha esférica, pela relação politrópica da secção 2.10 deduz-se

$$p_g \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)^k = c \quad (2.10)$$

No caso particular de equilíbrio, em que $R = R_0$ e $p_g = p_{go}$ vem

$$p_{go} \left(\frac{4}{3}\pi R_0^3 \right)^k = c$$

Consequentemente,

$$p_g \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)^k = p_{go} \left(\frac{4}{3}\pi R_0^3 \right)^k \Rightarrow p_g R^{3k} = p_{go} R_0^{3k} \Rightarrow p_g = p_{go} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k}, \quad (2.11)$$

assim, a equação 2.9 resulta em

$$p_B(t) = p_v(T_B) + p_{go} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k}, \quad (2.12)$$

em que p_{go} é a pressão parcial do gás em algum raio de referência R_0 (raio inicial). A expansão da bolha é normalmente considerada isotérmica ($k = 1$), enquanto a compressão é geralmente considerada adiabática ($k = 1,4$ para o ar), ou seja, não há transferência de calor para dentro ou para fora do sistema. No entanto, nas simulações numéricas usaremos sempre $k = 1.4$ para simplificar. Substituindo esta expressão na equação 2.4, temos

$$\frac{p_v(T_B) - p_\infty(t)}{\rho_L} + \frac{p_{go}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 4\nu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R} \quad (2.13)$$

Se assumirmos que no instante $t = 0$, a bolha de raio R_0 está em equilíbrio no fluido a uma pressão $p_\infty(0)$ vem que

$$p_{go} = p_{\infty}(0) - p_v(T_{\infty}) + \frac{2S}{R_0} \quad (2.14)$$

O objetivo central deste trabalho será resolver a equação diferencial ordinária não-linear 2.13 acima para vários parâmetros de entrada e regimes de comportamento.

2.14 Equações diferenciais ordinárias

As equações diferenciais são uma ferramenta matemática comum utilizada para explicar uma variedade de eventos naturais, sejam eles expressos como equações diferenciais parciais ou como equações diferenciais convencionais. Determinar critérios de resolubilidade para problemas de equação diferencial, identificar propriedades para vários tipos de problemas e desenvolver técnicas para obter soluções de forma fechada quando isso for viável são tarefas matemáticas cruciais [«Ordinary differential equation» 2023].

2.14.1 Conceitos básicos

O estudo atual atenta na resolução numérica de uma equação diferencial ordinária. Nesta subsecção serão apresentadas algumas definições para familiarizar o leitor com a maioria dos conceitos básicos.

Definição 2.15.1 Uma equação diferencial ordinária é linear se poder ser definida por um polinómio linear da forma:

$$a_0(t)y + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)\ddot{y} + \dots + a_n(t)y^{(n)} + b(t) = 0 \quad (2.15)$$

Em que $a_0(t), \dots, a_n(t)$ e $b(x)$ são funções diferenciáveis arbitrárias que não precisam ser lineares, e $\dot{y}, \dots, y^{(n)}$ são as derivadas sucessivas da função desconhecida y da variável t . Caso contrário, a ODE é não-linear.

Definição 2.15.2 Seja y uma variável dependente, t uma variável independente e $y = f(t)$ é uma função desconhecida de t . Dado F , uma função de t, y e derivadas de y . Em seguida, uma equação da forma

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}) = 0 \quad (2.16)$$

é chamada de equação diferencial ordinária implícita de ordem n . [Simmons (1972)]

Definição 2.15.3 Seja um sistema de equações um número de equações diferenciais acopladas. Considere y um vetor cujos elementos são funções: $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]$ e F é uma função vetorial de y e das suas derivadas.

$$\begin{aligned} f_1(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}) &= 0 \\ f_2(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(k)}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Observa-se que 0 é um vetor coluna 0 , y é na verdade um campo vetorial de n dimensões. Portanto, a equação 2.16 é como um sistema de n EDOs $f_i = 0$, em que $i = 1, 2, \dots, n$.

Definição 2.15.4 A ordem de uma EDO é a ordem da derivada mais alta que estiver na equação.

2.14.2 Solução de EDO

Definição 2.15.5 Dada a equação diferencial 2.16, uma função $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Onde I é o intervalo de solução de F , se u é diferenciável k -vezes em I e $F(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)}) = 0, t \in I$ [Kreyszig 1972]. Qualquer ODE, de ordem maior que um, normalmente é reescrita como um sistema de ODEs de primeira ordem, previamente à resolução numérica [Ascher e Petzold 1998].

2.14.3 Redução de ordem

A redução de ordem das EDO facilita a sua resolução. Seja uma equação diferencial explícita de ordem n

$$F(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)} \tag{2.18}$$

Esta ODE pode ser convertida para um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem, definindo um novo conjunto de funções $y_i = y^{(i-1)}$, para $i = 1, 2, \dots, n$. O sistema n -dimensional de equações de primeira ordem fica:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 \\
 \dot{y}_2 &= y_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{y}_{n-1} &= y_n \\
 \dot{y}_n &= F(x, y_1, \dots, y_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

2.15 Método numérico Runge-Kutta para a resolução da ODE

Para a resolução da equação de Rayleigh-Plesset irá ser utilizado o pacote ODE45 do MATLAB. É um método numérico para resolver equações diferenciais ordinárias (ODEs) de primeira ordem. O número "45" significa que é uma combinação do método Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem. A resolução da equação é feita com o método RK para a quarta ordem, enquanto a quinta ordem é usada para adaptar o *timestep*. Os trabalhos científicos anteriores baseados no método de Runge-Kutta já provaram ser precisos em lidar com mudanças abruptas no raio da bolha em função do tempo. Devido à sua precisão e eficiência, o ODE45 é um dos algoritmos mais usados no MATLAB. O método de Runge-Kutta tem a mesma precisão da série de Taylor, mas sem a necessidade do cálculo de derivadas superiores [Elezović 2021]. A sua forma geral é:

$$y_{i+1} = y_i + \varphi h \tag{2.20}$$

onde o tamanho do passo h é o comprimento do intervalo ao longo do qual a aproximação é feita e φ é a função de incremento que pode ser escrita como:

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n \tag{2.21}$$

Os a_i são constantes e os k_i valerão:

$$k_1 = f(t_i, y_i) \tag{2.22}$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \tag{2.23}$$

$$k_3 = f(t_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (2.24)$$

$$k_n = f(t_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,1}k_1h + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (2.25)$$

p e q são constantes. Os k relacionam-se entre si. k_1 aparece em k_2 , k_2 em k_3 e assim por diante. Este relacionamento torna o Runge-Kutta apto para os cálculos em software. O RK de primeira ordem ($n=1$) é semelhante ao método de Euler. O método mais utilizado é o de quarta ordem, dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3)h \quad (2.26)$$

Onde

$$k_0 = f(t_i, y_i) \quad (2.27)$$

$$k_1 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_0h\right) \quad (2.28)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \quad (2.29)$$

$$k_3 = f(t_i + h, y_i + k_2h) \quad (2.30)$$

Capítulo 3

Dedução da equação de Rayleigh-Plesset

Entre outras possibilidades, começaremos pela conhecida equação de Navier-Stokes da Mecânica dos Fluidos. Trata-se de uma equação de "balanço de momento" linear, ou seja, a 2ª Lei de Newton aplicada, neste caso, à dinâmica de fluidos. Mas primeiro consideraremos duas componentes essenciais que fazem a distinção entre a fórmula de Rayleigh e a chamada de Rayleigh-Plesset, a qual inclui os efeitos da tensão superficial no interface bolha-fluido, e ainda os da viscosidade do fluido envolvente. Suporemos ainda que tratamos de fluidos newtonianos, isto é, aqueles para os quais as tensões de viscosidade do fluido sobre um elemento de volume deste mesmo fluido são proporcionais ao produto da viscosidade ν pelas respectivas taxas de deformação («strain rates»).

3.1 Fórmula de Laplace

Consideremos uma bolha de gás esférica de raio R imersa num líquido. As moléculas de gás exercem uma pressão radial para fora sobre o líquido e as moléculas do líquido exercem uma pressão, também radial, em sentido inverso, aumentando com a profundidade da bolha. Além desta pressão exterior sobre a bolha irá haver uma tensão superficial «fechando» a bolha, devida à atração mútua entre as moléculas do líquido, na superfície de separação líquido/gás. Chamando δp à diferença de pressões entre o interior e o exterior da bolha, vamos determinar a condição de equilíbrio entre esta pressão resultante (para fora) e a tensão superficial exercida sobre a bolha. Para melhor visualizar a situação, tomamos só um hemisfério da bolha esférica (ver figura 3.1). Sendo a diferença de pressões δp igual, por simetria

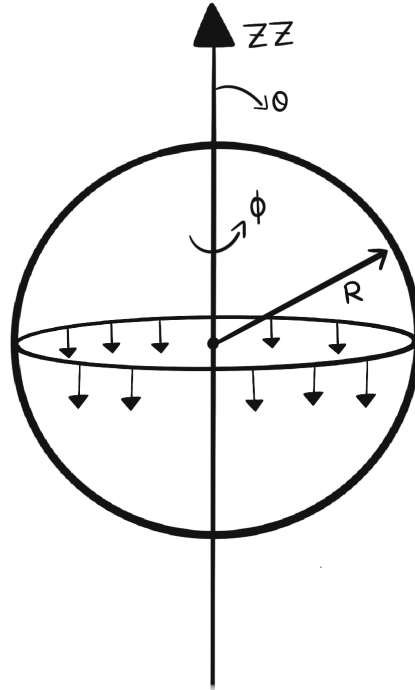


FIGURA 3.1: Forças de tensão superficial exercidas na bolha

esférica, sobre toda a superfície de separação bolha/fluido, em particular nesta calote, temos que a força total resultante (em newton) paralela ao eixo da calote, a que chamamos eixo dos zz , será dada pelo integral

$$F_{p|z} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\Delta p \cos \theta)(R^2 \sin \theta d\theta d\phi) = \Delta p \pi R^2, \quad (3.1)$$

onde $\Delta p \cos \theta$ é a projeção da diferença de pressões na direção do eixo polar dos zz , já que as componentes radiais se anulam por simetria (sendo θ a coordenada polar), e $R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ o elemento de área em coordenadas esféricas (e ϕ a coordenada azimutal). Esta resultante é dirigida, por simetria, segundo o sentido positivo do eixo dos zz . Em sentido oposto temos as forças da tensão superficial S (N/m), aplicadas igualmente sobre toda a periferia circular da base da calote, de comprimento $2\pi R$ (ver imagem 3.1). Consequentemente, a resultante destas forças valerá simplesmente $S \times (2\pi R)$ e a condição de equilíbrio de forças (isto é, de R constante), será

$$\Delta p \pi R^2 = S \times (2\pi R) \Rightarrow \Delta p = \frac{2S}{R}, \quad (3.2)$$

a fórmula de Laplace que usaremos abaixo.

3.2 Tensor de tensões

Em coordenadas cartesianas, o tensor (simétrico) de tensões sofridas por um elemento paralelepípedo infinitesimal de volume, devido à viscosidade do fluido newtoniano tem as componentes $\tau_{xx} = -p + 2\mu \partial u / \partial x$, $\tau_{yy} = -p + 2\mu \partial v / \partial y$, $\tau_{zz} = -p + 2\mu \partial w / \partial z$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu (\partial u / \partial y + \partial v / \partial x)$, $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu (\partial w / \partial x + \partial u / \partial z)$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu (\partial v / \partial z + \partial w / \partial y)$. Aqui p será a pressão sobre a face respectiva deste elemento de volume e estamos a supor que o fluido é incompressível (ver, e.g., Pritchard 2010). Nas expressões acima, u , v e w são, como é tradicional em engenharia de fluidos, as componentes cartesianas do vetor velocidade local do fluido. Mas, nesta tese, estamos interessados em sistemas esféricos e com simetria esférica nas diversas componentes físicas do problema. Consequentemente, será necessário exprimir este mesmo tensor em coordenadas esféricas e não cartesianas. Assim, e restringindo-nos, devido à simetria do problema, à componente radial em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , tiramos partido do formulário apresentado por Landau e Lifshitz 1987, transpondo somente a componente que nos interessa: $\tau_{rr} = -p + 2\mu \partial v_r / \partial r$ onde v_r será a componente de velocidade do fluido na direção radial e r a distância ao centro das coordenadas. Usaremos, no que se segue, o símbolo u em vez de v_r .

3.3 Dedução da equação de Rayleigh-Plesset

Partimos da equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis e por unidade de volume, na conhecida forma

$$\rho_L \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho_L \left[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = -\nabla p + \rho_L \vec{g} + \mu_L \nabla^2 \vec{v}, \quad (3.3)$$

onde ρ_L é a densidade do fluido, D/Dt designa a derivada material em ordem ao tempo, $D\vec{v}/Dt$ a aceleração de um elemento de volume do fluido em movimento (contendo, portanto, o termo convectivo e o termo explícito no tempo) e, do lado direito da equação, temos as diversas formas em presença atuando sobre esse elemento de volume: o gradiente de pressão, a gravidade (que desprezaremos daqui para a frente) e a forma devida à viscosidade, sendo μ_L o coeficiente de viscosidade do fluido em consideração.

Vamos precisar das expressões dos operadores gradiente e laplaciano em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , impondo desde já que só estamos interessados na

componente radial $v_r = u$ do vector velocidade e que esta apenas dependerá da própria coordenada radial r , como já referimos acima :

$$\nabla u(r, \theta, \phi) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \rightarrow \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3.4)$$

pelo que, no termo $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, só sobra a primeira componente, $(u \frac{\partial}{\partial r})u$. Quanto ao termo do laplaciano da velocidade temos, ainda em coordenadas esféricas,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (3.5)$$

e a equação de Navier-Stokes fica então reduzida a

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \nu_L \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right], \quad (3.6)$$

sendo $\nu_L = \mu_L / \rho_L$ a viscosidade cinemática.

Regressemos agora à geometria de uma bolha gasosa esférica no interior de um líquido incompressível. O raio dessa bolha será $R(t)$, variável no tempo; a velocidade da sua membrana de separação do líquido será portanto dR/dt . Tendo como centro das coordenadas esféricas o centro da bolha, a velocidade do fluido a uma dada distância r desse centro será um campo também com simetria esférica e de valor $u(r, t)$.

Como supomos que o fluido é incompressível e que não há troca de matéria entre o interior da bolha e o fluido, quando a bolha, com gás ou vapor, aumenta (ou diminui) o seu raio de um valor infinitesimal dR , deslocará um igual volume de líquido circundante que a uma dada distância r do centro da bolha terá uma espessura de um valor também infinitesimal dr positivo (ou negativo). Igualando os volumes destas duas cascas esféricas de espessuras infinitesimais virá $4\pi R^2 dR = 4\pi r^2 dr$, e dividindo por dt fica $R^2 \frac{dR}{dt} = r^2 \frac{dr}{dt} = r^2 u(r, t)$, donde tiramos logo a velocidade do fluido a uma distância r do centro da bolha:

$$u(r, t) = \frac{1}{r^2} \left[R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} \right] = \frac{F(t)}{r^2}, \quad (3.7)$$

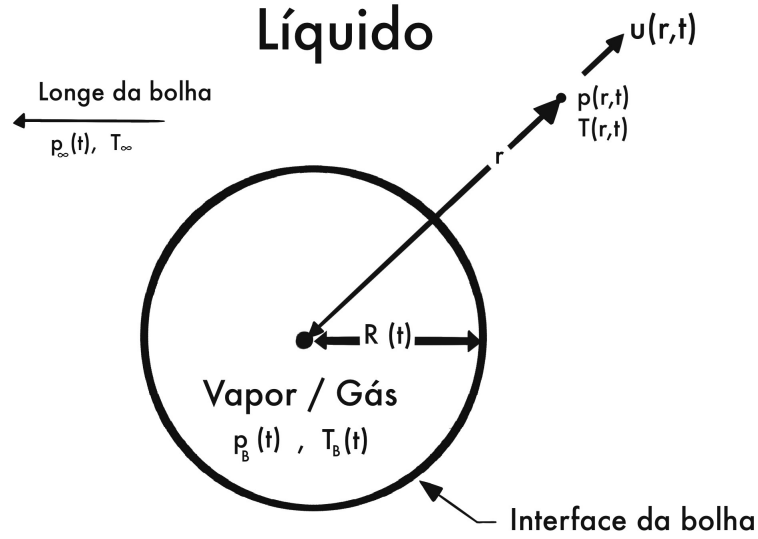


FIGURA 3.2: Bolha esférica num líquido incompressível

com $F(t) = R^2(t) dR(t)/dt$. Precisamos agora de calcular as derivadas de $u(r, t)$ presentes na equação de Navier-Stokes na forma acima deduzida. Temos então

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dt}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{F(t)}{r^3} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial r} = -2 \frac{F^2(t)}{r^5}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(-2 \frac{F(t)}{r^3} \right) \right] = 2 \frac{F(t)}{r^4} \quad (3.10)$$

E a equação de Navier-Stokes fica

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dt} - 2 \frac{F^2(t)}{r^5} - \nu_L \left[2 \frac{F(t)}{r^4} - \frac{2F(t)/r^2}{r^2} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{dF(t)}{dt} - 2 \frac{F^2(t)}{r^5}, \quad (3.11)$$

visto que os termos da viscosidade cinemática se anulam.

Aqui chegados, integremos ambos os membros sobre todo o volume de fluido, desde uma distância qualquer r do centro da bolha até uma distância infinita (na realidade, até uma grande distância do centro da bolha):

$$\int_r^\infty dr \frac{-1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} = \int_r^\infty dr r^{-2} \frac{dF(t)}{dt} - \int_r^\infty dr 2r^{-5} F^2(t), \quad (3.12)$$

onde, lembramos, ρ_L é constante e $F(t) = R^2(t) dR(t)/dt$, fica, após uma troca global de sinais,

$$\frac{1}{\rho_L} [p(r) - p(r = \infty)] = \frac{1}{r} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} F^2(t) \quad (3.13)$$

À pressão no fluido a uma distância "infinita" (na realidade, suficientemente longe da superfície da bolha) do centro das coordenadas (centro da bolha, aqui) $r \rightarrow \infty$ chamaremos p_∞ , que faremos depender do tempo, através da imposição de campos de pressão por nós definidos. No interior dessa bolha temos gás e/ou vapor a uma pressão $p_B(t)$, que varia com a dimensão da bolha e que se exerce sobre a película que a separa do fluido circundante, de dentro para fora, portanto. O mesmo sentido terá a componente radial $\tau_{rr} = -p + 2\mu \partial u / \partial r$ do tensor de tensões viscosas, se positiva, e sentido inverso, isto é, de fora para dentro, terá a tensão superficial dada pela equação de Laplace atrás referida, $2S/R$, onde R é o raio da bolha (igual sentido terá a pressão p do líquido sobre a superfície da bolha, naturalmente). Assim, a pressão (força por unidade de área) total exercida do interior da película superficial da bolha para fora será dada pela soma destas três componentes para $r = R$ (figura 3.3),

$$\begin{aligned} p_B + \tau_{rr}|_{r=R} - \frac{2S}{R} &= \\ &= p_B - p(R) + 2\mu_L \frac{\partial}{\partial r} u(r, t)|_{r=R} - \frac{2S}{R} \\ &= p_B - p(R) + 2\mu_L \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \left[R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} \right] \right) \Big|_{r=R} - \frac{2S}{R} \\ &= p_B - p(R) + 2\mu_L (-2r^{-3}) \Big|_{r=R} \left[R^2(t) \frac{dR(t)}{dt} \right] - \frac{2S}{R} \\ &= p_B - p(R) - 4\mu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{2S}{R} \end{aligned} \quad (3.14)$$

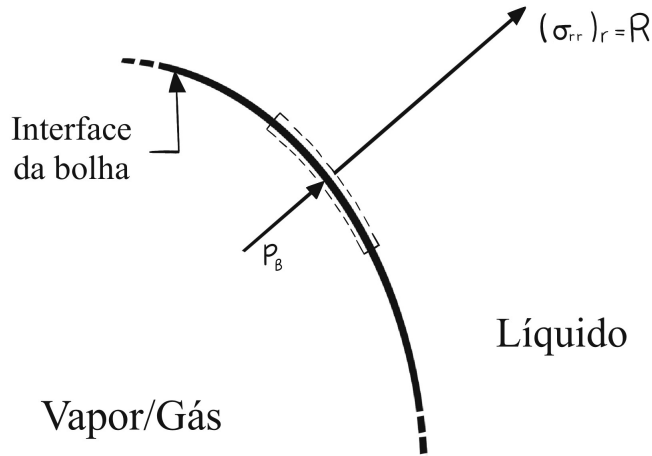


FIGURA 3.3: Equilíbrio de pressões na interface da bolha

Embora as pressões de um e outro lado da superfície de separação bolha-líquido variem no tempo, consoante a bolha expande ou contrai, elas estarão em equilíbrio em cada instante e a força por unidade de área resultante sobre essa superfície será nula se não houver troca de matéria entre os seus dois lados. Deste modo, temos

$$0 = p_B - p(R) - 4\mu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{2S}{R} \Rightarrow p(R) = p_B - 4\mu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{2S}{R} \quad (3.15)$$

Agora podemos regressar à expressão acima

$$\frac{1}{\rho_L} [p(r) - p_\infty] = \frac{1}{r} \frac{dF(t)}{dt} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} F^2(t) \quad (3.16)$$

e nela substituir $p(r)$ para $r = R$ e $F(t)$ por $R^2(t) dR(t)/dt$, obtendo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho_L} \left[p_B - 4\mu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} - \frac{2S}{R} - p_\infty \right] &= \\
 &= \frac{1}{r} \frac{dF(t)}{dt} \Big|_{r=R} - \frac{1}{2} \frac{1}{r^4} F^2(t) \Big|_{r=R} \\
 &= \frac{1}{R} \left[2R \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 R}{dt^2} \right] - \frac{1}{2R^4} \left(R^2 \frac{dR}{dt} \right)^2 \\
 &= 2 \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + R \frac{d^2 R}{dt^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\
 &= R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Nota-se que, se a bolha estiver em equilíbrio, isto é, se $R(t)$ for constante, então todo o lado direito desta igualdade anula-se, o que corresponde, do lado esquerdo, ao desaparecimento da tensão de viscosidade e à condição de equilíbrio de pressões $p_B - 2S/R - p_\infty = 0$, onde p_B é de dentro da bolha para o líquido e $2S/R + p_\infty$ é no sentido inverso, em acordo, aliás, com a dedução acima da condição de equilíbrio de pressões e da respetiva fórmula de Laplace.

Finalmente, passamos os termos da viscosidade e da tensão superficial para o lado direito desta igualdade e obtemos a desejada equação de Rayleigh-Plesset

$$\frac{1}{\rho_L} [p_B(t) - p_\infty(t)] = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + 4\nu_L \frac{1}{R} \frac{dR(t)}{dt} + \frac{2S}{\rho_L R}, \tag{3.18}$$

reconhecendo agora explicitamente a possível variabilidade temporal das pressões no interior da bolha e no fluido a uma distância infinita da bolha. Se anularmos os efeitos da viscosidade e da tensão superficial, obtemos a equação original de Rayleigh,

$$\frac{1}{\rho_L} [p_B(t) - p_\infty(t)] = R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2. \tag{3.19}$$

Em qualquer dos casos é evidente que o termo $\left(\frac{dR}{dt} \right)^2$ torna estas equações diferenciais não-lineares e daí a maior dificuldade na sua resolução.

Capítulo 4

Simulações numéricas e discussão

4.1 Adimensionalização

É de notar que para algumas combinações de parâmetros, nos casos de bolhas pequenas com amplitudes não pequenas e bolhas grandes com frequências próximas da frequência natural, é de esperar que as soluções destes casos tenham um comportamento não linear, pouco podemos fazer com abordagens analíticas e portanto, devemos guiar-nos pelos métodos numéricos. Para fazer isso, vamos resolver a equação 4.1 numericamente, equivalente à equação 2.13, consoante as mudanças de escala em 4.2 e 4.3, sob várias combinações de condição inicial R_0 e parâmetros f e A , em que $R_{ref} = R_0$ e $t_{ref} = \frac{1}{f}$.

Seja a equação diferencial ordinária não-linear de Rayleigh-Plesset:

$$R \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{p_v(T_\infty)}{\rho_L} + \frac{p_{go}}{\rho_L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 - 4 \frac{\nu_L}{R} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{\rho_L R} - \frac{p_\infty(t)}{\rho_L} \quad (4.1)$$

Consideremos as seguintes mudanças de escala,

$$R(t) = \tilde{R}(t)R_0 \quad (4.2)$$

$$t = \tilde{t} \frac{1}{f} \quad (4.3)$$

Com R_0 e f representando respectivamente o raio inicial da bolha e f a frequência de excitação sinusoidal.

$$\begin{aligned} \tilde{R}R_0 \frac{d^2 R}{dt^2} = & \frac{p_v(T_\infty)}{\rho_L} + \frac{p_{go}}{\rho_L} \left(\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \\ & - 4 \frac{\nu_L}{\tilde{R}R_0} \frac{dR}{dt} - \frac{2S}{\rho_L \tilde{R}R_0} - \frac{p_\infty \left(\tilde{t}_f^1 \right)}{\rho_L} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Sabe-se que $R(t) = \tilde{R}(t)R_0$, então na equação diferencial:

$$\frac{dR(t)}{dt} \text{ deve ser substituído por } R_0 \frac{d\tilde{R}(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 R(t)}{dt^2} \text{ deve ser substituído por } R_0 \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{dt^2}$$

Como $t = \tilde{t}_f^1$ deduzimos também pela regra de derivação da função composta:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} &= \frac{d\tilde{R} \left(\tilde{t}_f^1 \right)}{d\tilde{t}} = \frac{d\tilde{R}(t)}{dt} \frac{1}{f} \\ \frac{d\tilde{R}(t)}{dt} &= f \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} \end{aligned}$$

De forma semelhante deduz-se:

$$\frac{d^2 \tilde{R}(t)}{dt^2} = f^2 \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{d\tilde{t}^2}$$

Substituindo na Equação 4.4, $\frac{d\tilde{R}(t)}{dt}$ por $f \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}}$ e $\frac{d^2 \tilde{R}(t)}{dt^2}$ por $f^2 \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{d\tilde{t}^2}$ vem:

$$\begin{aligned} \tilde{R}R_0R_0 \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{dt^2} = & \frac{p_v(T_\infty)}{\rho_L} + \frac{p_{go}}{\rho_L} \left(\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(R_0 \frac{d\tilde{R}(t)}{dt} \right)^2 \\ & - 4 \frac{\nu_L}{\tilde{R}R_0} R_0 \frac{d\tilde{R}(t)}{dt} - \frac{2S}{\rho_L \tilde{R}R_0} - \frac{p_\infty \left(\tilde{t}_f^1 \right)}{\rho_L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}R_0R_0 f^2 \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{d\tilde{t}^2} = & \frac{p_v(T_\infty)}{\rho_L} + \frac{p_{go}}{\rho_L} \left(\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(R_0 f \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} \right)^2 \\ & - 4 \frac{\nu_L}{\tilde{R}R_0} R_0 f \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} - \frac{2S}{\rho_L \tilde{R}R_0} - \frac{p_\infty \left(\tilde{t}_f^1 \right)}{\rho_L} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Fazendo a divisão de ambos os membros por $R_0^2 f^2$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{R} \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{d\tilde{t}^2} = & \frac{p_v(T_\infty)}{\rho_L R_0^2 f^2} + \frac{p_{go}}{\rho_L R_0^2 f^2} \left(\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(\frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} \right)^2 \\ & - 4 \frac{\nu_L}{\tilde{R} R_0^2 f} \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} - \frac{2S}{\rho_L \tilde{R} R_0^3 f^2} - \frac{p_\infty \left(\tilde{t} \frac{1}{f} \right)}{\rho_L R_0^2 f^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Vai se agora proceder à alteração da equação 4.6 de acordo com a seguinte tabela de substituições:

$$\tilde{p}_V = \frac{p_V(T_\infty)}{(R_0^2 f^2)} \quad (4.7)$$

$$\tilde{p}_{go} = \frac{p_{go}}{(R_0^2 f^2)} \quad (4.8)$$

$$\tilde{\nu}_L = \frac{\nu_L}{(R_0^2 f)} \quad (4.9)$$

$$\tilde{S} = \frac{S}{(R_0^3 f^2)} \quad (4.10)$$

$$\tilde{p}_\infty \left(\tilde{t} \frac{1}{f} \right) = \frac{p_\infty(t)}{(R_0^2 f^2)} \quad (4.11)$$

Obtemos assim:

$$\tilde{R} \frac{d^2 \tilde{R}(t)}{d\tilde{t}^2} = \frac{\tilde{p}_V}{\rho_L} + \frac{\tilde{p}_{go}}{\rho_L} \left(\frac{\tilde{R}_0}{\tilde{R}} \right)^{3k} - \frac{3}{2} \left(\frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} \right)^2 - 4 \frac{\tilde{\nu}_L}{\tilde{R}} \frac{d\tilde{R}(t)}{d\tilde{t}} - \frac{2\tilde{S}}{\rho_L \tilde{R}} - \frac{\tilde{p}_\infty \left(\tilde{t} \frac{1}{f} \right)}{\rho_L} \quad (4.12)$$

Esta forma da equação de Rayleigh-Plesset é análoga à equação 4.1 sem as mudanças de escala efetuadas. A equação 4.12 é a equação usada nas simulações existentes nas secções abaixo.

4.2 Análise de resultados obtidos por outros autores

Antes de se proceder à realização de experimentos com o modelo terminado, é necessário comprovar a eficácia do mesmo. Na tese do Castro (2019) foi estudado o desempenho dos diversos «solvers» existentes no Matlab. Na página 70 foi simulada

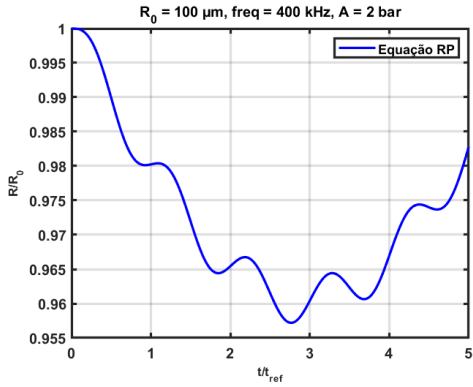


FIGURA 4.1:
 $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 400 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$

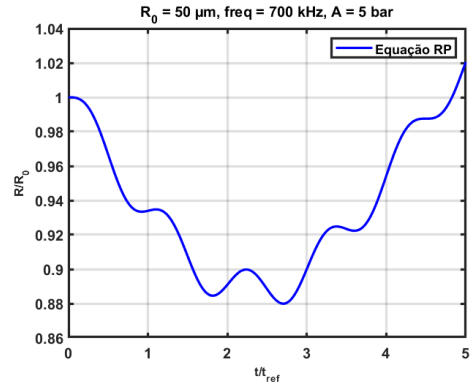


FIGURA 4.2:
 $R_0 = 50 \mu\text{m}$, $f = 700 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$

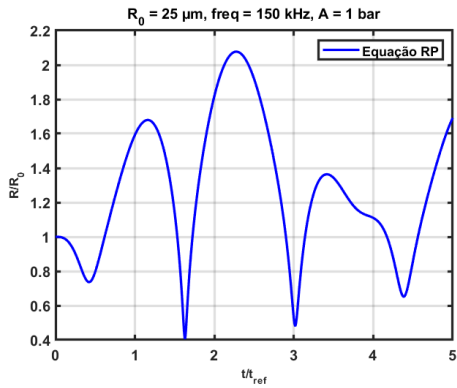


FIGURA 4.3:
 $R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 150 \text{ kHz}$, $A = 1 \text{ bar}$

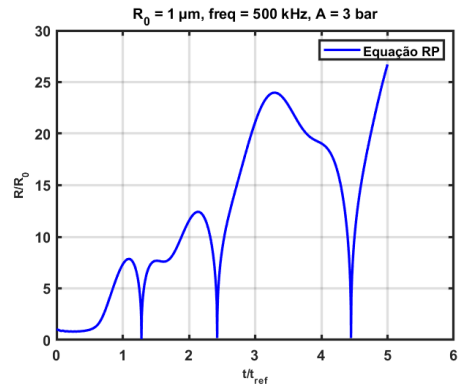


FIGURA 4.4:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$

a oscilação do raio da bolha para vários valores de R_0 (raio inicial), f (frequência) e A (amplitude sinusoidal) com o pacote ODE45 do Matlab. É o mesmo «solver» a utilizar neste trabalho. Os gráficos simulados em Castro 2019 estão reproduzidos nas imagens 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4. Em ambos os casos, as nossas simulações são idênticas. Portanto, pressupõe-se que o código formulado em Matlab está correto.

A frequência angular ω_0 dá-nos a frequência natural da bolha f_0 . A frequência de ressonância de uma bolha diz respeito à frequência na qual a bolha oscila naturalmente quando submetida a variações de pressão periódicas e com essa mesma frequência.

Se os parâmetros $p_\infty(t = 0)$ (pressão do líquido no infinito ao instante inicial), p_{go} , p_v , ρ , S e k não variarem, f_0 é apenas determinado por R_0 . Na subsecção 4.8 iremos ver que a frequência natural tem impacto na dinâmica da bolha. Os valores de f_0 para vários R_0 são dados pela tabela 4.1 (dados retirados de Castro

2019).

As expressões exibidas na tese do Castro 2019 para calcular os valores da tabela 4.1 são as seguintes:

$$\beta = \frac{2\mu}{\rho R_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{3kp_{go} - \frac{2S}{R_0}}{\rho R_0^2}, \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad \omega_B = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}, \quad p_\infty(t) = (A \sin(\beta t)) \quad (4.13)$$

onde A é a amplitude e β a frequência angular.

4.3 Influência da pressão sinusoidal na dinâmica das bolhas

Após a dedução das equações necessárias e realizar o algoritmo no Matlab para a resolução da equação de Rayleigh-Plesset adimensionalizada é possível iniciar a visualização das simulações. É necessário definir os parâmetros raio inicial, R_0 , e velocidade inicial, $\frac{dR_0(t)}{dt}$, para o cálculo do tamanho do raio R e da velocidade do raio da bolha em função do tempo ($\frac{dR(t)}{dt}$).

No algoritmo, a excitação para a existência da cavitação é a variação da pressão na água. É preciso delinear a pressão no infinito $p_\infty(t)$ uma vez que a dedução para a pressão da bolha já foi feita no Capítulo 2. Para as diversas simulações, irão ser empregues diferentes $p_\infty(t)$. A função sinusoidal será uma das aplicadas, começando com os valores presentes em Castro (2019). O líquido invíscido, em comparação com um líquido viscoso, tem uma velocidade de colapso maior (figura 4.19).

TABELA 4.1: Frequência natural f_0 da bolha para diversos R_0 (dados retirados de Castro 2019)

$R_0[\mu\text{m}]$	$\beta [\text{rad/s}]$	$f_0[\text{kHz}]$	$f_B[\text{kHz}]$	f_B/f_0
1	2.00×10^6	4746.04	4735.31	0.9977
5	8.01×10^4	719.58	719.46	0.9998
10	2.00×10^4	342.74	342.73	0.9999
25	3.20×10^3	132.84	132.84	0.9999
50	8.01×10^2	65.69	65.69	0.9999
75	3.56×10^2	43.63	43.63	0.9999
100	2.00×10^2	32,66	32,66	0.9999

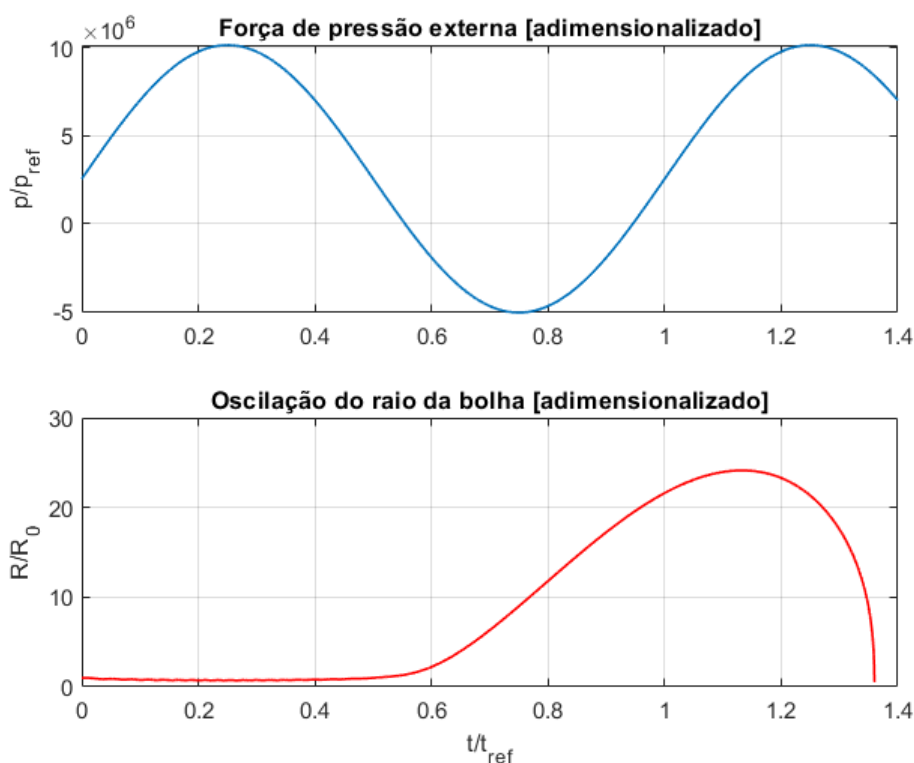


FIGURA 4.5: Pressão do líquido e raio da bolha e em função do tempo para $R_0 = 10\mu\text{m}$, frequência de 20 kHz e $A = 3$ bar

Por outro lado, o aumento na tensão superficial causa um aumento na velocidade de colapso, mas diminui a velocidade de crescimento, como veremos mais tarde.

Na figura 4.5 é apresentado um exemplo simples da variação do raio da bolha e da pressão do líquido ao longo do tempo. A diminuição na pressão, de $t = 0.5 \times t_{ref}$ até $t = 0.8 \times t_{ref}$ leva a uma rápida expansão da bolha. Após $t = 0.8 \times t_{ref}$, aumenta subsequente a pressão, a velocidade de expansão da bolha diminui até zero até que seja alcançado o raio máximo da bolha em $t = 1.5 \times t_{ref}$. Neste ponto começa a implosão da bolha. A bolha implode antes do cálculo numérico terminar devido à velocidade violenta de colapso próximo à fase final, para $t = 1.4 \times t_{ref}$ aproximadamente. Esta é uma limitação do modelo construído.

Na Figura 4.6, como a frequência da onda acústica é muito maior que na do caso anterior, a bolha não entra em colapso e comporta-se de uma maneira atípica da cavitação. Observa-se que a bolha tem oscilações complexas e não lineares. É de notar que, no modelo construído, o aumento da frequência leva a uma menor pressão devido à adimensionalização observada em 4.11, como resultado é observado uma menor variação no raio da bolha.

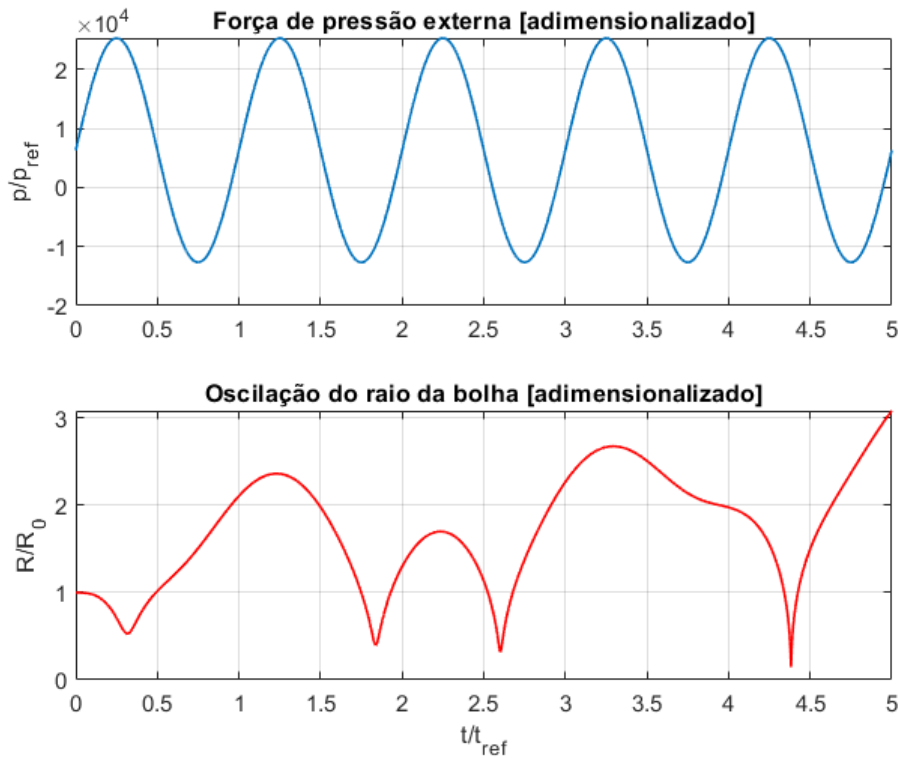


FIGURA 4.6: Pressão do líquido e raio da bolha em função do tempo para $R_0 = 10\mu\text{m}$ e frequência de 400 kHz e $A = 3$ bar

4.4 Influência do valor do raio inicial nas bolhas de cavitação

A Figura 4.7 mostra a dinâmica do raio da bolha dependente do raio inicial R_0 . As bolhas apresentam uma oscilação cada vez menor menor à medida que o R_0 aumenta. Uma maior expansão do raio inicial da bolha causa valores maiores do raio máximo da bolha, bem como um incremento no tempo de vida útil da bolha, que se observa nos casos de $R_0 = 100\mu\text{m}$ e $500\mu\text{m}$.

A implosão, quando ocorre, começa mais cedo para as bolhas com um R_0 menor e a dinâmica dos seus raios são mais favoráveis para representação na primeira fase do tempo de vida das bolhas. Isto, é comprovado a partir do gráfico 4.8. Como a simulação é feita para uma bolha de R_0 igual a $1\mu\text{m}$, a oscilção é mais linear do que para raios iniciais grandes, como é o caso da figura 4.9. Ainda neste caso, a simulação termina por volta dos 2.5 sec, antes do raio ser zero, uma vez que o cálculo numérico fica incompleto devido à velocidade de colapso e às limitações numéricas do Matlab. Nas simulações feitas em 4.9, a bolha têm uma expansão muito pequena, não mais de 20% do seu tamanho. A bolha não tende para a fase de implosão, pelo

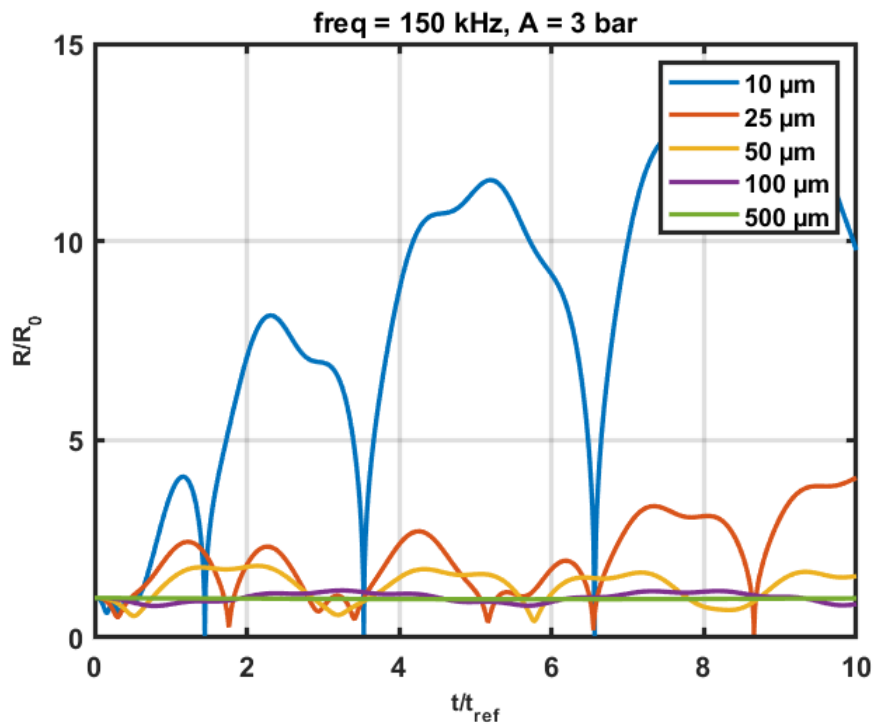


FIGURA 4.7: Raio da bolha para diferentes valores de R_0 indicadas na «caixa» do gráfico, frequência de 150 kHz e amplitude $A = 3$ bar

menos para os valores de frequência e amplitude de pressão acima usados.

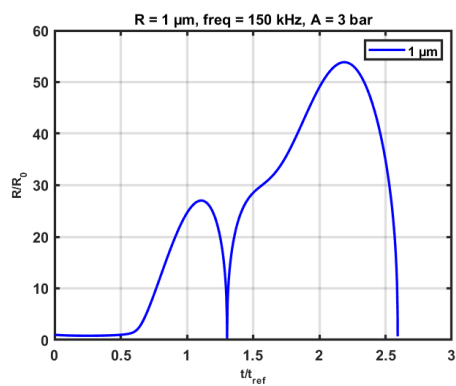


FIGURA 4.8: $R_0 = 1$ μm

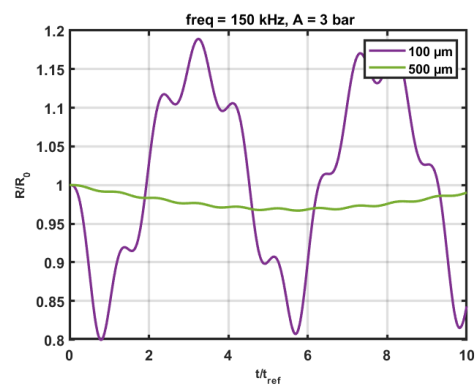


FIGURA 4.9: $R_0 = 100$ e 500 μm

4.5 Efeito da amplitude e frequência da pressão exterior na oscilação das bolhas

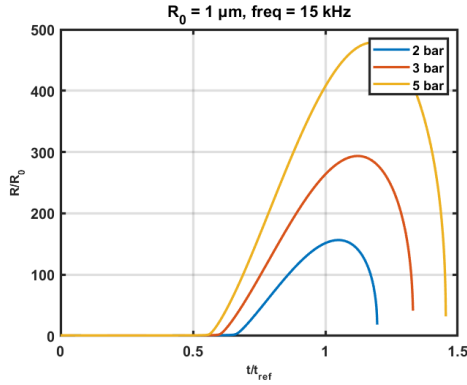


FIGURA 4.10:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$

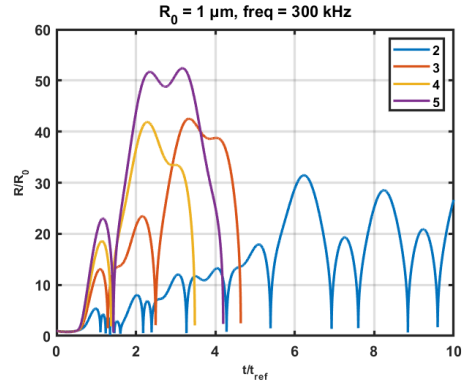


FIGURA 4.11:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 300 \text{ kHz}$

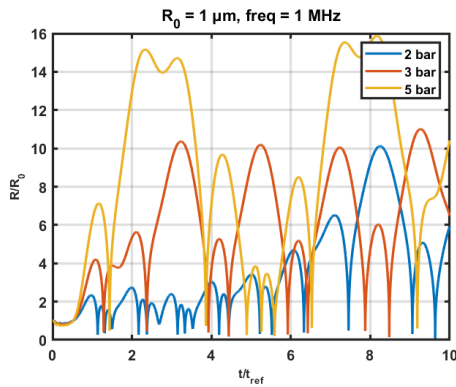


FIGURA 4.12:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1 \text{ MHz}$

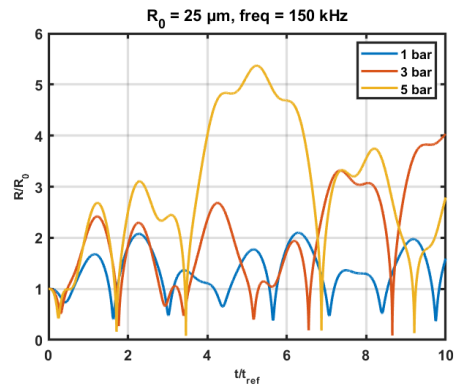


FIGURA 4.13:
 $R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 150 \text{ kHz}$

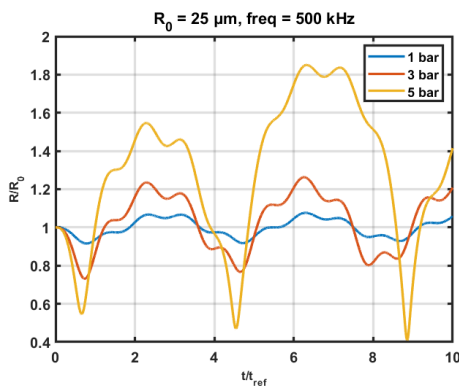


FIGURA 4.14:
 $R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$

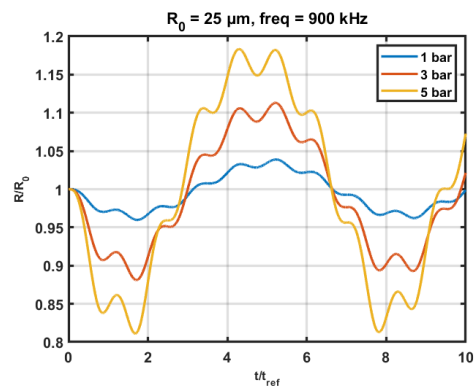


FIGURA 4.15:
 $R_0 = 25 \mu\text{m}$, $f = 900 \text{ kHz}$

As simulações apresentadas da figura 4.10 à figura 4.18 indicam, à partida, que existe outros parâmetros que podem afetar o raio máximo e o tempo de vida da

bolha, como a amplitude de pressão e a frequência. O aumento da amplitude A da bolha faz com que o raio máximo da bolha seja superior em praticamente todos os casos.

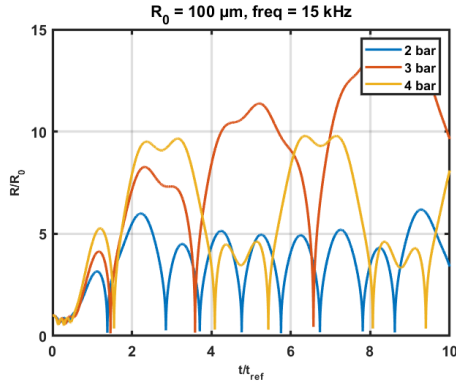


FIGURA 4.16: $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$

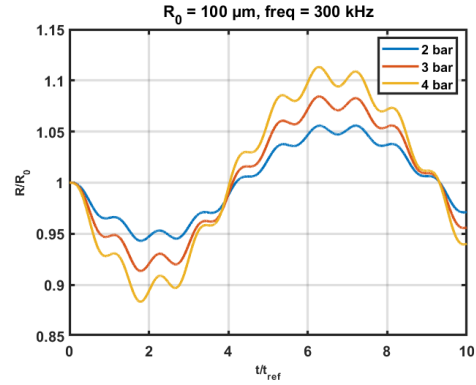


FIGURA 4.17: $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 300 \text{ kHz}$

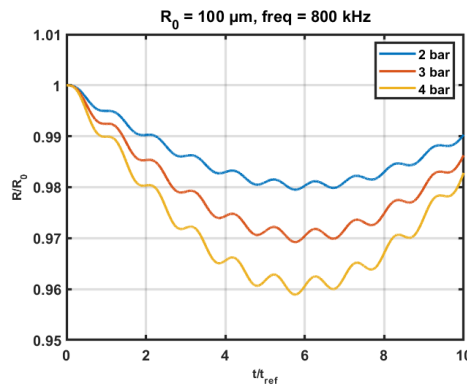


FIGURA 4.18: $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 800 \text{ kHz}$

A implosão da bolha não decorre nas simulações das figuras 4.14, 4.15, 4.17 e 4.18. Na figura 4.11, para uma amplitude de pressão igual a «2 bar» existe o colapso da bolha, mas contrariamente às restantes pressões, a simulação continua. À medida que se aumenta o parâmetro A , a simulação deixa de correr, parando no primeiro colapso. Como explicado anteriormente, a limitação da visibilidade de $R/R_0 = 0$ no gráfico ocorre em virtude do colapso ser mais rápido que a integração numérica do algoritmo, mesmo que se melhorasse o passo do algoritmo. Assim, é possível constatar, para já, que para os casos em que bolha possui um raio inicial e uma frequência pequena, mas uma amplitude grande, então a bolha tende a implodir. Nos gráficos 4.10, 4.11 e 4.12, independentemente do valor da frequência, as bolhas com $R_0 = 1 \mu\text{m}$ tendem a implodir com facilidade. Nas simulações em que $R_0 > 1 \mu\text{m}$, para altas frequências a bolha tende a estabilizar. Na experiência providenciada pelos gráficos 4.16 e 4.17, o aumento da frequência da pressão exterior de 15 kHz

para 300 kHz fez com que a bolha não implodisse. O que indica que, para a hipótese de se obter uma bolha estável sem colapsar, pode ser uma boa solução fazer o uso de altas frequências, como veremos mais tarde na secção 4.8.

A partir da análise das figuras, conclui-se que para valores pequenos de R_0 e frequência, quanto maior a amplitude mais tardia será a implosão da bolha. A oscilação da bolha será maior, e conseqüentemente maior será o seu raio máximo. Através da observação das simulações retira-se que, independentemente do tamanho do raio inicial, quanto maior a frequência menor será a expansão e contração da bolha, bem como o seu raio máximo.

4.6 Dependência dos parâmetros da bolha na viscosidade e tensão superficial

Os líquidos viscosos têm uma velocidade de colapso menor em comparação aos líquidos ideais ou menos viscosos (ver imagem 4.19). A partir da tabela 2.3, da página 23 extrai-se valores típicos da viscosidade cinemática para posterior observação dos seus efeitos na bolha de cavitação.

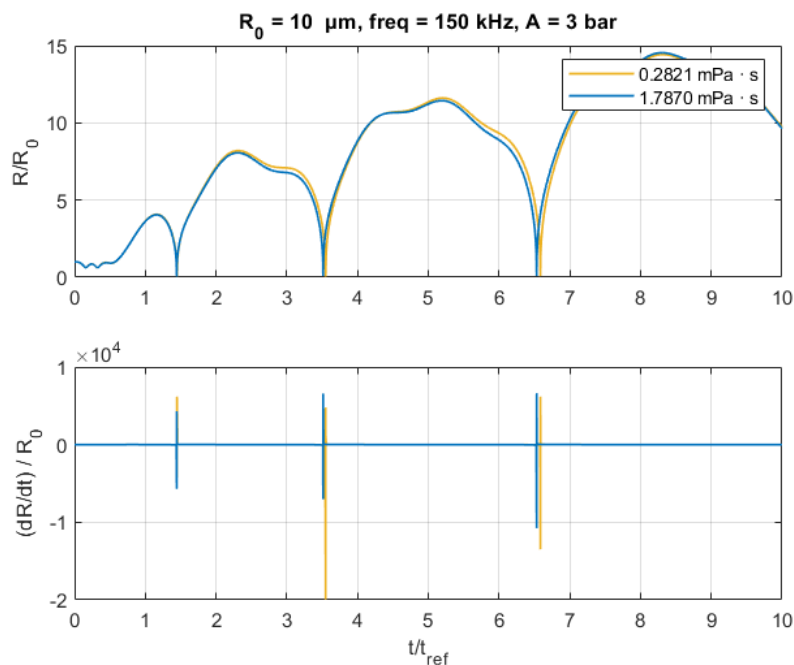


FIGURA 4.19: Velocidade da superfície da bolha para diferentes valores de viscosidade

Nota-se que na figura 4.20, à medida que a viscosidade aumenta, a bolha atinge o raio máximo maior em cada oscilação e o início da implosão começa mais

tarde. Esta analogia, apesar de se comprovar, a diferença não é significativa. Para estes valores de viscosidade, as simulações são quase indistinguíveis.

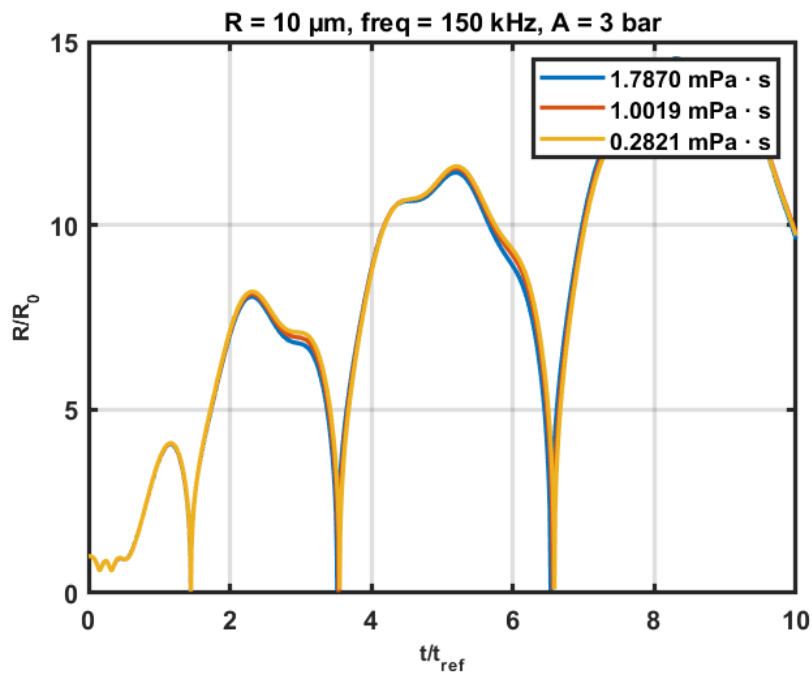


FIGURA 4.20: Raio da bolha para várias valores de viscosidade para um raio de $10 \mu\text{m}$ e frequência de 150 kHz

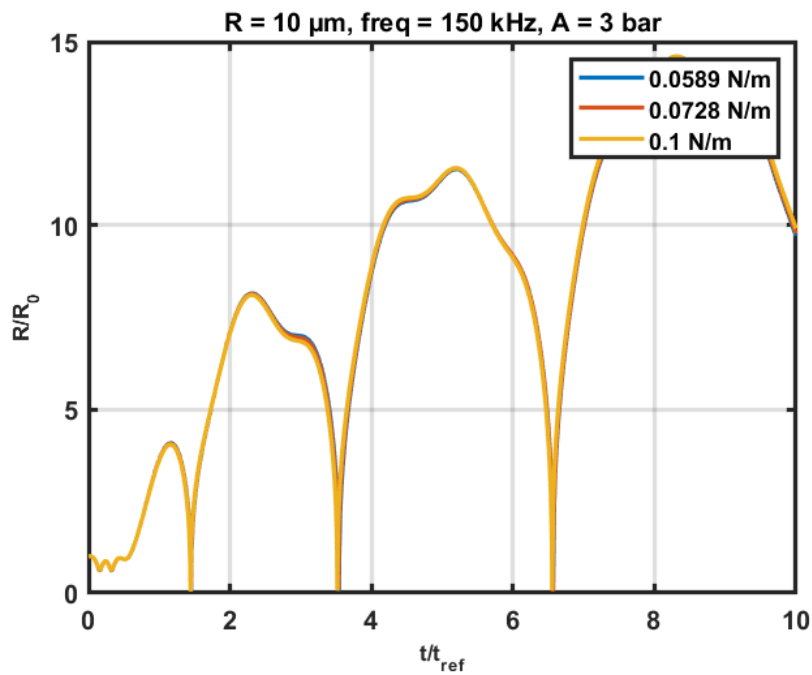


FIGURA 4.21: Raio da bolha para diferentes valores de tensão superficial para um raio de $10 \mu\text{m}$ e frequência de 150 kHz

Em contraste, a tensão superficial aumenta a velocidade de implosão, mas diminui a velocidade de crescimento, como ratifica a figura 4.22. Na figura 4.21 a bolha com o maior valor de tensão superficial (linha amarela) é a que alcança um maior raio em cada oscilação. Apesar de serem quase indistinguíveis, a linha amarela sobressai ligeiramente acima das linhas de cor azul e vermelho. Assim, conforme a tensão superficial sobe, a duração das oscilações vai aumentando.

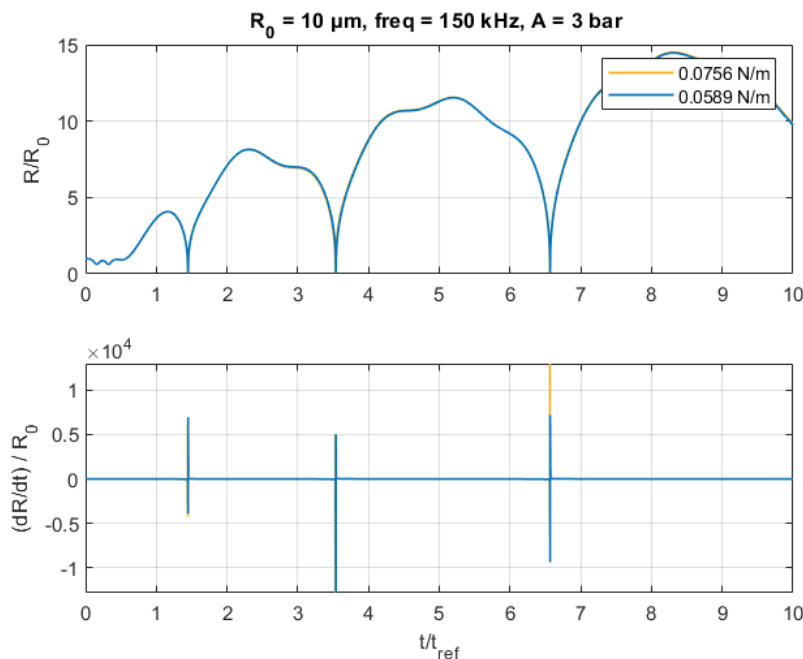


FIGURA 4.22: Velocidade do raio da bolha para diferentes valores de tensão superficial

4.7 Consequência da velocidade inicial de crescimento $\frac{dR}{dt}|_{t=0}$ na bolha

A imagem 4.23 apresenta a variação e a velocidade do raio da bolha consoante os valores iniciais da velocidade de crescimento. Os variam valores entre 1×10^{-18} m/s a $1 \times 10^{+2}$ m/s. Na imagem é visível apenas a cor rosa, referente a um $\frac{dR}{dt}|_{t=0}$ igual a $1 \times 10^{+2}$ m/s porque os restantes gráficos estão sobrepostos. O que leva a concluir que a alternância de deste parâmetro não influencia a oscilação do raio da bolha.

Observam-se mudanças no comportamento da bolha resultantes da atuação de $\frac{dR}{dt}|_{t=0}$ quando colocado uma velocidade inicial irrealista, tanto muito grande, como muito pequena. A velocidade da bolha nos momentos de implosão também não é afetado pelos valores simulados.

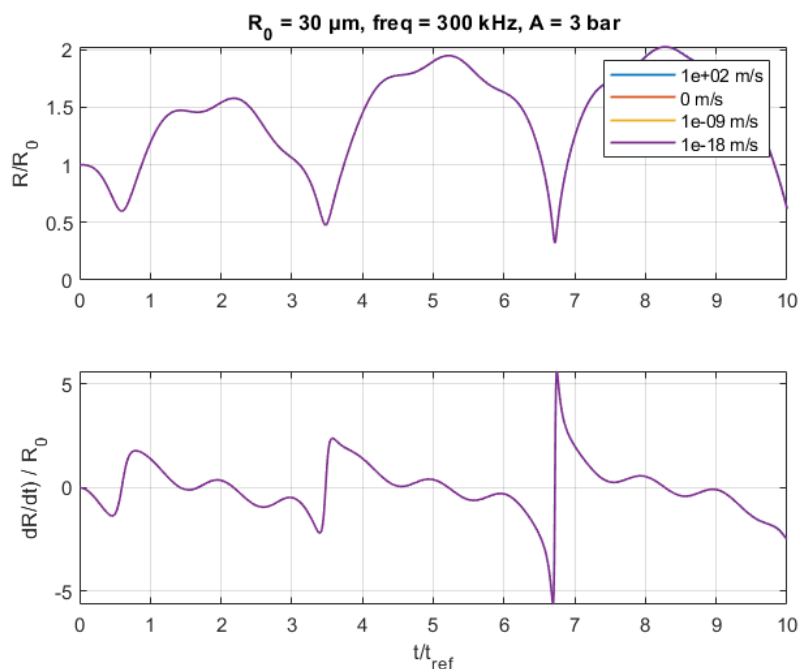


FIGURA 4.23: Variação e velocidade do raio da bolha para distintos valores de $\frac{dR}{dt}|_0$

4.8 Condições para a oscilação sem implosão

A cavitação é um fenômeno complexo e é fortemente dependente de interações multifatoriais. Encontrar condições em que a bolha não imploda ou colapse pode ser trabalhoso, uma vez que a oscilação depende de várias interações complexas entre os parâmetros.

Para se chegar ao objetivo da presente subsecção, os parâmetros $p_{\infty 0}$, p_v , ρ , μ , S e k são fixos (dados pela Tabela 4.2). É pretendido que as simulações ocorram num ambiente à superfície da água, portanto, o parâmetro $p_{\infty 0}$ não é modificado. As alterações irão ser feitas nas variáveis R_0 , f e A uma vez que são os que têm o maior impacto na oscilação não linear da bolha. Tirando partido de vários trabalhos revistos do Estado da Arte, nos campos da sonoluminescência e cavitação acústica, considera-se que os intervalos fisicamente relevantes para os nossos parâmetros são dados também pela Tabela 4.2. Na subsecção 4.2 é notável que para uma bolha pequena, com um raio inicial de $1 \mu\text{m}$, as oscilações são relativamente grandes, é de esperar um comportamento puramente não linear para estes tamanhos pequenos.

Nas simulações da subsecção 4.2 vimos algumas bolhas de grandes dimensões com frequências distantes da frequência natural ou pequenas bolhas com amplitudes de pressão igual a 3. Agora vamos nos concentrar nos restantes casos: bolhas

pequenas com amplitudes grandes/pequenas e bolhas grandes com frequências próximas da frequência natural. Como esperamos que as soluções desses casos tenham um comportamento não linear adequado, devemos confiar nos métodos numéricos.

TABELA 4.2: Valores dos parâmetros físicos e variáveis

Fixos			
Variável	Parâmetro	Valor	Unidades
$p_{\infty 0}$	Pressão externa inicial	101325	Pa
p_v	Pressão de vapor	2339.215	Pa
ρ	Densidade	998.206	kg/m ³
μ	Viscosidade	0.001	Pa · s
S	Tensão superficial	0.074	N/m
k	Índice politrópico	1.4	[-]
Variáveis			
Variável	Parâmetro	Intervalo	Unidades
R_0	Raio inicial	1-100	μm
f	Frequência de excitação	0-1000	kHz
A	Amplitude	0-5	bar

Tanto quanto se sabe, não existe nenhum estudo que responda à questão básica sobre a existência global de soluções para a oscilação de bolha cheia de gás sob uma pressão externa. Na figura 4.4 podemos ver os ciclos da bolha, desde a expansão até à sua implosão, e assim sucessivamente, por tempo infinito. Neste modelo, o espaço aumenta à medida que o tempo também vai aumentando. O facto de não se conseguir ver o raio da bolha a chegar a zero pode dever-se a duas hipóteses: ou o passo do intervalo de tempo não é pequeno o suficiente ou os nossos parâmetros no modelo presente não permite que haja uma solução em que $R = 0$ em tempo finito. Na figura 4.24 é reduzido o passo de tempo (variável "delta" no código de Matlab) para 1×10^{-7} e a condição $R = 0$ mesmo assim não é verificada. O *software* utilizado não tem capacidade para executar simulações em que $\text{delta} < 1 \times 10^{-7}$.

Nota-se que para 4.27 o solver ODE45 não é capaz de continuar a integração após a primeira implosão. O modelo utilizado não é o mais realista, pois não envolve a compressibilidade do líquido como os modelo de «Herring-Trilling» [Hilgenfeldt, Brenner, Grossmann e Dtlef Lohse 1998]. O raio da bolha atinge um número muito pequeno (próximo de zero) e o solucionador tem problemas nesses instantes, uma

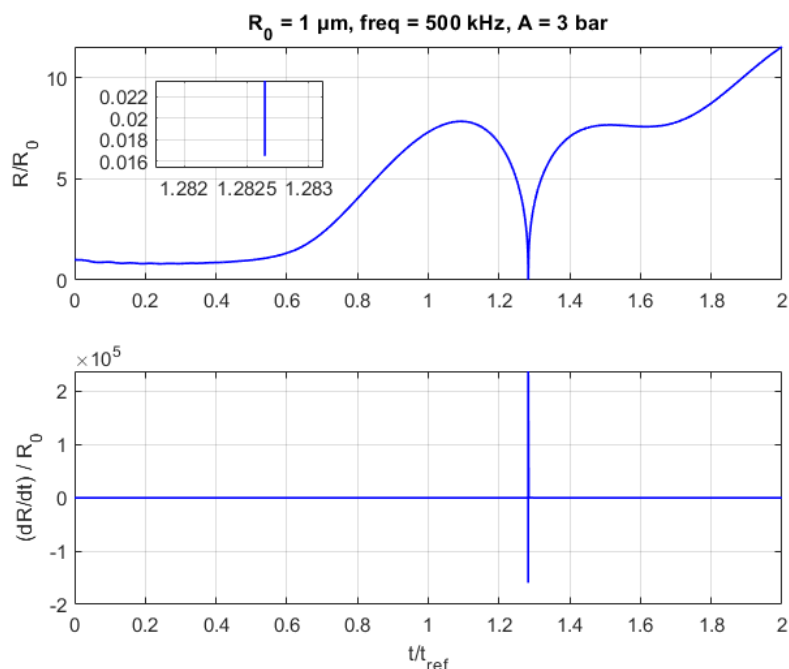


FIGURA 4.24: $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $\text{delta} = 1 \times 10^{-7}$

vez que a velocidade de implosão é muito rápida comparada ao cálculo numérico do ODE45. Sob estas suposições de "colapso rápido", a solução deve atingir um raio mínimo e depois "pular". A mensagem enviada pelo Matlab, quando a integração é interrompida é a seguinte: «Warning: Failure at $t=1.454859e+00$. Unable to meet integration tolerances without reducing the step size below the smallest value allowed ($3.552714e-15$) at time t ». Significa que para o passo de tempo utilizado, o erro no passo continua a ser maior que a tolerância ao erro.

Na imagem 4.30, contrariamente à simulação 4.1 a bolha implode. Isto acontece porque está sujeita a uma frequência 50% abaixo da sua frequência natural. A frequência natural para uma bolha de raio de $25 \mu\text{m}$ é 132 kHz , como demonstrado pela tabela 4.1 Olhando para o caso 4.28 confirma-se que para uma frequência abaixo da natural a bolha tende a implodir, enquanto que para uma frequência acima a bolha visa a estabilizar. Assim, se as bolhas estiverem coagidas abaixo da sua frequência natural tendem a implodir, independentemente da amplitude A da excitação sinusoidal da pressão exterior.

Na maioria das situações em que a frequência está consideravelmente acima da frequência natural e $A = 1 \text{ bar}$, o raio da bolha é linear e a bolha não colapsa. Por outro lado, em 4.26, apesar da bolha estar pressionada abaixo da frequência natural, o seu valor está próximo e como A é igual a 1 bar faz com que a bolha tenha um comportamento linear e não advenha implosão.

4.8. Condições para a oscilação sem implosão

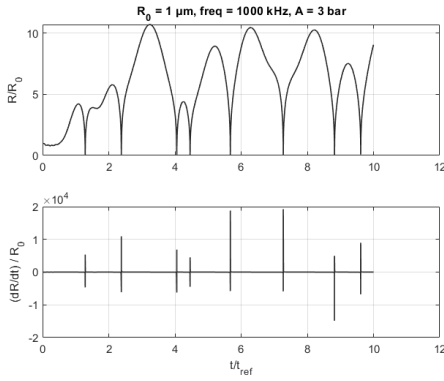


FIGURA 4.25:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 3 \text{ bar}$

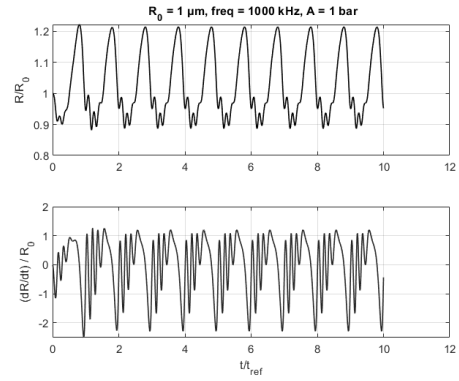


FIGURA 4.26:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 1 \text{ bar}$

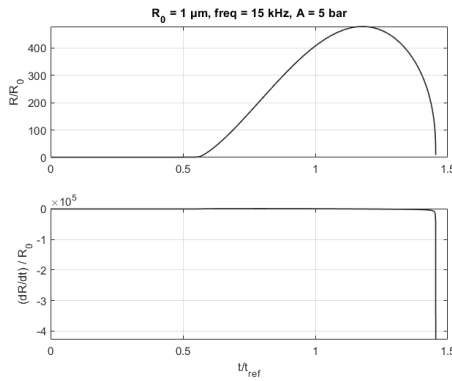


FIGURA 4.27:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$

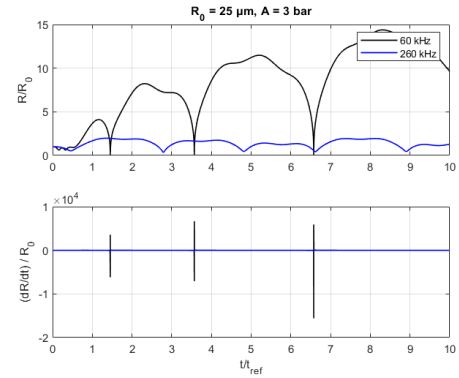


FIGURA 4.28:
 $R_0 = 25 \mu\text{m}$, $A = 3 \text{ bar}$

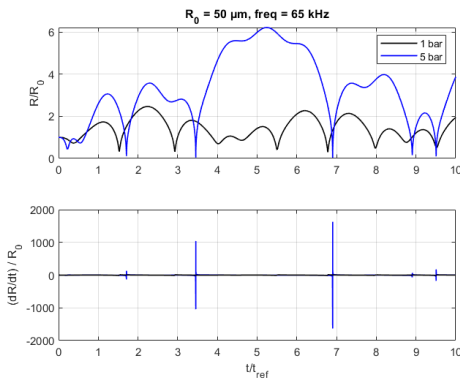


FIGURA 4.29:
 $R_0 = 50 \mu\text{m}$, $f = 65 \text{ kHz}$

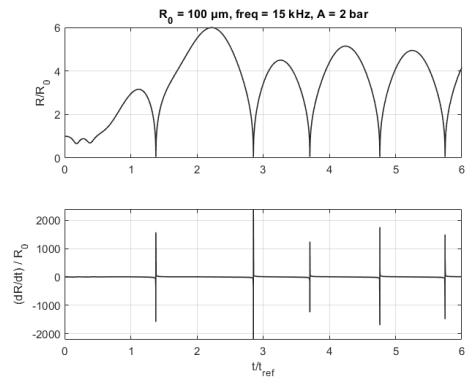


FIGURA 4.30:
 $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 15 \text{ kHz}$, $A = 2 \text{ bar}$

A figura 4.29 mostra a bolha de $R_0 = 50 \mu\text{m}$ sob a frequência natural. Neste estado, o parâmetro A tem relevância. É de notar para $A = 5 \text{ bar}$ ocorre implosão, o que não acontece para $A = 1 \text{ bar}$. Nestas situações, em que a frequência é próxima de f_0 , quanto maior o valor de A , maior será a probabilidade de colapso.

4.9 Delta de Dirac - força de pressão externa

Nesta secção é feito o estudo do comportamento do raio de uma bolha num líquido incompressível, tendo como excitação externa a função delta de Dirac na equação de Rayleigh-Plesset.

A função delta de Dirac é uma distribuição na reta real, a qual é zero em todos os lugares e vale infinite no ponto zero. É usada para formar perturbações pontuais, como uma pancada rápido ou a aplicação súbita de uma pressão externa em um ponto específico. A finalidade de introduzir a função delta de Dirac na equação de Rayleigh-Plesset é submeter a bolha ao efeito de uma perturbação instantânea ou uma excitação brusca. Isto pode ser proveitoso para entender como as bolhas respondem a mudanças imediatas.

O valor usado para o ponto zero em delta de Dirac é 1×10^9 Pa. Os parâmetros fixos e variáveis são os mesmos da tabela 4.2. As simulações feitas com a função delta de Dirac como excitação externa são apresentados em gráficos com coordenadas dimensionais.

Na maioria das situações o impacto súbito simulado pela função delta de Dirac faz com que a bolha cresça de tamanho por tempo infinito. É um conceito irrealista mas, como foi visto anteriormente, a razão de isto acontecer advém do modelo utilizado. Por outro lado, existem situações que a partir de determinada frequência a bolha oscila e estabiliza o seu raio ao longo do tempo. Comparando a figura 4.31 com 4.32 tira-se que quanto maior a frequência, maior será a oscilação do raio da bolha. O tempo para que o raio estabilize é aproximadamente igual nos dois acontecimentos. A estabilidade é atingida por volta de $t = 3.5 \times 10^{-6}$ s. Na maioria das situações em que se tem uma bolha de $R_0 = 1 \mu\text{m}$ o raio estabiliza e a bolha não colapsa, exceto para frequências extremamente elevadas, tal como $f = 5000$ kHz. De outro modo, em bolhas com raio equivalente a $10 \mu\text{m}$, como na imagem 4.34, onde é usada uma $f = 50$ kHz, é constatado o crescimento da bolha, sem observar o eventual colapso. Até uma frequência de 40 kHz o raio é consolidado e a bolha não colapsa, como é demonstrado no gráfico 4.33. A utilização artificial de uma função fisicamente irrealista como a delta de Dirac levou a obter as simulações 4.34 e 4.35 em que o raio aumenta sem limites, o que é fisicamente impossível. Por último, para bolhas de grandes dimensões, por exemplo $R_0 = 100 \mu\text{m}$, o raio aumenta continuamente (figuras 4.35 e 4.36), independentemente da frequência aplicada exteriormente.

4.9. Delta de Dirac - força de pressão externa

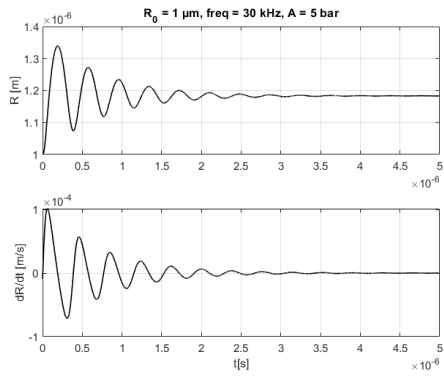


FIGURA 4.31:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 30 \text{ kHz}$,
 $A = 5 \text{ bar}$

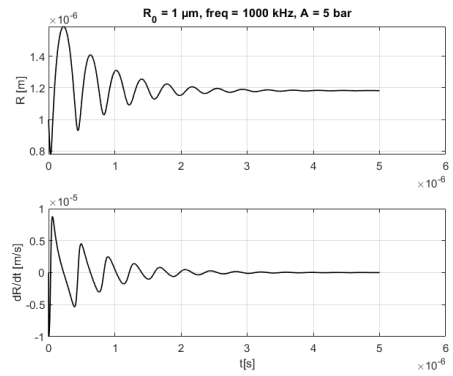


FIGURA 4.32:
 $R_0 = 1 \mu\text{m}$, $f = 1000 \text{ kHz}$, $A = 5 \text{ bar}$

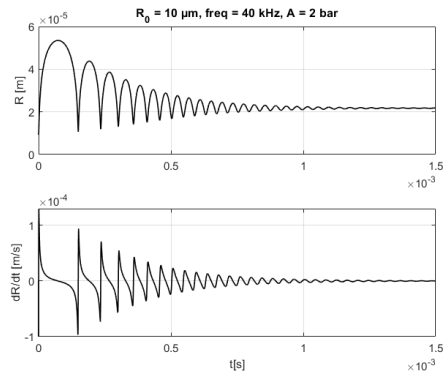


FIGURA 4.33:
 $R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 40 \text{ kHz}$,
 $A = 2 \text{ bar}$

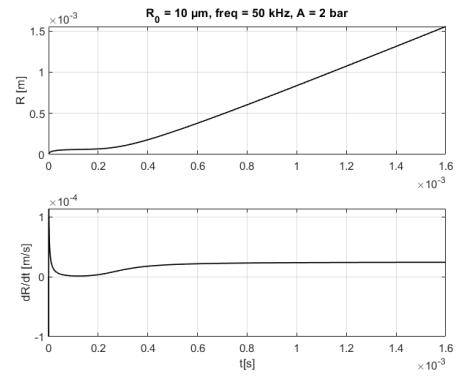


FIGURA 4.34:
 $R_0 = 10 \mu\text{m}$, $f = 50 \text{ kHz}$,
 $A = 2 \text{ bar}$

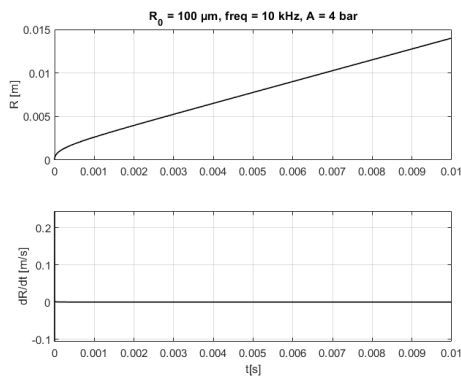


FIGURA 4.35:
 $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 10 \text{ kHz}$, $A = 4 \text{ bar}$

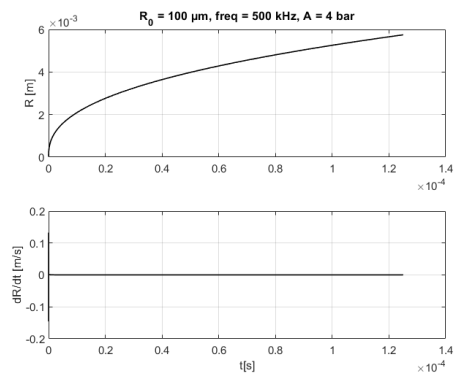


FIGURA 4.36:
 $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $f = 500 \text{ kHz}$, $A = 4 \text{ bar}$

Conclusão

O presente trabalho empreendeu uma investigação sobre a formação de cavitação e os fundamentos teóricos subjacentes, passando pela dedução e análise da renomada equação de Rayleigh-Plesset e culminando na análise do comportamento das bolhas, por meios computacionais.

No Capítulo 1, estabelecemos o campo para o nosso estudo, delineando claramente os objetivos e a importância do estudo. A revisão histórica sobre os trabalhos de Rayleigh e Plesset serviu como base sólida, destacando a relevância das suas contribuições neste campo da hidrodinâmica. No capítulo dedicado aos fundamentos teóricos, apresentámos os diversos tipos de cavitação - desde a formação das bolhas até aos danos materiais e o ruído gerado. A compreensão abrangente dos parâmetros constituintes da ERP e como os seus fatores influenciam o colapso das bolhas estabeleceu um alicerce para a modelagem matemática que se seguiu. O terceiro capítulo, no qual realizamos a dedução detalhada das equações que terminaram na forma completa da equação de Rayleigh-Plesset, proporcionou uma relação entre os fatores físicos e matemáticos que regem o comportamento oscilatório das bolhas. No capítulo 4 foi resolvida a equação de Rayleigh-Plesset num modelo controlado utilizando como *software*, o MATLAB. Explorou-se diversas configurações de excitação externa: função sinusoidal e delta de Dirac. A partir das simulações obtidas ao variar os parâmetros da ERP, conclui-se que para estipuladas condições é possível retardar o colapso da bolha:

1. **Baixa pressão hidrodinâmica:** O colapso pode ser adiado ou não ocorrer, se a pressão hidrodinâmica for muito baixa.
2. **Tamanho da bolha:** As bolhas com um R_0 menor tendem a rebentar com maior facilidade. Assim, experimentar um raio inicial maior pode ajudar a evitar a implosão imediata da bolha.
3. **Viscosidade dinâmica:** Aumentar a viscosidade do líquido desacelera o tempo de colapso.
4. **Tensão superficial:** A redução da tensão superficial pode retardar a implosão.

5. **Frequência e amplitude sinusoidal:** Em geral, frequências mais altas e amplitudes menores podem diminuir a probabilidade de colapso.

Particular destaque foi dado na seção específica, onde analisamos as condições nas quais ocorria o colapso das bolhas e, inversamente, quando o colapso era evitado. A frequência de ressonância, f_0 , está dependente da pressão parcial, tensão superficial, densidade do fluido e fortemente subjugado ao raio inicial. Se a $f < f_0$, a bolha tende a implodir. Para $f \approx f_0$, a amplitude tem um papel crucial, uma vez que para ambientes em que $A > 5$ bar, o colapso total da bolha pode acontecer. Como resultado, uma compreensão mais profunda da dinâmica das bolhas de cavitação emergiu, juntamente com uma apreciação mais aguçada das nuances inerentes à Equação de Rayleigh-Plesset.

Em relação às limitações que foram aparecendo neste trabalho pode dizer-se que nos gráficos em que sucedia implosão, não se assistia propriamente à solução $R = 0$. Existem algumas razões pelas quais o raio da bolha pode não atingir exatamente o valor zero nas simulações, mas chegar perto desse valor:

1. **Precisão Numérica:** A simulação é realizada em um computador onde os cálculos são realizados com uma precisão finita. Portanto, mesmo que o valor exato de $R = 0$ seja satisfeito, a representação numérica pode ser um valor pequeno. Não exatamente zero, devido à precisão limitada dos cálculos, uma vez que o programa não consegue correr com um intervalo de tempo muito pequeno.
2. **Condições iniciais:** As condições iniciais definidas para o problema nesta dissertação limitam o valor mínimo que o raio pode atingir. Ao escolhermos estes valores de R_0 nas condições iniciais podemos ter impedido que o raio atinja exatamente o valor zero, mesmo que a equação de Rayleigh-Plesset permita que ele chegue a esse valor.
3. **Modelo Simplificado:** O modelo utilizado não tem em conta a compressibilidade e temperatura da água, ruído ambiente, velocidade do som, etc... Algumas destas simplificações acabam por influenciar a possibilidade do raio da bolha ser zero. Se a equação de Rayleigh-Plesset não levar em conta os efeitos físicos acima referidos, o gráfico pode não mostrar o raio da bolha a chegar a zero.

Para além destas, a resolução numérica da equação principal foi limitada a apenas a um dos «solvers» existentes no Matlab, embora existam muitos outros.

Ao nível de dificuldades sentidas, a compreensão e adaptação inicial à complexidade da cavitação foi uma das partes mais difíceis. Ao mesmo tempo, a matemática associada às deduções e adimensionalizações, que foram sendo acompanhados, constituiu-se como um dos momentos mais árduos, pelo grau de exigência que revela. Uma grande parte do tempo foi despendida no estudo e investigação da resolução numérica da Equação de Rayleigh-Plesset por diferentes autores. Desta forma, construir o caminho para a solução da ERP com mais ou menos parâmetros, juntamentos com os valores certos adimensionalizados deveu-se muito ao estudo por trás. A analogia entre o programa abstrato em Matlab com a realidade complexa da cavitação é uma barreira, que impossibilita um maior avanço na implementação computacional da metodologia. As capacidades computacionais não permitiam um passo de tempo pequeno o suficiente para comprovar a existência de $R = 0$. Assim, nem sempre a integração numérica era possível.

Sugere-se como trabalho futuro, usando este modelo como base, simular e analisar o comportamento hidrodinâmico da bolha com diferentes forças de pressão externa, tais como retangular, triangular e outras que façam sentido neste contexto e utilizar outros pacotes «ODE» existentes no Matlab, assim como a comparação de resultados entre si. Da mesma forma, pode ser feita estas análises, mas através de outros modelos contruídos em que se tenha em conta a compressibilidade do fluido (no anexo I é possível ver um trabalho no campo da sonoluminescência em que o fluido é compressível). Pode ser útil utilizar modelos como: «Herring's model», «Gilmore's model» e «Keller's model» [Castro 2019]. Introduzir modificações à equação de Rayleigh-Plesset, como a inserção de novos parâmetros como temperatura da água e velocidade do som. Por fim, seria proveitoso fazer a abordagem das oscilações e do colapso da bolha com a radiação sonora que emite (tipo de onda sonora) e a questão da deteção dos navios devida a esta radiação. O estudo deste último problema poderá então ficar para futuras dissertações.

Concluimos, portanto, que este estudo enriqueceu a nossa visão sobre a cavitação e os seus mecanismos subjacentes, estabelecendo um trabalho base para as pesquisas subsequentes. A equação de Rayleigh-Plesset, na sua abordagem multifacetada, permanece como uma ferramenta poderosa na compreensão das complexidades fluidodinâmicas, com aplicações no contexto naval.

Bibliografia

- Apfel, Robert E. (1981). «7. Acoustic Cavitation». Em: *Ultrasonics*. Ed. por Peter D. Edmonds. Vol. 19. Methods in Experimental Physics. Academic Press, pp. 355–411. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0076-695X\(08\)60338-5](https://doi.org/10.1016/S0076-695X(08)60338-5). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0076695X08603385>.
- Ascher, Uri M. e Linda R. Petzold (1998). «Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations». Em: p. 5.
- Ashley, Steven (mai. de 2001). «Warp Drive Underwater». Em: *Scientific American* 284.5, pp. 70–79. DOI: 10.1038/scientificamerican0501-70. URL: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001SciAm.284e..70A>.
- Ben-Ezra, Shmuel (dez. de 2013). «Numerical Integration of the Rayleigh-Plesset Equation». Em: DOI: 10.13140/RG.2.2.29108.60802. URL: <https://www.researchgate.net/publication/340741680>.
- Besant, William Henry (1859). «A treatise on hydrostatics and hydrodynamics». Em: URL: <https://archive.org/details/atreatiseonhydr01besagoog/page/n182/mode/2up>.
- Bird, R. Byron (dez. de 2002). «Transport Phenomena». Em: *Chemical Engineering Department, University of Wisconsin-Madison* 12, pp. 11–14. URL: <https://www.wiley.com/college/bird>.
- Brennen, Christopher Earls (jun. de 1995). «CAVITATION AND BUBBLE DYNAMICS». Em: *Oxford University Press* 6. URL: <https://web.archive.org/web/20121004094948/ht>.
- Buckland, Hannah C, Ian Masters, James AC Orme e Tim Baker (2013). «Cavitation inception and simulation in blade element momentum theory for modelling tidal stream turbines». Em: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy* 227.4, pp. 479–485. DOI: 10.1177/0957650913477093. URL: <https://doi.org/10.1177/0957650913477093>.
- Castro, Alvaro Manuel Bossio (mai. de 2019). «LAGRANGIAN TRACKING OF THE CAVITATION BUBBLE (Master thesis)». Em: *FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING* 5, pp. 99–103. URL: <https://www.researchgate>.

- net/publication/333532642_LAGRANGIAN_TRACKING_OF_THE_CAVITATION_BUBBLE_Master_thesis/citation/download.
- «Cavitation» (2023). Em: *Wikipédia, a enciclopédia livre*. Acessado em: 2023-09-23. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation>.
- Dinis, Derek Coimbra (jun. de 2016). Em: *SILO.TIPS*. URL: <https://silo.tips/download/381entendendo-o-fenomeno-de-supercavitacao>.
- Elezović, Merim (jun. de 2021). «Modelling of the cavitation bubbles dynamics». Em: SUPERVISOR: Ing. Miloš Müller, Ph.D. URL: <https://theses.cz/id/tii3to/>.
- Flynn, Hugh G. (1964). «Physics of acoustic cavitation in liquids». Em: *Journal of Applied Mechanics*, pp. 55–173. URL: [Physics%20of%20acoustic%20cavitation%20in%20liquids](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2018.02.012).
- Fujisawa, Nobuyuki, Yasuaki Fujita, Keita Yanagisawa, Kei Fujisawa e Takayuki Yamagata (2018). «Simultaneous observation of cavitation collapse and shock wave formation in cavitating jet». Em: *Experimental Thermal and Fluid Science* 94, pp. 159–167. ISSN: 0894-1777. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2018.02.012>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0894177718301985>.
- Gevari, Moein Talebian, Taher Abbasasl, Soroush Niazi, Morteza Ghorbani e Ali Koşar (2020). «Direct and indirect thermal applications of hydrodynamic and acoustic cavitation: A review». Em: *Applied Thermal Engineering* 171, p. 115065. ISSN: 1359-4311. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2020.115065>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135943111937766X>.
- Ghahramani, Ebrahim, Mohammad Hossein Arabnejad e Rickard E. Bensow (2019). «A comparative study between numerical methods in simulation of cavitating bubbles». Em: *International Journal of Multiphase Flow* 111, pp. 339–359. ISSN: 0301-9322. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.10.010>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932218303197>.
- Gilbarg, David (1960). «Jets and Cavities». Em: ed. por C. Truesdell, pp. 311–445. DOI: [10.1007/978-3-642-45944-3_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-45944-3_5). URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45944-3_5.
- Godínez, Francisco, Manuela Escobedo e Margarita Navarrete (mar. de 2012). «Homotopy Analysis Method for the Rayleigh Equation Governing the Radial Dynamics of a Multielectron Bubble». Em: *Journal of Applied Mathematics*

20. DOI: 10.1155/2012/591058. URL: <https://www.researchgate.net/publication/233884864>.
- GUREVICH, M.I. (1965). «CHAPTER II - FLOW FROM A VESSEL». Em: ed. por M.I. Gurevich, pp. 57–94. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-3314-7.50007-0>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781483233147500070>.
- Hilgenfeldt, Sascha, Michael P. Brenner, Siegfried Grossmann e Dtlef Lohse (1998). «Analysis of Rayleigh Plesset dynamics for sonoluminescing bubbles». Em: *Journal of fluid mechanics*, pp. 171–204. ISSN: 0022-1120. DOI: 10.1017/S0022112098001207.
- «Hydrodynamic cavitation» (2023). Em: *Wikipédia, a enciclopédia livre*. Acessado em: 2023-09-23, pp. 3–4. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation>.
- «Inertial cavitation» (2023). Em: *Wikipédia, a enciclopédia livre*. Acessado em: 2023-09-23, pp. 2–411. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Cavitation>.
- J I Thornycroft, S W Barnaby (mai. de 1895). «Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers». Em: 122, pp. 51–69. URL: <https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/imotp.1895.19693>.
- Kornfeld, M. e L. Suvorov (jun. de 1944). «On the Destructive Action of Cavitation». Em: *Journal of Applied Physics* 15.6, pp. 495–506. DOI: 10.1063/1.1707461.
- Kreyszig, Erwin Otto (1972). «Advanced Engineering Mathematics». Em: *New York, Wiley*, p. 78. URL: <https://archive.org/details/advancedengineer00krey/page/n13/mode/2up>.
- Kudryashov, Nikolai A. e Dmitry I. Sinelshchikov (abr. de 2015). «Analytical solutions for problems of bubble dynamics». Em: *Physics Letters A* 379.8, pp. 798–802. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.049. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.physleta.2014.12.049>.
- Kudryashov, Nikolay A e Dmitry I Sinelshchikov (set. de 2014). «Analytical solutions of the Rayleigh equation for empty and gas-filled bubble». Em: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47.40. DOI: 10.1088/1751-8113/47/40/405202. URL: <https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F47%2F40%2F405202>.
- Landau, L.D. e E.M. Lifshitz (1987). «CHAPTER II - VISCOUS FLUIDS». Em: ed. por L.D. Landau e E.M. Lifshitz. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-033933-7.50010-6>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080339337500106>.

- M. J. Moran H. N. Shapiro, D. D. Boettner e M. B. Bailey (2011). «Fundamentals of Enginnering Thermodynamics». Em: p. 710.
- Michael J. Moran Howard N. Shapiro, Daisie D. Boettner e Margaret B. Bailey (2011). «Fundamentals of Enginnering Thermodynamics». Em: p. 119.
- Mott, Robert L. e Joseph A. Untener (mai. de 2014). «Applied Fluid Mechanics». Em: *University of Dayton* 5. URL: https://www.academia.edu/44018778/APPLIED_FLUID_MECHANICS_SEVENTH_EDITION.
- Naudé, Charles F. e Albert T. Ellis (dez. de 1961). «On the Mechanism of Cavitation Damage by Nonhemispherical Cavities Collapsing in Contact With a Solid Boundary». Em: *Journal of Basic Engineering* 4, pp. 648–646. DOI: 10.1115/1.3662286. URL: <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140826-135701608>.
- Obreschkow, D., M. Bruderer e M. Farhat (jun. de 2012). «Analytical approximations for the collapse of an empty spherical bubble». Em: *Physical Review E* 85.6. DOI: 10.1103/physreve.85.066303. URL: <https://doi.org/10.1103%2Fphysreve.85.066303>.
- «Ordinary differential equation» (2023). Em: *Wikipédia, a enciclopédia livre*. Acessado em: 2023-09-23. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinary_differential_equation.
- Plesset, M. S. (set. de 1949). «The Dynamics of Cavitation Bubbles». Em: *Journal of Applied Mechanics* 3, pp. 277–282. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4009975>.
- Pritchard, P.J. (2010). «Fox and McDonald’s Introduction to Fluid Mechanics, 8th Edition». Em: URL: <https://books.google.pt/books?id=RdIbAAAAQBAJ>.
- Rayleigh (mai. de 1917). «VIII. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity». Em: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 34.200, pp. 94–98. DOI: 10.1080/14786440808635681. URL: <https://doi.org/10.1080/14786440808635681>.
- Reynolds, Osborne (mar. de 1900). «Papers on mechanical and physical subjects». Em: 2. URL: <https://archive.org/details/papersonmechanic02reynrich/page/578/mode/2up>.
- Shahid Nadeem, Ahmed Zeeshan e F. Alzahrani (2022). «Numerical simulation of unidimensional bubbly flow in linear and non-linear one parameter elastic liquid through a nozzles». Em: *The European Physical Journal Special Topics*, pp. 571–581. URL: <https://doi.org/10.1140/epjs/s11734-022-00441-9>.

- Simmons, George Finlay (1972). «Differential equations, with applications and historical notes». Em: *New York, McGraw-Hill*, p. 3. URL: <https://catalog.loc.gov/vwebv/search?searchCode=LCCN&searchArg=75173716&searchType=1&permalink=y>.
- Terentiev, Alexey, Ivan Kirschner e James Uhlman (jan. de 2011). «The hydrodynamics of cavitating flows». Em.
- «VA-111 Shkval» (2023). Em: *Wikipédia, a enciclopédia livre*. Acessado em: 2023-08-30. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/VA-111_Shkval.
- Vignoli, Lucas L, Ana L F de Barros, Roberto C A Thomé, A L M A Nogueira, Ricardo C Paschoal e Hilário Rodrigues (mar. de 2013). «Modeling the dynamics of single-bubble sonoluminescence». Em: *European Journal of Physics* 34.3, p. 679. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/679. URL: <https://dx.doi.org/10.1088/0143-0807/34/3/679>.
- White, Frank M. (dez. de 2015). «Fluid Mechanics». Em: *McGraw-Hill Education, University of Rhode Island* 12. URL: <https://www.mheducation.co.uk/fluid-mechanics-8th-edition-in-si-units-9789814720175-emea>.
- Wissenschaften zu Berlin, Deutsche Akademie der (1754). «Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin». Em: URL: <https://hdl.handle.net/2027/mdp.39015038659283>.
- Wissenschaften zu Berlin, Königlich Preussische Akademie der (1868). «Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin». Em: 1868. <https://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/48522>, p. 738. URL: <https://www.biodiversitylibrary.org/item/111036>.
- Yasui, Kyuichi (out. de 2017). «Acoustic Cavitation and Bubble Dynamics». Em: 1. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68237-2>.

Apêndice A - Rotina com o pacote ode45

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Programa principal - fazer Run neste script
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; close all; clc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Resolução da equação de Rayleigh-Plesset %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% 20 de agosto de 2023 %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Francisco Inácio Nunes Rodrigues %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% pv          - pressão valor à temperatura no infinito
% pinf0       - pressão líquido infinito no instante inicial t=0
% pinf        - pressão líquido no infinito p=p(t)
% A           - amplitude de pinf
% pg0         - pressão parcial do gás na bolha a R0
% R0          - raio inicial da bolha
% dR0        - velocidade inicial do raio da bolha
% rho         - massa específica do líquido
% miu         - viscosidade dinâmica do líquido
% niu         - viscosidade cinemática líquido
% S           - tensão superficial
% kp          - constante politrópica
% freq        - frequência
% tf          - final do tempo da simulação
% X0          - condições iniciais para o raio e velocidade
% f0          - frequência natural da bolha
% reltol      - tolerância relativa
% abstol      - tolerância absoluta
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
R0=10e-6;    % [m]
freq=20e3;   % [Hz]
A=3;        % [bar]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Principais dados fixos dimensionais
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
pv=2339.215;    % [Pa]
pinf0=101325;  % [Pa]
rho=998.206;   % [kg/m3]
S=72.8e-3;     % [N/m]
k=1.4;         % [-]
mu=0.001;      % [Pa.s]
nu=mu/rho;     % [m2/s]
pgo=pinf0 - pv + 2*S/R0; % [Pa]
tf = 10/freq;  % [s]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Parâmetros adimensionais

% R = R_adim*R0;
% ts=ts_adim/freq;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
escala_R=R0;
escala_p=(R0*freq)^2;
escala_nu=freq*R0^2;
escala_S=(R0^3*freq^2);
escala_t=1/freq;

pv_adim = pv/escala_p;
pgo_adim = pgo/escala_p;
R0_adim = R0/escala_R;
nu_adim = nu/escala_nu;
S_adim = S/escala_S;

pa=A*pinf0;
delta_adim = 1e-5;
tf_adim = tf/escala_t;
ts_adim = 0:delta_adim:tf_adim;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Tipo de força de pressão/excitação externa
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P=(pinf0 + pa*sin(2*pi*ts_adim))/escala_p; %Função sinusoidal

```

```

%P=zeros(1,length(ts_adim)); %Função delta de Dirac
%P(1)=1e9;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%freq=freq*escala_t;
%fo=sqrt((3*k*pgo - 2*S/Ro)/rho)/(2*pi*Ro);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Condições iniciais
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dR0=1e-9; % [m/s]
dR0_adim =dR0/freq;
X0=[R0_adim;dR0_adim];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Tolerância
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
reltol=1e-9;
abstol=1e-9;
options=odeset('RelTol',reltol,'AbsTol',abstol,'Stats','on');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ODE45
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
[T R]=ode45(@erp,ts_adim,X0,options,nu_adim,S_adim,rho,delta_adim,P,pa, ...
    pv_adim,pgo_adim,k,R0_adim);

% Save a MAT file with data
name_file=['Response_Ro_',num2str(R0),'_freq_',num2str(freq),'_A_',num2str(A)];
save(name_file)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gráficos em coordenadas adimensionais
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(1)
    subplot(2,1,1)
    plot(T, R(:,1))
    title('Oscilação do raio da bolha ao longo do tempo [Adimensionalizado]')
    ylabel('R/R0')
    grid on

    subplot(2,1,2)

```

```

plot(T,R(:,2),'r')
ylabel('dR/freq')
xlabel('t/t_r_e_f')
grid on
shg

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gráficos em coordenadas dimensionais
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(2)
subplot(2,1,1)
plot(T/freq, R(:,1)*R0)
title(['R_{0} = 10 ',char(181),'m, freq = 40 kHz, A = 2'])
ylabel('R[m]')
grid on

subplot(2,1,2)
plot(T/freq,R(:,2)*R0,'r')
ylabel('dR[m/s]')
xlabel('t[s]')
grid on
shg

```

Apêndice B - Rotina para a equação de Rayleigh-Plesset

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Chamar a função da equação de Rayleigh-Plesset
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function dRdt=erp(t,R,nu_adim,S_adim,rho,delta_adim,P,pa,pv_adim, ...
    pgo_adim,k,R0_adim)

tc=fix(t/delta_adim)+1;

p=P(tc);

y=R(2);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Sistema de equações de primeira ordem
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=R(1);

dRdt=[y; pv_adim/(x*rho) + (pgo_adim/(x*rho))*(R0_adim/x)^(3*k) - ...
    1.5*(y)^2/x - 2*S_adim/(rho*(x)^2) - 4*nu_adim*y/(x^2) - p/(x*rho)];

end
```


Apêndice C - Rotina para o tratamento e sobreposição das simulações

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Pós-tratamento de dados
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; clc; close all
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
path_name = 1;
XNEW=[]; DATANEW=[];
while path_name ~= 0

    [file_name, path_name] = uigetfile('*.*mat', '?');
    if path_name ==0; break; end % Sair do ciclo while ao fazer cancel
    load(file_name);
    XTEMP=R(:,1);
    DATATEMP=[R0 freq A];
    XNEW=[XNEW XTEMP]; DATANEW=[DATANEW; DATATEMP];

end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Legendar as simulações no gráfico
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
legend_fig=num2cell(DATANEW(:,2));
legend_fig=cell2mat(legend_fig);
legend_fig=num2str(legend_fig);
legend_fig=cellstr(legend_fig);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Criação do gráfico com o nome dos eixos e título
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a0=plot(T,XNEW,'LineWidth',2.0);
grid on
set(gca,'FontSize',12,'FontWeight','bold','LineWidth',2.0,'box','on') ;
a1=xlabel(['t/t_r_e_f [' ,char(181), 's']']);
set(a1,'FontSize',10,'FontWeight','bold')
a2=ylabel(['R/R_0 [' ,char(181), 'm']']);
set(a2,'FontSize',10,'FontWeight','bold')
```

```
a3=title(['Resposta do raio da bolha para Ro = 10',char(181),'m para', newline...
        , 'uma frequência de 500kHz \it ']);
set(a3,'FontSize',12,'FontWeight','bold')
legend(legend_fig);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Gravar a figura: Se sim pressione 1, se não pressione 0
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
iprt=input('Press 1 to save the plot, 0 otherwise: ');
if iprt==1
    %Tamanho papel
    set(gcf,'PaperUnits','centimeters');
    set(gcf,'PaperType','a4');
    set(gcf,'PaperPosition',[0.634518 1.5 19.715 26.6774]);

    fig1 = 'figura_em_color_ps'; print( gcf, '-dpsc', fig1 )
    fig2 = 'figura_em_dmeta'; print( gcf, '-dmeta', fig2)
    iprt=0;
end
```

Anexo I - Sonoluminescência

A sonoluminescência (SL) é um fenômeno físico que ocorre quando uma bolha de gás em um líquido é submetida a uma onda sonora de alta frequência. Durante o processo SL, a bolha é comprimida e descomprimida repetidamente por ondas sonoras, fazendo com que a temperatura e a pressão dentro da bolha subam.

A temperatura e a pressão podem atingir níveis tão elevados em algumas condições que ocorre a ionização dos átomos do gás, resultando na emissão de luz visível conhecida como sonoluminescência. A luz emitida pode ser bastante brilhante e colorida, dependendo da composição do gás e das condições da bolha.

I.1 Alguns trabalhos recentes

Em 2013, Lucas L Vignoli, juntamente com outros autores publicou um artigo científico sobre o fenômeno no qual a energia acústica é transformada (parcialmente) em luz. Nesse trabalho é abordado um modelo simples que descreve o raio da bolha sonoluminescente como variável de interesse através da Equação de Rayleigh-Plesset. Teve se em conta parâmetros como a compressibilidade do líquido, tensão superficial, viscosidade e o tipo de gás. Foram usados métodos numéricos no Matlab para retirar conclusões sobre o comportamento oscilatório da bolha através produção de gráficos relativos à evolução raio e da velocidade do raio da bolha em função do tempo.

Foi incrementado um parâmetro útil, o fator de amortecimento, que é definido como a razão entre as amplitudes da primeira e da segunda oscilação da bolha. Este parâmetro é relevante, pois compara dois valores para o raio: um antes e outro depois da emissão da luz.

Vignoli começa por definir a equação de Rayleigh-Plesset sem ter em conta a compressibilidade do líquido:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_{gas} - P_0 - P(t) - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2S}{R} \quad (I.1)$$

$p_{gas}(t)$ é a pressão variável do gás dentro da bolha, P_0 é a pressão do líquido em qualquer ponto da bolha (em geral, $P_0 = 1$ atm), $P(t)$ é a pressão acústica no local onde a bolha é colocada. $P(t)$ é assumido como sinusoidal e inicia um ciclo de expansão em $t = 0$, ou seja

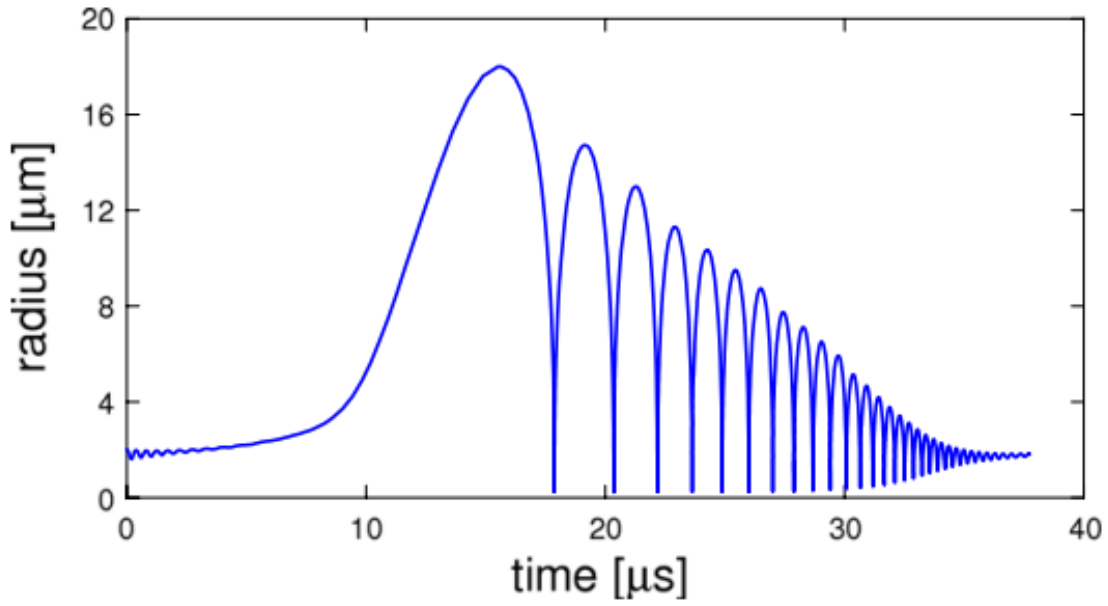


FIGURA I.1: Raio em função do tempo. O líquido é definido como incompressível e a dinâmica da bolha é descrita pela equação de Rayleigh–Plesset I.1

$$P(t) = -P_a \sin(\omega t) \quad (\text{I.2})$$

Em que P_a é a amplitude da pressão utilizada e ω a frequência angular do ultrassom em ressonância. Para descrever a pressão do gás dentro da bolha foi usada a equação de Van Der Waals:

$$p_{gas}(t) = \left(P_0 + \frac{2S}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - h^3}{R^3(t) - h^3} \right)^\gamma \quad (\text{I.3})$$

Onde R_0 é o raio inicial da bolha, h é o raio característico de Van Der Waals do gás dentro da bolha e γ é a razão entre o calor específico do gás a uma pressão constante e a um volume constante (índice adiabático). Assumiu-se na equação I.3 que o gás passa por um ciclo tão rápido de expansão e de colapso, que é adiabático. No entanto, uma análise mais precisa [2] permite concluir que a expansão é quase isotérmica ($\gamma \approx 1$) e apenas a parte final do colapso é realmente adiabática. Vignoli simplificou o modelo e assim, considerou o ciclo todo como um processo adiabático.

A equação I.1 é uma equação diferencial de segunda ordem em que para o raio $R(t)$, não existe nenhuma solução analítica. Esta equação foi resolvida numericamente através de uma rotina ODE45 feita em Matlab.

A figura I.1 apresenta a solução da equação I.1 para um dado conjunto

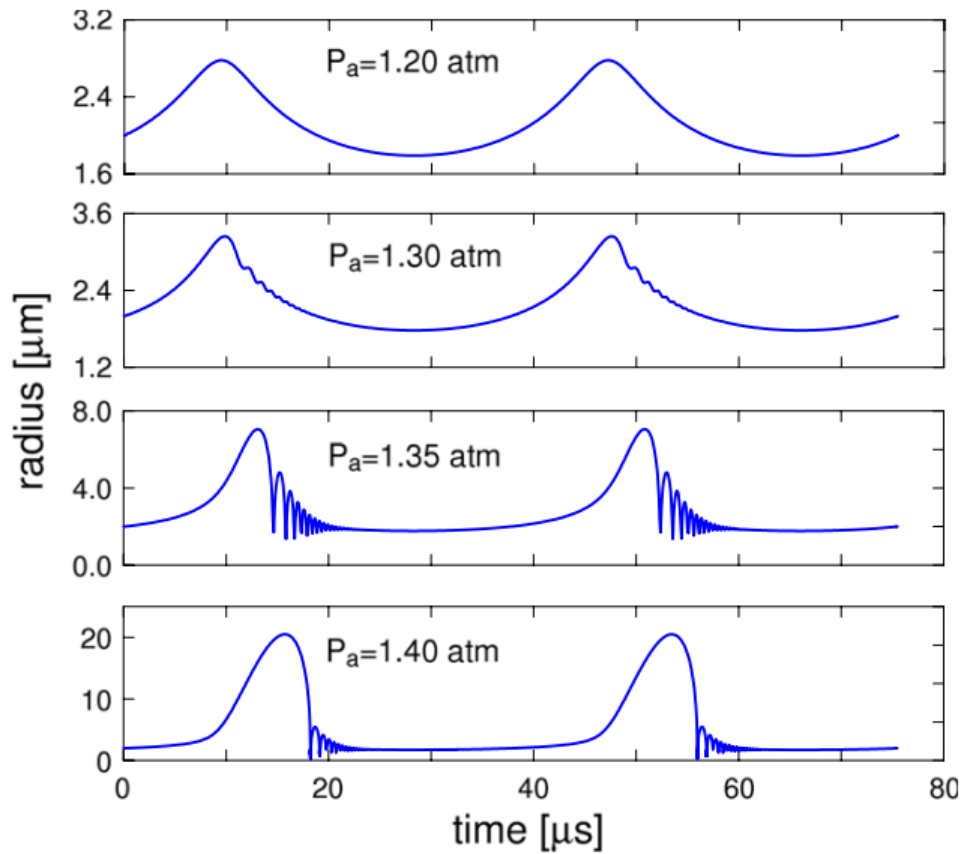


FIGURA I.2: Raio em função do tempo. O líquido é definido como compressível e a dinâmica da bolha é descrita pela equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4

de parâmetros e forçando a pressão $P_a = 1,42$ atm. Os parâmetros usados são mostrados na tabela I.1. Uma quantidade considerável de energia é perdida na primeira contração (colapso), devido à radiação sonora pela bolha.

Ao considerar a compressibilidade do líquido, Vignoli adicionou um novo termo na equação I.1, levando assim, à equação de Rayleigh–Plesset modificada:

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = p_{gas}(t) - P_0 - P(t) - 4\mu\frac{\dot{R}}{R} - \frac{2S}{R} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} p_{gas} \quad (I.4)$$

Onde c é a velocidade do som no líquido (água). Na equação I.4 a derivada temporal da pressão do gás é dada por

$$\frac{d}{dt} p_{gas} = -3\gamma p_{gas} \frac{R^2 \dot{R}}{R^3 - h^3} \quad (I.5)$$

A Figura I.2 mostra as soluções para a equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4 para quatro diferentes pressões com os parâmetros mostrados na tabela

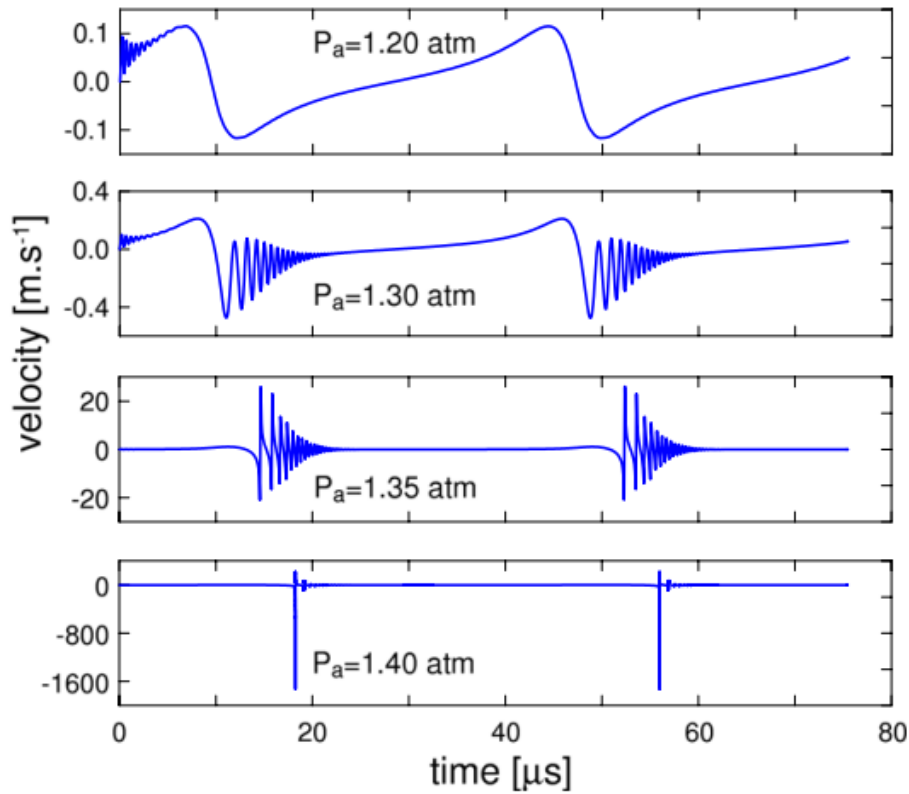


FIGURA I.3: Velocidade da bolha em função do tempo. O líquido é definido como compressível e a dinâmica da bolha é descrita pela Equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4

I.1. Vignoli compreendeu que o raio da bolha oscila quase sinusoidalmente em torno do valor de equilíbrio R_0 . No entanto, para uma força de pressão $P_a = 1,35$ atm, observa-se um comportamento não linear na dinâmica das bolhas.

Conforme é mostrado na figura I.3, o movimento da bolha é subsônico, exceto na pressão $P_a = 1,4$ atm.

Na figura I.4 é representado a solução da equação I.4 para o raio da bolha para a pressão $P_a = 1,42$ atm. O raio inicial é $R_0 = 2.0 \mu\text{m}$. Até aproximadamente aos 9.4 s não corresponde ao instante em que o raio da bolha atinge seu máximo, devido à inércia da sua expansão. O raio máximo é normalmente $R \approx 10R_0$. Comparando as figuras I.1 e I.4, quando se considera a compressibilidade do líquido os resultados experimentais são melhor reproduzidos pelo modelo presente no livro do Brennen.

Neste artigo obteve-se soluções para as equações do modelo nos casos em que o líquido era compressível e incompressível. Comparando as figuras I.1 e I.4 com os resultados experimentais, conclui-se que a equação de Rayleigh–Plesset modificada I.4 é válida para um líquido compressível.

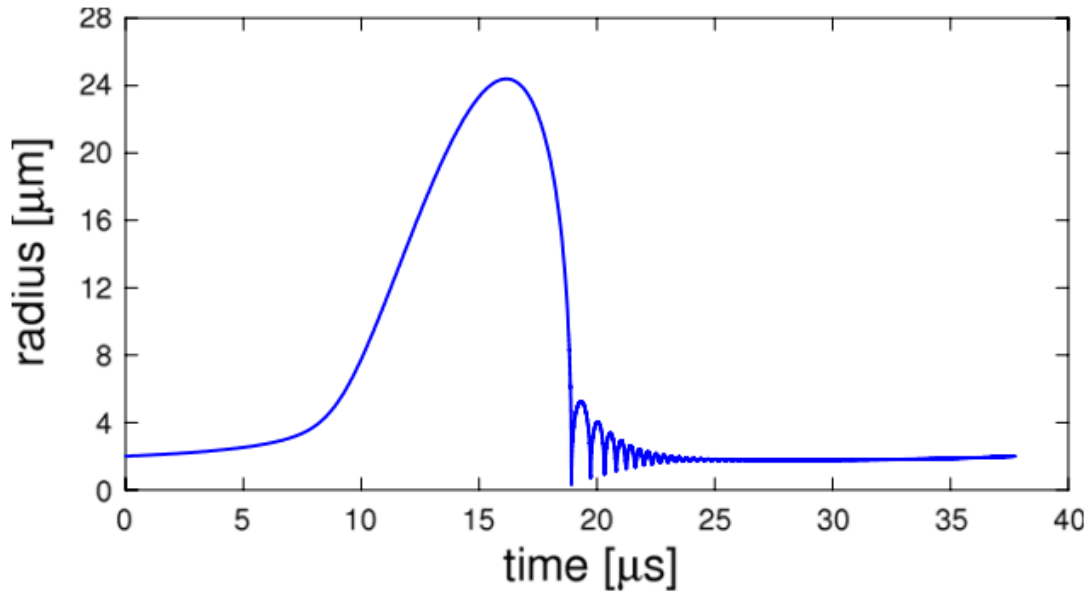


FIGURA I.4: Raio em função do tempo para uma pressão $P_a = 1,42$ atm

TABELA I.1: Parâmetros usados na simulação numérica.

Grandezas	Símbolos	Valores
Tensão Superficial	S	$72.8 \times 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$
Densidade	ρ	1000 kg m^{-3}
Índice adiabático	γ	$5/3$
Velocidade do som	c	1500 m s^{-1}
Viscosidade	μ	$1.002 \times 10^{-3} \text{ Pa s}$
Pressão ambiente	P_0	1.00 atm
Raio inicial	R_0	$2.0 \times 10^{-6} \text{ m}$
Hard core (argon)	h	$R_0/8.86$
Frequência de ultrassom	f	26.5 kHz

Introduziu-se um fator de amortecimento para comparar os efeitos de dissipação de energia da bolha após o colapso (primeira compressão). Observou-se que a tensão superficial não pode ser desprezada (ver a tabela 2 do artigo em questão).

É de salientar que efeitos químicos não foram considerados neste trabalho. Os fatores químicos afetam a espessura da parede da bolha, contribuindo também para a formação de uma onda de choque. O processo que o gás de bolha sofre durante todo o ciclo não é adiabático porque durante a expansão é isotérmico, o que afeta o valor do expoente γ .